Konjugation stochastischer und zufälliger stationärer Differentialgleichungen und eine Version des lokalen Satzes von Hartman-Grobman für stochastische Differentialgleichungen

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herr Dipl.-Math. Christian Lederer
geborem am 23.02.1964 in München

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Jürgen Mlynek

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Prof. Dr. Elmar Kulke

Gutachter:

1. Prof. Dr. Peter Imkeller
2. Prof. Dr. Ludwig Arnold
3. Prof. Dr. Michael Scheutzow

eingereicht am: 7. Juli 2001
Tag der mündlichen Prüfung: 10. Oktober 2001

Abstract

For continuous time random dynamical systems there exist two important classes of generators: on the one hand stationary random differential equations, i.e. ordinary differential equations driven by a stationary random vector field, and on the other hand stochastic Stratonovich differential equations with white noise. While the first class fits well into the framework of the theory of random dynamical systems, the second class resisted for a long time the dynamical investigation due to the "conflict between ergodic theory and stochastic analysis".

The main result of this thesis is that both classes of random dynamical systems are not essentially distinct, more precisely: For each stochastic Stratonovich differential equation with white noise (under usual regularity assumptions) there exists a stationary random differential equation such that the corresponding random dynamical systems are conjugate.

As an application a version of the local Hartman/Grobman theorem for stochastic differential equations is proved.

Keywords:
cohomology, random dynamical system, linearization, stochastic differential equation

Zusammenfassung

Für zufällige dynamische Systeme mit stetiger Zeit existieren zwei wichtige Klassen von Generatoren: Zum einen stationäre zufällige Differentialgleichungen, i.e. gewöhnliche Differentialgleichungen, die von einem stationärer zufälligen Vektorfeld getrieben werden, und zum anderen stochastische Stratonovichdifferentialgleichungen mit weißem Rauschen. Während die erste Klasse sich gut in den ergodentheoretischen Rahmen der Theorie der zufälligen dynamischen Systeme einfügt, widersetzte sich die zweite Klasse lange Zeit der dynamischen Untersuchung aufgrund des " Konflikts zwischen Ergodentheorie und stochastischer Analysis".

In dieser Arbeit wird gezeigt, daß beide Klassen von zufälligen dynamischen Systemen nicht wesentlich verschieden sind, genauer: Zu jeder stochastischen Stratonovichdifferentialgleichung mit weißem Rauschen (unter den üblichen Regularitätsforderungen an die Vektorfelder, die die Existenz von Flüssen garantieren) existiert eine stationäre zufällige Differentialgleichung derart, daß die erzeugten zufälligen dynamischen Systeme konjugiert sind.

Als Anwendung wird eine Version des lokalen Linearisierungssatzes von Hartman/Grobman für stochastische Stratonovichdifferentialgleichungen bewiesen.

Schlagwörter:
Kohomologie, zufälliges dynamisches System, Linearisierung, stochastische Differentialgleichung

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Konjugation stochastischer und zufälliger Differentialgleichungen **5**

2.1 Zufällige dynamische Systeme 5

2.2 Der Konjugationssatz – Heuristik 10

2.3 Technische Hilfsmittel 12

2.3.1 Semimartingale mit räumlichen Parametern und Flüsse 12

2.3.2 Perfektionierung fast stationärer Prozesse 17

2.4 Der Konjugationssatz 19

3 Der lokale Satz von Hartman-Grobman für stochastische Differentialgleichungen **22**

3.1 Übersicht 22

3.2 Ergänzungen zum multiplikativen Ergodensatz 25

3.3 Linearisierung stationärer zufälliger Differentialgleichungen 27

3.4 Lokale Linearisierung stochastischer Differentialgleichungen 33

Korf ist fassungslos und er entflieht
wenn er Bücher wie den "Brockhaus" sieht.

Er versteht es nicht wie man
zentnerschwere Bücher leiden kann.

Denn er haßt, wie man daselbst den Geist
gleichsam in ein Grab von Stoff verweist.

Geist ist leicht und sollte darum auch
leicht gewandet gehn nach Geisterbrauch.

Doch der Europäer ruht erst dann
wenn er ihn in Bretter binden kann.

Christian Morgenstern

Kapitel 1

Einleitung

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts begann mit den Arbeiten von Poincaré und Lyapunov die qualitative Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der entscheidende Schritt bestand darin, daß man sich nicht mehr auf das Studium einzelner Lösungen beschränkte sondern die Gesamtheit aller Lösungskurven – also (in heutiger Sprache) das von der Differentialgleichung erzeugte *dynamische System* – zum Gegenstand der Untersuchung machte.

Schon bald entstand der Wunsch, *reale* (zufälligen Einflüssen unterworfene) physikalische Vorgänge dadurch besser zu modellieren, daß man gewisse Störterme in die Gleichungen einbaut. Zunächst mußte man sich notgedrungen auf deterministische Störungen wie kleine Oszillationen (Floquettheorie) und fastperiodische Störungen beschränken. Später untersuchte man das Stabilitätsverhalten von Differentialgleichungen, deren rechte Seite von einem stationären stochastischen Prozeß abhängt oder (für diskrete Zeit) iterierte zufällige Abbildungen. So bildete sich die Theorie der *zufälligen dynamischen Systeme* heraus, die 1968 mit dem multiplikativen Ergodensatz ([Ose68]) einen vorläufigen Höhepunkt erreichte und derzeit durch die Pionierarbeit der Bremer Gruppe um Arnold ähnlich reichhaltig ist wie die deterministische Theorie.

Viele reale dynamische Systeme werden jedoch erst durch stochastische Differentialgleichungen angemessen beschrieben, deren Einbindung in die Theorie der zufälligen dynamischen Systeme erst in jüngster Zeit möglich wurde:

- Anfang 1980 bemerkten Elworthy, Kunita und andere, daß es möglich ist, einer stochastischen Differentialgleichung ein *stochastischen Fluß* zuzuordnen.
- Mitte der 90-er Jahre bewiesen Arnold und Scheutzow einen "Perfektionierungssatz", der besagt, daß der von einer stochastischen Differentialgleichung erzeugte Fluß eine Version besitzt, die ein zufälliges dynamisches System ist.

Die Verbindung von stochastischer Analysis und Ergodentheorie ist sicherlich eine Stärke der Theorie der zufälligen dynamischen Systeme. Gleichzeitig führt diese Verbindung jedoch auch zu einem "Konflikt zweier Kulturen" ([Arn98a]):

- Die stochastische Analysis ist gekennzeichnet durch die spezielle Rolle der Zeit-

richtung: Zu jeder stochastischen Differentialgleichung gehört eine Filtration, die den Informationszuwachs durch die Evolution des Systems beschreibt. "Antizipierende" Probleme (etwa stochastische Differentialgleichungen mit zufälligen Vektorfeldern die von der Zukunft abhängen) widerstreben der Behandlung.

- In der Ergodentheorie ist die Zeit nichts als ein algebraischer Parameter; die Zeitrichtung spielt keine Rolle. Gleichzeitig entstehen wichtige Objekte der Ergodentheorie (etwa die Oseledetsräume, die den Eigenräumen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen entsprechen) durch Zeitmittel und -limiten und sind damit antizipierend im Sinne der stochastischen Analysis.

Zunächst hielt man sogenannte *antizipierende Kalküle* (d.h. Varianten des Itokalküls, die es z.B. erlauben stochastische Differentialgleichungen für zukunftsabhängige Anfangsbedingungen zu lösen, vgl. etwa [Arn96]) für das geeignete Werkzeug, diesen Konflikt zu meistern. Jedoch erwies sich dieses Werkzeug für konkrete Probleme wie etwa die Existenz von Attraktoren als zu schwach. Vor kurzer Zeit entwickelten Imkeller und Schmallfuss [IS01]) eine neue Methode zur Untersuchung des von einer stochastischen Differentialgleichung erzeugten dynamischen Systems: Sie bemerkten, daß der Fluß jeder stochastischen Differentialgleichung mit eindimensionalem weißen Rauschen *konjugiert* ist zum Fluß einer zufälligen stationären Differentialgleichung. Über deren Dynamik lassen sich weit leichter Aussagen gewinnen, da sie – im Unterschied zur ursprünglich betrachteten stochastischen Differentialgleichung – pfadweise definiert ist und ihre stationäre Natur die Anwendung ergodentheoretischer Werkzeuge ermöglicht. Da Konjugationen von zufälligen dynamischen Systemen die asymptotischen Invarianten (zufällige Attraktoren, invariante Mannigfaltigkeiten etc.) erhalten, konnten mit dieser Methode Attraktoren für eine gewisse Klasse von stochastischen Differentialgleichungen konstruiert werden. In [IL01a] wurde diese Methode verallgemeinert für eine größere Klasse von stochastischen Differentialgleichungen. Diese Methode stellt Bedingungen an die von den Diffusionsvektorfeldern erzeugte Liealgebra, die zu Folge haben, daß sich der Fluß der betrachteten stochastischen Differentialgleichung zerlegen läßt in eine Komposition von deterministischen Flüssen, die mit stochastischen Prozessen parametrisiert sind. Die einschränkende und etwas unästhetische Voraussetzung an die Liealgebra ist für viele praktischen Beispiele (etwa aus den Ingenieurwissenschaften) nicht sonderlich störend, da viele interessanten Beispiele dadurch entstehen, daß man zu einer determistische Differentialgleichung noch ein paar einfache Rauschterme hinzufügt, so daß die zugehörige Liealgebra meist sogar nilpotent ist. Für die allgemeine Theorie ist dies jedoch zu einschränkend: Ist man etwa an lokalen Aussagen interessiert, so wird man häufig die Vektorfelder "abschneiden" müssen, wodurch die Struktur der Liealgebra zerstört wird.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit besteht in dem Satz, daß der Fluß jeder stochastischen Differentialgleichung konjugiert ist zum Fluß einer stationären zufälligen Differentialgleichung – und zwar ohne irgendwelche algebraischen Voraussetzungen.

Als Anwendung wird eine Version des lokalen Linearisierungssatzes von Hartman-Grobman für stochastische Differentialgleichungen bewiesen. Ein derartiger Satz wird vermutlich für die (derzeit noch noch ganz rudimentäre) stochastische Bifurkationstheorie von Bedeutung sein: Untersucht man das qualitative Verhalten eines zufälligen dynamischen

Systems in der Nähe eines Fixpunktes in Abhängigkeit von einem Parameter und weiß man, daß das System sich qualitativ ähnlich verhält wie seine Linearisierung im Fixpunkt, so wird es möglicherweise genügen, die Vorzeichen der Lyapunovexponenten der Linearisierung zu kennen. Nun gibt es zumindest bei zweidimensionalen linearen stochastischen Differentialgleichungen inzwischen eine große Zahl von Fällen, wo man die Lyapunovexponenten entweder explizit kennt oder zumindest Aussagen über ihre Vorzeichen treffen kann (vgl. [IL99] oder [IL01b]), so daß man der stochastischen Bifurkationstheorie günstige Prognosen stellen kann.

Ich möchte an dieser Stelle denjenigen danken, die das Zustandekommen dieser Arbeit ermöglicht haben. Peter Imkeller danke ich für seine Geduld und moralische Unterstützung während meiner Durststrecken und für die stete Bereitschaft, auch abwegige Ideen zu diskutieren. Ludwig Arnold, der mit den Anstoß zu dieser Arbeit gab, danke ich für die mehrmalige Gelegenheit an den anregenden Bremer Workshops teilzunehmen und insbesondere auch dafür, daß er mir immer wieder die neuesten Vorversionen seiner Monographie zusandte, die die begriffliche Basis dieser Arbeit darstellt.

Kapitel 2

Konjugation stochastischer und zufälliger Differentialgleichungen

2.1 Zufällige dynamische Systeme

Ein zufälliges dynamischer System (RDS) Φ mit diskreter Zeit $\mathbf{T} = \mathbb{N}_0$ kann man sich vorstellen als ein dynamisches System, bei dem nicht nur eine feste Abbildung iteriert wird, sondern zu jedem Zeitpunkt n die nächste Transformation f_n ausgwürfelt wird, also

$$\Phi_n = f_n \circ \dots f_1,$$

wobei man annimmt, daß die Folge (f_n) stationär ist in dem Sinne, daß

$$f_n(\omega, \cdot) \;=\; f_1(T^{n-1}\omega, \cdot), \quad n \in \mathbb{N}_0,\ \omega \in \Omega.$$

Hier ist T eine maßtreue (meist sogar ergodische) Transformation des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraums. Charakteristisch für zufällige dynamische Systeme ist die *Kozykeleigenschaft*

$$\Phi_{n+m}(\omega, \cdot) \;=\; \Phi_m(T^m\omega, \cdot) \circ \Phi^n(\omega), \quad n, m \in \mathbb{N}_0,\ \omega \in \Omega,$$

die dann die allgemeine Definition nahelegt:

Definition 2.1. *Sei* $\mathbf{T} \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}\}$ *und sei* $(X, \mathcal{B})$ *ein meßbarer Raum (wir beschränken uns folgenden auf den Fall* $\mathbf{T} = \mathbb{R}$ *und* $X = \mathbb{R}^d$*). Sei* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t\in\mathbf{T}})$ *ein metrisches dynamisches System. Ein* zufälliges dynamisches System (RDS) *über* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t\in\mathbf{T}})$ *mit Zustandsraum* $(X, \mathcal{B})$ *ist eine Abbildung*

$$\Phi : \mathbf{T} \times \Omega \times X \to X, \qquad (t, \omega, x) \mapsto \Phi_t(\omega, x),$$

mit den Eigenschaften

(i) Φ *ist* $\mathcal{B}(\mathbf{T}) \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}$*-meßbar.*

(ii) Φ *erfüllt die* Kozykeleigenschaft

$$\Phi_{t+s}(\omega,\cdot) \;=\; \Phi_t(\theta_s\omega,\cdot)\circ\Phi_s(\omega,\cdot) \qquad \textit{für alle } t\in\mathbf{T},\ \omega\in\Omega.$$

Im Gegensatz zur deterministischen dynamischen Systemen gibt es bei zufälligen dynamischen Systemen mit stetiger Zeit zwei wichtige Arten von Generatoren:

- *Stationäre zufällige Differentialgleichungen* (stationäre RDE) sind Differentialgleichungen mit zufälliger rechter Seite, die eine spezielle Struktur aufweist. Um für den Lösungsfluß Φ die Kozykeleigenschaft zu erhalten, muß man annehmen, daß die betrachtete RDE von der Form

  $$\dot{X}_t(\omega) \;=\; g(\theta_t\omega, X_t(\omega))$$

  ist. Die Kozykeleigenschaft folgt dann automatisch, falls eindeutige und globale Lösbarkeit vorliegt.

- *Stochastische Differentialgleichungen* (SDE): Hier ist der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum in der Regel der kanonische Wienerraum mit zweiseitiger Zeit. ($\Omega=\{f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}^m): f(0)=0\}$, $W_t(\omega)=\omega(t)$). Das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ ist so beschaffen, daß $(W_t)_{t\geq 0}$ und $(W_{-t})_{t\geq 0}$ unabhängige Brownsche Bewegungen sind. Die Shiftoperatoren θ_t sind gegeben durch $\theta_t(\omega)=\omega(\cdot+t)-\omega(t)$.) Bei zweiseitiger Zeit ist es außerdem günstiger, von vornherein mit Stratonovichdifferentialgleichungen zu arbeiten (wegen der zeitlich symmetrischen Form des Stratonovichintegrals), also mit stochastischen Differentialgleichungen der Form

  $$dX_t \;=\; \sum_{j=0}^{m} f_j(X_t)\circ dW_t^j, \quad t\in\mathbb{R},$$

  wobei hier und im folgenden die Konvention $W_t^0=t$ verwendet wird.

  Im Gegensatz zu stationären RDE ist jedoch hier die Kozykeleigenschaft des Lösungsflusses (auch schon die Existenz eine Flusses selbst) alles andere als trivial, da die Lösungen nicht ω-weise definiert sind. Vgl. hierzu Satz 2.4.

Es soll nun kurz die in der Einleitung erwähnte Methdoe aus [IS01] skizziert werden.

Definition 2.2. *Zwei zufällige dynamische Systeme* Φ *und* Ψ *auf* $\mathbb{R}^d$ *heißen* konjugiert*, wenn ein zufälliger Homöomorphismus* $H:\Omega\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ *existiert, so daß für alle* (ω,t) *gilt:*

$$\Psi_t(\omega) \;=\; H(\theta_t\omega,\cdot)\circ\Phi_t(\omega)\circ H(\omega,\cdot)^{-1}.$$

In diesem Fall heißt H *eine* Konjugation *zwischen* Φ *und* Ψ*.*

Die Idee von Imkeller/Schmallfuss besteht in einer (im nachhinein simplen, aber schwer zu entdeckenden) Modifikation des Doss-Sussman-Ansatzes, die hier kurz skizziert werden soll.

Wir betrachten die SDE

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t) \circ dW_t, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

(mit hinreichend regulären Vektorfeldern b, σ). Es bezeichne ϕ den Fluß zu gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = b(x)$ und Φ den Fluß zu (2.1).

Die Methode von Doss-Sussman besteht in dem Lösungsansatz

$$X_t \ = \phi_{W_t}(Y_t),$$

wobei Y ein (noch zu findender) Prozeß mit absolutstetigen Pfaden ist, so daß

$$dX_t \ = \ \phi_t'(Y_t)dY_t + \dot{\phi}_s(Y_t)|_{s=W_t} \circ dW_t \ = \ \phi_t'(Y_t)dY_t + \sigma(X_t) \circ dW_t$$

(ϕ' bezeichnet die Ableitung von ϕ nach der Ortsvariablen und $\dot{\phi}$ die Ableitung nach der Zeitvariablen). Substituiert man diese Gleichung in (2.1) so sieht man nach einer kurzen Umformung, daß X genau dann eine Lösung von (2.1) ist wenn Y der zufälligen Differentialgleichung

$$dY_t \ = \ \phi_{W_t}'(Y_t)^{-1} b(\phi_{W_t}(Y_t))dt \tag{2.2}$$

genügt. Bezeichnet Ψ den Lösungsfluß zu (2.2) dies, daß

$$\Phi_t(X_0) \ = \ X_t \ = \ \phi_{W_t}(Y_t) \ = \ \phi_t(\Psi_t)(Y_0), \tag{2.3}$$

Da diese Gleichung für beliebige Anfangswerte $X_0 = \phi_{W_0}(Y_0) = Y_0$ gilt hat man also

$$\Phi_t = \phi_{W_t} \circ \Psi_t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dieser Ansatz ist jedoch für die Theorie der zufälligen dynamischen Systeme aus zwei Gründen nutzlos:

1. Die zufällige Differentialgleichung (2.2) ist nicht stationär (d.h. nicht von der Form $dY_t(\omega) = g(\theta_t\omega, Y_t(\omega)dt)$. Der Lösungsfluß Ψ ist i.A. kein dynamisches System (kein Kozykel).
2. Es ist nicht möglich von den dynamischen Eigenschaften des Flusses Ψ auf die von Φ zu schließen, etwa in dem Sinne, daß mit Ψ auch Φ einen Attraktor besitzt (falls man überhaupt in einem vernünftigen Sinne Attraktoren von Ψ definieren könnte).

Folgende Modifikation des Doss-Sussman-Ansatzes löst beide oben genannten Probleme: Sei $Z_t = \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^s dW_s$, $t \in \mathbb{R}$. Dann ist Z ein stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß ($Z_t = Z_0 \circ \theta_t$) und genügt der SDE $dZ_t = -Z_t dt + dW_t$. Der Lösungsansatz lautet nun:

$$X_t \ = \ \phi_{Z_t}(Y_t).$$

Analog wie beim gewöhnlichen Doss-Sussman-Ansatz sieht man, daß X genau dann ein Lösung der SDE (2.1) ist, wenn Y der zufälligen Differentialgleichung

$$dY_t \ = \ \phi_{Z_t}'(Y_t)^{-1}(b(\phi_{Z_t}(Y_t) + Z_t\sigma(\phi_{Z_t}(Y_t)))dt \tag{2.4}$$

genügt. Im Unterschied zu (2.2) handelt sich jedoch um eine *stationäre* RDE, so daß der zugehörige Fluß Ψ ein zufälliges dynamisches System ist.

Setzt man wieder beliebige Anfangswerte ein, so erhält man für die Flüsse Φ und Ψ die Beziehung

$$\Phi_t \;=\; \phi_{Z_t} \circ \Psi_t \circ \phi_{Z_0}^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Im Gegensatz zu (2.3) läßt sich diese Gleichung anders interpretieren. Betrachtet man nämlich den zufälligen Diffeomorphismus $H = \phi_{Z_0}(\,\cdot\,)$, so läßt sich (2.5) wegen $Z_t = Z_0 \circ \theta_t$ schreiben in der Form

$$\Phi_t(\omega, \cdot) \;=\; H(\theta_t\omega, \cdot) \circ \Psi_t(\omega, \cdot) \circ H(\omega, \cdot)^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega,$$

d.h. die Flüsse Φ und Ψ sind konjugiert.

Imkeller/Schmalfuss betrachteten nun die SDE (2.1) als Störung der deterministischen SDE $\dot{x} = b(x)$, von der sie die Existenz einer Lyapunovfunktion V forderten. In [IS01] wird gezeigt, daß V unter gewissen Voraussetzungen auch eine Lyapunovfunktion der stationären RDE (2.4) ist, woraus die Existenz eines zufälligen Attraktors für das konjugierte ZDS Ψ folgt. Da Konjugationen bekanntlich zufällige Attraktoren erhalten[1], folgt hieraus die Existenz eines zufälligen Attraktors für den Fluß Φ der Ausgangsgleichung.

Die erfolgreiche Verwendung von Konjugationen weckt den Wunsch, dieses Instrument auch für allgemeinere SDE zur Verfügung zu haben. Leider beruht die Methode von Imkeller/Schmalfuss jedoch darauf, daß man bei eindimensionalem Rauschen eine explizite Darstellung der Lösung einer SDE hat, bei der die zugrundeliegende Brownsche Bewegung als Parameter eingeht. Daher ist es nicht offensichtlich, ob eine Verallgemeinerung für SDE mit mehrdimensionalem Rauschen möglich ist.

Falls aber die von den Diffusionsvektorfeldern der betrachteten SDE erzeugte Liealgebra nilpotent ist, ist jedoch eine Verallgemeinerung des stationären Doss-Sussman-Ansatzes möglich. In diesem Fall ist der Fluß der betrachteten SDE darstellbar in der Form

$$\Phi_t(x) \;=\; F(x; J_t^\alpha : |\alpha| \le k),$$

wobei die J^α iterierte Stratonovichintegrale des zugrundeliegenden Wienerprozesses sind (vgl. etwa [KL81] oder [Kun81]). Ähnlich wie man bei der Methode von Imkeller und Schmalfuss den Wienerprozeß W durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß Z ersetzte, hat man hier die iterierten Stratonovichintegrale

$$J_t^\alpha \;=\; \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} \circ dB_{t_m}^{i_m} \dots \circ dB_{t_1}^{i_1} \quad (\alpha = (i_1, \dots, i_m))$$

zu ersetzen durch die stationären iterierten Integrale

$$\tilde{J}_t^\alpha \;=\; \mathrm{e}^{-t} \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-t_1} \int_{-\infty}^{t_1} \dots \mathrm{e}^{-t_{m-1}} \int_{-\infty}^{t_{m-1}} \mathrm{e}^{t_k} \circ dB_{t_m} \dots \mathrm{e}^{t_1} \circ dB_{t_1} \quad (\alpha = (i_1, \dots, i_m))$$

[1] Es gibt noch keinen standardisierten Attraktorbegriff für zufällige dynamische Systeme, sondern einen Zoo von verwandten Definitionen. Die Aussage ist jedenfalls richtig, wenn man Pullbackattraktoren für das Universum der zufälligen kompakten Mengen betrachtet.

und sieht dann nach etwas aufwendigerer Rechnung daß durch

$$H \;=\; F(\,\cdot\,; J_0^\alpha : |\alpha| \leq k)$$

eine Konjugation zwischen der gegebenen SDE und einer stationären RDE definiert wird. Ein ähnlicher Ansatz ist möglich, wenn die Liealgebra nicht mehr nilpotent, sondern nur auflösbar und endlichdimensional ist. Mit dieser Methode konnten in [IL01a] Attraktoren für SDE konstruiert werden, die bisher völlig unzugänglich waren.

Leider liefert die Methode aus [IL01a] keinen Hinweis darauf, wie man im allgemeinen Fall vorzugehen hat. Eine direkte Verallgemeinerung durch Reihenentwicklungen für den Fall analytischer Diffusionsvektorfelder ist aussichtslos (vgl. hierzu auch [Cas93]). Nicht einmal im linearen Fall war es möglich, die benötigte Konvergenz der Reihen aus iterierten stationären Stratonovichintegralen und Kommutatoren nachzuweisen.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit besteht darin, zu zeigen, daß Konjugationen zwischen SDE und stationären RDE stets existieren – und zwar ohne algebraische Voraussetzungen. Mit diesem Ergebnis läßt sich dann der lokale Linearisierungssatz für stationäre RDE (für den ein stark verkürzter neuer Beweis gegeben wird) auf SDE übertragen. Es soll aber auch nicht verschwiegen werden, daß die Aussagen aus [IS01] und [IL01a] über Attraktoren sich bisher nicht auf den allgemeinen Fall übertragen ließen.

2.2 Der Konjugationssatz – Heuristik

In diesem Abschnitt sollen in nichtrigoroser Weise die Ideen skizziert werden, die zum Beweis des Konjugationssatzes führen.

Wir betrachten die SDE

$$dX_t \;=\; f_0(X_t)dt + \sum_{j=1}^{m} f_j(X_t) \circ dW_t^j, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

wobei $f_0, \dots f_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ genügend reguläre Vektorfelder sind, so daß (2.6) einen globalen Fluß erzeugt.

Unser Ziel ist es, ein zufälliges Vektorfeld $g : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ zu finden, so daß der Fluß von (2.6) konjugiert ist zum Fluß der zufälligen stationären Differentialgleichung

$$dY_t \;=\; g(\theta_t \cdot, Y_t)\; dt. \tag{2.7}$$

Wir orientieren uns dabei am stationären Doss-Sussman-Ansatz bei eindimensionalem Rauschen ($m = 1$). Zunächst bemerken wir, daß in der Tat eine Verallgemeinerung des Doss-Sussman-Ansatzes bei mehrdimensionalem Rauschen existiert, die keine Voraussetzungen an die von den Diffusionsvektorfeldern f_j erzeugte Liealgebra stellt (vgl. [BM81] und [BM82]): Sei dazu ϕ der vom Diffusionsanteil von (2.6), d.h. der von der SDE

$$dX_t \;=\; \sum_{j=1}^{m} f_j(X_t) \circ dW_t^j, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

erzeugte Fluß (beim Doss-Sussman-Ansatz war ϕ explizit gegeben).

Der Lösungsansatz lautet hier: $X_t = \phi_t(Y_t)$, wobei wie beim Doss-Sussman-Ansatz Y ein Prozeß mit differenzierbaren Pfaden ist. Ist die formale Rechnung

$$\begin{aligned} dX_t \;&=\; d(\phi_t(Y_t)) \;=\; \phi_t'(Y_t) \circ dY_t + d\phi_t(x)|_{x=Y_t} \\ &=\; \phi_t'(Y_t) \circ dY_t + \sum_{j=1}^{m} f_j(\phi_t(Y_t) \circ dW_t^j \end{aligned}$$

erlaubt, so erhält man den Fluß wieder wie beim Doss-Sussman-Ansatz als Komposition von ϕ und dem Fluß der (nichtstationären) RDE

$$dY_t \;=\; \phi_t'(Y_t)^{-1} f_0(\phi_t(Y_t))dt. \tag{2.9}$$

Um zu einer Konjugation zu gelangen, müssen wir in diesem Ansatz ϕ durch einen stationären Fluß Φ ersetzen, der denselben Diffusionsanteil besitzt wie ϕ, damit die resultierende (jetzt stationäre) RDE für Y keinen Diffusionsanteil mehr enthält. Wir gehen dabei von folgender Beobachtung aus: Ist W eine reelle Brownsche Bewegung, so wird durch $Z_t = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{s-t} dW_s$ ein stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß definiert, der wegen $dZ_t = -Z_t dt + dW_t$ denselben Diffusionsanteil hat wie die Brownsche Bewegung W. Da ϕ

ein Prozeß mit unabhängigen stationären Zuwächsen und stetigen Pfaden ist, können wir ϕ auffassen als Brownsche Bewegung in der Gruppe $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d)$ der Diffeomorphismen von $\mathbb{R}^d$. Um den zugehörigen Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß Φ zu finden müssen wir sozusagen die Funktion $s \mapsto \mathrm{e}^{s-\tau}$ multiplikativ gegen ϕ integrieren und dann $\tau = t$ substituieren. Heuristisch sollte also gelten (Approximation durch "Riemann-Produkte")

$$\Phi_t \;=\; \Psi_t(t,\cdot)$$

mit

$$\Psi_t(\tau,\ \cdot\ ) \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} \left(\phi_{t_{i+1}} \circ \phi_{t_i}^{-1}\right)^{\mathrm{e}^{t_i-\tau}} \;=\; \lim_{n\to\infty} \prod_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} \phi_{t_{i+1}-t_i}^{\mathrm{e}^{t_i-\tau}} \circ \theta_{t_i} \tag{2.10}$$

(mit der Konvention, daß von rechts nach links multipliziert wird), wobei (π_n) eine Nullfolge von Partitionen von $(-\infty, t]$ ist. Dabei bezeichne für $\alpha \in \mathbb{R}$ ϕ^α den Fluß zu

$$dX_t \;=\; \alpha \sum_{j=1}^m f_j(X_t) \circ dW_t^j.$$

Nun scheint es, daß man die Konvergenz der Produkte (2.10) in $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d)$ bezüglich einer geeigneten Topologie nachzuweisen hat. Die Sache ist jedoch viel einfacher: Wir nehmen an, wir wüßten bereits, daß $\Psi_t(\tau,\ \cdot\ )$ existiert Wir setzen $X_t^{x,\tau} = \Psi_t(\tau, x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, und fragen uns, welcher Differentialgleichung $X^{x,\tau}$ genügt. Die n-te Approximation Ψ^n von (2.10) wird im Intervall (t_i, t_{i+1}) getrieben durch den Fluß zum Parameter $\mathrm{e}^{t_i-\tau}$, hat also dort das Differential $\mathrm{e}^{t_i-\tau} \sum_{j=1}^m f_j(\Psi_t^n(\tau, x) \circ dW_t^j$. Wenn es in der Welt Gerechtigkeit gibt, sollte also $X^{x,\tau}$ die SDE

$$X_t^{x,\tau} \;=\; x + \mathrm{e}^{-\tau} \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^s f_j(X_s^{x,\alpha}) \circ dW_s^j \tag{2.11}$$

lösen. Nun ist wieder Land in Sicht: Wir vergessen die nur der Heuristik dienenden multiplikativen Integrale und nehmen stattdessen (2.11) als Ausgangspunkt. Wir zeigen, daß (2.11) einen Fluß $\Psi_t(\tau, x)$ generiert, der in τ differenzierbar und in x ein Diffeomorphismus ist. Anschließend zeigen wir, daß durch $\Phi_t = \Psi_t(t,\ \cdot\ )$ ein stationärer Fluß von Diffeomorphismen definiert wird, der den richtigen Diffusionsanteil besitzt. Φ_0 ist dann die gesuchte Konjugation.

2.3 Technische Hilfsmittel

2.3.1 Semimartingale mit räumlichen Parametern und Flüsse

Obwohl der Gegenstand dieser Arbeit klassische Stratonovich-SDE sind, benötigen wir einige Tatsachen über Semimartingale mit räumlichen Parametern, da der stationäre Fluß, der die Konjugation liefern wird, zu dieser Klasse gehört. Dieser Abschnitt enthält eine Zusammenfassung der von uns benötigten Sätze; die Beweise finden sich in [Kun97] oder [Arn98a].

Die folgenden Seminormen und Funktionenräume werden benötigt, um Semimartingale mit räumlichen Parametern hinsichtlich ihrer Regularität zu klassifizieren. Die Bezeichnungen halten sich an [Kun97].

$m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \delta \leq 1$ und $K \subset \mathbb{R}^d$	
$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (hinreichend glatt)	$\begin{aligned} \|f\|_{m:K} &= \sup_{x\in K} \frac{\|f(x)\|}{1+\|x\|} + \sum_{\|\alpha\|=1}^{m} \sup_{x\in K} \|D^\alpha f(x)\|, \\ \|f\|_{m,\delta:K} &= \|f\|_{m:K} + \sum_{\|\alpha\|=m} \sup_{x,y\in K,\ x\neq y} \frac{\|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)\|}{\|x-y\|^\delta}, \\ \|f\|_m &= \|f\|_{m,\mathbb{R}^d}, \qquad \|f\|_{m,\delta} = \|f\|_{m,\delta,\mathbb{R}^d}. \end{aligned}$
$f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (hinreichend glatt)	$\begin{aligned} \|f\|^{\sim}_{m:K} &= \sup_{x,y\in K} \frac{\|f(x,y)\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)} + \sum_{\|\alpha\|=1}^{m} \sup_{x,y\in K} \|D^\alpha_x D^\alpha_y f(x,y)\|, \\ \|f\|^{\sim}_{m,\delta:K} &= \|f\|^{\sim}_{m:K} \\ &\quad + \sum_{\|\alpha=m\|} \sup_{\substack{x,y,x',y'\in K,\\ x\neq x', y\neq y'}} \frac{\|f(x,y) - f(x',y) - f(x,y') + f(x',y')\|}{\|x-x'\|^\delta \|y-y'\|^\delta} \\ \|f\|^{\sim}_m &= \|f\|^{\sim}_{m,\mathbb{R}^d}, \qquad \|f\|^{\sim}_{m,\delta} = \|f\|^{\sim}_{m,\delta,\mathbb{R}^d} \end{aligned}$
$\begin{aligned} \mathcal{C}^m &= \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \ : \ f\ m\text{-fach stetig diffb.}\}, \\ \mathcal{C}^{m,\delta} &= \{f \in \mathcal{C}^m \ : \ \|f\|_{m,\delta,K} < \infty \text{ für jedes Kompaktum } K \subset \mathbb{R}^d\}, \\ \mathcal{C}^m_b &= \{f \in \mathcal{C}^m \ : \ \|f\|_m < \infty\}, \quad \mathcal{C}^{m,\delta}_b = \{f \in \mathcal{C}^m \ : \ \|f\|_{m,\delta} < \infty\}. \end{aligned}$	
$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}^m &= \{f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \ : \ f \text{ nach beiden Variablen } m\text{-fach stetig diffb.}\}, \\ \tilde{\mathcal{C}}^{m,\delta} &= \{f \in \tilde{\mathcal{C}}^m \ : \ \|f\|^{\sim}_{m,\delta,K} < \infty \text{ für jedes Kompaktum } K \subset \mathbb{R}^d\}, \\ \tilde{\mathcal{C}}^m_b &= \{f \in \tilde{\mathcal{C}}^m \ : \ \|f\|^{\sim}_m < \infty\}, \quad \tilde{\mathcal{C}}^{m,\delta}_b = \{f \in \tilde{\mathcal{C}}^m \ : \ \|f\|^{\sim}_{m,\delta} < \infty\}. \end{aligned}$	

Definition 2.3. *Sei $F(x,t)_{x\in\mathbb{R}^d, t\geq 0}$ eine Familie von stetigen Semimartingalen mit kanonischer Zerlegung $F(x,t) = F(x,0) + M(x,t) + B(x,t)$ (d.h. $M(x,\cdot)$ ist ein stetiges lokales Martingal und $B(x,\cdot)$ ein stetiger Prozeß von lokal beschränkter Variation).*

i) F heißt Kunitasches Semimartingal, *falls Familien vorhersehbarer Prozesse $(a(x,y,t)_{t\geq 0})_{x,y\in\mathbb{R}^d}$, $(b(x,t)_{t\geq 0})_{x\in\mathbb{R}^d}$ existieren, so daß gilt:*

a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$ ist $\langle M(x,\cdot), M(y,\cdot)\rangle = \int_0^t a(x,y,s)ds$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}^d, t \geq 0$ ist $B(x,t) = \int_0^t b(x,s)ds$.

Das Paar (a,b) heißt die lokale Charakteristik von F.

ii) F heißt ein $\mathcal{C}^{m,\delta}$-Semimartingal, falls zusätzlich gilt:

a) M ist ein stetiger $\mathcal{C}^{m,\delta}$–Prozeß (d.h. für alle ω ist $(t,x) \mapsto M(\omega,t,\omega,x)$ stetig und $M(\omega,t,\cdot) \in \mathcal{C}^{m,\delta}$) und für $0 \leq \alpha \leq m$ sind die Prozesse $D^\alpha M(x,\cdot)$, $x \in \mathbb{R}^d$, stetige lokale Martingale.

b) B ist ein stetiger $\mathcal{C}^{m,\delta}$-Prozeß und für $|\alpha| \leq m$ sind die Prozesse $D^\alpha B(x,\cdot)$, $x \in \mathbb{R}^d$, stetig und lokal von beschränkter Variation.

Folgender Existenzsatz für Flüsse wird von uns benötigt (vgl. [Arn98a] oder [Kun97]):

Satz 2.4. *Seien $f_0 \in \mathcal{C}_b^{k,\delta}$ und $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{C}_b^{k+1,\delta}$, so daß $\sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^d f_j^\nu \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \in \mathcal{C}_b^{k,\delta}$ für ein $k \geq 1$ und $\delta > 0$. Dann gilt:*

(i) Die SDE

$$dX_t \;=\; \sum_{j=0}^m f_j(X_t) \circ dW_t^j, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

(mit der Konvention $W_t^0 = t$) erzeugt einen (bis auf Ununterscheidbarkeit) eindeutigen Fluß Φ, der für jedes $\epsilon < d$ ein $\mathcal{C}^{k,\epsilon}$-Semimartingal im Kunitaschen Sinne ist.

(ii) Man darf die SDE (2.12) formal nach den Anfangswerten differenzieren, genauer: bezeichnet Φ' die Ableitung von Φ nach der Ortsvariablen, so gilt

$$d\Phi_t'(x) = \sum_{j=0}^m f_j'(\Phi_t(x))\Phi_t'(x) \circ dW_t^j, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d, \quad \Phi_0'(x) = I.$$

(iii) Φ erfüllt die Kozykeleigenschaft

$$\Phi_{t+s}(\omega,\cdot) \;=\; \Phi_t(\theta_s\omega,\cdot) \circ \Phi_s(\omega,\cdot), \qquad t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega.$$

Ersetzt man die Räume $\mathcal{C}_b^{k,\delta}$, $\mathcal{C}_b^{k+1,\delta}$ durch $\mathcal{C}^{k,\delta}$, $\mathcal{C}^{k+1,\delta}$, so erhält man eine entsprechende Aussage für lokale Flüsse.

Die verallgemeinerte Itoformel findet sich in etwas anderer Form in [Kun97]. Dort darf X ein stetiges Semimartingal sein; dafür wird von F mehr Regularität gefordert.

Lemma 2.5. *(Verallgemeinerte Itoformel) Sei F ein Kunitasches $\mathcal{C}^{1,\delta}$-Semimartingal für ein $\delta > 0$. Sei X ein stetiger adaptierter Prozeß von beschränkter Variation. Dann ist der Prozeß $(F(X_t,t))_{t\geq 0}$ ein stetiges Semimartingal und es gilt*

$$\begin{aligned} F(X_t,t) - F(X_0,0) &= \int_0^t F(X_s, ds) \;+\; \int_0^t F'(X_s,s)\; dX_s, \\ &= \int_0^t F(X_s, \circ ds) \;+\; \int_0^t F'(X_s,s)\; dX_s, \qquad t \geq 0. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $t > 0$ und (π_n) eine Nullfolge von Partitionen von $[0,t]$. Dann ist

$$\begin{aligned} &F(X_t,t) - F(X_0,0) \\ &= \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} \Big[F(X_{t_{i+1}},t_{i+1}) - F(X_{t_i},t_{i+1})\Big] + \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} [F(X_{t_i},t_{i+1}) - F(X_{t_i},t_i)] \\ &= \int_0^1 \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} F'(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), t_{i+1})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})ds \\ &\qquad + \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} [F(X_{t_i},t_{i+1}) - F(X_{t_i},t_i)]\,. \end{aligned}$$

Der zweite Summand konvergiert in Wahrscheinlichkeit gegen $\int_0^t F(X_s,ds)$ nach Definition. Für die erste Summe gilt ω-weise:

$$\begin{aligned} &\sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} F'(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), t_{i+1})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \\ &= \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} \underbrace{[F'(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), t_{i+1}) - F'(X_{t_i},t_i)]}_{\to 0 \text{ gleichmäßig (bei festem } \omega)}(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \\ &\quad + \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} F'(X_{t_i},t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) \\ &\to \int_0^t F'(X_s,s)dX_s \end{aligned}$$

aufgrund der Stetigkeit von F' und X. Folglich also auch

$$\int_0^1 \sum_{t_i,t_{i+1}\in\pi_n} F'(X_{t_i} + s(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}), t_{i+1})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})ds \;\to\; \int_0^t F'(X_s,s)dX_s.$$

Damit folgt die erste Gleichung und somit auch die zweite, da bei einem Integranden von beschränkter Variation Ito- und Stratonovichintegral übereinstimmen. ■

Lemma 2.6. *Seien $f_0, \dots f_m \in \mathcal{C}_b^{1,\delta}$ für ein $\delta > 0$. Dann erzeugt die Ito-SDE*

$$dX_t = \alpha \left[f_0(X_t)dt + \sum_{j=1}^m f_j(X_t)dW_t^j \right] \tag{2.13}$$

einen globalen Fluß Φ^α von Diffeomorphismen, der nach dem Parameter α stetig differenzierbar ist.

Beweis. Nur die Existenz einer nach dem Parameter α differenzierbaren Version ist zu zeigen. Wir erweitern dazu die betrachtete SDE formal um die Gleichung $d\alpha = 0$. Wir wissen dann, daß das erweiterte System einen lokalen Fluß von Diffeomorphismen $(\Phi_t(\alpha, x))$ erzeugt. Es ist aber zunächst nicht bekannt ob der Fluß dieses erweiterten Systems global ist, da die Funktionen $(\alpha, x) \mapsto \alpha f_j(X)$ i.A. nicht global Lipschitz sind. Hierzu wenden wir das Kolmogoroff-Lemma an. Es bezeichne $X^{x,\alpha}$ die Lösung von (2.13) zum Anfangswert x. Wir fixieren ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^d$ sowie $A > 0$, $T > 0$, $p \geq 2$ und zeigen, daß

$$\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{x,\alpha} - X_t^{y,\beta}|^p) \;\leq\; \text{const} \times |(x,\alpha) - (y,\beta)|^p \qquad (x, y \in K,\ |\alpha|, |\beta| \leq A).$$

Zunächst existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so daß

$$\begin{aligned} |\alpha f_j(x) - \alpha f_j(y)| &\leq C_1|x-y| \quad \text{und} \\ |\alpha f_j(x)| &\leq C_2(1+|x|^p), \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ |\alpha| \leq A,\ 0 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Somit gilt (mit der Konvention $dW_t^0 = dt$):

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{x,\alpha}|^p) \\ &\leq (m+2)p^{p-2}\left(|x| + \sum_{j=0}^m \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |\alpha \int_0^t f_j(X_s^{x,\alpha})dW_s^j|^p\right) \\ &\leq (m+2)p^{p-2}\left(|x| + \sum_{j=0}^m \int_0^t C_3 \int_0^T \mathbb{E}(|X^{x,\alpha_s}|^p)ds\right) \\ &\leq (m+2)p^{p-2}\left(|x| + C_2C_3(m+1)T + C_2C_3(m+1)\int_0^T \mathbb{E}(|X_s^{x,\alpha}|^p)ds\right). \end{aligned}$$

(Die zweite Ungleichung folgt aus der Burkholderungleichung und der Jensenschen Ungleichung mit $C_3 = \max(T^{p-1}, c_pT^{\frac{p-2}{2}})$, wobei c_p die Konstante aus der Burkholderungleichung bezeichnet.) Mit dem Lemma von Gronwall folgt somit:

$$M \;=:\; \sup_{x\in K, \alpha\in A} \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{x,\alpha}|^p) \;<\; \infty.$$

Wegen

$$\begin{aligned} X_t^{x,\alpha} - X_t^{y,\beta} &= x - y + \alpha \sum_{j=0}^m \int_0^t [f_j(X_t^{x,\alpha}) - f_j(X_t^{X,\beta})]dW_t^j \\ &\quad + (\beta - \alpha)\sum_{j=0}^m \int_0^t f_j(X_t^{X,\beta})dW_t^j \end{aligned}$$

folgt analog daß

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |X_t^{x,\alpha} - X_t^{y,\beta}|^p) \\ &\leq K_1\left(|x-y|^p + \sum_{j=0}^m \mathbb{E}(\sup_{0\leq t\leq T} |\alpha \int_0^t (f_j(X_s^{x,\alpha}) - f_j(X_s^{y,\beta}))dW_s^j|^p) + |\beta-\alpha|^p M\right) \\ &\leq K_2(|x-y|^p + |\beta-\alpha|^p) + K_3 \int_0^T \mathbb{E}(|X_t^{x,\alpha} - X_t^{y,\beta}|^p dt), \\ &\qquad\qquad 0 \leq t \leq T,\ x, y \in K,\ |\alpha|, |\beta| \leq A \end{aligned}$$

mit weiteren Konstanten K_1, K_2, K_3. Somit ist nach dem Lemma von Gronwall

$$\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} |X_t^{x,\alpha} - X_t^{y,\beta}|^p) \;\le\; K_2(|x-y|^p + |\beta-\alpha|^p)\mathrm{e}^{K_3 T}.$$

Da K, T, A beliebig waren folgt mit Kolmogoroff, daß die (formal um die Gleichung $d\alpha = 0$ erweiterte SDE (2.13) einen globalen Fluß erzeugt. Dieser muß aufgrund der Eindeutigkeit der Flusses mit dem (nach dem Parameter α differenzierbaren lokalen Fluß) übereinstimmen. ■

Eine unmittelbare Folgerung ist das folgende Korollar, das später für den Beweis des lokalen Linearisierungssatzes für SDE benötigt wird.

Korollar 2.7. *Seien die Vektorfelder aus Lemma 2.6 linear. Dann gilt für jedes kompakte Intervall $I \subset \mathbb{R}$:*

$$\sup_{t,\alpha\in I} \log^+ \|\Phi_t^\alpha\| \in L^1.$$

2.3.2 Perfektionierung fast stationärer Prozesse

Der folgende Satz ist ein leichte Modifikation des Perfektionierungssatzes von Arnold und Scheutzow (siehe [Arn95b] oder [Arn98a]), der eine entsprechende Aussage für Kozykel macht.

Satz 2.8. *(***Stationärer Perfektionierungssatz***) Sei S ein polnischer Raum und $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ein S-wertiger Prozeß mit stetigen Pfaden über dem meßbaren dynamischen System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gelte*

$$X_t \;=\; X_0 \circ \theta_t \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher (mit von } t \text{ abhängiger Ausnahmenullmenge).}$$

Dann existiert ein stetiger S-wertiger Prozeß $\hat{X} = (\hat{X}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ so daß gilt:

i) X und $\hat{X}$ sind ununterscheidbar, d.h.

$$\mathbb{P}((X_t)_{t\in\mathbb{R}} \neq (\hat{X}_t)_{t\in\mathbb{R}}) \;=\; 0.$$

ii) $\hat{X}$ ist strikt *stationär, d.h. $\hat{X}_t(\omega) \;=\; \hat{X}_0(\theta_t\omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$.*

Beweis. Setze

$$\begin{aligned} \Omega_0 &:= \{\omega \in \Omega \mid X_t(\omega) \;=\; X_0(\theta_t\omega) \text{ für Lebesgue-fast alle } t \in \mathbb{R}\}, \\ \Omega_1 &:= \{\omega \in \Omega \mid \theta_t\omega \in \Omega_0 \text{ für Lebesgue-fast alle } t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

1. Wir zeigen, daß $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$.
Da X stetige Pfade besitzt, ist $X : \mathbb{R} \times \Omega \to S$ produktmeßbar. Die Abbildung $(t, \omega) \mapsto X_0(\theta_t\omega)$ ist ebenfalls produktmeßbar, da $(t, \omega) \mapsto \theta_t\omega$ meßbar ist. Somit ist

$$A \;:=\; \{(t, \omega) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid X_t(\omega) \neq X_0(\theta_t\omega)\} \;\in\; \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}.$$

Für $\omega \in \Omega$ ist daher der ω-Schnitt $A_\omega = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, \omega) \in A\}$ meßbar und es ist $\Omega \setminus \Omega_0 = \{\omega \in \Omega \mid \lambda(A_\omega) > 0\} \in \mathcal{F}$. Schließlich ist wegen Fubini

$$\int_\Omega \lambda(A_\omega)\; d\mathbb{P}(\omega) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \int_\Omega \mathbf{1}_A(t, \omega)\; d\mathbb{P}(\omega)\; d\lambda(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X_t \neq X_0 \circ \theta_t)\; dt \;=\; 0,$$

also $\lambda(A_\omega) = 0$ Für $\mathbb{P}$-fast alle ω, d.h. $\mathbb{P}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$.

2. Eine analoge Überlegung wie 1. zeigt, daß $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ und $\mathbb{P}(\Omega_1) = 1$. Schließlich folgt aus der Translationsinvarianz des Lebesguemaßes, daß Ω_1 θ-invariant ist, d.h. daß

$$\omega \in \Omega_1 \;\Rightarrow\; \theta_t\omega \in \Omega_1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

3. Wähle $x_0 \in S$ beliebig und setze

$$\hat{X}_t(\omega) \;=\; \begin{cases} X_{t-s}(\theta_s\omega), & \omega \in \Omega_1,\; s \in \mathbb{R} \text{ beliebig mit } \theta_s\omega \in \Omega_0, \\ x_0, & \omega \in \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases} \tag{2.14}$$

Wir zeigen, daß $\hat{X}$ wohldefiniert ist.
Sei $\omega \in \Omega_1$ und $t \in \mathbb{R}$. Seien $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ mit $\theta_{s_i}\omega \in \Omega_0$, $i = 1, 2$.
Dann existieren meßbare Mengen $B(\theta_{s_i}\omega) \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, von vollem Lebesguemaß, so daß

$$X_u(\theta_{s_i}\omega) \;=\; X_0(\theta_{s_i+u}\omega), \quad u \in B(\theta_{s_i}\omega).$$

Sei nun (u_n) eine Folge in $(B(\theta_{s_1}\omega) + s_1) \cap (B(\theta_{s_2}\omega) + s_2)$ mit $u_n \to t$. Dann ist

$$\begin{aligned}
X_{t-s_1}(\theta_{s_1}\omega) &= \lim_{n\to\infty} X_{u_n-s_1}(\theta_{s_1}\omega) && (X \text{ stetig}) \\
&= \lim_{n\to\infty} X_0(\theta_{u_n}\omega) && (u_n - s_1 \in B(\theta_{s_1}\omega)) \\
&= \lim_{n\to\infty} X_{u_n-s_2}(\theta_{s_2}\omega) && (u_n - s_2 \in B(\theta_{s_2}\omega)) \\
&= X_{t-s_2}(\theta_{s_2}\omega) && (X \text{ stetig}).
\end{aligned}$$

4. Wir zeigen, daß $\hat{X}$ *strikt* stationär ist.
Für $\omega \notin \Omega_1$ ist $\hat{X}_t(\omega) = \hat{X}_0(\theta_t\omega) = x_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ aufgrund der Invarianz von Ω_1.
Sei also $\omega \in \Omega_1$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann existieren meßbare Mengen $C(\theta_t\omega), C(\omega) \subset \mathbb{R}$ von vollem Lebesguemaß, so daß

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t(\omega) &= X_{t-s}(\theta_s\omega), \quad s \in C(\theta_t\omega), \\
\hat{X}_0(\theta_t\omega) &= X_{-r}(\theta_{r+t}\omega), \quad r \in C(\omega).
\end{aligned}$$

Wähle $s \in C(\theta_t\omega) \cap (C(\omega) + t)$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}
\hat{X}_t(\omega) &= X_{t-s}(\theta_s\omega) && (s \in C(\theta_t\omega)) \\
&= X_{-(s-t)}(\theta_{(s-t)+t}\omega) \\
&= \hat{X}_0(\theta_t\omega) && (s - t \in C(\omega)).
\end{aligned}$$

5. Aus der Definition von $\hat{X}$ und der Stetigkeit von X folgt unmittelbar, daß $\hat{X}$ stetige Pfade besitzt.

6. Wir zeigen, daß $\hat{X}$ meßbar ist und X und $\hat{X}$ ununterscheidbar sind.
Für $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$ ist nach Definition $\hat{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (wähle $s = 0$ in (2.14)). Da der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum als vollständig angenommen wurde, folgt somit aus $\mathbb{P}(\Omega_0 \cap \Omega_1) = 1$ sowohl die Meßbarkeit von $\hat{X}$ als auch die Ununterscheidbarkeit von X und $\hat{X}$. ■

2.4 Der Konjugationssatz

Satz 2.9. *Seien $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{C}_b^{2,\delta}$ für ein $\delta > 0$ so daß $\sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^d f_j^\nu \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \in \mathcal{C}_b^{2,\delta}$. Dann existieren ein Fluß Φ von Diffeomorphismen und ein stationäres Semimartingal Γ mit den Eigenschaften:*

(i) Φ ist ein Kunitasches $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$-Semimartingal für jedes $0 < \epsilon < \delta$.

(ii) Für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ist

$$d\Phi_t(x) \;=\; \sum_{j=1}^m f_j(\Phi_t(x)) \circ dW_t^j \;+\; \Gamma_t(x)\; dt, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Beweis. Für $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir die SDE

$$X_t^{x,\tau} \;=\; x + \sum_{j=1}^m \mathrm{e}^{-\tau} \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^s f_j(X_s^{x,\tau}) \circ dW_s^j \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{2.16}$$

Wir überlegen uns zunächst, daß diese Gleichung für jedes (τ, x) eindeutig lösbar ist und einen Fluß $\Psi_t(\tau, x)$ generiert, der differenzierbar in τ und ein Diffeomorphismus in x ist. Dazu verwenden wir folgende Zeittransformation: Wir setzen

$$\hat{W}_t^j \;=\; \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^s dW_s^j, \qquad \tilde{W}_t^j \;=\; \hat{W}^j_{\frac{1}{2}\log 2t},$$
$$\tilde{X}_t^{x,\tau} \;=\; X^{x,\tau}_{\frac{1}{2}\log 2t} \qquad (t > 0).$$

Die $\tilde{W}^j$ sind dann wieder unabhängige Wienerprozesse (auf $\mathbb{R}_+$) und (2.16) ist offenbar äquivalent zur transformierten SDE

$$\tilde{X}_t^{x,\tau} \;=\; x + \mathrm{e}^{-\tau} \sum_{j=1}^m \int_0^t f_j(\tilde{X}_s^{x,\tau}) \circ d\tilde{W}_s^j \quad (t \geq 0). \tag{2.17}$$

Mit Lemma 2.6 (angewandt auf die äquivalente Itosche SDE) folgt, daß (2.17) einen Fluß $\tilde{\Psi}_\cdot(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ von Diffeomorphismen in (τ, x) erzeugt, der für jedes $0 < \epsilon < \delta$ ein $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$-Semimartingal ist.

Damit ist aber klar, daß die Ausgangsgleichung (2.16) einen Fluß Ψ erzeugt, der gegeben ist durch $\Psi_t(\tau, x) = \tilde{\Psi}_{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}}(\tau, x)$. Wir setzen noch

$$D_t(\tau, x) \;=\; \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_t(\tau, x).$$

Da man (2.17) und somit auch (2.16) formal nach den Anfangswerten differenzieren darf (Satz 2.4) ist dann $\binom{\Psi}{D}$ der Fluß zum gekoppelten System

$$\begin{aligned}
\Psi_t(\tau,x) &= x + \mathrm{e}^{-\tau}\sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^s f_j(\Psi_s(\tau,x)) \circ dW_s^j && (2.18)\\
D_t(\tau,x) &= -\mathrm{e}^{-\tau}\sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^s f_j(\Psi_s(\tau,x)) \circ dW_s^j \\
&\quad + \mathrm{e}^{-\tau}\sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^s f_j'(\Psi_s(\tau,x)) D_s(\tau,x) \circ dW_s^j, \quad t \in \mathbb{R}. && (2.19)
\end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\Phi_t(x) = \Psi_t(t,x), \quad \Gamma_t(x) = D_t(t,x), \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d.$$

Dann ist Φ offensichtlich ein Fluß von Diffeomorphismen und ein $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$-Semimartingal für jedes $0 < \epsilon < \delta$. Gleichung (2.15) gilt aufgrund der verallgemeinerten Itoformel (Lemma 2.5). Es ist somit nur noch die Stationarität zu zeigen.

Seien dazu $\tau \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$. Wir wollen zeigen, daß

$$\begin{pmatrix} \Phi_\tau(\omega,x) \\ \Gamma_\tau(\omega,x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0(\theta_\tau\omega,x) \\ \Gamma_0(\theta_\tau\omega,x) \end{pmatrix} \qquad \text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega. \tag{2.20}$$

Dazu überlegen wir uns, daß sogar

$$\begin{pmatrix} \Psi_t(\omega,\tau,x) \\ D_t(\omega,\tau,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{t-\tau}(\theta_\tau\omega,0,x) \\ D_{t-\tau}(\theta_\tau\omega,0,x) \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

für $\mathbb{P}$-fast alle ω und alle $t \in \mathbb{R}$. Wir haben

$$\begin{aligned}
\Psi_{t-\tau}(\theta_\tau\cdot,0,x) &= x + \sum_{j=1}^m \left(\int_{-\infty}^{t-\tau} \mathrm{e}^s f_j(\Psi_s(0,x)) \circ dW_s^j \right) \circ \theta_\tau \\
&= x + \sum_{j=1}^m \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{s-\tau} f_j(\Psi_s(\theta_\tau\cdot,0,x) \circ dW_s^j, \qquad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Führt man eine analoge Rechnung für $D_{t-\tau}(\theta_\tau\cdot,0,x)$ durch, so sieht man, daß der Prozeß $\binom{\Psi_{t-\tau}(\theta_\tau\omega,0,x)}{D_{t-\tau}(\theta_\tau\omega,0,x)}$, $t \in \mathbb{R}$, dieselbe SDE erfüllt. Aus Eindeutigkeitsgründen gilt somit (2.21) bei festem x $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $t \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Stetigkeit in x gilt somit für festes $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \Phi_\tau(\cdot,\cdot) \\ \Gamma_\tau(\cdot,\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0(\theta_\tau\cdot,\cdot) \\ \Gamma_0(\theta_\tau\cdot,\cdot) \end{pmatrix} \qquad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Nun wenden wir den stationären Perfektionierungssatz 2.8 für den polnischen Raum $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d)$ an. ■

Satz 2.10. *Sei $f_0 \in C_b^{1,\delta}$ für ein $\delta > 0$ und seien $f_1, \dots f_m$ wie in Satz 2.9. Seien auch Φ und Γ wie in Satz 2.9. Das zufällige Vektorfeld g sei definiert durch*

$$g_t(x) \;=\; \Phi_t'(x)^{-1}[f_0 \circ \Phi_t(x) + \Gamma_t(x)].$$

Dann gilt:

i) Die stationäre RDE

$$dY_t \;=\; g_t(Y_t)dt \tag{2.22}$$

erzeugt einen globalen Fluß ψ.

ii) Die SDE

$$dX_t \;=\; f_0(X_t)\; dt + \sum_{j=1}^{m} f_j(X_t) \circ dW_t^j \tag{2.23}$$

erzeugt einen globalen Fluß ϕ. Ferner sind ψ und ϕ konjugiert via Φ_0, d.h. es gilt

$$\phi_t(\omega, \cdot) \;=\; \Phi_0(\theta_t\omega, \cdot) \circ \psi_t(\omega, \cdot) \circ \Phi_0(\omega, \cdot)^{-1}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$.

Beweis. Aus den Annahmen an die Vektorfelder f_j folgt jedenfalls, daß die SDE (2.23) einen globalen Fluß ϕ erzeugt (vgl. [Arn98a]). Von der RDE (2.22) wissen wir zunächst nur, daß ein lokaler Fluß ψ existiert, da das zufällige Vektorfeld g zuwenig bekannt ist.

Setze $H_t(\omega, x) = \Phi_0(\theta_t\omega, x)$. Aus der verallgemeinerten Itoformel folgt jedenfalls: Ist Y eine Lösung von (2.22), so daß $H_0^{-1}(Y_0)$ $\mathcal{F}_{-\infty}^0$-meßbar ist, so wird durch $X_t = H_t(Y_t)$ eine Lösung von (2.23) definiert. Aufgrund der Stetigkeit von H ist außerdem klar, daß X und Y dieselben Explosionszeiten besitzen. Somit wird durch

$$\tilde{\phi}_t = H_t \circ \psi_t \circ H_0^{-1}$$

ein weiterer maximaler Fluß für die SDE (2.23) definiert. Da der maximale Fluß von (2.23) eindeutig bestimmt ist (vgl. [Kun97]) folgt $\tilde{\phi} = \phi$ $\mathbb{P}$-fast sicher, also ist auch ψ $\mathbb{P}$-fast sicher global. Somit hat die Menge $\Omega_1 = \{\omega : \dot{y}_t = g(\theta_\omega, y_t)$ erzeugt einen globalen Fluß$\}$ volles Maß (und ist offensichtlich θ-invariant). ■

Kapitel 3

Der lokale Satz von Hartman-Grobman für stochastische Differentialgleichungen

3.1 Übersicht

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit war es, folgenden lokalen Linearisierungssatz für stochastische Differentialgleichungen zu beweisen:

Seien $f_0, \dots f_m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ hinreichend glatte Vektorfelder mit $f_j(0) = 0$. Sei $\Phi = (\Phi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ der Fluß zur SDE

$$dX_t \;=\; f_0(X_t)\; dt + \sum_{j=1}^{m} f_j(X_t) \circ dW_t^j$$

und $\Psi = (\Psi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ der Fluß zur linearisierten SDE

$$dX_t \;=\; A_0 X_t\; dt + \sum_{j=1}^{m} A_j X_t \circ dW_t^j,$$

wobei $A_j = f_j'(0)$, $j = 0, \dots, m$. Es werde angenommen, daß der lineare Fluß Ψ hyperbolisch ist, d.h. daß kein Lyapunovexponent von Ψ verschwindet.
Dann sind Φ und Ψ lokal konjugiert, d.h. es existiert ein zufälliger Homöomorphismus $H : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so daß (in einem noch zu präzisierenden Sinne) lokal

$$\Psi_t(\omega) \;=\; H(\theta_t \omega, \cdot)^{-1} \circ \Phi_t(\omega) \circ H(\omega, \cdot),$$

wobei $\theta_t : \Omega \to \Omega, \omega \mapsto \omega(t + \cdot) - \omega(t)$ den Shift bezeichnet.

Ein analoger Satz wurde von Wanner ([Wan93]) bewiesen für RDS, die von stationären Differentialgleichungen erzeugt werden.

Um zu sehen, wo die Schwierigkeiten liegen, sei kurz an den üblichen Beweis des Satzes von Hartman-Grobman für gewöhnliche Differentialgleichungen erinnert.

Sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ glatt mit $f(0) = 0$. Sei Φ der (der Einfachkeit halber als global angenommene) Fluß zur DGL

$$\dot{x} \;=\; f(x).$$

Die Matrix $A = f'(0)$ sei hyperbolisch, d.h. A besitze keinen Eigenwert mit verschwindendem Realteil. Der Satz von Hartman-Grobman besagt, daß der Fluß $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ lokal konjugiert ist zum linearisierten Fluß $(\mathrm{e}^{tA})_{t\in\mathbb{R}}$, d.h. es existiert ein Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so daß lokal

$$\Phi_t \;=\; h^{-1} \circ \mathrm{e}^{tA} \circ h.$$

Der Beweis wird üblicherweise folgendermaßen geführt:

a) Mittels eines Kontraktionsargumentes zeigt man: Es existiert ein Konstante $L_0 > 0$, so daß gilt: Ist $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz mit Lipschitzkonstante $L \leq L_0$, so existiert ein eindeutig bestimmter Homöomorphismus $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ so daß $\mathrm{e}^A + \phi = h^{-1} \circ \mathrm{e}^A \circ h$. Die Konstante L_0 hängt dabei unter anderem von den Winkeln zwischen den Eigenräumen von A ab.

b) Ist die Lipschitzkonstante des nichtlinearen Anteils $\tilde{f} := f - A$ von f klein genug, so folgt mit dem Lemma von Gronwall, daß die Lipschitzkonstante von $\Phi_1 - \mathrm{e}^A$ klein ist.
Nach a) sind dann Φ_1 und e^A konjugiert. Aus der Flußeigenschaft und der Eindeutigkeit der Konjugation h in a) folgt dann, daß $\Phi_t = h^{-1} \circ \mathrm{e}^{tA} \circ h$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
In diesem Fall gilt sogar ein globaler Linearisierungssatz.

c) Da die Ableitung des nichtlinearen Anteils $\tilde{f}$ von f im Nullpunkt verschwindet, kann man die Lipschitzkonstante durch Abschneiden beliebig klein machen. In diesem Fall erhält man nur einen lokalen Linearisierungssatz.

Auf ähnliche Weise bewies Palmer [Pal73] einen Linearisierungssatz für nichtautonome Differentialgleichungen. Das Ergebnis von Wanner ([Wan93]) erweist sich bei genauem hinsehen als ω-weise Übertragung des Linearisierungssatzes von Palmer.

Beim Versuch diese Methode auf den Fall stochastischer Differentialgleichungen anzuwenden sticht zunächst folgendes Problem ins Auge: Da man keinen globalen Linearisierungssatz erwartet, wird man die nichtlinearen Anteile $\tilde{f}_j = f_j - A_j$ der Vektorfelder f_j abschneiden müssen um die Lipschitzkonstanten klein zu bekommen. Wie im deterministischen Fall die geforderte Kleinheit von den Winkeln zwischen den Eigenräumen von A abhing, so wird jetzt die geforderte Kleinheit von den Winkeln zwischen den Oseledetsräumen des linearen Flusses Ψ abhängen. Dies bedeutet aber, daß man die Vektorfelder zufällig abschneiden muß – und zwar in antizipierender Weise. Dies führt auf eine antizipierende stochastische Differentialgleichung, die im Rahmen des üblichen Kalküls keinen Sinn ergibt. Dies war unter anderem der Grund dafür daß sich Wanner ([Wan93]) auf zufällige Differentialgleichungen beschränkte.
Zum Zeitpunkt des Beginns dieser Arbeit schien es jedoch, als könne man dieses Problem mithilfe eines antizipierenden Kalküls (vgl. etwa [Arn96]) meistern. Das Hauptproblem ist jedoch, daß es keinen Weg gibt, den zweiten Beweisschritt auf stochastische Differentialgleichungen zu übertragen, denn es gibt kein pfadweises Lemma von Gronwall für stochastische Differentialgleichungen.

Aus diesem Grund schlugen alle direkten Beweisversuche fehl. Dagegen führt der Umweg über eine konjugierte stationäre RDE fast trivial zum Ziel: Der Fluß der konjugierten stationären RDE ist (nach Wanner) lokal konjugiert zum Fluß der linearisierten RDE; durch Zusammensetzen aller Konjugationen erhält man dann eine lokale Konjugation zwischen dem Fluß der gegebenen SDE und der im Nullpunkt linearisierten SDE. Man muß dabei im wesentlichen nur zwei Punkte checken:

(i) Die Konjugation aus Satz 2.10 ist "verträglich" mit der Linearisierung. Dies läuft letztlich darauf hinaus, daß man SDE formal nach den Anfangswerten differenzieren darf.

(ii) Die Linearisierung der konjugierten stationären RDE führt auf ein lineares RDS, das die Integrabilitätsbedingung für den multiplikativen Ergodensatz erfüllt. Dies läuft auf eine einfache Integrabilitätsbedingung für den stationären Diffeomorphismus Φ_0 im Falle einer linearen SDE hinaus, die automatisch erfüllt ist.

Ferner stellte sich (während der vergeblichen direkten Beweisversuche) heraus, daß es möglich ist, den Beweis für den lokalen Linearisierungssatz von Wanner durch ein neues Argument erheblich zu vereinfachen.

3.2 Ergänzungen zum multiplikativen Ergodensatz

Die folgenden beiden Lemmata sind im wesentlichen Umformulierungen von Sätzen aus [Arn98a].

Lemma 3.1. *Sei $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ein linearer Kozykel auf $\mathbb{R}^d$ über dem ergodischen dynamischen System $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$, der die Integrabilitätsbedingung*

$$\sup_{0\le t\le 1} (\log^+ \|\Phi_t\| + \log^+ \|\Phi_t^{-1}\|) \ \in \ L^1 \tag{3.1}$$

für das MET erfüllt. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ die Lyapunovexponenten und $E_1, \ldots, E_p$ die Oseledetsräume. Φ sei hyperbolisch (d.h. 0 ist kein Lyapunovexponent). Sei ferner $E^+ = \bigoplus_{\lambda_i>0} E_i$, $E^- = \bigoplus_{\lambda_i<0} E_i$, und seien P^+, P^- die zur Zerlegung $\mathbb{R}^d = E^+ \oplus E^-$ gehörigen (nichtorthogonalen) Projektoren.
Dann existieren $0 < \epsilon < \alpha$ und eine Zufallsvariable $R_\epsilon : \Omega \to [1, \infty[$ so daß gilt:

i) R_ϵ ist "ϵ-slowly varying", d.h. es ist $R_\epsilon(\theta_t\omega) \le \mathrm{e}^{\epsilon|t|}\ R_\epsilon(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$.

ii) Für alle $\omega \in \Omega$, $s, t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} \|\Phi_t(\omega)P^+(\omega)\Phi_s^{-1}(\omega)\| &\le R_\epsilon(\theta_t\omega)\ \mathrm{e}^{-\alpha|t-s|} && \text{falls } s \ge t \\ \|\Phi_t(\omega)P^-(\omega)\Phi_s^{-1}(\omega)\| &\le R_\epsilon(\theta_t\omega)\ \mathrm{e}^{-\alpha|t-s|} && \text{falls } s \le t. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ zunächst beliebig. Nach [Arn98a], Thm. 4.3.4 und Cor. 4.3.11 existiert eine Zufallsvariable $R_\epsilon : \Omega \to]1, \infty[$ mit den Eigenschaften

1. R_ϵ ist ϵ-slowly-varying.
2. Für $\xi \in E_i(\omega)$ ist $\dfrac{1}{R_\epsilon(\omega)}\ \mathrm{e}^{\lambda_i t - \epsilon|t|}\ |\xi| \ \le\ |\Phi_t(\omega)\xi| \ \le\ R_\epsilon(\omega)\ \mathrm{e}^{\lambda_i t + \epsilon|t|}\ |\xi|$.
3. Für die (nichtorthogonalen) Projektoren P_i auf die Oseledetsräume gilt $\|P_i(\omega)\| \le R_\epsilon(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Setze $\underline{\lambda} = \min\limits_{1\le i\le p} |\lambda_i|$. Für $t \le 0$ ist dann offenbar

$$\begin{aligned} \|\Phi_t(\omega)P^+(\omega)\| &\le \sum_{\lambda_i>0} \|\Phi_t(\omega)P_i(\omega)\| \ \le\ \sum_{\lambda_i>0} R_\epsilon(\omega)\ \mathrm{e}^{-(\lambda_i-\epsilon)|t|}\|P_i(\omega)\| \\ &\le p\ R_\epsilon(\omega)^2\ \mathrm{e}^{-(\underline{\lambda}-\epsilon)|t|}. \end{aligned}$$

Ferner ist aufgrund der Kozykeleigenschaft und der Invarianz der Oseledetsräume

$$\begin{aligned} \Phi_t(\omega)P^+(\omega)\Phi_s^{-1}(\omega) &= \Phi_t(\omega)P^+(\theta_{-s}\theta_s\omega)\Phi_{-s}(\theta_s\omega) \ = \ \Phi_t(\omega)\Phi_{-s}(\theta_s\omega)P^+(\theta_s\omega) \\ &= \Phi_{t-s}(\theta_s\omega)P^+(\theta_s\omega) \end{aligned}$$

und damit für $s \ge t$

$$\|\Phi_t(\omega)P^+(\omega)\Phi_s^{-1}(\omega)\| \ \le\ p\ R_\epsilon(\theta_s\omega)^2\ \mathrm{e}^{-(\underline{\lambda}-\epsilon)|t-s|} \ \le\ p\ R_\epsilon(\theta_t\omega)^2\ \mathrm{e}^{-(\underline{\lambda}-3\epsilon)|t-s|}.$$

Analog schätzt man $\|\Phi_t(\omega)P^-(\omega)\Phi_s^{-1}(\omega)\|$ für $s \le t$ ab. Wähle nun $\epsilon > 0$ mit $\underline{\lambda} - 3\epsilon > 0$, setze $\alpha = \underline{\lambda} - 3\epsilon$ und ersetze R_ϵ durch $\tilde{R}_\epsilon = pR_\epsilon^2$ ($\tilde{R}_\epsilon$ ist dann 2ϵ-slowly varying). ■

Lemma 3.2. *Sei (Φ_t) ein linearer Kozykel, der die Integrabilitätsbedingung (3.1) für den multiplikativen Ergodensatz erfüllt. Sei ferner $A : \Omega \to GL(\mathbb{R}^d)$ meßbar mit den Eigenschaften*

i) Für alle $\omega \in \Omega$ ist $t \mapsto A(\theta_t\omega)$ stetig.

ii) A erfüllt die Integrabilitätsbedingung

$$\sup_{0\le t\le 1} \left(\log^+ \|A \circ \theta_t\| + \log^+ \|A^{-1} \circ \theta_t\|\right) \ \in \ L^1.$$

Dann wird durch

$$\Psi_t \ = \ A \circ \theta_t \ \Phi_t \ A^{-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

ein linearer Kozykel (Ψ_t) definiert, der ebenfalls die Integrabilitätsbedingung für das MET erfüllt und dieselben Lyapunovexponenten wie (Φ_t) besitzt.

Beweis. Die Kozykeleigenschaft und die Integrabilitätsbedingung von Ψ sind trivial. Mit einem einfachen Borel-Cantelli-Argument folgt ferner leicht, daß

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{1}{t} \log^+ \|A^{\pm 1} \circ \theta_t\| \ = \ 0$$

$\mathbb{P}$-fast sicher. Damit sieht man sofort, daß Ψ dieselben Lyapunovexponenten wie Φ besitzt, und daß die Oseledetsräume von Ψ gegeben sind durch $A(\omega)E_i(\omega)$, wenn E_i die Oseledetsräume von Φ sind. ■

3.3 Linearisierung stationärer zufälliger Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt enthält einen neuen Beweis des lokalen Satzes von Hartman-Grobman für stationäre zufällige Differentialgleichungen. Dieser Satz wurde zuerst in etwas anderer Form in der Arbeit von Wanner [Wan93] bewiesen. Dort wird störenderweise stets vorausgesetzt, daß der lineare Anteil der betrachteten Gleichung Blockdiagonalgestalt besitzt; dies würde aber bei der Übertragung des Resultates auf SDE (mittels einer Konjugation) bedeuten, daß man noch eine zufällige lineare Koordinatentransformation vornehmen müßte, die i.A. antizipierend wäre. Außerdem laßt sich der Beweis wesentlich verkürzen, wenn man noch ein topologisches Argument (Lemma 3.3) verwendet.

Lemma 3.3. *Sei $H : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig und injektiv. Außerdem sei $\lim_{|\xi|\to\infty} |H(\xi)| = \infty$. Dann ist H ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$.*

Beweis. (vgl. [Pro90]). Sei $\widehat{\mathbb{R}^d} = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ die Alexandrov-Kompaktifizierung des $\mathbb{R}^d$. Setze

$$\widehat{H} : \widehat{\mathbb{R}^d} \to \widehat{\mathbb{R}^d}, \quad \widehat{H}(\xi) := \begin{cases} H(\xi) & (\xi \in \mathbb{R}^d) \\ \infty & (\xi = \infty). \end{cases}$$

Da $\widehat{\mathbb{R}^d}$ kompakt ist, ist $\widehat{H}$ ein Homöomorphismus aufs Bild. Nun ist aber $\widehat{\mathbb{R}^d}$ homöomorph zur Sphäre S^d, und es ist bekannt, daß S^d zu keiner echten Teilmenge von S^d homöomorph ist. Also ist $\widehat{H}$ ein Homöomorphismus von $\widehat{\mathbb{R}^d}$ auf $\widehat{\mathbb{R}^d}$ und folglich H ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$. ■

Der folgende Satz wurde (mit einer Konstanten anstelle von R_ϵ und auf ganz andere Weise) in [Pal73] bewiesen.

Satz 3.4. *Sei $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d\times d}$ stetig und (Φ_t) der Fluß*[1] *zur linearen Differentialgleichung*

$$\dot{y} = A(t)\, y \tag{3.2}$$

Ferner gebe es (nicht notwendig orthogonale) Projektoren P^+, P^- mit $P^+ + P^- = I$, sowie $0 < \epsilon < \alpha$ und eine Funktion $R_\epsilon : \mathbb{R} \to]0, \infty[$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \|\Phi_t P^+ \Phi_s^{-1}\| &\le R_\epsilon(t)\, \mathrm{e}^{-\alpha|t-s|} && \text{für } s \ge t \\ \|\Phi_t P^- \Phi_s^{-1}\| &\le R_\epsilon(t)\, \mathrm{e}^{-\alpha|t-s|} && \text{für } s \le t \end{aligned}$$

sowie

$$R_\epsilon(t+s) \le \mathrm{e}^{\epsilon|t|}\, R_\epsilon(s) \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Sei ferner $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ stetig und beschränkt mit $f(t, 0) = 0$; für jedes $t \in \mathbb{R}$ sei $f(t, \cdot)$ Lipschitz mit Lipschitzkonstante $L(t)$, wobei

$$L(t) R_\epsilon(t) \le c < \frac{\alpha}{2}.$$

[1] Eigentlich Fundamentallösung, aber die Begriffe "Fluß" und "Fundamentallösung" werden im folgenden als Synonyme verwendet

Sei (Ψ_t) der Fluß zu nichtlinearen Differentialgleichung

$$\dot{x} \;=\; A(t)x + f(t,x). \tag{3.3}$$

Dann existiert eine stetige Abbildung $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit den Eigenschaften

i) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $H(t,\cdot)$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $H(t,0) = 0$.

ii) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\Psi_t \;=\; H(t,\cdot)^{-1} \circ \Phi_t \circ H(0,\cdot).$$

Beweis. 1. Definiere H durch

$$H(t,\xi) \;=\; \xi + \int_t^\infty \Phi_t P^+ \Phi_s^{-1} f(s, \Psi_s \Psi_t^{-1}\xi)\; ds - \int_{-\infty}^t \Phi_t P^- \Phi_s^{-1} f(s, \Psi_s \Psi_t^{-1}\xi)\; ds.$$

Aufgrund der Ungleichungen für $\|\Phi_t P^\pm \Phi_s^{-1}\|$ ist klar, daß H wohldefiniert und stetig ist mit $H(t,0) = 0$ und

$$|H(t,\xi) - \xi| \;\le\; R_\epsilon(t)\; \|f\|_\infty \left(\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\alpha|t-s|} ds + \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\alpha|t-s|} ds \right) \;=\; \frac{2R_\epsilon(t)\; \|f\|_\infty}{\alpha}.$$

2. Ist x eine Lösung der nichtlinearen Gleichung (3.3), so ist $t \mapsto y(t) := H(t,x(t))$ eine Lösung der linearen Gleichung (3.2).
Denn wegen $\Psi_s \Psi_t^{-1} x(t) = \Psi_s x(0) = x(s)$ ist

$$y(t) \;=\; H(t,x(t)) \;=\; x(t) + \Phi_t \left[\int_t^\infty P^+ \Phi_s^{-1} f(s,x(s))\; ds - \int_{-\infty}^t P^- \Phi_s^{-1} f(s,x(s))\; ds \right],$$

also

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) \;&=\; \dot{x}(t) + \dot{\Phi}_t[\ldots] + \Phi_t \left[-P^+ \Phi_t^{-1} f(t,x(t)) - P^- \Phi_t^{-1} f(t,x(t)) \right] \\ &=\; A(t)\; x(t) + f(t,x(t)) + A(t)\Phi_t[\ldots] - f(t,x(t)) \\ &=\; A(t)\; H(t,x(t)) \;=\; A(t)y(t). \end{aligned}$$

3. $H(0,\cdot)$ ist injektiv.
Denn: Seien $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d$ mit $H(0,\xi_1) = H(0,\xi_2)$. Für $i = 1,2$ sei x_i die Lösung der nichtlinearen Gleichung (3.3) zum Anfangswert $x_i(0) = \xi_i$ sowie $z = x_2 - x_1$. Wir zeigen, daß $z = 0$.
Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $H(t,x_1(t)) = H(t,x_2(t))$, denn wegen 2. sind beides Lösungen der linearen Gleichung (3.2) zum selben Anfangswert $H(0,\xi_1) = H(0,\xi_2)$. Also ist stets

$$z(t) \;\le\; |x_2(t) - H(t,x_2(t))| + |x_1(t) - H(t,x_1(t))| \;\le\; R_\epsilon(t)\; \frac{4\; \|f\|_\infty}{\alpha}.$$

Somit ist $\dfrac{z}{R_\epsilon}$ beschränkt.
Ferner ist

$$\dot{z} \;=\; A(t)z + b(t) \quad \text{mit} \quad b(t) \;=\; f(t,x_2(t)) - f(t,x_1(t)).$$

Dabei ist stets

$$|b(t)| \;\le\; L(t)\;|z(t)|.$$

Für $t_0 \le t$ ist (Variation der Konstanten)

$$z(t) \;=\; \Phi_t\left[\Phi_{t_0}^{-1}z(t_0) + \int_0^t \Phi_s^{-1}b(s)\;ds\right],$$

also

$$|\Phi_t P^- \Phi_t^{-1} z(t)| \;\le\; \|\Phi_t P^- \Phi_{t_0}^{-1}\|\;|z(t_0)| + \int_{t_0}^t \|\Phi_t P^- \Phi_s^{-1}\|\;|b(s)|\;ds.$$

Wegen

$$\|\Phi_t P^- \Phi_{t_0}^{-1}\|\;|z(t_0)| \;\le\; R_\epsilon(t)\mathrm{e}^{-\alpha|t-t_0|}R_\epsilon(t_0)\frac{4\|f\|_\infty}{\alpha} \;\to\; 0 \quad (t\to\infty)$$

folgt mit $t_0 \to -\infty$

$$\begin{aligned}|\Phi_t P^- \Phi_t^{-1} z(t)| \;&\le\; R_\epsilon(t)\int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-\alpha|t-s|}\;L(s)\;R_\epsilon(s)\;\frac{|z(s)|}{R_\epsilon(s)}\;ds\\ &\le\; R_\epsilon(t)\;\left\|\frac{z}{R_\epsilon}\right\|_\infty\;\frac{c}{\alpha}.\end{aligned}$$

Analog schätzt man $|\Phi_t P^+ \Phi_t^{-1} z(t)|$ ab und erhält schließlich für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{|z(t)|}{R_\epsilon(t)} \;\le\; |\Phi_t P^+ \Phi_t^{-1} z(t)| + |\Phi_t P^- \Phi_t^{-1} z(t)| \;\le\; \frac{2c}{\alpha}\;\left\|\frac{z}{R_\epsilon}\right\|_\infty.$$

Da $\frac{2c}{\alpha} < 1$, folgt $z = 0$.

4. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $H(t,\cdot)$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ und es ist

$$\Psi_t \;=\; H(t,\cdot)^{-1}\circ\Phi_t\circ H(0,\cdot).$$

Denn: $H(0,\cdot)$ ist ein Homöomorphismus aufgrund von 3. und Lemma 3.3. Ferner ist wegen 2.

$$H(t,\cdot)\circ\Psi_t \;=\; \Phi_t\circ H(0,\cdot).$$

Da Φ_t und Ψ_t Homöomorphismen sind, folgt die Behauptung. ■

Satz 3.5. *(Globaler Linearisierungssatz für zufällige Differentialgleichungen) Sei* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$ *ein ergodisches dynamisches System und seien* $A:\Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}$ *sowie* $f:\Omega\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ *meßbar mit* $f(\cdot,0)=0$. *Für jedes* $\omega\in\Omega$ *seien die Abbildungen* $t\mapsto A(\theta_t\omega)$ *und* $(t,\xi)\mapsto f(\theta_t\omega,\xi)$ *stetig.*
Sei ferner (Φ_t) *der Fluß zur zufälligen linearen Differentialgleichung*

$$\dot{x}(\omega,t) \;=\; A(\theta_t\omega)\;x(\omega,t).$$

Weiter werde angenommen, daß (Φ_t) *der Integrabilitätsbedingung für das MET genügt und hyperbolisch ist. Seien* P^+, P^-, $0<\epsilon<\alpha$ *und* R_ϵ *wie in Lemma 3.1.*
Ferner sei $f(\omega,\cdot)$ *für jedes* $\omega\in\Omega$ *Lipschitz mit Lipschitzkonstante* $L(\omega)$ *und es gelte*

$$L(\omega)\;R_\epsilon(\omega) \;\le\; c \;<\; \frac{\alpha}{2}.$$

Dann existiert eine meßbare Abbildung $H : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit den Eigenschaften:

i) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $H(\omega, \cdot)$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $H(\omega, 0) = 0$.

ii) Der Fluß (Ψ_t) zur nichtlinearen zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x}(\omega, t) \;=\; A(\theta_t\omega)x(\omega, t) + f(\theta_t\omega, x(\omega, t))$$

ist gegeben durch

$$\Psi_t(\omega) \;=\; H(\theta_t\omega, \cdot)^{-1} \circ \Phi_t(\omega) \circ H(\omega, \cdot).$$

Beweis. Wende Satz 3.4 ω-weise an. Dies liefert eine meßbare Abbildung $H : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so daß für alle (t, ω) die Abbildung $H(\omega, t, \cdot)$ ein Homöomorphismus ist mit

$$\Psi_t(\omega) \;=\; H(\omega, t, \cdot)^{-1} \circ \Phi_t(\omega) \circ H(\omega, 0, \cdot).$$

Aus der expliziten Darstellung von H sieht man ferner, daß stets

$$H(\omega, t, \cdot) \;=\; H(\theta_t\omega, 0, \cdot),$$

da z.B. (aufgrund der Kozykeleigenschaft von Φ)

$$\begin{aligned}
&\int_t^\infty \Phi_t(\omega)P^+(\omega)\Phi_s^{-1}(\omega)\; f(\theta_s\omega, \Psi_s(\omega)\Psi_t^{-1}(\omega)\xi)\; ds \\
&\quad= \int_0^\infty \Phi_t(\omega)P^+(\omega)\Phi_{t+s}^{-1}(\omega)\; f(\theta_{t+s}\omega, \Psi_{t+s}(\omega)\Psi_t^{-1}(\omega)\xi)\; ds \\
&\quad= \int_0^\infty \Phi_t(\omega)P^+(\omega)\Phi_t^{-1}(\omega)\Phi_s^{-1}(\theta_t\omega)\; f(\theta_s\theta_t\omega, \Psi_s(\theta_t\omega)\Psi_t(\omega)\Psi_t^{-1}(\omega)\xi)\; ds \\
&\quad= \int_0^\infty \Phi_0(\theta_t\omega)P^+(\theta_t\omega)\Phi_s^{-1}(\theta_t\omega)\; f(\theta_s\theta_t\omega, \Psi_s(\theta_t\omega)\Psi_0^{-1}(\theta_t\omega)\xi)\; ds.
\end{aligned}$$

■

Da im globalen Linearisierungssatz bekannt ist, wie klein die Lipschitzkonstante $L(\omega)$ des nichtlinearen Anteils $f(\omega, \cdot)$ sein muß, erhält man durch Abschneiden sofort einen lokalen Linearisierungssatz.

Satz 3.6. *(Lokaler Linearisierungssatz für zufällige Differentialgleichungen) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$ ein ergodisches dynamisches System und $F : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ meßbar mit den Eigenschaften*

i) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $F(\omega, \cdot)$ $\mathcal{C}^1$ und $F(\omega, 0) = 0$.

ii) Für jedes $\omega \in \Omega$ sind die Abbildungen $(t, \xi) \mapsto F(\theta_t\omega, \xi)$ und $(t, \xi) \mapsto F'(\theta_t\omega, \xi)$ stetig.

iii) Der Fluß (Φ_t) der linearisierten Gleichung

$$\dot{x}(\omega, t) \;=\; A(\theta_t\omega)\; x(\omega, t), \quad \textit{wobei} \quad A(\omega) \;=\; F'(\omega, 0) \tag{3.4}$$

erfüllt die Integrabilitätsbedingung für das MET und ist hyperbolisch.

Sei ferner (Ψ_t) der (möglicherweise nur lokale) Fluß zur nichtlinearen zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x}(\omega,t) \;=\; F(\theta_t\omega, x(\omega,t)). \tag{3.5}$$

Dann existieren meßbare Abbildungen $\rho : \Omega \to]0,\infty[$ und $H : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, so daß gilt:

a) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $H(\omega,\cdot)$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^d$ auf $\mathbb{R}^d$ mit $H(\omega,0) = 0$.

b) Für jedes $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung $t \mapsto \rho(\theta_t\omega)$ stetig, insbesondere ist $\inf_{a\le t\le b} \rho(\theta_t\omega) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $a < b$.

c) Für alle $\omega \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ und $\tau_-(\omega,\xi) \le t \le \tau_+(\omega,\xi)$ ist

$$\Psi_t(\omega) \;=\; H(\theta_t\omega,\cdot) \circ \Phi_t(\omega) \circ H(\omega,\xi),$$

wobei

$$\begin{aligned} \tau_-(\omega,\xi) &= \inf\{t < 0 \;:\; |\Psi_s(\omega,\xi)| \le \rho(\theta_s\omega) \text{ für alle } t \le s \le 0\} \\ \tau_+(\omega,\xi) &= \sup\{t > 0 \;:\; |\Psi_s(\omega,\xi)| \le \rho(\theta_s\omega) \text{ für alle } 0 \le s \le t\}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $f(\omega,x) = F(\omega,x) - A(\omega)x$ der nichtlineare Anteil von F. Da das Problem lokal ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß f außerhalb eines deterministischen Kompaktums verschwindet (sonst schneide man deterministisch ab), so daß insbesondere Ψ ein globaler Fluß ist. Seien nun α, ϵ und R_ϵ gemäß Lemma 3.1 gewählt und $0 < c < \frac{\alpha}{2}$ beliebig. Setze

$$\Lambda(\omega,r) \;=\; \sup_{|x|\le r} |f'(\omega,x)| + r \quad (\omega \in \Omega,\; r \ge 0)$$

sowie

$$\rho(\omega) \;=\; \sup\{r > 0 \;:\; \Lambda(\omega,r)R_\epsilon(\omega) \le c\}.$$

Aufgrund der Voraussetzungen an F ist für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $(t,r) \mapsto \Lambda(\theta_t\omega,r)$ stetig. Hieraus sieht man, daß auch $t \mapsto \rho(\theta_t\omega)$ stetig ist, denn sei (t_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $t_n \to t_0$ und $r_n = \rho(\theta_{t_n}\omega)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Angenommen, $r_n \not\to r_0$. Da die Folge (r_n) beschränkt ist, besitzt sie dann einen Häufungspunkt $r' \ne r_0$, o.E. also $r_n \to r'$. Da die Abbildung $(t,r) \mapsto \Lambda(\theta_t\omega,r)R_\epsilon(\theta_t\omega)$ stetig ist (R_ϵ ϵ-slowly-varying $\Rightarrow t \mapsto R_\epsilon(\theta_t\omega)$ stetig) ist $\Lambda(\theta_{t_0}\omega,r')R_\epsilon(\theta_{t_0}\omega) = c$, also doch $r' = \rho(\theta_{t_0}\omega) = r_0$, da $\Lambda(\theta_{t_0}\omega,\cdot)$ strikt isoton ist.

Sei nun für $r > 0$ die radiale Retraktion χ_r definiert durch

$$\chi_r(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{für } |x| \le r \\ \frac{x}{|x|} & \text{für } |x| > r. \end{cases}$$

Da χ_r Lipschitz mit Lipschitzkonstante 1 ist, ist dann für jedes $\omega \in \Omega$ die Funktion

$$\tilde{f}(\omega,\cdot) \;=\; f(\omega,\cdot) \circ \chi_{\rho(\omega)}$$

global Lipschitz mit Lipschitzkonstante $L(\omega) \leq \Lambda(\omega, \rho(\omega))$, wobei stets $L(\omega)R_\epsilon(\omega) \leq c$, und für jedes $\omega \in \Omega$ ist $(t, \xi) \mapsto \tilde{f}(\theta_t\omega, \xi)$ stetig. Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt, um den globalen Linearisierungssatz 3.5 auf den Fluß $\tilde{\Psi}$ der zufälligen Differentialgleichung

$$\dot{x}(\omega, t) \;=\; A(\theta_t\omega)x(t, \omega) + \tilde{f}(\theta_t\omega, x(\omega, t))$$

anzuwenden. Da die Orbits $t \mapsto \Psi_t(\omega)\xi$ und $t \mapsto \tilde{\Psi}_t(\omega)\xi$ im Intervall $\tau_-(\omega, \xi) \leq t \leq \tau_+(\omega, \xi)$ übereinstimmen, folgt die Behauptung. ■

3.4 Lokale Linearisierung stochastischer Differentialgleichungen

Satz 3.7. *(Lokaler Linearisierungssatz für stochastische Differentialgleichungen) Sei* $f_0 \in C_b^{1,\delta}$ *und seien* $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{C}_b^{2,\delta}$ *so daß* $\sum_{j=1}^m \sum_{\nu=1}^d f_j^\nu \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu} \in \mathcal{C}_b^{1,\delta}$ *für ein* $\delta > 0$. *Sei ferner* $f_j(0) = 0$, $0 \le j \le m$ *und* $A_j = f_j'(0)$ *für* $0 \le j \le m$. *Sei* ψ *der Fluß zur nichtlinearen SDE*

$$dX_t \;=\; f_0(X_t)dt + \sum_{j=1}^m f_j(X_t) \circ dW_t^j. \tag{3.6}$$

und ϕ *der Fluß der linearisierten SDE*

$$dX_t \;=\; A_0 X_t dt + \sum_{j=1}^m A_j X_t \circ dW_t^j. \tag{3.7}$$

Zusätzlich werde vorausgesetzt, daß der Fluß ϕ *hyperbolisch ist, i.e. daß alle Lyapunovexponenten von 0 verschieden sind. Dann existieren eine Abbildung* $H : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *sowie eine zufällige Nullumgebung* U, *so daß gilt:*

a) Für jedes $\omega \in \Omega$ *ist* $H(\omega, \cdot)$ *ein Homöomorphismus von* $\mathbb{R}^d$ *auf* $\mathbb{R}^d$ *mit* $H(\omega, 0) = 0$.

b) Für jedes $\omega \in \Omega$ *ist und alle* $a < b$ *ist* $\bigcap_{a \le t \le b} U(\theta_t \omega)$ *eine Nullumgebung.*

c) Für alle $\omega \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^d$ *und* $\tau_-(\omega, \xi) \le t \le \tau_+(\omega, \xi)$ *ist*

$$\psi_t(\omega) \;=\; H(\theta_t \omega, \cdot) \circ \phi_t(\omega) \circ H(\omega, \xi),$$

wobei

$$\begin{aligned} \tau_-(\omega, \xi) &= \inf\{t < 0 \;:\; \psi_s(\omega, \xi) \in U(\theta_s \omega) \text{ für alle } t \le s \le 0\} \\ \tau_+(\omega, \xi) &= \sup\{t > 0 \;:\; \psi_s(\omega, \xi) \in U(\theta_s \omega) \text{ für alle } 0 \le s \le t\}. \end{aligned}$$

Beweis. Der stationäre Fluß von Diffeomorphismen Φ, das stationäre Semimartingal Γ und das zufällige stationäre Vektorfeld g seien wie in Satz 2.9 bzw. Satz 2.10. Sei $\tilde{\psi}$ der Fluß zur stationären RDE

$$dY_t \;=\; g_t(Y_t)dt.$$

Aus der Konstruktion folgt, daß stets $\Phi(0) = 0$ und $\Gamma_t(0) = 0$, also auch $g_t(0) = 0$. Sei ferner $A_t = g_t'(0)$, $t \in \mathbb{R}$. Aus der Konstruktion von Φ und Γ folgt dann weiter, daß der Fluß ϕ der linearisierten SDE konjugiert ist zum Fluß $\tilde{\phi}$ der linearisierten RDE

$$dY_t \;=\; A_t Y_t dt$$

(die Konjugation ist gerade $\Phi'(0)$) und nach Korollar 2.7 erfüllt $\Phi'(0)$ die Integrierbarkeitsbedingung

$$\sup_{0 \le t \le 1} \left(\log^+ \|\Phi_t'(0)\| + \log^+ \|\Phi_t'(0)^{-1}\|\right) \;\in\; L^1.$$

Nach Lemma 3.2 ist daher auch der lineare Kozykel $\tilde{\phi}$ hyperbolisch.

Somit ist der lokale Linearisierungssatz 3.6 für stationäre RDE anwendbar. Seien also $\tilde{\rho}$ und $\tilde{H}$ wie in Satz 3.6 für das stationäre Vektorfeld g. Setze

$$H(\omega) \;=\; \Phi_0'(\omega,0)\tilde{H}(\omega)\circ\Phi_0^{-1}(\omega,\cdot)$$

und definiere die zufällige Nullumgebung durch

$$U \;=\; \Phi_0(B_{\tilde{\rho}}(0)).$$

Dann gelten jedenfalls a) und c); b) folgt aus Stetigkeitsgründen. ■

Literaturverzeichnis

[Arn82] Arnold, L. and Wihstutz, V., *Stationary solutions of linear systems with additive and multiplicative noise*, Stochastics **7** (1982), 133–155.

[Arn92] Arnold, L. and Xu, K., *Normal forms for random diffeomorphisms*, J. Dyn. Differ. Equations **4** (1992), no. 3, 445–483.

[Arn95a] Arnold, L., *Anticipative problems in the theory of random dynamical systems*, Cranston, Michael C. (ed.) et al., Stochastic analysis. Proceedings of the Summer Research Institute on stochastic analysis, held at Cornell University, Ithaca, NY, USA, July 11-30, 1993. Providence, RI: American Mathematical Society. Proc. Symp. Pure Math. 57, 529-541, 1995.

[Arn95b] Arnold, L. and Scheutzow, M., *Perfect cocycles through stochastic differential equations*, Probab. Theory Relat. Fields **101** (1995), no. 1, 65–88.

[Arn96] Arnold, L. and Imkeller, P., *Stratonovich calculus with spatial parameters and anticipative problems in multiplicative ergodic theory*, Stochastic Processes Appl. **62** (1996), no. 1, 19–54.

[Arn98a] Arnold, L., *Random dynamical systems*, Springer Monographs in Mathematics. Berlin: Springer. xi, 1998.

[Arn98b] Arnold, L. and Imkeller, P., *Normal forms for stochastic differential equations*, Probab. Theory Relat. Fields **110** (1998), no. 4, 559–588.

[BM81] J.-M. Bismut and D. Michel, *Diffusions conditionelles I. Hypoellipticite partielle*, J. Funct. Anal. (1981), no. 44, 174–211.

[BM82] J.-M. Bismut and D. Michel, *Diffusions conditionelles II. Generateur conditionel. Application au filtrage*, J. Funct. Anal. (1982), no. 45, 274–292.

[Cas93] F. Castell, *Asymptotic expansion of stochastic flows*, Probab. Theory Relat. Fields **96** (1993), no. 2, 225–239.

[IL99] P. Imkeller and C. Lederer, *An explicit description of the Lyapunov exponents of the noisy damped harmonic oscillator*, Dyn. Stab. Syst. **14** (1999), no. 4, 385–405.

[IL01a] P. Imkeller and C. Lederer, *On the cohomology of flows of stochastic and random differential equations*, Probab. Theory Relat. Fields **120** (2001), no. 2, 209–325.

[IL01b] P. Imkeller and C. Lederer, *Some formulas for the Lyapunov exponents and rotation numbers in two dimensions and the stability of the harmonic oscillator and the inverted pendulum*, Dynamical Systems **16** (2001), no. 1, 29–61.

[IS99] P. Imkeller and M. Scheutzow, *On the spatial asymptotic behavior of stochastic flows in euclidean space*, Ann. Probab. **27** (1999), no. 1, 109–129.

[IS01] P. Imkeller and B. Schmalfuss, *The conjugacy of stochastic and random differential equations and the existence of global attractors*, Journal of Dynamics and Differential Equations **13** (2001), no. 2, 215–249.

[KL81] A. Krener and C. Lobry, *The complexity of stochastic differential equations*, Stochastics (1981), no. 4, 193–203.

[Kun81] Kunita, H., *On the decomposition of solutions of stochastic differential equations*, Stochastic integrals, Proc. LMS Durham Symp. 1980, Lect. Notes Math. 851, 213-255, 1981.

[Kun97] Kunita, H., *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 24. Cambridge: Cambridge University Press. xiv, 1997.

[Ose68] V.I. Oseledets, *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems.*, Trans. Moscow. Math. Soc. **19** (1968), 197–231.

[Pal73] Palmer, K. J., *A generalization of Hartman's linearization theorem*, J. Math. Anal. Appl. **41** (1973), 753–758.

[Pro90] Protter, P., *Stochastic integration and differential equations. A new approach*, Applications of Mathematics, 21. Berlin etc.: Springer-Verlag. x, 1990.

[Wan93] Wanner, T., *Zur Linearisierung zufälliger dynamischer Systeme*, Dissertation, Math.-Naturwiss. Fak. Univ. Augsburg, 1993.

Lebenslauf

23.02.1964	geboren in München
1974 – 1983	Chiemgau-Gymnasium Traunstein
06/1983	Abitur
07/1983 – 09/1986)	Wehrdienst
09/1984 – 07/1986	Studium der Physik an der LMU München
07/1986	Wechsel zum Fach Mathematik
11/1987	Vordiplom im Fach Mathematik (Gesamtnote "sehr gut")
06/1993	Diplom im Fach Mathematik (Gesamtnote "sehr gut") Thema der Diplomarbeit: "Lokalzeiten von Diffusionen auf Mannigfaltigkeiten"
11/1993 – 9/1996	wiss. Mitarbeiter am math. Institut der LMU München (Assistent am Lehrstuhl Kellerer)
10/1996 – 09/2001	wiss. Mitarbeiter am math. Institut der Humboldt-Universität zu Berlin (Assistent bei Prof. Imkeller)

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig ohne fremde Hilfe verfaßt habe und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet habe.

Christian Lederer

7. Juli 2001