

# Inhaltsverzeichnis

<b>0. Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>1. Darstellung und Rekonstruktion von Dichteoperatoren mit Hilfe einfacher Projektoren</b>	<b>7</b>
1.1. Verschiedene Darstellungen von Dichteoperatoren . . . . .	7
1.1.1. Die zugrundeliegende Idee . . . . .	8
1.2. Die Minimaldarstellung von Dichteoperatoren . . . . .	9
1.2.1. Fehlerempfindlichkeit und ihre Minimierung . . . . .	12
1.3. Das Operatorbasisschema . . . . .	13
1.4. Quantenoptische Realisierung . . . . .	15
1.5. Anmerkungen . . . . .	19
<b>2. Synthese von Fockzuständen mit einem <math>N</math>-Port</b>	<b>21</b>
2.1. Warum sind Fockzustände interessant? . . . . .	21
2.2. Schemata zur Synthese von Fockzuständen . . . . .	21
2.2.1. Bisherige Vorschläge . . . . .	21
2.3. Fockzustandssynthese mit einem $N$ -Port . . . . .	22
2.3.1. Zum symmetrischen Strahlteiler . . . . .	23
2.3.2. Synthese von Zwei- und Vierphoton-Fockzuständen . . . . .	25
2.3.3. Synthese von $2^q$ -Photon Fockzuständen . . . . .	27
2.4. Unitäre Schemata zum Vergleich . . . . .	29
2.5. Über die Herstellung des Eingangszustandes und Nachweisprobleme .	32
2.5.1. Zufällige Quellen . . . . .	32
2.5.2. Deterministische Quellen . . . . .	33
2.6. Abschlußbetrachtung des vorgestellten Schemas . . . . .	34
<b>3. Was kann Licht über das aussendende Atom mitteilen?</b>	<b>37</b>
3.1. Vorgeschichte . . . . .	37
3.2. Unser Zugang . . . . .	38

3.3.	Das Modell . . . . .	39
3.3.1.	Der Hamiltonian . . . . .	40
3.4.	Die verallgemeinerte Weisskopf-Wigner Lösung . . . . .	42
3.4.1.	Struktur der Lösung . . . . .	43
3.5.	Näherungen . . . . .	44
3.5.1.	Die Näherung kleiner Geschwindigkeiten $v \ll c$ . . . . .	45
3.6.	Dichtematrix des Feldes . . . . .	46
3.7.	Interpretation . . . . .	48
3.7.1.	Zur Illustration: Die Fernfeldintensität . . . . .	49
3.8.	Helfen andere Niveauschemata weiter? . . . . .	51
3.9.	Andere Methoden . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Dekohärenz durch spontane Emission</b>	<b>55</b>
4.1.	Bedeutung der Dekohärenz im Interferenzexperiment . . . . .	55
4.2.	Mathematische Herleitung von $\hat{\rho}_{emitt}$ . . . . .	59
4.3.	Konditionale Interferenzmuster . . . . .	62
4.3.1.	Detektorraumwinkel $\Delta\Omega = 4\pi$ . . . . .	64
4.3.2.	Detektorraumwinkel $\Delta\Omega < 4\pi$ . . . . .	66
4.4.	Dekohärenz: Mechanismus und Interpretation . . . . .	69
4.4.1.	Phasenauswaschung . . . . .	70
4.4.2.	Komplementaritätsargument . . . . .	70
4.5.	Apparaturunabhängigkeit . . . . .	72
4.5.1.	Viele bedingte Muster . . . . .	73
4.6.	Freie und gestörte Bewegung . . . . .	75
4.6.1.	Mögliche Interferenzmusteränderungen . . . . .	75
4.6.2.	Freie Bewegung . . . . .	77
4.6.3.	Gestörte Bewegung . . . . .	79
4.7.	Resümee . . . . .	82
<b>5.</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>83</b>

<b>A Anhang</b>	<b>86</b>
A1. Herleitung der Intensitätsgleichung (3.18) . . . . .	86
A2. Herleitung der Dekohärenzfunktion (4.19) . . . . .	87
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>90</b>

## 0. Einleitung

Dieses ist eine theoretische Arbeit, die im Gebiet der Quantenoptik [1]-[7] – der Quantentheorie des Elektromagnetismus und seiner Wechselwirkungen mit der Materie – angesiedelt ist. Teile von ihr sind von ungeklärten experimentellen Fragestellungen beeinflusst, die hier ihre Beantwortung finden.

Themen dieser Arbeit sind die mathematische Darstellung, meßtechnische Rekonstruktion und Präparation von Quantenzuständen sowie ihre Veränderung durch Messungen, was dieser Arbeit, in griffiger Verkürzung, ihren Titel gibt:

„Neue Methoden zur Messung und Veränderung von Quantenzuständen“.

Hauptgegenstand der Betrachtungen sind also quantenmechanische Systemzustände, deren vollständige Beschreibung mit Hilfe von Dichteoperatoren  $\hat{\rho}_{System}$  geschieht. Diese Beschreibungsebene wird hier, wann immer sinnvoll, gewählt; somit bewegt diese Arbeit sich formal meist auf der Ebene der Herleitung, Behandlung und Auswertung interessierender Systemeigenschaften mit Hilfe von Dichteoperatoren.

Die folgende Kurzübersicht soll knapp über den Inhalt der vier Kapitel dieser Arbeit informieren und die dahinterstehende Motivation beleuchten:

1. stellt ein allgemeines, mathematisches und somit abstraktes Schema zur Darstellung von Dichteoperatoren mit Hilfe von Projektionsoperatoren vor. Dieses Schema erlaubt im Prinzip eine Übersetzung in experimentelle Methoden zur Rekonstruktion von Dichteoperatoren. Die quantenoptische Implementierung einer solchen Rekonstruktionsmethode wird abgeleitet. Der Stoff dieses Kapitels

liegt der Veröffentlichung [8] zugrunde.

2. erörtert ein Schema zur Synthese von Fockzuständen mit Hilfe eines linearen Mischers. Diese viel gefragten Zustände sind bisher nur in dem Spezialfall eines Einphoton-Fockzustandes erzeugbar. Die für diesen Zweck optimale Konfiguration eines linearen Mischers wird ermittelt und ihre Eigenschaften diskutiert. Der Stoff dieses Kapitels ist zur Veröffentlichung [9] eingereicht.
3. klärt die kürzlich aufgeworfene Frage, ob spontan emittiertes Licht, welches von einem Atom mit erheblicher Ortsausbreitung emittiert wird, Selbstinterferenzen zeigen kann und im Umkehrschluß auf die kohärente Struktur der Schwerpunktswellenfunktion des emittierenden Atoms zurückschließen läßt. Zu diesem Zweck wird der Dichteoperator des emittierten Feldes bestimmt und untersucht. Der Stoff dieses Kapitels erscheint als Veröffentlichung [10].
4. gibt kürzlich gewonnene Meßresultate zum Kohärenzverlust von Atomen in einem Atomstrahlinterferenzexperiment durch spontane Emission in der hier gewählten Sprache des Dichteoperatorformalismus wieder und verallgemeinert diese Resultate auf Messungen, die demnächst durchgeführt werden sollen. Die Ergebnisse dieses Kapitels sind aus mehreren Perspektiven dargestellt, was eine weitgehende anschauliche Durchdringung des behandelten Themas erlaubt. In den Veröffentlichungen [11] und [12] sind die Ergebnisse dieses Kapitels zusammengefaßt.

Grob gesehen weist die Anordnung der Kapitel vom abstrakten Schema zum konkreten System. Nichtsdestoweniger sind auch die letzten beiden Kapitel von allgemeinem Interesse, da sie anhand eines konkreten Systems die allgemeine Frage der Kohärenzzerstörung durch den Meßprozeß betrachten. Zusammengenommen stellen sie eine Untersuchung des Ortsmeßprozeß im Dichteoperatorformalismus dar.

Ein Formalismus, dessen Eleganz – wie ich hoffe – in dieser Arbeit insgesamt schön zu Tage tritt.



# 1. Darstellung und Rekonstruktion von Dichteoperatoren mit Hilfe einfacher Projektoren

In diesem Kapitel wird ein mathematisches **Schema** zur Darstellung beliebiger linearer Operatoren vorgestellt, welches benutzt wird, um zwei eng miteinander verwandte **Darstellungen** quantenmechanischer Dichteoperatoren zu gewinnen:

- Die **Minimaldarstellung** und
- die **Operatorbasisdarstellung**.

Diese sind mit dem Ziel abgeleitet, eine allgemeine mathematische Darstellung von Operatoren mit Hilfe von Projektoren zu erlauben und bei der meßtechnischen Rekonstruktion des Dichteoperators eines beliebigen Quantensystems zu helfen.

Ihre quantenoptische Übersetzung zeigt die prinzipielle Anwendbarkeit dieser Darstellungen zur **experimentellen Rekonstruktion beliebiger Dichteoperatoren**.

## 1.1. Verschiedene Darstellungen von Dichteoperatoren

Ein Systemzustand wird quantenmechanisch durch einen Dichteoperator beschrieben, nach heutigem Erkenntnisstand ist er damit physikalisch vollständig charakterisiert [13]. Quantenmechanische Zustände weisen mitunter schwer verstehbare Eigenschaften auf, z.B. nichtklassische Superpositionen [13, 14, 15, 16] und nichtlokale Korrelationen [13, 14, 16, 17]. Darum ist das Studium der unverstandenen Eigenschaften quantenmechanischer Zustände nach wie vor ein aktuelles Thema der Physik. Gerade die Quantenoptik erlaubt viele dieser Eigenschaften im Labor zu untersuchen und genauer zu verstehen [18, 19, 20, 21].

Der Versuch die Zustände eines Systems vollständig zu charakterisieren hat in verschiedenen Gebieten der Quantenphysik zu einer großen Anzahl von Vorschlägen zur Darstellung und meßtechnischen Bestimmung von Dichteoperatoren geführt [22]-[30].

Zur impliziten Bestimmung von Dichteoperatoren mit Hilfe von Quasiwahrscheinlichkeitsverteilungen hat gerade die Quantenoptik in letzter Zeit sehr erfolgreich beigetragen [31, 32, 33, 34]; ein Übersichtsartikel zu diesem Thema von Leonhardt und Paul findet man in Quelle [35]. Zur Zeit am erfolgreichsten ist die optische Homodyntomographie (Theorie: [31], Experiment: [29]), für sie existieren auch gut ausgearbeitete Rekonstruktionsschemata zur Kompensation der Effekte nichtidealer Photodetektoren [36, 37].

Andere Methoden [38, 39, 40] widmen sich auch der Rekonstruktion des Quantenzustandes für den Fall, daß das System nur im Reinen, nicht im Gemischzustand vorliegt.

### 1.1.1. Die zugrundeliegende Idee

Das hier vorgestellte Projektorschema [8] erlaubt die Darstellung linearer Operatoren, ist also auch auf Dichteoperatoren  $\hat{\rho}$  anwendbar. Es weicht von den bekannten quantenoptischen Schemata zur Bestimmung eines Dichteoperators dadurch ab, daß Projektoren Verwendung finden, die auf Basiszustände oder eine lineare Superposition zweier Basiszustände projizieren, ähnlich wie bei den Vorschlägen von Gale [23] und Royer[27].

Da die *Erwartungswerte von Projektoren im Prinzip der Messung zugänglich* sind, kann das hier vorgeführte Schema zur experimentellen Bestimmung von Dichteoperatoren eingesetzt werden. Allerdings ist an dieser Stelle einschränkend hinzuzufügen, daß ein allgemeines Schema zur Übersetzung eines Operators in eine Meßvorschrift genauso wenig existiert, wie ein allgemeines Schema zur Übersetzung von Meßvorschriften in dazu korrespondierende quantenmechanische Operatoren.

### Wieviele Projektoren?

Gegeben sei ein System, dessen Zustände in einem Hilbertraum abzählbarer Dimension  $N$  darstellbar sind. Nun sei *ein beliebiges orthonormales Basissystem* mit den Zuständen  $|m\rangle$  mit  $m = 1, \dots, N$  gewählt. In den Fällen abzählbar unendlich großer

Räume gilt für alle Ausdrücke in diesem Kapitel, die  $N$  enthalten, daß sie den Wert Unendlich annehmen – allerdings erlaubt das Schema sich auf endliche Teilräume zu beschränken, sofern dieses gewünscht ist.

Unser vorrangiges Ziel ist die Darstellung der  $N^2 - 1$  unabhängigen<sup>1</sup> Dichtematrixelemente  $\varrho_{nm} \equiv \langle n | \hat{\varrho} | m \rangle$  mit Hilfe von Erwartungswerten einfacher Projektionsoperatoren. Offenkundig können diese Matrixelemente nicht allein durch die  $N - 1$  unabhängigen<sup>2</sup> Erwartungswerte  $\varrho_{mm} = \langle |m\rangle \langle m| \rangle$  der Menge der  $N$  Basisprojektoren  $|m\rangle \langle m|$  ausgedrückt werden, weil hierbei wichtige Kohärenzinformationen, die durch die Nebendiagonalelemente  $\varrho_{nm}$  der Dichtematrix beschrieben werden, verlorengehen.

Die einfachste denkbare Verallgemeinerung besteht darin, die größere Menge der Linearkombinationen zweier einfacher Basiszustände  $c_1 |n\rangle + c_2 |m\rangle$  zu benutzen, dieses ist das Schema, nach dem verfahren werden soll. Mit seiner Hilfe ist es möglich  $N^2$  Projektoren zu konstruieren und es wird gezeigt, daß damit die Konstruktion der genannten Darstellungen bis hin zu einer neuartigen quantenoptischen Implementierung dieser Idee möglich ist.

## 1.2. Die Minimaldarstellung von Dichteoperatoren

Die Minimaldarstellung wird so genannt, weil sie die für den allgemeinen Fall geringstmögliche Anzahl von Projektionsoperatoren benötigt und daher zu dem *effizientesten* allgemeinen Schema führt; sie ist eine Verallgemeinerung dessen, was schon vor längerer Zeit von Gale [23] und Royer [27] hergeleitet wurde.

Zur Vereinfachung beschränken wir uns erst auf den  $\{|n\rangle, |m\rangle\}$ -Unterraum des Hilbertraums, der durch zwei beliebige Basisvektoren  $|n\rangle$  und  $|m\rangle$ ,  $n \neq m$  aufgespannt

---

<sup>1</sup> $N^2$  unabhängige Matrixelemente des hermiteschen  $N \times N$  Dichteoperators samt seiner Normierungsbedingung  $\text{Tr} \hat{\varrho} = 1$  ergibt  $N^2 - 1$  effektiv unabhängige Elemente.

<sup>2</sup> $N$  Diagonalelemente abzüglich der Normierungsbedingung ergeben  $N - 1$ .

ist. Wir definieren nun den Zustand

$$|a\rangle \equiv N_a(|n\rangle + a|m\rangle), \quad (1.1)$$

mit dem nichtverschwindenden Koeffizienten

$$a \equiv |a|e^{i\alpha} \quad (1.2)$$

und der Normierungskonstanten  $N_a = 1/\sqrt{1 + |a|^2}$ .

Eine entsprechende Nomenklatur sei für einen zweiten Zustand  $|b\rangle = N_b(|n\rangle + b|m\rangle)$ , mit  $b = |b|e^{i\beta} \neq a$ , desselben Unterraums verwandt.

Weitere Einschränkungen der Werte von  $a$  und  $b$  werden sich später aus der geforderten Unabhängigkeit der aus diesen Zuständen gebildeten Projektoren

$$\begin{aligned} \hat{A} &\equiv |a\rangle\langle a| = |N_a|^2(|n\rangle + a|m\rangle)(\langle n| + a^*\langle m|) \\ \text{und } \hat{B} &\equiv |b\rangle\langle b| = |N_b|^2(|n\rangle + b|m\rangle)(\langle n| + b^*\langle m|) \end{aligned} \quad (1.3)$$

ergeben.

Lassen Sie uns nun annehmen, daß durch Messungen die Erwartungswerte der Projektoren  $\hat{A}$  und  $\hat{B}$  ebenso bekannt sind, wie für deren einfachere<sup>3</sup> Spezialfälle  $|n\rangle\langle n|$  und  $|m\rangle\langle m|$ . Da letztere die Diagonalmatrixelemente  $\varrho_{nn}$  und  $\varrho_{mm}$  liefern, können wir diese Erwartungswerte auf folgende Weise zu einem kombinierten Meßwert  $M_{|a\rangle}$  zusammenfassen

$$\begin{aligned} M_{|a\rangle} &\equiv \text{Tr}\{\hat{\rho}\hat{A}\} - N_a^2(\varrho_{nn} + |a|^2\varrho_{mm}) \\ &= N_a^2(a\varrho_{nm} + a^*\varrho_{mn}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Hierbei steht  $\text{Tr}$  (trace) für die Spurbildung und  $M_{|a\rangle}$  für das Resultat der Kombinationsmessung<sup>4</sup> unter Benutzung des Projektors  $\hat{A}$ . Einen entsprechenden Ausdruck

---

<sup>3</sup>Wenn es gelingt  $\langle\hat{A}\rangle$  und  $\langle\hat{B}\rangle$  zu messen, so  $\langle|n\rangle\langle n|$  und  $\langle|m\rangle\langle m|$  erst recht (Setze  $a = 0$  bzw.  $a = \infty'$ ).

<sup>4</sup>Wir setzen hierbei voraus, daß wir aus dem hypothetischen Experiment genaue Information über  $\hat{A}$  ermitteln und insbesondere den Wert von  $a$  bzw.  $N_a^2$  kennen.

erhält man für den kombinierten Meßwert  $M_{|b\rangle}$  des Projektors  $\hat{B}$ . Drückt man  $\varrho_{nm}$  durch seinen Real- und Imaginärteil  $\varrho_{nm} \equiv R + iJ$  aus, so bieten sich folgende Definitionen an (beachte (1.4) und (1.2))

$$\begin{aligned} m_{|a\rangle} &\equiv \frac{M_{|a\rangle}}{2|a|N_a^2} = R \cos \alpha - J \sin \alpha, \\ \text{und } m_{|b\rangle} &\equiv \frac{M_{|b\rangle}}{2|b|N_b^2} = R \cos \beta - J \sin \beta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Aufgelöst nach  $R$  und  $J$  liefern diese

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R \\ J \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sin(\beta - \alpha)} \begin{pmatrix} \sin \beta & -\sin \alpha \\ \cos \beta & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{|a\rangle} \\ m_{|b\rangle} \end{pmatrix} \\ &\equiv \mathbf{T} \begin{pmatrix} m_{|a\rangle} \\ m_{|b\rangle} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Offensichtlich erwächst daraus die Forderung  $\beta - \alpha \neq k\pi$  mit  $k$  als einer beliebigen ganzen Zahl. Tatsächlich ist das die einzige, neben der trivialen Beschränkung, daß  $a$  und  $b$  nicht verschwinden sollen ( $a \neq 0 \neq b$ ).

Die fortgesetzte Anwendung dieser Prozedur für alle  $\{|n\rangle, |m\rangle\}$ -Unterräume mit  $1 \leq n < m \leq N$  erlaubt uns die Darstellung von  $\hat{\varrho}$  mit Hilfe der Erwartungswerte von  $N^2 - 1$  verschiedenen Projektoren. Aus der Zerlegbarkeit in Unterräume folgt, daß

*dieses Schema per Konstruktion nicht rekursiv ist,*

was einen großer Vorteil gegenüber rekursiven Schemata bedeutet, da auf diese Weise rekursionsbedingte Fehlerfortpflanzung und -akkumulation vermieden werden.

Die **Minimaldarstellung** benötigt nicht mehr Projektoren, als es unbekannte Matrixelemente gibt; weil sie außerdem fast gar keine Einschränkungen an die Projektionszustände, d.h. an die Koeffizienten  $a$  und  $b$  in Gl. (1.1) stellt, ist sie in zweierlei Hinsicht 'minimalistisch', daher ihr Name.

### 1.2.1. Fehlerempfindlichkeit und ihre Minimierung

Obwohl mathematisch befriedigend, ist die Minimaldarstellung bei der experimentellen Umsetzung für Meßfehler anfällig. Diese Anfälligkeit ist dann am geringsten, wenn man 'empfindlichkeitsoptimierte' Projektionszustände benutzt. Diese sind Zustände  $|a\rangle$  und  $|b\rangle$ , deren Koeffizienten zwei Bedingungen erfüllen:

$$|a| = |b| = 1 \text{ und } b = \pm ia . \quad (1.7)$$

Die erste Bedingung rührt von der Forderung her, daß  $m_{|a\rangle}$  in Gl. (1.5) möglichst wenig empfindlich auf Variationen von  $a$  reagieren soll, also gelten soll, daß  $\frac{\partial}{\partial a}(aN_a^2)^{-1} = 0$ . Ganz entsprechendes gilt für  $b$ .

Die zweite Bedingung rührt daher, daß der Gesamtmultiplikationsfaktor des Vektors  $(m_{|a\rangle}, m_{|b\rangle})$ , die Determinante von  $\mathbf{T}$  in Gl. (1.6), möglichst wenig empfindlich für Variationen der relativen Phase  $\beta - \alpha$  sein soll. Daraus folgt, daß  $\beta - \alpha$  ein ungeradzahlig Vielfaches von  $\pi/2$  oder  $b = \pm i a$  sein soll.

Die erwähnte Anfälligkeit für experimentelle Fehler kann natürlich auf einfache Weise weiter gemindert werden, indem man eine Überbestimmtheit des Gleichungssystems (1.6) konstruiert. Fügt man beispielsweise einen weiteren Projektionszustand  $|c\rangle \equiv N_c(|n\rangle + c|m\rangle)$  in jedem  $\{n, m\}$ -Unterraum hinzu, wobei  $c = |c|e^{i\gamma}$ , so ergibt sich eine Ergänzung des Gleichungssystems (1.5) durch die Beziehung

$$m_{|c\rangle} = \frac{m_{|a\rangle} \sin(\beta - \gamma) - m_{|b\rangle} \sin(\alpha - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)} . \quad (1.8)$$

Diesen Zusammenhang für  $m_{|c\rangle}$  gewinnt man dabei ganz analog zu den Gleichungen (1.5) und (1.4). Hierbei sollen  $\alpha - \gamma$ ,  $\beta - \gamma$  und  $\alpha - \beta$  die Phasenwinkel zwischen den Zuständen  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$  und  $|c\rangle$  und keine Vielfachen von  $\pi$  sein.

Die hiermit eingeführte Überbestimmtheit der Gleichungen durch einen Extrazustand können nun zur Unterdrückung experimenteller Fehler benutzt werden. Z. B. könnte man korrigierte Werte von  $m_{|a\rangle}$ ,  $m_{|b\rangle}$  und  $m_{|c\rangle}$  als jenen Punkt  $(x, y, z)$  auf der Fläche

$z(x, y) = [x \sin(\beta - \gamma) - y \sin(\alpha - \gamma)] / \sin(\beta - \alpha)$  bestimmen, der dem Punkt  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  am nächsten kommt, welcher sich aus den Meßwerten ergibt, nachdem man  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  und  $\bar{z}$  mit den Meßwerten  $m_{|a\rangle}$ ,  $m_{|b\rangle}$  und  $m_{|c\rangle}$  identifiziert hat.

### 1.3. Das Operatorbasisschema

Das Operatorbasisschema beruht auf der Wahl eines ganz bestimmten Quartetts von Zuständen in jedem  $\{n, m\}$ -Unterraum:

$$\begin{aligned} |a_{\pm}^{nm}\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle \pm |m\rangle), \\ |b_{\pm}^{nm}\rangle &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle \pm i|m\rangle). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Wir wollen hier noch kurz notieren, daß alle Zustände (1.9) normiert sind, mit Ausnahme derer mit  $n = m$ , für welche wir  $|a_{+}^{nn}\rangle \equiv \sqrt{2}|n\rangle$ , bzw.  $|a_{-}^{nn}\rangle, |b_{\pm}^{nn}\rangle \equiv 0$  definieren wollen.

Nimmt man alle Unterräume zusammen, d.h.  $n, m = 1, 2, \dots, N$ , so läßt sich mit Hilfe dieser Projektionszustände eine komplette Operatorbasis des Hilbertraums mit ansprechenden mathematischen Eigenschaften herstellen; für eine Basis von Zuständen sind diese Projektionszustände natürlich übervollständig viele.

Die Projektionsoperatoren<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\pm}^{nm} &\equiv |a_{\pm}^{nm}\rangle\langle a_{\pm}^{nm}| \text{ und} \\ \hat{B}_{\pm}^{nm} &\equiv |b_{\pm}^{nm}\rangle\langle b_{\pm}^{nm}| \end{aligned} \quad (1.10)$$

---

<sup>5</sup>Strenggenommen sind die  $\hat{A}_{\pm}^{nn}/2$  Projektionsoperatoren, nicht aber die  $\hat{A}_{\pm}^{nn}$ . Trotzdem bezeichnen wir alle gleichermaßen als Projektoren.

sind in Analogie zu Gl. (1.3) definiert. Ihre  $2N^2 - N$  verschiedenen Erwartungswerte<sup>6</sup> reichen aus, um eine beliebige Dichtematrix  $\hat{\rho}$  in folgender Form darzustellen

$$\varrho_{mn} = \text{Tr}\{\hat{\rho} \frac{1}{2}[\hat{A}_+^{nm} - \hat{A}_-^{nm} + i(\hat{B}_+^{nm} - \hat{B}_-^{nm})]\} . \quad (1.11)$$

Dieses Form ist schon aus der Literatur bekannt [23, 27]. Nun können die Projektoren zu Operatoren  $\hat{R}^{nm}$ ,  $\hat{J}^{nm}$  zusammengefaßt werden

$$\begin{aligned} \hat{R}^{nm} &\equiv (\hat{A}_+^{nm} - \hat{A}_-^{nm})/\sqrt{2} = (|n\rangle\langle m| + |m\rangle\langle n|)/\sqrt{2} , \\ \hat{J}^{nm} &\equiv (\hat{B}_+^{nm} - \hat{B}_-^{nm})/\sqrt{2} = i(|n\rangle\langle m| - |m\rangle\langle n|)/\sqrt{2} , \end{aligned} \quad (1.12)$$

welche folgende Orthogonalitätsrelationen erfüllen

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\hat{R}^{nm}\hat{R}^{pq}\} &= (\delta_{n,p}\delta_{m,q} + \delta_{n,q}\delta_{m,p}) , \\ \text{Tr}\{\hat{J}^{nm}\hat{J}^{pq}\} &= (\delta_{n,p}\delta_{m,q} - \delta_{n,q}\delta_{m,p}) , \\ \text{und } \text{Tr}\{\hat{R}^{nm}\hat{J}^{pq}\} &= 0 . \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dabei laufen die Indizes über die Werte  $n, m, p, q = 1, \dots, N$  und mit  $\delta_{n,m}$  ist das Kroneckersche Delta gemeint. Die Menge  $\{\hat{R}^{mn}, \hat{J}^{mn} : n \leq m\}$  formt eine vollständige Operatorbasis aus  $N^2$  Operatoren. Diese Operatorbasis liefert eine eindeutige Darstellung eines **jeden linearen Operators**  $\hat{Q}$  als

$$\hat{Q} = \sqrt{2} \left( \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} r_{nm} \hat{R}^{mn} + j_{nm} \hat{J}^{mn} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^N r_{mm} \hat{R}^{mm} , \quad (1.14)$$

mit  $r_{nm} = \text{Tr}\{\hat{Q}\hat{R}^{mn}\}/\sqrt{2} = (Q_{mn} + Q_{nm})/2$

und  $j_{nm} = \text{Tr}\{\hat{Q}\hat{J}^{mn}\}/\sqrt{2} = (Q_{mn} - Q_{nm})i/2$ .

Ist  $\hat{Q}$  hermitesch, so sind  $r_{nm}$  und  $j_{nm}$  Real- und Imaginärteil seiner Matrixelemente  $Q_{nm} \equiv \langle n|\hat{Q}|m\rangle$ .

---

<sup>6</sup>Es sind insgesamt  $N + \sum_{n<m}^N 4 = N + 2N(N-1)$  Projektoren zur Darstellung der Diagonal- und Nebendiagonalelemente von  $\hat{\rho}$ .

Wegen Gleichungen (1.13) und (1.14) wollen wir diese Darstellung **Operatorbasisdarstellung** nennen. Sie ist hier eher aus mathematischen als aus physikalischen oder gar meßtechnischen Gründen eingeführt. Die Idee, Dichtematrizen nach einer orthogonalen Operatorbasis zu entwickeln, geht auf Fano zurück [22].

Da die auf Seite 12 erwähnten empfindlichkeitsoptimierten Projektionszustände auf einfache Weise zu diesem Schema erweitert werden können, ist die Operatorbasisdarstellung in gewissem Sinne ein Spezialfall der Minimaldarstellung.

## 1.4. Quantenoptische Realisierung

Als nächstes skizzieren wir ein hypothetisches experimentelles Schema zur Rekonstruktion eines Dichteoperators, welcher den Zustand einer einzelnen optischen Feldmode charakterisieren soll. Eine verallgemeinerte Version für mehrere Feldmoden kann aus diesem Schema zusammengesetzt werden. Dieses Einmodenschema orientiert sich an der Minimaldarstellung und stellt eine ihrer möglichen Umsetzungen dar.

(Eine andere mögliche Realisierung ist bei Gale [23] diskutiert, wo vorgeschlagen wird, Stern-Gerlach-Spinfiler zur Bestimmung der Dichtematrix eines Spinzustandes zu benutzen.)

Wir spezifizieren an dieser Stelle die *zu benutzende Basis* als die *Basis der Fockzustände* der betrachteten Mode. Ein Fockzustand  $\{|m\rangle : m = 0, 1, 2, \dots\}$  ist ein Zustand, der genau  $m$  Lichtteilchen in der Mode enthält.

Die Fockzustände werden hier gewählt, weil sie ein einfaches mathematisches Transformationsverhalten beim Passieren von Strahlteilern an der Tag legen und in diesem Vorschlag Strahlteiler benutzt werden sollen, um den gewünschten Projektor durch Mischung bekannter Fockzustandskombinationen mit unbekanntem Feldzuständen zu erhalten.

Als erstes muß also gezeigt werden, daß die Erwartungswerte der Projektionsoperatoren  $\hat{A}_{\pm}^{nm}$ ,  $\hat{A}$ , etc. wirklich im Experiment erhältlich sind. Es sei gleich vorweggeschickt,

daß der experimentell schwierige Teil des hier vorgestellten Vorschlags die Erzeugung der Fockzustände als Referenzzustände ist. Diese Schwierigkeit ist es, weswegen einstweilen von einem hypothetischen Experiment die Rede ist. Allerdings gibt es einige theoretische und experimentelle Ergebnisse, die einen hoffen lassen, daß das Problem der Erzeugung der Fockzustände und linearer Superpositionen von Fockzuständen gelöst werden wird. An dieser Stelle wird nicht darauf eingegangen, weil Kapitel 2. eigens dem Thema der Fockzustandserzeugung gewidmet ist.

Nehmen wir also die Verfügbarkeit der benötigten Superpositionen von Fockzuständen als gegeben an. Die gesuchten Erwartungswerte, um unsere Aufgabe zu erledigen, können dann mit Hilfe eines experimentellen Aufbaus, wie er in Abbildung 1 skizziert ist, ermittelt werden.

Ein Referenzfeld wird in einem experimentell kontrollierten Zustand  $|\psi\rangle$  präpariert und in Eingang 1 des mischenden Strahlteilers  $\mathcal{S}$  geschickt. Das unbekannte, zu bestimmende Signalfeld im Zustand  $\hat{\rho}$  benutzt Eingang 2 desselben Strahlteilers. Eine gemeinsame Lichtquelle zur Erzeugung dieser beiden Felder sollte benutzt werden, um Kohärenzprobleme – etwa durch relative Phasenschwankungen – zu verkleinern. Im Prinzip könnten auch verschiedene Quellen genutzt werden [41, 42, 1]. Die Verbundwahrscheinlichkeit der Photonenzahl an den Ausgängen des Strahlteilers wird aus der Zählstatistik der Photodetektoren  $I$  und  $II$  für viele Experimentdurchläufe ermittelt.

Für Multiphotonzählungen in Koinzidenz gibt es neue experimentelle Resultate, die auf Quanteneffizienzen von über 70% schließen lassen [43, 44, 45].

Außerdem gibt es eine neue entwickelte Technik zur Photonenzählung, wie Munroe *et al.* [46] sie vorgestellt haben. Sie erlaubt es, die Photonenzahl durch eine phasengemittelte Homodynmessung zu ermitteln, welche Einzelphotonen- und sehr hohe Zeitauflösung in der Größenordnung von 300fs zu liefern. Benutzt man noch die entsprechenden Rekonstruktionsschemata [36, 37], so erlaubt diese Technik beinahe perfekte Messungen der Photonenzahlstatistik.

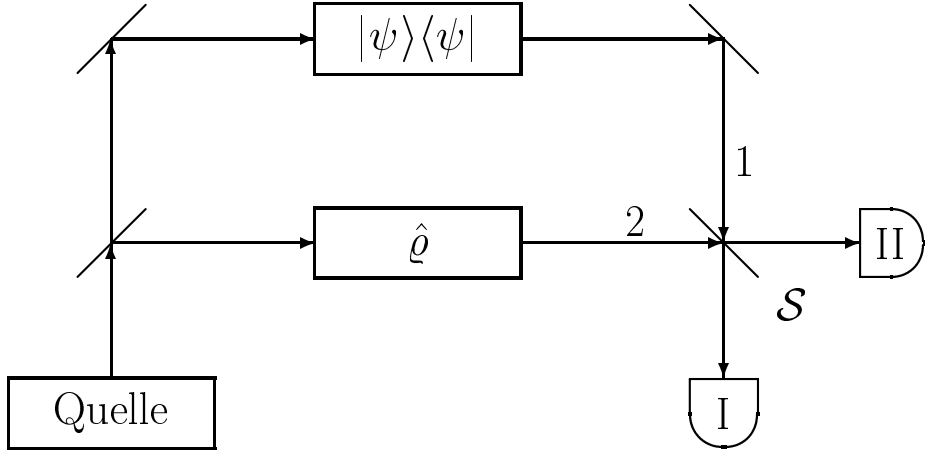


Abbildung 1: Skizze des quantenoptischen Schemas. Licht von einer Quelle wird geteilt und einerseits zur Herstellung des Signalfeldes  $\hat{\varrho}$  benutzt, andererseits in eine Vorrichtung eingespeist, die in der Lage ist, ein Referenzfeld  $|\psi\rangle\langle\psi|$  herzustellen. Referenz- und Signalfeld passieren einen Strahlteiler  $\mathcal{S}$  über die Eingänge 1 und 2 und werden in einen verschränkten Ausgangszustand überführt, der durch die Photodetektoren  $I$  und  $II$  analysiert wird.

Hier wird ohnehin nur eine Effizienz von über 50% gefordert, weil ab dieser Schwelle die wahre Photonenzustatistik mit Hilfe einer inversen Bernoullitransformation, wie Lee [47, 48] sie diskutiert hat, rekonstruiert werden kann.

Deswegen dürfen wir bei unseren Betrachtungen den Einfluß der von '1' abweichenden Detektoreffizienz beiseite lassen und können uns auf den Fall der 'wahren' Photonenzustatistik  $P_{|\psi\rangle}(p, q)$  beschränken. Hierbei bezeichnen  $p$  und  $q$  die Anzahl der Photonen, welche durch (ideale) Photodetektoren  $I$  bzw.  $II$  gemessen, folglich ist

$$\begin{aligned}
 P_{|\psi\rangle}(p, q) &= \sum_{n'=0}^{p+q} \sum_{m'=0}^{p+q} \langle n' | \hat{\varrho} | m' \rangle \langle p+q-n' | \psi \rangle \langle \psi | p+q-m' \rangle \\
 &\quad \times A_p(n', p+q-n') A_p^*(m', p+q-m') .
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Die Strahlteileramplituden  $A_p(\nu, \mu)$  ergeben die Wahrscheinlichkeit in Mode  $I$  den Fockzustand  $|p\rangle_I$  vorzufinden, gesetzt den Fall, daß die Moden 1 und 2 in dem Produktzustand  $|\nu\rangle_1|\mu\rangle_2$  vorliegen und haben die Form

$$A_p(\nu, \mu) = (-1)^\nu \sqrt{\frac{p!(\nu + \mu - p)!}{\nu!\mu!}} e^{i\varphi_\tau(p-\mu)} e^{i\varphi_\rho(p-\nu)} \times \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{l=0}^{\mu} (-1)^k \binom{\nu}{k} \binom{\mu}{l} \sqrt{\tau^{\mu+k-l} \rho^{\nu-k+l}} \delta_{k+l,p}, \quad (1.16)$$

wobei  $\tau$  für Transmittivität und  $\rho$  für Reflektivität des Strahlteilers  $\mathcal{S}$ , sowie  $\varphi_\tau$  und  $\varphi_\rho$  für die korrespondierenden Phasenfaktoren stehen [49, 50, 51, 52]; die Bezeichnung sind von Campos *et al.* aus Referenz [52] übernommen.

Setzt man für  $|\psi\rangle$  den speziellen Referenzfeldzustand  $|a^{nm}\rangle$  mit  $n > m$  an – d.h. die lineare Superposition der Fockzustände  $|n\rangle$  und  $|m\rangle$ , siehe Gl. (1.1) – und benennt man  $p + q = N + n = M + m$ , so wird aus Gl. (1.15)

$$P_{|a^{nm}\rangle}(p, N + n - p) = N_a^2 [\varrho_{NN} |A_p(N, n)|^2 + |a|^2 \varrho_{MM} |A_p(M, m)|^2 + 2 \operatorname{Re}\{a \varrho_{MN} A_p(M, m) A_p^*(N, n)\}].$$

Wieder ist wie im vorhergehenden Kapitelabschnitt angenommen, daß die Diagonalelemente, d.h. die Photonenzahlen aus einer direkten Messung bekannt sind, ebenso wie der Wert von  $a$ , durch den Präparationsprozeß gewonnen, als bekannt vorausgesetzt wird. Wir können also äquivalent zur Gl. (1.4)  $P_{|a^{nm}\rangle}(p, N + n - p)$  benutzen, um die Größe

$$M_{|a^{nm}\rangle}(N, p) \equiv 2 \operatorname{Re}\{a \varrho_{MN} A_p(M, m) A_p^*(N, n)\} \quad (1.17)$$

zu bestimmen; 'Re' steht für den Realteil. Durch einen zweiten linear unabhängigen Zustand  $|b^{nm}\rangle$  erhalten wir ganz analog zu den Gleichungen (1.5) und (1.6) die Werte von  $\varrho_{MN}$ .

Die anderen in den vorhergehenden Kapitelabschnitten diskutierten Fälle können in entsprechender Weise behandelt werden.

*Wir haben die Minimaldarstellung in ein quantenoptisches Schema zur Bestimmung eines unbekanntes Dichteoperators einer Feldmode übersetzt.*

## 1.5. Anmerkungen

Der Wert von  $p$  in Gl. (1.17) kann beliebig aus dem Intervall  $(0 \leq p \leq N + n)$  gewählt werden. Damit gibt es  $N + n + 1$  verschiedene Wege zur Bestimmung des Werts von  $M_{|a^{nm}\rangle}(N, p)$  in Gl. (1.17).

Weiterhin können, wegen der Nebenbedingung  $n - m = M - N$ , in Gl. (1.17) die Matrixelemente  $\varrho_{(k+N-M)k}$  für  $k = 0, 1, 2, \dots$  allein aus den zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $P_{|a^{nm}\rangle}$  und  $P_{|b^{nm}\rangle}$  mit festgehaltenen Werten  $n$  und  $m$  bestimmt werden.

Und schließlich gilt, daß diese Implementierung redundant ist, weil – wie wir gerade gesehen haben – allein die Differenz  $n - m$  entscheidet, welche Matrixelemente ermittelt werden können. In diesem Sinne sind alle Referenzzustände  $|a^{st}\rangle$  mit  $s = t + n - m$  für beliebige Werte  $t = 0, 1, 2, \dots$  äquivalent.

Folglich erlaubt dieses Schema so viele Matrixelemente wie gewünscht zu ermitteln. Es ist allein durch Meßfehler und die experimentellen Schwierigkeiten bei der Herstellung passender Fockzustände begrenzt.

Im Gegensatz zu anderen Methoden [38, 39, 40], die im Zusammenhang mit der Ermittlung eines quantenmechanischen Zustandes vorgeschlagen wurden, ist das hier vorgeschlagene *Schema nicht rekursiv*. Bei jenen anderen Methoden benötigt man zur Errechnung eines Matrixelements im allgemeinen Werte zuvor errechneter Elemente, so daß die Gefahr einer großen Fehlerakkumulation droht, überdies sind jene Methoden nur für die Rekonstruktion *reiner* Zustände verwendbar.

Die diskutierten Darstellungen sind auf beliebige physikalische Systeme sowie auf beliebig ausgewählte Unterräume derselben anwendbar. æ



## 2. Synthese von Fockzuständen mit einem $N$ -Port

*In diesem Kapitel wird ein Schema zur Synthese von Fockzuständen für freilaufende Moden mit Hilfe eines  $N$ -Ports untersucht.*

### 2.1. Warum sind Fockzustände interessant?

Fockzustände sind Photonenzustände, d.h. Zustände mit einer scharf vorgegebenen Anzahl von Photonen in einer Mode. Weil sie sich aus einer genau definierten Anzahl von Lichtkorpuskeln zusammensetzen, sind sie ihrem Wesen nach fast ebenso elementar, wie das einzelne Lichtteilchen selbst. Fockzustände sind extremale Zustände, da sie keine Besetzungszahlschwankungen aufweisen, sie sind die maximal anzahlgequetschten Lichtzustände, weswegen ihre Benutzung z. B. für effizient rauschunterdrückte Messungen vorgeschlagen wurde [53].

Weil sie die Energieeigenzustände des freien elektromagnetischen Feldes sind und ein Orthogonalsystem aufspannen, sind sie nützlich für Feldoperator- und Zustandsdarstellungen in der „Fockdarstellung“ [1]-[7].

*Kurzum, sie sind Fundamentalzustände des quantisierten Lichtfeldes.*

### 2.2. Schemata zur Synthese von Fockzuständen

Es gibt zwar viele Ideen zur Erzeugung dieser Zustände von grundsätzlicher Wichtigkeit, aber die verlässliche Synthese von Fockzuständen mit einer Besetzungszahl größer als '1' [54, 55] ist ein ungelöstes Problem in der Quantenoptik.

#### 2.2.1. Bisherige Vorschläge

Im wesentlichen existieren zwei Wege für die Herstellung quantenmechanischer Zustände – der eine über die freie Entwicklung des präparierenden Systems, der andere über

eine durch Messungen hervorgerufene Auswahl, ggf. mit einer gesteuerten Rückkopplung auf die zustandserzeugende Apparatur.

Der erste Weg setzt voraus, daß die Zeitentwicklung des Anfangszustands zu einer späteren Zeit genau in den gewünschten Endzustand mündet, der andere, daß der Endzustand durch die Meßprozedur in die richtige Form projiziert werden muß, womit immer statistische Verluste verbunden sind.

Einige Vorschläge folgen der an und für sich besseren weil verlustlosen ersten Route [56, 57, 58]; andere Vorschläge folgen der zweiten Route, beispielsweise [59, 60, 61, 62] und auch der hier vorgestellte Vorschlag [9].

Die meisten bisherigen Vorschläge betrachten die Erzeugung von Fockzuständen in Resonatoren hoher Güte [59, 60, 56, 62, 63]. Der Vorschlag [58] und der hier vorgestellte sind auf freilaufende Moden, wie sie z. B. von Titulaer und Glauber behandelt wurden [64], zugeschnitten. Gegenüber der Fockzustandserzeugung in Resonatoren haben freilaufende Moden folgende Vorteile:

- Die Wechselwirkung der freilaufenden Moden mit den Resonatorwänden fällt weg – die so erzeugten Fockzustände wären also dank geringerer Materiewechselwirkungen stabiler als solche in Resonatoren.
- Freilaufende Felder sind per Konstruktion direkt zugänglich, sie können ohne Schwierigkeiten in weitere Versuche eingespeist werden.
- Die Frequenzen des verwandten Lichts sind, im Gegensatz zu den Resonatorfeldern, nicht auf Mikrowellen beschränkt.

### **2.3. Fockzustandssynthese mit einem $N$ -Port**

Die hier vorgestellte Hauptidee ist, mit mehreren niedrig besetzten Fockzuständen zu starten, um diese zu höherbesetzten zu kombinieren. Ihrer experimentellen Verfügbarkeit wegen ist in erster Linie an Einphotonen-Fockzustände  $|1\rangle$  gedacht. Weitere De-

tails zu ihrer Herstellung werden in dem nachfolgenden Abschnitt 2.5. behandelt. Es soll noch erwähnt sein, daß sie beispielsweise in spontanen Down-conversions-Prozessen [54] oder vielleicht per 'Photonendrehkreuz' (turnstile device) im Festkörper [65] erzeugt werden können. Um mehrere Einphotonen-Fockzustände zu einem höherbesetzten zu vereinigen, wird die Verwendung eines passiven, linearen Mischers mit  $N$  Ein- und Ausgängen, eines  $N$ -Ports, vorgeschlagen.

Wir können uns bei der Implementierung eines beliebigen  $N$ -Ports auf ein Feld justierter Strahlteiler und Phasenschieber als Mischer beschränken. Kürzlich wurde nämlich von Reck *et al.* gezeigt [66], daß damit alle  $N$ -Portoperationen durchgeführt werden können, besagte Spiegelfelder also allen denkbaren  $N$ -Ports isomorph sind.

Wir betrachten also verlustlose, halbdurchlässige Strahlteiler und Phasenschieber, welche so angeordnet sind, daß verschiedene Eingangs- in identische Ausgangsmoden übergehen können. Dieses vorausgesetzt, können einzelne Photonen an den Eingängen zu höher besetzten Zuständen an den Ausgängen überlappen. Allerdings ist hier der Zufall unvermeidbar, da aus Reversibilitätsgründen, also grundsätzlich, so viele Ausgänge wie Eingänge vorliegen müssen. Auf diese, wie wir sehen werden, zu große Anzahl von Ausgängen werden die einlaufenden Photonen per Zufall verteilt. Zusätzlich zur Kombination durch die Strahlteiler müssen also noch Überwachungsapparaturen benutzt werden, die erstens '*Photonenbuchhaltung*' – die Bilanzierung der Anzahl der Photonen – erlauben und zweitens *unerwünschte Superpositionen* der über die Ausgänge hinweg verschränkten Zustände zerstören, um reine Fockzustände und nicht diese Superpositionen zu erzeugen.

### 2.3.1. Zum symmetrischen Strahlteiler

Weil er der Grundbaustein dieses Abschnitts ist, betrachten wir zuerst einen einzelnen Strahlteiler (halbdurchlässiger Spiegel) mit den Eingängen 1 und 2, sowie den Ausgängen  $I$  und  $II$ , s. Abb. 2.

Nehmen wir an, daß der einlaufende Zustand die Form  $|m\rangle_1|n\rangle_2$  habe, also  $m$  Photonen in Eingang 1 und  $n$  Photonen in Eingang 2 eintreten, so entstehen an den Ausgängen

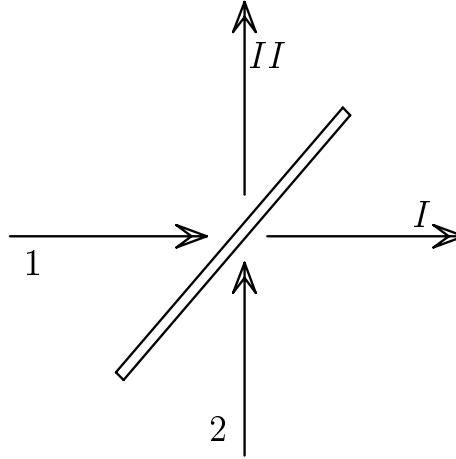


Abbildung 2: Schemazeichnung eines Strahlteilers mit Eingängen 1 und 2 sowie Ausgängen  $I$  und  $II$ .

Superpositionen aller möglichen Kombinationen  $|k\rangle_I |m+n-k\rangle_{II}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, m+n$ , welche durch Energieerhaltung erlaubt sind.

Für Spezialfälle fallen allerdings manche Koeffizienten  $c_k$  der Superposition

$$B^\dagger |m\rangle_1 |n\rangle_2 = \sum_{k=0}^{m+n} c_k |k\rangle_I |m+n-k\rangle_{II} \quad (2.1)$$

weg,  $B^\dagger$  beschreibt hierbei die Wirkung eines verlustlosen Strahlteilers, vgl. [52].

Da wir nur an der Erzeugung reiner Fockzustände interessiert sind, nicht an deren kohärenter Überlagerung (2.1), müssen wir die Anzahl der Photonen in einem der Ausgänge messen. Finden wir etwa  $n+m-k$  Photonen am Ausgang  $II$ , projizieren wir durch diese Messung den anderen Ausgang in den Fockzustand  $|k\rangle_I$ . Mit anderen Worten, der Zustand  $|k\rangle_I$  wird in kontrollierbarer Weise mit Wahrscheinlichkeit  $|c_k|^2$  erzeugt.

Benutzt man symmetrische, d.h. 50%:50%-Strahlteiler ( $B_{50}^\dagger$ ), können wir bestimmte Symmetrien ausnutzen, um viele, bestenfalls etwa die Hälfte dieser Verlustkanäle,

zu umgehen. Dieser beste Fall liegt vor, wenn man eine symmetrische Eingangskombination am symmetrischen Strahlteiler einsetzt, denn

$$B_{50}^\dagger |m\rangle_1 |m\rangle_2 = \sum_{k=0}^m c_{2k} |2k\rangle_I |2m - 2k\rangle_{II} , \quad (2.2)$$

d.h. alle ungeraden Koeffizienten  $c_{2k+1}$  verschwinden, s. [52, 67]. Das ist wichtig, weil sich die Gesamteffizienz der Erzeugung hochbesetzter Ausgänge verbessert, je weniger Kanäle offenstehen. Außerdem hat die ausschließliche Benutzung symmetrischer Strahlteiler den Vorteil, daß derselbe Strahlteiler im Experiment 'mehrfach benutzt' werden kann, was die Zahl notwendiger Komponenten verringert. Ferner ist die Photonenbuchhaltung dann sehr viel einfacher zu bewerkstelligen, wie wir unten sehen werden.

### 2.3.2. Synthese von Zwei- und Vierphoton-Fockzuständen

Falls zwei Einzelphotonen-Fockzustände  $|1\rangle_1 |1\rangle_2$  in einen symmetrischen Strahlteiler eintreten, wobei wir natürlich immer annehmen, daß die Moden am Strahlteiler perfekt überlappen, transformieren diese gemäß Gl. (2.2) in die Linearkombination  $c_0 |0\rangle_I |2\rangle_{II} + c_2 |2\rangle_I |0\rangle_{II}$ , mit den Beträgen von  $c_0$  und  $c_2$  gleich  $1/\sqrt{2}$ . Die Superposition  $|1\rangle_I |1\rangle_{II}$  ist nach Gl. (2.2) ausgeschlossen. Durch eine (Überwachungs-) Messung der Photonenzahl am Ausgang  $II$  erhalten wir also die Information, welcher der beiden möglichen Zustände  $|0\rangle_I$  oder  $|2\rangle_I$  erzeugt wurde. Dieses ist insbesondere eine hilfreiche Verteilung, als die Photonen an den Ausgängen nur als '**Zwillinge**' erscheinen können, was ihren Nachweis am Überwachungsausgang  $II$  erheblich vereinfacht.

Selbst für heute schon realisierte Detektoren mit einer Einzelphotonennachweisgüte  $\eta$  in der Größenordnung von bis zu 85% [43, 45] ergibt sich eine Gesamtgüte zum Nachweis eines Zweiphotonen Fockzustandes, wenn man, wie im hier vorliegenden Fall nur zwischen Vakuum oder zwei Photonen unterscheiden muß, von  $2\eta - \eta^2$  ( $= 0.9775$  bei  $\eta = 85\%$  [45]). Falls wir also den Eingangszustand  $|1\rangle_1 |1\rangle_2$  bereitstellen können, erzeugen wir den Fockzustand  $|0\rangle_I$  in 50% aller Fälle mit einer Nachweisverläßlichkeit

$(1 - \eta)^2$ . Der Zustand  $|2\rangle_I$  wird ebenso in 50% aller Fälle mit einer scheinbaren (zu hohen) Rate  $0.5 \cdot [1 + 1 - (1 - \eta)^2]$  nachgewiesen, weil die geringen Nachweisverluste des erstgenannten Falls hier fälschlich aufgeschlagen werden.

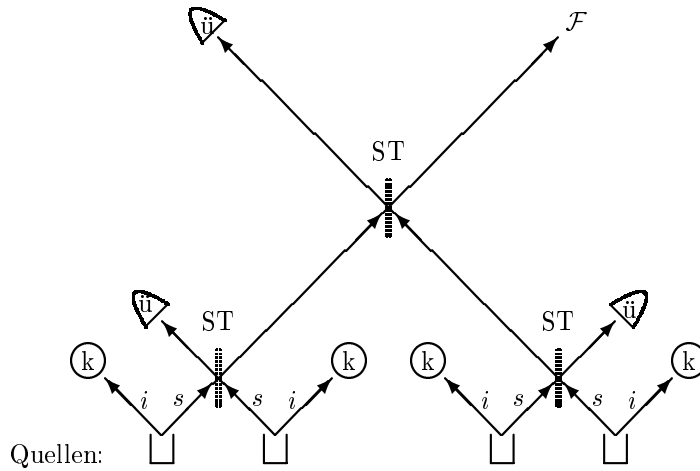


Abbildung 3: Der Aufbau des vorgeschlagenen Schemas zur Erzeugung von Fockzuständen ist hierarchisch. Am offengelassenen Ausgang  $\mathcal{F}$  soll ein Fockzustand  $|4\rangle$  erzeugt werden. 'ST' steht für Strahlteiler, 'ü' für Überwachungs- und 'k' für Koinzidenzdetektoren, welche gewährleisten sollen, daß die vier in Koinzidenz erzeugten Signalphotonen 's' durch die korrespondierenden Idlerphotonen 'i' nachgewiesen werden. Es ist zugrundegelegt, daß die Quellen von einem gemeinsamen kurzen Pumpimpuls gespeist werden [68] oder die Koinzidenzdetektoren 'k' ein so kleines Koinzidenzzeitfenster benutzen, daß ein hinreichendes Überlappen der Signalphotonpulse an den Strahlteilern gewährleistet ist [69, 70, 71].

Um einen Vierphotonen-Fockzustand zu erzeugen, wollen wir uns gleich auf den symmetrischen Fall beschränken und annehmen, daß mit Hilfe der eben diskutierten Prozedur erfolgreich 2 Zweiphotonen-Fockzustände  $|2\rangle_1|2\rangle_2$  erzeugt wurden, d.h. keine Photonen an den Überwachungsausgängen 'ü', s. Abb. 3, verloren gingen. Entsprechend (2.2) werden diese, durch einen symmetrischen Strahlteiler in den Ausgangszustand  $c_0 |0\rangle_I|4\rangle_{II} + c_2 |2\rangle_I|2\rangle_{II} + c_4 |4\rangle_I|0\rangle_{II}$  transformiert.

Als ein weiterer vorteilhafter Effekt kommt hier zum tragen, daß die Koeffizienten  $c_{2k}$  in Gl. (2.2) einer speziellen 'nichtklassischen' Verteilung gehorchen, welche eine Koeffizientenverteilung bewirkt, die hoch besetzte gegenüber schwächer besetzten Fockzuständen bevorteilt [52]. Z. B. gilt in unserem konkreten Fall  $|c_0| = |c_4| > \frac{1}{\sqrt{3}} > |c_2|$ , was bei der Erzeugung hoch besetzter Fockzustände natürlich erwünscht ist.

### 2.3.3. Synthese von $2^q$ -Photon Fockzuständen

Durch hierarchische Wiederholung des eben betrachteten Schemas, vgl. Abb. 3, können Fockzustände mit der Besetzungszahl  $2^q$ , wobei  $q$  eine ganze Zahl ist, erzeugt werden. Die korrespondierenden Verluste wachsen mit steigendem  $q$  stark an, d.h. man hat selten das Glück, daß sich alle  $2^q$  eingespeisten Photonen 'entschließen', zum selben Ausgang  $\mathcal{F}$  zu laufen. Um also zu bestimmen, wie effektiv unser Schema arbeiten kann, wollen wir jetzt den Spezialfall untersuchen, daß  $2^q$  Einphoton-Fockzustände unter idealen Bedingungen einen  $2^q$ -Photonen-Fockzustand an einem spezifizierten Ausgang  $\mathcal{F}$  erzeugen.

Wenn, auf der  $r$ -ten Ebene der Hierarchie, zwei  $|2^{r-1}\rangle$ -Zustände in die beiden Eingänge des  $r$ -ten Strahlteilers eintreten, wird an dessen Ausgang  $I$  der Zustand  $|2^r\rangle_I$  mit Wahrscheinlichkeit  $P_r$  auftreten:

$$P_r = \binom{2^r}{2^{r-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^r} . \quad (2.3)$$

$P_r \equiv P_{out}(2^r, 0|2^{r-1}, 2^{r-1})$  nach der Nomenklatur von [52]. Folglich gilt für die Wahrscheinlichkeit  $p_{2^q}$ , den Fockzustand  $|2^q\rangle_I$  nach der  $q$ -ten Hierarchieebene zu erhalten, folgende Rekursion

$$p_{2^q} = P_q (p_{2^{q-1}})^2 . \quad (2.4)$$

Setzen wir  $p_1 = 1$  an, so kann man per Substitution zeigen, daß  $p_{2^q}$  der Gleichung

$$p_N = \frac{N!}{N^N} \quad (2.5)$$

gehört.

Wir kennen also einen konkreten Erzeugungsweg mit vier spezifischen Vorteilen:

- wir wissen im Prinzip (bei perfekten Überwachungsdetektoren) immer, welcher Ausgangszustand vorliegt (Anzahl der eingespeisten Photonen abzüglich der Anzahl der detektierten Verlustphotonen).
- die Kontrolle, ob auf dem Weg durch das Strahlteilerfeld irgendwo Photonen 'verlorengegangen' sind, kann mit hoher Verlässlichkeit beantwortet werden, weil die ersten Photonen immer als 'Zwilling' oder höherbesetzter geradzahligem Zustand  $|2k\rangle$  verlorengehen.
- die Hierarchie ist der topologisch beste Weg, mit möglichst wenig Spiegeln alle Eingänge zu kombinieren und erleichtert damit auch die Spiegeljustage.
- es ist *der effektivste Weg* für die Erzeugung von Fockzuständen durch Kombination an Strahlteilern, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

*Dieser Weg ist die beste Realisierung der hier diskutierten Idee.*

Die Erzeugungswahrscheinlichkeit  $p_{2^q}$  in Gl. (2.5) fällt sehr rasch mit wachsendem  $q$  ab. Zur Illustration ein paar Zahlen:

$$\text{Mit } p_1 = 1 \text{ finden wir } p_2 = \frac{1}{2}, p_4 = \frac{3}{32}, p_8 = \frac{8!}{8^8} \approx \frac{1}{400}.$$

Insgesamt entstehen hoch (und aus Symmetriegründen niedrig) besetzte Fockzustände selten, anders ist es mit den Zwischenzuständen  $\{|N\rangle, N = 2, \dots, 2^q - 2\}$ , welche gemäß einer komplizierten Verteilung entstehen, die hier nicht abgeleitet ist. Die Fockzustände  $|1\rangle$  und  $|2^q - 1\rangle$  tauchen hierbei aufgrund des oben diskutierten 'Zwillingeffekts' nicht auf. Das Auslesen der Überwachungsdetektoren erlaubt im Prinzip immer zu bestimmen, welcher der Zustände am Ausgang  $\mathcal{F}$ , s. Abb. 3, erzeugt wurde.

Allerdings ist hierfür von den Detektoren eine höhere Auflösungskraft gefordert, als für die 'Alles oder Nichts'-Unterscheidung, ob speziell der höchstbesetzte Zustand  $|2^q\rangle$  erzeugt wurde.

In jedem Fall sind gute Überwachungsdetektoren notwendig. Immerhin entwickeln sich Detektoren und Einzelphotonennachweise zur Zeit schnell weiter [43, 45]. Zudem ist das Problem zu vieler Photonen im selben Ausgang, die im Nachweis aufgelöst werden müssen, weniger kritisch, wenn man diese Photonen durch einen gewissermaßen inversen Aufbau, ein zerteilendes Strahlteilerfeld, leitet und aufteilt, so daß die austretenden Photonenpakete 'zerhäckselt' nachgewiesen werden können. Diese Idee ist in Ref. [72] genauer ausgearbeitet.

## 2.4. Unitäre Schemata zum Vergleich

Wie wir nun sehen werden, liefert Gl. (2.5) die allgemeine obere Grenze für die Effizienz der Kombination von Fockzuständen mit Hilfe linearer Mischer.

Bei klassischem oder kohärentem Licht gibt es die Beschränkung durch Gl.(2.5) nicht. Wird kohärentes mit kohärentem Licht<sup>1</sup> einer Mode an den Eingängen eines Strahlteilers gemischt, so transformiert es in den Ausgängen wieder in kohärentes Licht – ganz analog zu den Verhältnissen bei klassischer Strahlung [1, 3]. Wählt man Phasen und Intensitäten richtig, kann man zwei kohärente Strahlen gleicher Intensität an einem Strahlteiler so kombinieren, daß sie nur den einen, nicht den anderen Ausgang benutzen. Entsprechend kann man mehrere kohärente Strahlen gleicher Intensität mit einem Spiegelfeld verlustlos zu einem gemeinsamen Strahl zusammenfassen. Sind Frequenz und Phase hinreichend gut stabilisiert, läßt sich dieses auch für Licht von verschiedenen Quellen erreichen [41].

Fockzuständen sind nach dem Durchgang durch einen Strahlteiler üblicherweise *keine Fockzustände mehr*, sondern über die beiden Ausgänge hinweg *verschränkte Linear-*

---

<sup>1</sup>Mit kohärentem Zustand ist der Glauberzustand gemeint.

*kombinationen von Fockzuständen*, vgl. Gl. (2.1).

Wenn man also ermittelt, ob sich viele Fockzustände gleicher Intensität, z.B. Einphoton-Fockzustände genauso effektiv zu einem höherbesetzten Zustand kombinieren lassen, wie das bei klassischem oder kohärentem Licht möglich ist, muß man wegen der erwähnten Transformationseigenschaften an den Strahlteilern feststellen, daß hierfür kein deterministisches Verfahren existiert. Um also zufällig einen Fockzustand erzeugen, der alle eingespeisten Photonen in sich vereinigt, muß man hierfür einen Ausgang des  $N$ -Ports freilassen und alle übrigen überwachen. Hierfür wollen wir die optimale Erzeugungsrate  $p_N$  für einen  $|N\rangle$ -Fockzustand ermitteln, der aus  $N$  Einphotonen-Fockzuständen zusammengesetzt wird.

Kürzlich ist gezeigt worden, daß eine beliebige unitäre Transformation  $\hat{U}$  in einem endlichen Hilbertraum durch einen  $N$ -Port, der aus verlustlosen Strahlteiler und Phasenschiebern aufgebaut ist, implementiert werden kann [66]. Die Umkehrung ist trivial wahr. Deswegen betrachten wir automatisch den allgemeinsten Fall, wenn wir untersuchen, mit welcher Wahrscheinlichkeit  $p_N$  ein Fockzustand  $|N\rangle$  *unitär* an einem spezifizierten Ausgang – sagen wir ' $\mathcal{F}$ ' – eines beliebigen  $N$ -Ports erzeugt werden kann. Unter Zugrundelegung der speziellen Ein- und Ausgangszustände  $|1\rangle_j = \hat{a}_j^\dagger|0\rangle$  bzw.  $|1\rangle_k = \hat{b}_k^\dagger|0\rangle$  – wobei  $\hat{a}$  und  $\hat{b}$  die bosonischen Vernichtungsoperatoren, jeweils für Eingang und Ausgang, sein sollen – definieren wir die Wirkung der unitären Transformation  $\hat{U}$  durch ihre Wirkung auf Einteilchenzustände  $\langle 0|\hat{b}_k\hat{U}\hat{a}_j^\dagger|0\rangle \equiv U_{kj}$ . Wegen der Linearität des  $N$ -Ports läßt sich seine Wirkung verallgemeinert auch folgendermaßen beschreiben

$$\hat{U}\hat{a}_j^\dagger = \sum_{k=1}^N \hat{b}_k^\dagger U_{kj}. \quad (2.6)$$

Der gewünschte Ausgangszustand  $|out\rangle$  zur Berechnung von  $p_N$  hat also die Form  $(\hat{b}_{\mathcal{F}}^\dagger)^N/\sqrt{N!}|0\rangle$  und für den Eingangszustand  $|in\rangle$  haben wir angenommen, daß  $|in\rangle = |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 \otimes \cdots \otimes |1\rangle_N = \prod_{j=1}^N \hat{a}_j^\dagger|0\rangle$ , folglich ist

$$p_N = |\langle out|\hat{U}|in\rangle|_{opt}^2 \equiv |\langle 0|\frac{(\hat{b}_{\mathcal{F}}^\dagger)^N}{\sqrt{N!}}\hat{U}\prod_{j=1}^N \hat{a}_j^\dagger|0\rangle|_{opt}^2 =$$

$$= |\langle 0 | \frac{(\hat{b}_{\mathcal{F}})^N}{\sqrt{N!}} \prod_{j=1}^N (\sum_{k=1}^N \hat{b}_k^\dagger U_{kj}) | 0 \rangle |_{opt}^2 = N! \left| \prod_{j=1}^N U_{\mathcal{F}j} \right|_{opt}^2, \quad (2.7)$$

hier bezeichnet 'opt' das Optimum d.h. den Maximalwert von  $p_N$ . Ein trivialer nicht-optimaler Fall wäre etwa  $\hat{U}$  als identische Abbildung, natürlich fände in solch einem Fall überhaupt keine Kombination von Zuständen statt und tatsächlich gilt in diesem Fall  $\prod_{j=1}^N U_{\mathcal{F}j} = 0$ . Da sie Elemente einer unitären Matrix bilden, erfüllen die  $U_{\mathcal{F}j}$ , daß  $\sum_{j=1}^N |U_{\mathcal{F}j}|^2 = 1$ , mit Hilfe einer Variationsrechnung sieht man leicht, daß das Maximum von  $|\prod_{j=1}^N U_{\mathcal{F}j}|^2$  unter dieser Nebenbedingung dann angenommen wird, wenn  $|U_{\mathcal{F}j}| = 1/\sqrt{N}$  und somit  $|\prod_{j=1}^N U_{\mathcal{F}j}|_{opt}^2 = \frac{1}{N^N}$ .

Folglich liefert Gl. (2.5) die *obere Grenze für alle unitären Methoden* zur Herstellung von Fockzuständen durch Kombination in einem  $N$ -Port. Dieses Resultat<sup>2</sup> zeigt, daß es *unmöglich* ist, einen Fockzustand  $|N\rangle_{\mathcal{F}}$  an einem spezifizierten Ausgang  $\mathcal{F}$  mit Sicherheit zu erzeugen, vielmehr gilt  $p_N < 1$  falls  $N \geq 2$ . Zudem ist allgemein gezeigt, daß, vorausgesetzt ein Apparat mit mehr als 2 Eingängen wird benutzt, man nicht einmal sicher sein darf, an *irgendeinem* der Ausgänge den gewünschten Maximalzustand  $|N\rangle$  zu finden, denn  $p_N < 1/N$  für  $N \geq 3$ .

Unitäre Methoden, wie sie in diesem Abschnitt diskutiert wurden, können immer ein Auswahlschema mit Überwachungsdetektoren, wie es in den vorhergehenden Abschnitten diskutiert wurde, 'simulieren', einfach dadurch, daß man die Ausgänge offen läßt, statt sie mit Detektoren zu verstellen:

Also liefert Gl. (2.5) für alle  $N$ -Ports die *Effektivitätsobergrenze*.

---

<sup>2</sup>Ich verdanke die Grundidee zur mathematischen Behandlung der unitären Transformation und zur Ableitung von Gl. (2.5) Herrn Prof. Marek Żukowski, dem ich dafür an dieser Stelle danken möchte.

## 2.5. Über die Herstellung des Eingangszustandes und Nachweisprobleme

Die bisher präsentierten Ideen zeigen, wie ein Strahlteilerfeld zu benutzen ist, um Einphoton-Zustände oder allgemeiner Fockzustände mit niedriger Besetzungszahl zu solchen mit höherer Besetzungszahl zu kombinieren. Außerdem wurde gezeigt, daß symmetrische Strahlteiler und Eingangszustände verwandt werden sollten. Nun wollen wir noch ein wenig über die Eingangszustände sprechen, von denen ausgehend man startet.

### 2.5.1. Zufällige Quellen

Jede Lichtquelle, die Fockzustände bereitstellen kann, ist für dieses Verfahren nutzbar. Leider sind außer Einzelphotonenquellen, nämlich Down-conversions-Kristallen [54, 55, 20], keine Lichtquellen dieser Art realisiert worden. Da Down-conversions-Kristalle eine rein quantenmechanische Quelle darstellen, wird pro Anregungszyklus nur mit einer *Wahrscheinlichkeit*  $\alpha$  der gewünschte (Einphotonen-) Fockzustand erzeugt. Das führt zu Schwierigkeiten, die wir hier noch betrachten möchten.

Gesetzt den Fall, daß  $N$  solcher Quellen kombiniert werden, erhält man lediglich mit Gesamtwahrscheinlichkeit  $\alpha^N$  den gewünschten Startzustand. Diese Beschränkung kann sich als noch stärker erweisen, als die zuvor diskutierte, welche durch Verluste im  $N$ -Port verursacht ist. Natürlich könnte man mehrere Quellen parallel betreiben, und nur jene an den  $N$ -Port koppeln, die gerade 'gefeuert' haben, allerdings ist diese Idee nicht sehr brauchbar, wenn man einen hoch angeregten Fockzustand erzeugen möchte, da  $\alpha^N$  mit wachsendem  $N$  exponentiell abfällt.

Ein weiteres Charakteristikum der Down-conversions-Kristalle ist die Möglichkeit, daß bei  $N$  parallel arbeitenden Quellen mit zu  $\alpha^N$  vergleichbarer Wahrscheinlichkeit  $N\alpha^N$  eine Quelle kein Photon, sowie eine andere ein 2-Photonenpaar erzeugt – bzw. zwei Quellen kein Photon erzeugen und eine andere ein 3-Photonenpaar, wofür die Wahrscheinlichkeit  $N(N-1)\alpha^N$  wäre – und dergleichen Umverteilungen mehr.

Dieses rührt daher, daß das bei der Down-conversion erzeugte zweimodengequetschte Vakuum folgende Fockdarstellung hat

$$|0\rangle_{r,\phi} = \cosh^{-1} r \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{2i\phi} \tanh r)^n |n, n\rangle \equiv \sqrt{1 - \alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{2i\phi})^n \alpha^n |n, n\rangle \quad (2.8)$$

wobei  $r$  der Quetschgrad und  $\phi$  der zugehörige Winkel ist [73, 74].

Allerdings sind diese Umverteilungsereignisse mit Hilfe der Koinzidenzdetektoren leicht unterscheidbar und somit 'ungefährlich'.

### 2.5.2. Deterministische Quellen

Eine Alternative, zu den geraden diskutierten quantenmechanisch zufälligen, wären deterministische Quellen zur Erzeugung einzelner Photonen – ein Erzeugungsmechanismus hierfür wurde 1994 von Imamoğlu und Yamamoto unter dem Begriff 'Drehkreuz für einzelne Photonen' angegeben [65]. Dieses Schema benutzt den sogenannten quantum-confinement-Effekt, daß ein Kondensator mit extrem kleiner Kapazität den Unterschied zwischen einem oder zwei hineingeladenen Elektronen durch einen deutlichen Spannungsanstieg beantwortet. Wählt man nun in einer miniaturisierten Schaltung einen so kleinen Kondensator, daß bei der benutzten Spannung nur ein Elektron zur Zeit hineinpaßt, kann man unter Ausnutzung des Tunneleffekts, der den Kondensator wieder entlädt, indem das Elektron zur positiven Seite hinübertunnelt, den Stromfluß regulieren. Hierfür muß man nur mehrere solcher Kondensatoren in Reihe schalten, so daß ein Rückstauereffekt den Stromfluß blockiert. Sodann wird eine Wechselspannung addiert, die einen getakteten Stromfluß erlaubt. Letztlich regelt nur die Frequenz dieser Wechselspannung das Stromverhalten, und es gilt die einfache, unmittelbar einleuchtende Beziehung  $I = e \cdot f$ , d.h. der Strom ist gleich der Elementarladung multipliziert mit der Frequenz, tatsächlich eine Art Drehkreuz, das immer nur einem Elektron pro Zyklus den Durchgang erlaubt.

Dieses Verhalten wurde von Geerligs *et al.* 1990 mit beeindruckender Präzision experimentell demonstriert [75], vgl. auch das Experiment von Kouwenhoven *et al.*

[76]. Der Vorschlag von Imamoğlu und Yamamoto [65] läuft nun grob gesprochen auf dasselbe hinaus, mit der zusätzlichen Raffinesse, daß all dieses in einem  $p - i - n$  Halbleiter durchgeführt wird, so daß von der einen Seite ein Loch, von der anderen ein Elektron in besagten Kondensator treten. Darin, d.h. in der  $i$ -Schicht, rekombinieren diese beiden und erzeugen ein Photon.

Allerdings besteht das Problem, daß das erzeugte Photon, selbst wenn es in einem Resonator 'geboren' wird, der Halbleiterübergang  $i$  soll also zugleich als optischer Resonator hergerichtet sein, nur eine gewünschte Mode besetzen soll. Die Behandlung von Imamoğlu und Yamamoto liefert keinen Aufschluß darüber, wie dieses Ziel zu erreichen ist, zumal es auch nicht vorrangiges Ziel jener Arbeit ist, diese Frage zu klären [65]. De Martini behauptet experimentell gezeigt zu haben, daß eine solche Anregung einer einzelnen Mode mit Wahrscheinlichkeit nahe an 1 im Experiment gelungen sei [77]. Es gibt allerdings Befunde, die dem widersprechen [78], jedoch ist im Prinzip die Anregung nur einer Mode möglich [78]. Wenn eine deterministische Quelle für niedrig besetzte Fockzustände experimentell realisierbar wäre, wäre das hier vorgestellte Schema natürlich leichter realisierbar.

Es sei noch angemerkt, daß die Erzeugung eines höherbesetzten Fockzustands *innerhalb eines Resonators* das Problem nicht entschärft, denn um die Lichtzustände außerhalb benutzen zu können, müssen sie beim Auskoppeln den zerstörerischen Einfluß der Resonatorspiegel über sich ergehen lassen [47]. Darum hilft beispielsweise die parallele Benutzung mehrerer 'Drehkreuze' pro Resonator oder eines Drehkreuzes, welches pro Zyklus mehrere Photonen erzeugt, nicht weiter.

## 2.6. Abschlußbetrachtung des vorgestellten Schemas

Der eben genannte Befund, daß ein Fockzustand aus einem Resonator nicht ohne Zerstörung ausgekoppelt werden kann, ist zugleich eine der Hauptmotivationen für das in diesem Kapitel diskutierte Schema zur Erzeugung von Fockzuständen, denn

er zeigt, daß die Erzeugung von Fockzuständen im Resonator und in freilaufenden Moden zweierlei ist und also ein spezifisches Schema zur Erzeugung der letzteren gebraucht wird.

Der andere Hauptgrund besteht darin, daß die Kontrolle des Eingangszustandes im Zusammenspiel mit den symmetrischen Strahlteilern den diskutierten Zwillingseffekt hervorruft. Mit seiner Hilfe ist, bei gegebener Photodetektoreffizienz, im Prinzip eine viel bessere Kontrolle über den hergestellten Endzustand gegeben, als beispielsweise durch eine Projektion auf einen Fockzustand in einer Mode, mit Hilfe des direkten Nachweises der Photonenzahl in der anderen Mode des gequetschten Vakuumzustandes (2.8).

Trotz der diskutierten Schwierigkeiten mag das hier vorgestellte Schema für relativ niedrig besetzte Fockzustände experimentell gangbare Wege aufzeigen. Mangels besserer gegenwärtiger Alternativen wird also die Benutzung spontaner Down-conversion vorgeschlagen, da sie, wie in Abbildung 3 skizziert, erlaubt, mit Hilfe des erzeugten Idlerphotons zu bestimmen, ob ein Signalphoton in den  $N$ -Port geschickt wurde [20, 54]. Mehrere Konversionskristalle dieser Art könnten mit sehr kurzen Pulsen gespeist werden, so daß die notwendigen Koinzidenzkriterien, welche garantieren, daß schließlich die Moden der verschiedenen Quellen gut überlappen, durch die kurze Anregungsdauer der Pulse automatisch befriedigt wird. Alternativ sind die Koinzidenzdetektoren mit kurzen Koinzidenzzeitfenster zu betreiben, entsprechende Schemata wurden vorgeschlagen, um zwei [69, 70, 71] und drei [68] Photonenpaare in Koinzidenz zu erzeugen. Im Prinzip erlaubt dieser Vorschlag eine Kontrolle des Eingangszustands [54, 20, 79] und des Ausgangszustands, vgl. Abb. 3.

*Dieses Kapitel zeigt, daß das optimale Schema zur Synthese von Fockzustände freilaufender Moden mit Hilfe eines linearen Mischers ( $N$ -Port) ein symmetrischer Aufbau mit gleichmäßig gespeisten Eingängen ist.*

æ



### 3. Was kann Licht über das aussendende Atom mitteilen?

In diesem Kapitel interessieren uns die **Eigenschaften spontan emittierten Lichts**, welches von Atomen mit einer sehr **ausgedehnten kohärenten Schwerpunktswellenfunktion**  $\psi_0(\mathbf{r})$  emittiert wird.

#### 3.1. Vorgeschichte

In der üblichen Beschreibung spontan emittierender Atome idealisiert man diese als, verglichen mit der Wellenlänge des emittierten Lichts, punktförmig lokalisiert [80, 5].

Dagegen ist oft nichts einzuwenden, allerdings ist es in letzter Zeit möglich geworden Atome mit so ausgedehnten Schwerpunktswellenfunktionen<sup>1</sup> zu erzeugen, daß diese Idealisierung dann nicht mehr zutrifft. Die Ortskohärenzen von  $\psi_0(\mathbf{r})$  können sich dabei weiter erstrecken, als die Wellenlänge des von diesen Atomen spontan emittierten Lichts [81, 82, 83, 4, 84]. Kürzlich ist es in einem Atomstrahlexperiment sogar gelungen, Atome in Form einer in Flugrichtung langgestreckten Hantel mit einem angeregten inneren Niveau zu erzeugen [85, 86, 87]. Naturgemäß ergeben sich die Fragen ob:

- 1) Ein räumlich sehr ausgedehntes Atom die Eigenschaften des abgestrahlten Lichts ändert,
- 2) man mit Hilfe spontan emittierten Lichts Kohärenzen der Schwerpunktswellenfunktion  $\psi_0(\mathbf{r})$  des emittierenden Atoms sehen kann,
- 3) das Licht erlaubt Rein- von Gemischzustand des Atoms zu unterscheiden,

---

<sup>1</sup>Hier werden Atome mit ausgedehnter *Schwerpunktswellenfunktion* nicht mit ausgedehnten *elektronischen Wellenfunktionen* (z.B. Rydbergatome) betrachtet, also darf die Dipolnäherung benutzt werden.

- 4) es Selbstinterferenzen des von verschiedenen Positionen des Atoms ausgestrahlten Lichts gibt.

Die letzte Frage nach den Selbstinterferenzen des Lichts ist kürzlich bejaht worden, ja, diese Interferenz von Licht, welches von den beiden Enden der oben erwähnten Hantel abgestrahlt wird, soll sogar gemessen worden sein [85, 86]!

Weitere Experimente zur Untersuchung dieser Fragen sind in Vorbereitung [88, 89].

Abbildung 4: Schemazeichnung der hantelförmig präparierten Schwerpunkswellenfunktion  $\psi_0(\mathbf{r})$  des strahlenden Atoms:

Sieht der Detektor Selbstinterferenzen des auf den Pfaden '1' und '2' zu ihm gelangten Lichts? Ist das abgestrahlte Feld empfindlich für relative Phasen  $\exp[i\varphi_{12}]$  zwischen den Orten 1 und 2? Inwiefern beeinflusst die Beschaffenheit der Wellenfunktion  $\psi_0(\mathbf{r})$  das emittierte Feld?

*Grund genug, diese Fragen von der theoretischen Seite zu analysieren und zu beantworten!*

### **3.2. Unser Zugang**

Um zu erfahren, ob Kohärenzen der atomaren Wellenfunktion in irgendeiner Weise in das elektrische Feld abgebildet werden, untersuchen wir die räumliche Struktur des

Feldes anhand seiner Dichtematrix  $\hat{\rho}_F$ .

Neben den grundsätzlichen Fragen motiviert uns hierbei auch die experimentelle Schwierigkeit, daß bei einem Atomstrahlexperiment die – in Bezug auf die Strahlrichtung – transversalen Kohärenzen der atomaren Schwerpunktswellenfunktion leicht meßbar sind [84, 90], während die longitudinalen Kohärenzen kaum zugänglich sind, bei der erwähnten Hantel ist aber gerade ihre Kenntnis erwünscht (s. Abb. 4).

### 3.3. Das Modell

Die Behandlung freier (ungebundener) Atome ist auf Atomstrahlexperimente ohne äußere Potentiale zugeschnitten. Die gewählte Betrachtungsebene ist die des 'einzelnen Atoms von außen gesehen'. Es wird nicht über die atomphysikalische Dynamik des Atoms gesprochen, sondern sein elektronischer Zustand durch des Quantenoptikers Lieblingsmodell für ein 'nichtsinguläres Coulombpotential'<sup>2</sup>, das Zweiniveaumatom, modelliert. Andererseits wird aber auch nicht Quantenstatistik mit Hilfe von Mastergleichungen für die Dynamik von Atomgesamtheiten betrieben, wie z. B. in Referenz [91], sondern ein einzelnes Atom und das von ihm abgestrahlte Feld im Detail betrachtet:

Wir benutzen das altbekannte Modell der spontanen Emission von Weisskopf und Wigner für den vereinfachten Spezialfall eines Atoms mit nur wenigen elektronischen Energieniveaus [80, 92, 93]. Beschränkt man sich auf nur zwei Energieniveaus, modelliert man das sogenannte 'Zweiniveaumatom'. Dieses ist eine physikalisch oft gut vertretbare Näherung, die ihrer Einfachheit und ergo der analytischen Berechenbarkeit wegen gerne benutzt wird.

Zusätzlich zu bekannten Lehrbuchabhandlungen der spontanen Emission des Zweiniveaumatoms [5] wird hier die Dynamik der Schwerpunktswellenfunktion des betreffenden Atoms [94] berücksichtigt. Wir wollen die **Rückstoßwirkung** des spontan emittierten Photons einbeziehen, dabei wirkt nicht nur das Photon auf das Atom,

---

<sup>2</sup>Formulierung frei nach K. Rzȃzewski.

sondern auch das Atom auf das Photon zurück.

Im weiteren übernehmen wir Nomenklatur und Lösung für dieses Problem der *spontanen Emission eines freien, ausgedehnten Atoms* von Rzążewski und Żakowicz [94].

### 3.3.1. Der Hamiltonian

Die physikalisch einwandfreieste Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen Atom und Photon erreicht man dadurch, daß man sie im Energieoperator  $\hat{H}$  ('Hamiltonian') berücksichtigt. In Dipol- und Drehwellennäherung (rotating-wave-approximation) hat  $\hat{H}$  [94] die Form<sup>3</sup>

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2M} + \frac{\hbar\omega_0}{2}(\hat{1} + \hat{\sigma}_z) + \sum_j \hbar\omega_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j + \hbar \sum_j (\lambda_j \hat{\sigma}_- \hat{a}_j^\dagger \exp[-i\mathbf{k}_j \hat{\mathbf{r}}] + \text{h.c.}). \quad (3.1)$$

$\hat{\mathbf{p}}$  und  $\hat{\mathbf{r}}$  bezeichnen den Impuls- und Ortsoperator der atomaren Schwerpunktswellenfunktion, die  $\hat{\sigma}$  sind die Pauli Spinoperatoren, welche auf die inneren Anregungszustände des Atoms wirken und die  $\hat{a}_j$  die bosonischen Feldoperatoren, die für die Beschreibung des Lichtfelds benutzt werden, vgl. z. B. [5]. Die Buchstaben *h.c.* stehen für die hermitesche Konjugation des vorhergehenden Summanden, die Indizes  $j$  benennen Ausbreitungsrichtung und Polarisationsorientierung der angeregten Feldmoden, für welche sich hier ebene Wellen mit den Ausbreitungsvektoren  $\mathbf{k}_j$  anbieten, da diese eine besonders einfache Darstellung der uns interessierenden Probleme erlauben. Es gilt natürlich die Dispersionsrelation  $\omega = c|\mathbf{k}|$  des elektromagnetischen Feldes im Vakuum,  $\omega_0$  steht für die Übergangsfrequenz und  $M$  für die Masse des Atoms.

Es sei noch angemerkt, daß (3.1), entgegen dem ersten flüchtigen Augenschein, der Energieoperator des erwähnten Systems in *Dipolnäherung* ist. Das sieht man daran, daß der Kopplungsterm  $\hbar\lambda_j \exp[-i\mathbf{k}_j \hat{\mathbf{r}}]$  auf die Schwerpunktskoordinate des Atoms, nicht des Elektrons, wirkt, er vermittelt also den Rückstoß auf das *gesamte Atom*. Au-

---

<sup>3</sup>In dieser Arbeit sind Operatoren mit  $\hat{\phantom{x}}$  und Vektoren im **Dickdruck** bezeichnet. Beispielsweise steht  $\hat{\mathbf{r}}$  für den vektoriellen Ortsoperator.

ßerdem enthält die Beschreibung der elektronischen Energieniveaus durch die Pauli-Spinoperatoren offensichtlich die Zweiniveau- und Dipolnäherung. Die Kopplungskonstanten  $\lambda_j$  haben den Wert  $\lambda_j = -i \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega_j}} \omega_0 \mathbf{u}_j(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{d}$ , wobei die  $\mathbf{u}_j(\mathbf{r})$  die Einheitsvektoren der elektrischen Feldstärkevektoren sind, also die Richtung der Lichtpolarisation beschreiben – sie sind weiter unten hingeschrieben.

Der Dipolvektor  $\mathbf{d}$  ist durch das elektronische Übergangsmatrixelement  $\langle -|e\hat{\mathbf{x}}|+ \rangle$  gegeben [5, 6], hierbei stehen '|+>' und '|->' für den angeregten bzw. den Grundzustand des Atoms. Der Operator  $\hat{\mathbf{x}}$  wirkt auf das Elektron, welches den Strahlungsübergang vollzieht. Weil wir einen Übergang annehmen wollen, für den wir uns mit der Dipolnäherung begnügen dürfen, brauchen wir uns *nicht weiter um die 'innere Dynamik' des Atoms zu kümmern*.

In der weiteren Behandlung werden wir annehmen, daß keine polarisationsabhängigen Effekte gemessen werden. Dieses vereinfacht die Form der Ausdrücke im weiteren erheblich, ohne ihnen, wie wir später sehen werden, von ihrem physikalischen Gehalt zu nehmen. Also fassen wir gleich an dieser Stelle beide Polarisationsrichtungen zusammen; der Vollständigkeit halber hier noch die beiden Polarisationsvektoren  $\mathbf{u}_1$  und  $\mathbf{u}_2$ , welche mit dem  $\mathbf{k}$ -Vektor der angeregten Welle in Richtung

$\mathbf{k} = k(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$  assoziiert sind:

$$\mathbf{u}_1 = (\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta) \text{ und}$$

$$\mathbf{u}_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).$$

Zusammengenommen ergeben sich die polarisationsunabhängigen Kopplungskonstanten  $|\lambda_{\mathbf{k}}|^2$  zu

$$\begin{aligned} |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 &\equiv |\lambda_{\mathbf{k},1}|^2 + |\lambda_{\mathbf{k},2}|^2 \\ &= g_k^2 [(d_x \sin \varphi - d_y \cos \varphi)^2 \\ &\quad + (d_x \cos \varphi \cos \vartheta + d_y \sin \varphi \cos \vartheta - d_z \sin \vartheta)^2] , \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$  für das atomare Dipolmoment steht und  $g_k$  eine universelle skalare Kopplungskonstante ist [5].

Der Energieoperator (3.1) besteht also aus den ersten drei Termen, welche die kinetische Energie des Atoms, seine Anregungsenergie und die Energie des freien elektromagnetischen Feldes beschreiben und dem letzten Term, der die Kopplung zwischen diesen dreien zusammenfaßt.

### 3.4. Die verallgemeinerte Weisskopf-Wigner Lösung

Wir möchten spontane Emission beim freien Atom betrachten. Die Schwerpunktswellenfunktion des Atoms zur Zeit  $t = 0$  sei  $\psi_0(\mathbf{r})$  genannt (im Impulsbild  $\alpha_0(\mathbf{p})$ ). Sein innerer Anregungszustand sei der angeregte ( $|+\rangle$ ) und das Feld ganz unbesetzt, d.h. im Vakuumzustand ( $|0\rangle$ ). Das Gesamtsystem 'Atom+Feld' befinde sich also im Ausgangszustand

$$|\Psi(0)\rangle = \int d^3p \alpha_0(\mathbf{p}) |\mathbf{p}, +, 0\rangle. \quad (3.3)$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung für ein Atom, dessen Dynamik vom Energieoperator (3.1) regiert wird, und welches zur Zeit  $t = 0$  im Zustand  $|\Psi(0)\rangle$  ist, lautet [94]

$$|\Psi(t)\rangle = \int d^3p \left( \alpha(\mathbf{p}, t) |\mathbf{p}, +, 0\rangle + \sum_j \beta(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) |\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_j, -, \mathbf{k}_j\rangle \right)$$

wobei  $\alpha(\mathbf{p}, t) = \alpha_0(\mathbf{p}) \exp(-z_0 t)$ ,

$$\beta(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) = -i\lambda_j \alpha_0(\mathbf{p}) [\exp(-z_0 t) - \exp(-z_j t)] / (z_0 - z_j), \quad (3.4)$$

mit  $z_0 = \frac{i}{\hbar} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2M} + \hbar\omega_0 \right) + \gamma_0$

und  $z_j = \frac{i}{\hbar} \left( \frac{(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_j)^2}{2M} + \hbar\omega_j \right)$ .

Im jeweiligen 'ket'-Vektor stehen die Einträge in der Reihenfolge  $\mathbf{p}$  für den Impuls des atomaren Massenschwerpunkts, '+' oder '-' für den Anregungszustand des Atoms und  $\mathbf{k}_j$  für den Wellenvektor des Photons der Mode  $j$ .

### 3.4.1. Struktur der Lösung

Gleichung (3.4) zeigt die verallgemeinerte Weisskopf-Wigner Lösung unter Berücksichtigung des Impulsübertrags zwischen Atom und Photon. Die Verschränkung zwischen dem Bewegungszustand des Atoms und des Photons spiegelt der 'ket'-Vektor  $|\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_j, -, \mathbf{k}_j\rangle$  wieder; ferner enthält  $z_j$  den kinetischen Energieterm des Atoms einschließlich des Photonenrückstoßes  $(\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}_j)^2/2M$ . Die Energieterme  $-z_0$  und  $z_j$  bestimmen die Zeitentwicklung, tauchen also in den Exponenten auf und **bestimmen alle Effekte, mit denen wir hier und im Kapitel 4.** zu tun haben werden. Außerdem tritt ihre Differenz  $z_0 - z_j$ , welche das Spektrum des emittierten Lichts bestimmt, im Nenner von  $\beta$  auf:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{i} (z_0 - z_j) &= \frac{\hbar\mathbf{k}_j\mathbf{p}}{M} - \frac{(\hbar k_j)^2}{2M} + \hbar\omega_0 - \hbar\omega_j - i\hbar\gamma_0 \\ &\equiv \varepsilon_{kin} - \hbar\{\omega_j - (\omega_0 - i\gamma_0)\}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Wir werden in Abschnitt 3.5.1. sehen, daß wir die Veränderungen der spektralen Linienstruktur durch  $\varepsilon_{kin}$  vernachlässigen dürfen. Um analytische Ergebnisse zu erhalten müssen wir sie sogar vernachlässigen. Nach der entsprechenden Näherung ( $\varepsilon_{kin} = 0$ ) verbleibt der bekannte Lorenznenner für eine Resonanzlinie der Frequenz  $\omega_0$  mit der Resonanzbreite  $\gamma_0$ .

Um die Struktur von Gl. (3.4) besser zu verstehen, wollen wir zum Vergleich die bekannte Lehrbuchlösung nach Weisskopf und Wigner betrachten:

$$\begin{aligned} |\chi(t)\rangle &= \int d^3r \delta(\mathbf{r} - 0) |\mathbf{r}\rangle \\ &\quad \otimes \left\{ \exp[-(\gamma_0 + i\omega_0)t] |+, 0\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sum_j \lambda_j \frac{\exp[-(\gamma_0 + i\omega_0)t] - \exp[-i\omega_j t]}{\omega_j - (\omega_0 - i\gamma_0)} |-, \mathbf{k}_j\rangle \right\} \\ &\equiv \text{Atom} \otimes \text{Feld}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Das ganze sieht ein bißchen bombastisch aus, aber so sind die Parallelen zur Rückstoßlösung (3.4) am besten zu erkennen. Der erste Term in der geschweiften Klammer

beschreibt den spontanen Zerfall des oberen Niveaus und der zweite Summand die Anregung der Feldmoden gemäß der Lorenzschen Linienform. In genau dieser Form findet man die herkömmliche Weisskopf-Wigner Lösung in der Literatur nicht, weil die Faktorisierung in 'Atom $\otimes$ Feld' trivial ist, da das Atom als punktförmig angenommen wird, so daß nur der Schwerpunkt des Atoms (üblicherweise im Koordinatenursprung) spezifiziert werden muß. Diese Faktorisierung ist bei der Rückstoßlösung (3.4) natürlich nicht möglich, wie sich schon in der Verschränkung der 'ket'-Vektoren in Gl. (3.4) im Unterschied zu (3.6) zeigt.

### 3.5. Näherungen

Um zu untersuchen, wie das vom Atom abgestrahlte Feld durch die genannte Kopplung des Photons an die Schwerpunktsbewegung modifiziert wird, wollen wir annehmen, daß das Photon auch wirklich schon emittiert wurde, oder anders ausgedrückt  $t \gg \gamma_0^{-1}$ . Damit vereinfacht  $|\Psi(t)\rangle$  aus Gl. (3.4) sich zu

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_j \int d^3p \beta(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) |\mathbf{p}, \mathbf{k}_j\rangle, \quad (3.7)$$

wobei die Bezugnahme auf den inneren Zustand '-' fallengelassen wurde, weil der obere nicht mehr bevölkert ist. Für  $\beta$  gilt nun

$$\beta(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) = -\lambda_j \alpha_0(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j) \frac{\exp \left[ -i \left( \frac{p^2}{2\hbar M} + \omega_j \right) t \right]}{\frac{p^2}{2\hbar M} - \frac{(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j)^2}{2\hbar M} + \omega_j - \omega_0 + i\gamma_0}. \quad (3.8)$$

Bei dieser Näherung laufen wir nicht Gefahr, physikalisch wichtige Zusammenhänge zu vernachlässigen, denn alle Terme, die wir im Rahmen dieser Näherung weggelassen haben, fallen in der Zeit exponentiell ab, können also für größere Zeiten in keiner Weise beitragen.

Im weiteren wollen wir, der analytischen Behandelbarkeit halber, den Nenner von

$\beta$  vereinfachen, wir lassen die Terme, welche die Rückstoßenergie und die Dopplerverschiebung enthalten, weg ( $\varepsilon_{kin} = 0$ ) und erhalten die vereinfachte Form

$$\beta(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) = -\lambda_j \alpha_0(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j) \frac{\exp \left[ -i \left( \frac{p^2}{2\hbar M} + \omega_j \right) t \right]}{\omega_j - \omega_0 + i\gamma_0}. \quad (3.9)$$

Diese Näherung ist physikalisch gut vertretbar, weil die Wellenfunktion  $\alpha_0$  um Null konzentriert ist und also die Impulsintegration in (3.7) auf kleine Werte von  $\mathbf{p}$  beschränkt:

### 3.5.1. Die Näherung kleiner Geschwindigkeiten $v \ll c$

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude  $\beta$  hat ihre betragsmäßig größten Werte bei den Nullstellen des Nenners. Da im weiteren Laufe unserer Rechnungen immer in der einen oder anderen Weise Integrationen über die Impulse des Photons ausgeführt werden, ist nur die Lage des Pols und sein Gewicht von Belang. Weitergehende Details sind vernachlässigbar, wie die folgende Polapproximation zeigt.

Um die Lage der Nennernullstellen von  $\beta$  in Gl. (3.8) zu ermitteln, lösen wir die entsprechende quadratische Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned} k_{\pm} &= Mc\hbar^{-1} (1 - p \cos \Theta/Mc) \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{2\hbar(k_0 - i\gamma_0/c)}{Mc(1 - p \cos \Theta/Mc)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\approx Mc\hbar^{-1} (1 - p \cos \Theta/Mc) \left[ 1 \pm 1 \mp \frac{\hbar(k_0 - i\gamma_0/c)}{Mc(1 - p \cos \Theta/Mc)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hierbei ist wieder die Dispersionsrelation  $\omega = ck$  sowie folgende Definition für den Winkel  $\Theta$  benutzt worden:  $\mathbf{pk} \equiv pk \cos \Theta$ . Der Pol  $k_+$  liegt sehr weit von der Resonanzstelle  $\omega_0$  entfernt und kann völlig vernachlässigt werden.  $k_-$  hingegen wird nun in eine Taylorreihe entwickelt und wir erhalten

$$k_- \approx (k_0 - i\gamma_0/c)/(1 - \cos \Theta p/Mc) \approx k_0 - i\gamma_0/c. \quad (3.11)$$

Offenkundig ist diese Näherung für den Fall der nichtrelativistischen Bewegung  $v \ll c$  exzellent erfüllt.

Zudem kann man falls nötig in einfacher Weise, etwa nach dem Vorbild der Arbeit von Wilkens [95], in das Ruhesystem des Atoms transformieren. Dadurch fällt die Schwerpunktsgeschwindigkeit des Atoms weg, die Frequenzen werden in überschaubarer Weise dopplerverschoben und es bleibt nur die intrinsische Bewegung des Atoms durch jene Impulskomponenten, welche seine Wellenfunktion auch im Ruhesystem enthält. Diese kann man zwar nicht wegtransformieren, sie ist aber gerade für unseren Fall räumlich weit ausgedehnter Atome besonders klein:

Uns interessieren, wie später noch klarer werden wird, nur Atome mit einer Ausdehnung von mindestens der Wellenlänge des abgestrahlten Lichts. Angenommen die räumliche Ausdehnung des atomaren Wellenpakets habe den Wert  $a$ , dann ergibt sich daraus, unter Zugrundelegung der Heisenbergschen Unschärferelation, eine Impulsunschärfe der Größenordnung  $\hbar/2a$  bzw. eine mittlere Geschwindigkeit  $\hbar/2aM \approx 3 \cdot 10^{-4}/a\mu$  [cm/s], wobei die Masse  $\mu$  auf den Wasserstoff skaliert ist, also '1' als kleinsten Wert haben kann. Wenn  $a$  von der Größenordnung einer optischen Wellenlänge ist, ergibt sich für  $v$  der vernachlässigbar kleine Wert  $v/c \approx 2 \cdot 10^{-10}/\mu$ . Ebenso ist die Dopplerverbreiterung mit  $\Delta\omega_D = \omega_0 v/c \approx 2 \cdot 10^5$  Hz gegenüber der natürlichen Linienbreite  $\gamma_0 \geq 10^8$  Hz vernachlässigbar.

Nachdem wir uns von der Berechtigung der Näherung in Gl. (3.9) überzeugt haben, wollen wir mit Hilfe der vereinfachten Form des Zustandvektors unseres Systems die Eigenschaften der Dichtematrix des Feldes ermitteln.

### 3.6. Dichtematrix des Feldes

Die Dichtematrix des Feldes,  $\hat{\varrho}_F$ , erhalten wir durch Bildung der *partiellen* Spur über die anderen (atomaren) Freiheitsgrade des Systems. Das Atom ist nach Voraussetzung ( $t \gg \gamma_0^{-1}$ ) im Grundzustand, der innere Zustand des Atoms muß also nicht berück-

sichtigt werden. Wir gewinnen  $\hat{\varrho}_F$  durch Integration über die atomaren Koordinaten (d.h. die Impulse  $\mathbf{p}$ )

$$\begin{aligned}
\varrho_F(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_{j'}; t) &\equiv \langle \mathbf{k}_j | \int d^3 p (|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|) | \mathbf{k}_{j'} \rangle \\
&= \int d^3 p \beta^*(\mathbf{p}, \mathbf{k}_{j'}; t) \beta(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) \\
&= \int d^3 p \alpha_0^*(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{j'}) \frac{\lambda_{j'}^* \exp[-i(\mathbf{k}_{j'} \mathbf{r} + \omega_{j'} t)]}{(\omega_{j'} - \omega_0 - i\gamma_0)} \\
&\quad \times \alpha_0(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j) \frac{\lambda_j \exp[i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} + \omega_j t)]}{(\omega_j - \omega_0 + i\gamma_0)},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

wobei Gleichung (3.9) benutzt wurde. Die  $p$ -Integration führt auf den Hilfsausdruck

$$S_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_{j'}} \equiv \int d^3 p \alpha_0^*(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_{j'}) \alpha_0(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j). \tag{3.13}$$

Da uns räumliche Korrelationen interessieren, schalten wir noch eine Koordinatentransformation zur Ortskoordinate  $\mathbf{r}$  vor, d.h. wir benutzen

$$\alpha_0(\mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int d^3 r \psi_0(\mathbf{r}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{r}\right], \tag{3.14}$$

womit wir Gleichung (3.13) nach kurzer Rechnung zu folgender Form umschreiben können

$$S_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_{j'}} = \int d^3 r |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \exp[i(\mathbf{k}_{j'} - \mathbf{k}_j) \mathbf{r}]. \tag{3.15}$$

Damit ergibt sich für  $\hat{\varrho}_F$  das gesuchte Endergebnis

$$\begin{aligned}
\varrho_F(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_{j'}; t) &= \int d^3 r |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \frac{\lambda_{j'}^* \exp[-i(\mathbf{k}_{j'} \mathbf{r} + \omega_{j'} t)]}{(\omega_{j'} - \omega_0 - i\gamma_0)} \\
&\quad \times \frac{\lambda_j \exp[i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} + \omega_j t)]}{(\omega_j - \omega_0 + i\gamma_0)}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Der Integrand ist genau die altbekannte Form [5, 80] der Dichtematrix, für ein punktförmiges gedachtes Atom, wie man sie aus (3.6) unmittelbar erhält. Einzig die Integration über die Ortskoordinate mit der Ortsgewichtsfunktion  $|\psi_0(\mathbf{r})|^2$  ist neu aber leicht deutbar.

### 3.7. Interpretation

Die Dichtematrix des Feldes ergibt sich als *inkohärente* Überlagerung der Dichtematrix eines punktförmig gedachten Atoms, à la Weisskopf und Wigner, gemittelt mit der quantenmechanisch vorgegebenen Aufenthaltswahrscheinlichkeit dieses Atoms. Das Atom strahlt wie eine klassische, punktförmige Quelle, die statistisch gemäß  $|\psi_0(\mathbf{r})|^2$  verteilt ist, entsprechend sind die Kohärenzeigenschaften des Lichts davon genauso in Mitleidenschaft gezogen, wie bei einer räumlich verschmierten klassischen Punktquelle. Für Licht, das an einem ausgedehnten Atom gestreut wird, ist das Resultat ganz analog (Cohen-Tannoudji *et al.* [96]), d.h. der Streuquerschnitt ist proportional zu  $|\psi_0(\mathbf{r})|^2$ .

Insbesondere schließt die Form (3.16) der Dichtematrix  $\hat{\rho}_F$  aus, daß innere Phasenänderungen der Atomwellenfunktion

$$\psi_0(\mathbf{r}) \mapsto \psi_0(\mathbf{r}) \exp[i\varphi_0(\mathbf{r})],$$

$\varphi_0(\mathbf{r})$  reell, Auswirkungen auf das abgestrahlte Feld haben, weil in Gl. (3.22) nur der Betrag  $|\psi_0(\mathbf{r})|^2$  auftaucht.

Weder relative Phasen noch irgendwelche anderen Ausdrücke, die von mindestens zwei verschiedenen Argumenten  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{r}'$  abhängen, zeigen sich in der Dichtematrix des abgestrahlten Feldes. Damit ist ausgeschlossen, daß örtliche Korrelationen der atomaren Wellenfunktion das emittierte Feld in irgendeiner Weise beeinflussen.

Da das emittierte Feld von keinerlei Ortskorrelationen abhängt, kann es Kohärenzen der atomaren Wellenfunktion nicht 'sehen'. Reinzustand und Gemisch mit derselben Ortsdichteverteilung  $|\psi_0(\mathbf{r})|^2$  sind ununterscheidbar. Also sind die Interferenzen, welche im Experiment gesehen wurden [85, 86], **nicht als Selbstinterferenzen des Lichts von einem Atom erklärbar**.

Die korrekte Deutung der am Kapitelanfang erwähnten experimentellen Befunde bleibt in dieser Arbeit leider unbeantwortet [89, 88, 10], aber die **Eingangsfragen zu diesem Kapitel sind beantwortet**.

Es soll noch erwähnt sein, daß die hier behandelte Situation der aus dem bekannten Einsteinschen Gedankenexperiment zur gleichzeitigen Messung der Teilchentrajektorie und der Interferenzerscheinungen bei dem Durchtritt eines Teilchens durch einen Doppelspalt sehr ähnlich ist [97, 15]. Hier ist es eine Lichtwelle, welche Interferenzen zeigen soll, während das Atom, welches beispielsweise in einer Hantelform präpariert ist, als eine Zweipunktquelle wirkt – dort soll eine Materiewelle die Interferenz zeigen und ein geeignet präparierter Doppelspalt als Zweipunktquelle fungieren. Die entscheidende Gemeinsamkeit der beiden Arrangements ist die Betrachtung einer *quantenmechanischen* Quelle.

### 3.7.1. Zur Illustration: Die Fernfeldintensität

Wie wir eben sahen, modifiziert die örtliche Ausdehnung der Schwerpunktswellenfunktion des Atoms die Eigenschaften der von ihm spontan emittierten Strahlung in keiner nennenswerten Weise, außer daß ein Ensemble solchermaßen präparierter Atome eine Verschmierung des Orts, von dem die Strahlung ausgeht, verursacht.

Um dieses zu illustrieren soll hier noch die Intensität des Fernfeldes (am Ort  $\mathbf{R}$ ) für ein Atom mit der Ortsverteilung  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  hergeleitet werden. Für die meßbare Feldintensität gilt nach Glauber [98]

$$I(\mathbf{R}, t) = \text{Tr} \left\{ \varrho_F(t) \hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{R}) \right\}, \quad (3.17)$$

wobei  $\hat{\mathbf{E}}^{(-)}$  und  $\hat{\mathbf{E}}^{(+)}$  die negativen und positiven Frequenzanteile des Operators der elektrischen Feldstärke sind. Nach einiger Rechnung erhält man daraus die bekannten Ausdrücke für die Intensität des spontan emittierenden, punktförmigen Atoms in der Näherung von Weisskopf und Wigner [99, 100, 5] statistisch gemittelt über die Ortsaufenthaltswahrscheinlichkeit  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  des Atoms (eine Skizze der Rechnung findet man im Anhang A1.)

$$I(\mathbf{R}, t) = \text{const} \int d^3r \sin^2 \vartheta |\psi(\mathbf{r})|^2 \Theta(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|/c) \times \frac{\exp[-2\gamma_0(t - |\mathbf{R} - \mathbf{r}|/c)]}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^2}. \quad (3.18)$$

Erwähnenswert ist hierbei, daß die Heavisidesche Stufenfunktion  $\Theta$  formal als Ergebnis eines Residuenintegrals entsteht und natürlich die Kausalitätsbedingung ausdrückt. Der Winkel  $\vartheta$  wird vom atomaren Dipolmoment  $\mathbf{d}$  einerseits und vom Ortsvektor  $\mathbf{R} - \mathbf{r}$  andererseits eingeschlossen. Der Term  $\sin^2 \vartheta$  spiegelt also die bekannte Dipolabstrahlcharakteristik wider.

Man sieht, daß die Intensität als von einer klassisch verschmierten Wolke abgestrahlt gedacht werden kann, die gemäß  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  verteilt ist. Unter der Fernfeldannahme, daß der Betrag von  $\mathbf{R} - \mathbf{r}$  viel größer sei, als die räumliche Ausdehnung  $a$  des atomaren Schwerpunktswellenpakets, können wir den Winkel  $\vartheta_0$  als fix ansetzen. Für den Spezialfall eines Atoms mit einer am Ursprung  $\mathbf{r} = 0$  ruhenden Gaußschen Ortsdichteverteilung

$$|\psi(\mathbf{r})|^2 = \left( \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \right)^3 \exp \left[ -\frac{r^2}{a^2} \right], \quad (3.19)$$

läßt sich die Intensität ohne Schwierigkeiten berechnen

$$I_0(\mathbf{R}, t) = \frac{\text{const}}{R^2} \sin^2 \vartheta_0 \exp \left[ 2\gamma \left( \frac{R}{c} - t \right) \right] \frac{1}{2} \left( 1 - \text{Erf} \left[ \frac{a\gamma}{c} + \frac{1}{a}(R - ct) \right] \right). \quad (3.20)$$

Abbildung 5 auf Seite 51 illustriert, wie sich die räumliche Ausdehnung des atomaren Wellenpakets als Verschmierung des emittierten Lichtpulses äußert. Es ist allerdings unrealistisch solche Lichtpulsverschmierungen experimentell beobachten zu wollen, dafür sind die experimentellen Anforderungen sehr hoch, weil die Länge eines Wellenzuges bei spontaner Emission Dezimeter, Meter und noch mehr, die kohärente räumliche Ausdehnung atomarer Wellenfunktionen hingegen Mikro- bestenfalls Millimeter beträgt.

*Zudem ist der Effekt nicht besonders interessant,  
weil die atomaren Kohärenzen unsichtbar bleiben.*

Abbildung 5: Relative Intensität der Strahlung, Gl. (3.20), von einem Gaußförmigen Wellenpaket abgestrahlt, die Wahl der Parameter  $\gamma_0 a/c = 0.032$  und  $R = 80$  ist willkürlich. Zum Vergleich das entsprechende für ein punktförmiges Atom: Gestrichelte Linie.

### 3.8. Helfen andere Niveauschemata weiter?

Gl. (3.16) zeigt uns unzweideutig, daß sich Kohärenzen der atomaren Wellenfunktion nicht auf das spontan emittierte Licht übertragen.

Dieser Abschnitt zeigt, daß es auch bei komplizierteren Niveauschemata so bleibt.

Betrachten wir eine kohärente Anregung zweier eng benachbarter oberer Niveaus  $\sigma$  und  $\tau$ , also ein  $V$ -förmiges Niveauschema, so verallgemeinert sich Gl. (3.9) zu

$$\beta_V(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) = -\alpha_0(\mathbf{p} + \hbar \mathbf{k}_j) \mathcal{N} \lambda_j \exp \left[ -i \left( \frac{p^2}{2\hbar M} + \omega_j \right) t \right] \times \left\{ \frac{c_\sigma}{(\omega_j - \omega_\sigma + i\gamma_\sigma)} + \frac{c_\tau}{(\omega_j - \omega_\tau + i\gamma_\tau)} \right\}. \quad (3.21)$$

Die Energiedifferenz  $|\omega_\sigma - \omega_\tau|$  der oberen Niveaus soll kleiner als die Zerfallsraten  $\gamma_\sigma$  und  $\gamma_\tau$  sein.  $c_\sigma$  und  $c_\tau$  sind komplexe Amplituden und  $\mathcal{N}$  die Normierungskonstante. Die Anregung muß kohärent sein, denn eine inkohärente Anregung oberer Niveaus

haben wir aus Linearitätsgründen schon mitbehandelt. Ebenso sollten die Parameter  $\omega_{\sigma/\tau}$  und  $\gamma_{\sigma/\tau}$  wie oben gewählt werden, andernfalls ist eine kohärente Anregung unrealistisch bzw. die spontanen Zerfälle entkoppeln, was wiederum auf die vorherigen Betrachtungen zurückführt. Analog zu Gl. (3.16) ergibt sich so die Felddichtematrix

$$\begin{aligned} \rho_V(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_{j'}; t) &= \text{const} \int d^3r |\psi_0(\mathbf{r})|^2 f(\mathbf{k}_j, \mathbf{r}; t) f^*(\mathbf{k}_{j'}, \mathbf{r}; t) \\ \text{mit} \quad f(\mathbf{k}_j, \mathbf{r}; t) &= \lambda_j \exp[-i(\mathbf{k}_j \mathbf{r} + \omega_j t)] \\ &\quad \times \left\{ \frac{c_\sigma}{(\omega_0 - \omega_\sigma + i\gamma_\sigma)} + \frac{c_\tau}{(\omega_0 - \omega_\tau + i\gamma_\tau)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

D.h. (3.16) ist so modifiziert, daß Quantenschwebungen (quantum beats [16, 5]) auftreten, jedoch leider ohne daß dabei in irgendeiner Weise räumliche Kohärenzen der Schwerpunktswellenfunktion des Atoms in diesen Ausdruck eingehen.

Wenn man in den geschweiften Klammern von (3.21) Summanden hinzufügt, um noch kompliziertere Mehrniveauschemata zu beschreiben, erkennt man, daß schließlich die gleiche Phasen- und Kohärenzenunabhängigkeit herauskommt. Gl. (3.22) läßt einen auch gut erkennen, warum das so ist: Modifikationen des Niveauschemas wirken sich nur auf den Ausdruck in der geschweiften Klammer aus, damit ändert man aber nichts an der Produktstruktur des Integranden in der Form  $|\psi_0(\mathbf{r})|^2 \times$  'Feldmode', die für die mangelnde Sensitivität des Feldes formal verantwortlich ist. Hieran würde sich auch nichts ändern, wenn wir eine polarisationsabhängige Messung des Feldes durchführten, was im übrigen eine nachträgliche Begründung unserer Zusammenfassung der Kopplungskonstanten in Gl. (3.2) darstellt.

*Damit ist allgemein gezeigt, daß spontane Emission für  
atomare Kohärenzen blind ist.*

### 3.9. Andere Methoden

Nachdem wir das Resümee ziehen müssen, daß spontane Emission nicht sehr mitteilbar ist, wollen wir verwandten Arbeiten noch ein paar Worte widmen. Natürlich

gibt es andere Möglichkeiten, räumliche Informationen per spontaner Emission zu erhalten, allerdings benötigen diese Methoden kompliziertere Schemata als das hier betrachtete der Emission im freien Raum ohne äußere Potentiale. So kann z. B. durch Anlegen steiler Potentiale, über korrespondierende Resonanzlinienverschiebung sogar Subwellenlängenauflösung der atomaren Dichteverteilung  $|\psi(\mathbf{r})|^2$  erreicht werden [101, 102], allerdings sieht man die atomaren Kohärenzen damit auch *nicht*.

Auch die Methode des Auslesens der atomaren Impulsverteilung aus dem optischen Spektrum nach Rzażewski und Żakowicz [94] taugt nur sehr bedingt Informationen über räumliche Kohärenzen der atomaren Wellenfunktion zu gewinnen und braucht überdies, neben spezieller Bedingungen an die Form des atomaren Wellenpakets, auch eine außerordentlich hochauflösende Spektroskopie.

Man muß schon ein sehr viel ausgetüfteltes Schema, wie das von Wallentowitz und Vogel [30] benutzen, um die Wellenfunktion des Atoms gut kennenzulernen, dieses Schema benutzt ein *in einer Falle eingesperrtes* Ion, mehrere optische Meßfelder und erlaubt neben der Rekonstruktion sogar die Präparation des Ions in seinen Fal-lenschwingungszuständen.

Wir kommen am Ende dieses Kapitels zu dem abschließenden Ergebnis, daß allein mit Hilfe spontan emittierter Strahlung keine atomaren Kohärenzen gesehen werden können, nicht einmal Reinzustand und Gemisch können unterschieden werden:

*Die Dichtematrix  $\hat{\rho}_F$  enthält alles quantenmechanisch verfügbare Wissen über das Feld, also sehen wir, daß in keiner Weise Interferenzen zwischen Partialwellen, die von verschiedenen Orten  $\mathbf{r}$  des Atoms abgestrahlt wurden, zu erwarten sind.*



## 4. Dekohärenz durch spontane Emission

In Kapitel 3. untersuchten wir das Feld des spontan emittierten Lichts, hier wird nun der andere Akteur, das Atom, betrachtet.

Wir haben gesehen, daß spontan emittiertes Licht uns nur sehr wenig Informationen über die Ortswellenfunktion des Atoms liefert. In diesem Kapitel wird gezeigt, daß teilweise Zerstörung der Kohärenz der Ortswellenfunktionen des Atoms durch die spontane Emission hierfür verantwortlich ist.

Um diese **Kohärenzzerstörung (Dekohärenz)** zu beschreiben, leiten wir einen mathematischen Zusammenhang zwischen der **Dichtematrix der Schwerpunktswellenfunktion** ohne spontane Emission,  $\hat{\rho}$ , und der für den Fall spontaner Emission,  $\hat{\rho}_{emitt}$ , ab.

Die **Abhängigkeit der Dekohärenz** von Orientierung und Größe eines Detektors, welcher Teilensemble aus dem Gesamtensemble der betrachteten Atome dadurch auswählt, daß er ihre spontan emittierten Photonen nachweist, wird diskutiert.

Eine Analyse des **physikalischen Mechanismus der Kohärenzzerstörung** schließt dieses Kapitel ab.

### 4.1. Bedeutung der Dekohärenz im Interferenzexperiment

In einem kürzlich von Pfau *et al.* durchgeführten Experiment [84] ist es gelungen die Veränderung räumlicher Korrelationen der die Schwerpunktsverteilung des Atoms beschreibenden Dichtematrix<sup>1</sup> zu messen. An jener Stelle wurde auch eine kurze theoretische Deutung des auftretenden Dekohärenzeffekts mit Beschränkung auf eine Raumdimension ( $z$ ) geliefert. Es wurde abgeleitet, daß die *gemittelte* Kohärenzfunk-

---

<sup>1</sup>In diesem Kapitel ist die Dichtematrix des Atoms  $\hat{\rho}$  bzw.  $\hat{\rho}_{emitt}$  betrachtet, *nicht* die des Feldes  $\hat{\rho}_F$  aus dem vorigen Kapitel.

tion  $g^{(1)}(z) = \int \varrho(z' - z, z') dz'$ , welche aus der gemittelten Dichtematrix für die atomare Schwerpunktskoordinate hervorgeht, gerade die Fouriertransformierte der  $z$ -Komponente der atomaren Schwerpunktsimpulse ist.

Nach erfolgter spontaner Emission verändert sich die Impulsverteilung, wie z.B. in [104] heuristisch abgeleitet, durch eine Faltung mit der Rückstoßverteilung der emittierten Photonen. Auf die gemittelte Kohärenzfunktion übertragen, bedeutet dieses nach dem Faltungssatz, daß die resultierende Kohärenzfunktion  $g_{\text{emitt}}^{(1)}(z)$  nach der Emission aus  $g^{(1)}(z)$  durch Multiplikation mit einem Faktor  $D(z)$  hervorgeht

$$g_{\text{emitt}}^{(1)}(z) = g^{(1)}(z) \cdot D(z). \quad (4.1)$$

Dieser Faktor ist die sogenannte **Dekohärenzfunktion**  $D(z)$ . Nach dem Faltungssatz ist sie die Fouriertransformierte der  $z$ -Komponente der Photonenrückstoßimpulse.

In dieser Arbeit ist dieses Resultat auf

- alle drei Raumrichtungen,
- für die Dichtematrix selbst und
- für bedingte Messungen

verallgemeinert. Zusammenfassend erhalten wir analog zu Gl.(4.1) das Ergebnis

$$\varrho_{\text{emitt}}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}; t) = \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}; t) \cdot D(\mathbf{r}). \quad (4.2)$$

Aus Normierungsgründen ( $\text{Tr} \hat{\varrho} = 1$ ) muß  $D(0) = 1$  gelten.

Die Dichtematrix  $\hat{\varrho}_{\text{emitt}}$  beschreibt das Atom mit und  $\varrho$  ohne spontane Emission, dieses gilt natürlich unter der Annahme, daß die Atome mit Ausnahme des Emissionsvorgangs identisch behandelt werden. Schon früher wurde im Zusammenhang mit der *Streuung* von Licht an ausgedehnten atomaren Wellenpaketen das zu (4.2) analoge Ergebnis gefunden [96], in der hier präsentierten Herleitung sind allerdings

im Unterschied dazu *spontane Emission* betrachtet, die *Gültigkeitsbedingungen der verwendeten Näherungen* genau angegeben und *bedingte Messungen* diskutiert.

Zunächst wollen wir uns noch die physikalische Bedeutung der Dekohärenzfunktion in einem Atom- oder Molekülstrahlinterferenzexperiment vergegenwärtigen, wie sie in den letzten Jahren in so vielen faszinierenden Varianten vorgeführt wurden [105]-[114]. Betrachtet sei zur Vereinfachung ein Atomstrahlexperiment des Youngschen Typs (zwei Löcher oder Spalte im Beugungsgitter), in dem der Strahl so präpariert ist, daß die Wechselwirkungen zwischen den Atomen vernachlässigt werden können. Ferner sollen die jeweiligen atomaren Wellenpakete durch eine charakteristische de Broglie Wellenlänge  $\Lambda$  charakterisierbar, d.h. der Strahl soll „quasimonochromatisch“ sein. Natürlich sind dann in perfekter Analogie zur klassischen Optik bei Atomstrahlbeugung und -interferenz stationäre Interferenzmuster der Atome mit hohem Kontrast zu erwarten. Auf dem Beobachtungsschirm ist die zu erwartende Intensitätsverteilung eintreffender Atome,  $I$ , proportional ihrer quantenmechanischen Ortsaufenthaltswahrscheinlichkeit, folglich gilt [4]

$$I \sim \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varrho(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \mathbf{x} + \mathbf{r}) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}) e^{i\phi(\tau)} \right\}, \quad (4.3)$$

mit einem Phasenargument  $\tau$ , welches die verschiedenen Ausbreitungszeiten von den beiden Youngschen Löchern bei  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  zum betrachteten Schirmort parametrisiert. Bekanntlich ist der Kontrast des resultierenden Interferenzmusters auf dem Schirm als das folgende Intensitätsverhältnis definiert

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) \equiv \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2|\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r})|}{\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varrho(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \mathbf{x} + \mathbf{r})}. \quad (4.4)$$

Für den Fall mit spontaner Emission ergibt sich mit Gl. (4.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{emitt}(\mathbf{r}) &= \frac{2|\varrho_{emitt}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r})|}{\varrho_{emitt}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varrho_{emitt}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \mathbf{x} + \mathbf{r})} \\ &= \frac{2|\varrho_{emitt}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r})|}{\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \varrho(\mathbf{x} + \mathbf{r}, \mathbf{x} + \mathbf{r})} = \mathcal{V}(\mathbf{r}) \cdot |D(\mathbf{r})|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Abbildung 6: Skizze des Versuchsaufbaus aus dem Experiment von Pfau *et al.* (entnommen aus [84]):

(a) Heliumatome, in einer Entladungsquelle metastabil angeregt, passieren zwei Kollimatoren und werden an einem Lichtgitter gebeugt. Nach dem Lichtgitter erleiden die Atome wahlweise die spontane Emission eines einzelnen Photons, welches zu der durch  $D(\mathbf{r})$  beschriebenen Dekohärenz führt, oder fliegen ohne diese ungestört bis zum Schirm. Schließlich werden sie vermöge eines Schlitzes mit hoher Ortsauflösung ( $5\mu\text{m}$ ) von einem Channeltron-Detektor nachgewiesen.

(b) Die variable Periode des Lichtgitters wird durch verschiedene Einfallswinkel  $\alpha$  des Lichts auf den zu seiner Erzeugung benutzten Spiegel erreicht. Das Lichtgitter ist so dargestellt, wie die ankommenden Atome es 'sehen'.

Man sieht, daß die Dekohärenzfunktion  $D(\mathbf{r})$  die Wirkung der spontanen Emission auf Kontrast und Phase des Interferenzmuster vollständig beschreibt:

- Die komplexe Phase von  $D(\mathbf{r})$  beschreibt den Phasenschub des Interferenzmusters (Gl.(4.3))
- Der Betrag von  $D(\mathbf{r})$  beschreibt eine Verminderung des Interferenzmusterkontrasts (Gl. (4.5)).

## 4.2. Mathematische Herleitung von $\hat{\varrho}_{emitt}$

Da wir auch hier die spontane Emission von einem ausgedehnten Schwerpunktswellenpaket im freien Raum betrachten, können wir die Ansätze aus dem Kapitel 3., insbesondere die Formeln (3.7) bis (3.9), übernehmen. Wir wählen aus Zweckmäßigkeitsgründen die Impulsdarstellung und berechnen damit die Dichtematrix des Atoms nach spontaner Emission eines Photons.

Gemäß den Axiomen der Quantenmechanik des Meßprozesses verändert die Registrierung eines spontan emittierten Photons die Dichtematrix zur Beschreibung der atomaren Schwerpunktsverteilung. Um diese Dichtematrix zu erhalten, integrieren wir in diesem Fall aber über die Feldfreiheitsgrade, denn uns interessiert nun das Atom, nicht mehr das Feld wie in Kapitel 3.

$$\varrho_{emitt}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; t) = \text{const} \sum_j \beta(\mathbf{p}, \mathbf{k}_j; t) \beta^*(\mathbf{p}', \mathbf{k}_j; t). \quad (4.6)$$

Wieder nutzen wir die Näherung  $v \ll c$ , d.h. wir nehmen an, daß Gleichung (3.8) durch (3.9) ersetzt werden darf. Ferner gehen wir, weil uns letztlich räumliche Kohärenzen interessieren, mit Hilfe der Beziehung (3.14) gleich zur Ortsdarstellung über

$$\begin{aligned} \varrho_{emitt}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) &= \text{const} \int d^3 p \int d^3 p' \int d^3 k |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\mathbf{x} - \mathbf{p}'\mathbf{x}')} \\ &\quad \times \frac{\alpha_0(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}) \alpha_0^*(\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k}) \exp[-i\frac{p'^2 - p'^2}{2M\hbar}t]}{(\omega_j - \omega_0)^2 + \gamma_0^2}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

dieses stellt das Pendant zu (3.16) dar. Mit der Substitution  $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k} = \mathbf{P}$ ,  $\mathbf{p}' + \hbar\mathbf{k} = \mathbf{P}'$  und unter Ausnutzung der Identität

$$\mathbf{p}\mathbf{x} - [p^2 \frac{t}{2M}] = -P^2 \frac{t}{2M} + \mathbf{P}(\mathbf{x} + \mathbf{k} \frac{\hbar t}{M}) - \hbar\mathbf{k}\mathbf{x} - \frac{\hbar^2 k^2 t}{2M} \quad (4.8)$$

gewinnen wir aus Gleichung (4.7) den Zusammenhang

$$\varrho_{emitt}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) = \text{const} \int d^3 P \int d^3 P' \int d^3 k |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}'\mathbf{x}')}$$

$$\times e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \frac{\alpha_0(\mathbf{P})\alpha_0^*(\mathbf{P}')e^{-\frac{it}{\hbar M} \left[ (P^2-P'^2)/2 + (\mathbf{P}'-\mathbf{P})\hbar\mathbf{k} \right]}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2} \quad (4.9)$$

$$= \text{const} \int d^3k \psi_t(\mathbf{x} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}t) \psi_t^*(\mathbf{x}' + \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}t) \\ \times |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2}. \quad (4.10)$$

Im letzten Umformungsschritt ist die Identität

$$\psi_t(\mathbf{x} + \mathbf{k}\frac{\hbar t}{M}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}^3} \int d^3p \exp[-\frac{i}{\hbar} \frac{P^2 t}{2M}] \alpha_0(\mathbf{P}) \exp[\frac{i}{\hbar} \mathbf{P}(\mathbf{x} + \mathbf{k}\frac{\hbar t}{M})] \quad (4.11)$$

benutzt worden. Wir betrachten hier, wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel erklärt, quasimonochromatische Wellenpakete, d.h.  $\psi_t(\mathbf{x})$  läßt sich als Produkt eines in Ort und Zeit sehr langsam veränderlichen Teils  $\Xi_t(\mathbf{x})$  multipliziert mit einer ebenen Welle  $\exp[i\mathbf{K}\mathbf{x}]$  auffassen, folglich ist

$$\psi_t(\mathbf{x}) = \Xi_t(\mathbf{x}) \exp[i\mathbf{K}\mathbf{x}] \exp[-\frac{it}{\hbar} \frac{\hbar^2 K^2}{2M}], \quad (4.12)$$

wobei  $|\mathbf{K}| \equiv 2\pi/\Lambda$ , mit der de Broglie-Wellenlänge  $\Lambda$ . Unter dieser Quasimonochromazitätsannahme, die für ausgedehnte atomare Wellenpakete notwendig erfüllt sein muß, um ein kontrastreiches, stationäres Interferenzmuster zu gewährleisten, können wir den Ausdruck (4.10) erheblich weitervereinfachen. Wir erhalten mit der entsprechenden Näherung  $\Xi_t(\mathbf{x} + \hbar\mathbf{k}t/M) \approx \Xi_t(\mathbf{x})$

$$\varrho_{\text{emitt}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'; t) \approx \text{const} \int d^3k \Xi_t(\mathbf{x}) \exp[i\mathbf{K}(\mathbf{x} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}t)] \\ \times \Xi_t^*(\mathbf{x}') \exp[-i\mathbf{K}(\mathbf{x}' + \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}t)] \\ \times |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2} \quad (4.13)$$

$$= \psi_t(\mathbf{x}) \psi_t^*(\mathbf{x}') \cdot \text{const} \int d^3k |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 \frac{e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}'-\mathbf{x})}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2} \quad (4.14)$$

$$\equiv \psi_t(\mathbf{x}) \psi_t^*(\mathbf{x}') \cdot D(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (4.15)$$

Diese Näherung ist gerechtfertigt, sofern wir annehmen dürfen, daß die Rückstoßverschiebung  $\hbar\mathbf{k}t/M$  im Argument von  $\psi_t(\mathbf{x} + \hbar\mathbf{k}t/M)$  hinreichend klein ist. Wählen wir für  $t$ , im Einklang mit den Näherungen aus Abschnitt 3.5., einige Lebenszeiten  $\gamma_0^{-1}$ , so erhalten wir für diese Verschiebung einen Wert von der Größenordnung  $h/\lambda\gamma_0 M \approx 10^{-8}\text{m}/\mu$  bei einem optischen Übergang. Dabei ist  $\mu$  die auf Wasserstoffmasse skalierte Masse des Atoms. Folglich darf sich die Einhüllendenfunktion  $\Xi$  über eine Distanz von  $10^{-8}\text{m}/\mu$  nicht wesentlich ändern, was für atomoptische Experimente, bei denen Wellenpakete mit bis zu  $10^{-4}\text{m}$  Ausdehnung [81] benutzt werden, eine gut erfüllte Annahme ist.

*Wir sind also bei der erwünschten Produktform (4.2) angelangt.*

Den allgemeinen Fall eines Gemisches, statt eines Reinzustandes, als Anfangszustand haben wir implizit mitbehandelt, denn ein Gemisch läßt sich in konstituierende reine Zustände zerlegen und wegen der Linearität der Spurbildung zum Abschluß der Rechnung wieder zusammensetzen.

Der erhaltene Faktor  $D$  in (4.15) ist die gesuchte **Dekohärenzfunktion aus (4.2)**:

$$D(\mathbf{r}) \equiv \text{const} \int d^3k |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2}. \quad (4.16)$$

Ihr Vorfaktor *const* ergibt sich aus der Normierungsbedingung  $D(0) = 1$ . Die Dekohärenzfunktion ist die Fouriertransformierte der Emissionscharakteristik der emittierten Photonen und stellt in dreifacher Weise eine Verallgemeinerung gegenüber früher bekanntem, siehe z.B. [96, 84], dar:

- i) Sie ist die Verallgemeinerung für den Fall aller 3 Raumdimensionen,
- ii) erlaubt die Untersuchung für den Fall konditionaler Messungen, was im folgenden Kapitelabschnitt noch eingehend diskutiert wird und
- iii) beschreibt die Dekohärenz der Dichtematrix selbst, nicht nur der gemittelten Kohärenzfunktion  $g_{\text{emitt}}^{(1)}(z)$ .

Zusätzlich sind die Bedingungen, unter denen dieses Ergebnis abgeleitet wurde, klar benannt und die verschiebenden Auswirkungen des Rückstoßes für große Zeiten sind falls nötig in einfacher Weise zu studieren, wenn man den vollständigen Ausdruck (4.10) und nicht den genäherten Ausdruck (4.15) benutzt.

### 4.3. Konditionale Interferenzmuster

Angenommen, wir hätten die Möglichkeit, einzelne Atome in einem Interferenzexperiment mit den Photonen, die sie emittiert haben, zu korrelieren. Konkret soll das heißen, wir weisen einzelne Atom mit einem Atomdetektor (*Schirm*) und einzelne spontan emittierte Photonen mit einem *Detektor* für Licht nach und fordern, daß das Experiment erlaube jedem Atom den Rückstoß, des von ihm spontan emittierten Photons, mit Hilfe des Experiments zuzuordnen.

Dieses könnte etwa dadurch geschehen, daß man einen gut kollimierten Atomstrahl benutzt und durch geeignete Wahl von Blenden nur jene Atome auswählt, die vermöge eines passenden Rückstoßes aus ihrer ursprünglichen Bahn abgelenkt werden, um genau durch eine passende Blende zu schlüpfen, die der übrigen Mehrzahl der Atome den Weg zum Schirm versperrt. Dieser Aufbau ist vor kurzem experimentell realisiert worden [90] und zeigt Ansätze eines Wiederauflebens der Interferenzmuster durch jene rückstoßinduzierte Teilensembleswahl.

Hier soll allerdings der Fall einer '**aktiven Zuordnung**' zwischen Atom und Photon diskutiert werden, die sich zur Zeit im Stadium erster Vorversuche bewegt [115]. Mit 'aktiver' Zuordnung ist gemeint, daß versucht werden soll, jedem Atom auf dem Schirm genau sein emittiertes Photon mit Hilfe des Detektors zuzuordnen.

Notwendige Bedingung hierfür ist ein Atomstrahl mit hinreichend geringer Strahldichte, um auf dem Schirm nicht zu viele Atome in Koinzidenz zu finden oder, genauer, mit so geringer Dichte, daß ein nachgewiesenes Photon über eine Flugzeitrechnung genau einem Atom zugeordnet werden kann. Des weiteren sind natürlich effiziente Detektoren für Atome und Photonen wünschenswert, aber nicht notwendige Bedingung,

allerdings erhöht sich bei ineffizienten Detektoren der *Rauschuntergrund* beträchtlich, was die Suche nach korrelierten Atom-Photon-Paaren zu einer 'Suche nach dem Nagel im Heuhaufen' werden läßt. Diese aktive Auswahl zueinandergehöriger Paare ist nicht nur im Prinzip möglich, sondern an ihrer baldigen experimentellen Realisierung wird gearbeitet [115].

In den nächsten zwei Abschnitten 4.3.1. und 4.3.2. wollen wir untersuchen, wie die entsprechenden Teilensembles aussehen, die durch den Nachweis des emittierten Photons durch einen Detektor gebildet werden, welcher, vom Emissionsort  $\mathbf{x} = 0$  aus gesehen, den Raumwinkel  $\Delta\Omega$  abdeckt.

Da wir gelernt haben, daß  $D(\mathbf{r})$  alle Informationen hierzu enthält (Gl. (4.2)), müssen wir also im weiteren nur die zu den jeweiligen Teilensembles gehörige Dekohärenzfunktion  $D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})$  bestimmen. Formal bedeutet das, daß wir die Integration in Gl.(4.16) auf jene  $\mathbf{k}$ -Vektoren beschränken müssen, die in den entsprechenden Raumwinkelbereich weisen, was wir durch die Integrationsbereichsangabe  $[\Delta\Omega]$  bezeichnen wollen. Entsprechend definieren wir

$$D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r}) \equiv \text{const} \int_{[\Delta\Omega]} d^3k |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2} . \quad (4.17)$$

$$= \text{const} \int_0^\infty dk k^2 \int_{[\Delta\Theta]} d\theta \sin\theta \int_{[\Delta\Phi]} d\varphi |\lambda_{\mathbf{k}}|^2 \frac{e^{ikr \cos\theta}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2} . \quad (4.18)$$

Als Variante könnte man zusätzlich ein enges Frequenzfilter vor dem Detektor betrachten, d.h. die  $k$ -Integration in (4.18) würde eingeschränkt. Allerdings wirkt das für optische Übergänge typische Verhältnis  $\gamma_0/\omega_0 \sim 10^{-7}$  schon als eine so scharfe Frequenzauswahlbedingung, daß eine weitere Verschärfung dieser Bedingung die späteren Ergebnisse in keiner interessanten Weise ändert; dasselbe gilt für Polarisationsfilter. So beschäftigen wir uns allein mit der geometrischen Beschränkung der  $\mathbf{k}$ -Vektoren durch den Detektorraumwinkel  $\Delta\Omega$ .

### 4.3.1. Detektorraumwinkel $\Delta\Omega = 4\pi$

Die Situation ' $\Delta\Omega = 4\pi$ ' ist experimentell natürlich trivial realisierbar, bedeutet  $4\pi$  doch den vollen Raumwinkel, das heißt alle Atome sind einzubeziehen. Wenn aber der Detektor das gesamte Ensemble auswählt, kann man ihn ganz weglassen. Ein solches Experiment ohne Detektor ist auch schon durchgeführt worden (vgl. Abb. 6 auf Seite 58). In diesem Abschnitt wird das dabei erhaltene Meßergebnis [84] in der Sprache der Dekohärenzfunktion ausgedrückt.

Die zugehörige Berechnung der Dekohärenzfunktion ergibt sich als ein Integral über den gesamten  $\mathbf{k}$ -Raum. Hierbei macht man einen vernachlässigbaren Fehler (der Größenordnung  $\gamma_0/\omega_0 \sim 10^{-7}$ ) bei der anstehenden Integration über die skalaren Werte  $k$ , wenn man die Integration bis  $-\infty$  ausdehnt, s. Gl. (4.18). Außerdem ist  $\gamma_0$  im Vergleich mit  $\omega_0$  so klein, daß wir einen resultierenden Einhüllendenfaktor  $\exp[-\gamma_0 r/c]$  vernachlässigen dürfen (vgl. Herleitung in Anhang A2.), insgesamt erhalten wir

$$D_{4\pi}(\mathbf{r}) = \frac{3}{2} \frac{1}{2d_{\perp}^2 - d_{\parallel}^2} \left\{ \text{sinc}(k_0 r) d_{\perp}^2 + \left[ \frac{\sin(k_0 r)}{(k_0 r)^3} - \frac{\cos(k_0 r)}{(k_0 r)^2} \right] (2d_{\parallel}^2 - d_{\perp}^2) \right\}. \quad (4.19)$$

Hierbei bedeutet  $k_0 = \omega_0/c$  und  $d_{\parallel}$  sowie  $d_{\perp}$  sind die parallelen und orthogonalen Komponenten des Dipolmoments  $\mathbf{d}$  in Bezug auf den Vektor  $\mathbf{r}$ . Abbildung 7, welche ein Bild der Gl. (4.19) zeigt, illustriert, daß die Kohärenz der Wellenfunktion des Atoms ab der Größenordnung einer Wellenlänge  $\lambda_0$  des emittierten Lichts zerstört wird. Außerdem wird die Kohärenz gemäß dem Ausdruck (4.19) stärker in Richtung parallel als senkrecht zum Dipolvektor  $\mathbf{d}$  gedämpft, dieses ist Ausdruck der Vorzugsrichtung der Emissionscharakteristik des Dipols und kann im Bild 7 LINKS) deutlich gesehen werden.

Für den Fall eines zufällig orientierten Dipols, d.h. nach einer Mittelung über alle 3 Raumrichtungen, verschwindet in (4.19) der Term in den eckigen Klammern und wir erhalten das Ergebnis  $D(\mathbf{r}) = \text{sinc}(k_0 r)$ , welches auch experimentell gefunden wurde [84, 90] und in Abb. 7 RECHTS) illustriert ist.

Genaugenommen ist im Falle der Experimente von Pfau *et al.* [84] und Chapman *et al.*

Abbildung 7:

LINKS: Abhängigkeit der Dekohärenzfunktion (4.19) von den Komponenten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{r}$  parallel ( $r_{\parallel}$ ) und senkrecht ( $r_{\perp}$ ) zur Dipolachse  $\mathbf{d}$ ,  $\Delta\Omega = 4\pi$ .

RECHTS: Dekohärenzfunktion (4.25) bei isotroper Abstrahlung (zufällig orientierter Dipol) in Abhängigkeit von den Komponenten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{r}$ . Wegen der Isotropie der Kopplung, gibt es keine Vorzugsrichtung der Dekohärenz wie LINKS.

[90] ein Mischfall vertreten, d.h. der Dipol ist nicht ganz zufällig orientiert, was man beispielsweise an der Emissionscharakteristik, die im Bild 'FIG.1a' von [84] zugrundegelegt ist, gut ablesen kann. Das Experiment lieferte also eine Dekohärenzfunktion, die eine Mischung zwischen den beiden in Abb. 7 dargestellten Fällen ist.

### 4.3.2. Detektorraumwinkel $\Delta\Omega < 4\pi$

Bei Experimenten in denen mit Hilfe aktiver Zuordnung ein Lichtdetektor (mit Öffnungswinkel  $\Delta\Omega$ ) Atome auf dem Nachweisschirm auswählt, ändern sich die Kohärenzeigenschaften dieser atomaren Teilensembles, beschrieben durch  $D_{\Delta\Omega}$ , mitunter drastisch. Die zugehörigen Experimente sind in Vorbereitung [115]. Im folgenden wollen wir uns einerseits auf den Fall eines zufällig orientierten Dipols beschränken, also eine isotrope Emissionscharakteristik annehmen (wie bei Abb. 7 RECHTS)), andererseits aber den Detektorraumwinkel  $\Delta\Omega$  variieren. Das allgemeinere Ergebnis für den zugehörigen Dipolfall findet sich im Anhang A2., aber aus Gründen der Übersichtlichkeit ist die Beschränkung auf eine isotrope Emissionscharakteristik lehrreicher.

Für den richtungsgemittelten Dipol hat die Kopplungskonstante  $|\lambda_{\mathbf{k}}|^2$  den einfachen Wert  $g_k^2 d^2$ . Dennoch wird die Integration über die Winkel des polaren Koordinatensystems (vgl. (4.18)) kompliziert. Eine geschlossene Lösung kann nur für den

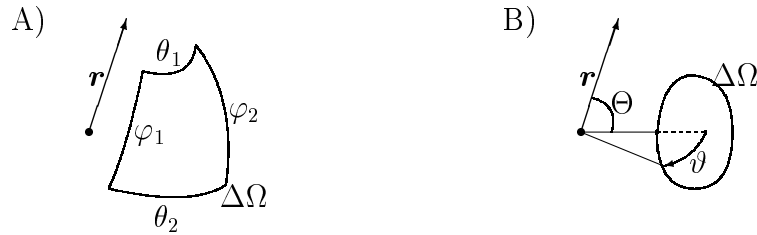


Abbildung 8: Das Koordinatensystem A) für die Berechnung von Gl. (4.23), bzw. B) für die Berechnung von Gl. (4.25).

Spezialfall angegeben werden, vgl. Abb. 8, daß die Berandungen des Detektors bei vorgegebenem Verschiebungsvektor  $\mathbf{r}$  den Linien jenes polaren Koordinatensystems folgen, in welchem  $\mathbf{r}$  die Richtung zum Pol weist. Konkret heißt das, daß der Detektorraumwinkel  $\Delta\Omega$  durch den Bereich  $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  begrenzt sein muß. Zur weiteren Vereinfachung nutzen wir noch aus, daß für optische Übergänge größenordnungsmäßig  $\gamma_0 \approx 10^{-7}\omega_0$ , also diese Frequenzunschärfe vernachlässigbar ist, so daß der Lorentznenner als Funktion von  $k$  durch eine Deltafunktion  $\delta(k - k_0)$  genähert

werden darf, s. Anhang A2. Das Integral (4.18) ergibt dann

$$\begin{aligned} D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r}) &= \frac{\exp(ik_0r \cos \vartheta_1) - \exp(ik_0r \cos \vartheta_2)}{ik_0r(\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2)} \\ &= \text{sinc}(k_0r[\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2]/2) \exp\{ik_0r[\cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2]/2\} . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Es fällt auf, daß  $D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})$  aufgrund der Normierung  $D(0) = 1$  nicht von  $\varphi_2 - \varphi_1$  abhängt. Im Unterschied zum Fall  $\Delta\Omega = 4\pi$  sehen wir bei Gl.(4.20), daß die Dekohärenzfunktion komplexe Werte annimmt, also neben Auswaschungen auch Verschiebungen des Interferenzmusters vorhersagt.

Für den extremen Fall eines infinitesimal kleinen abgedeckten Raumwinkels  $d\Omega$  vereinfacht sich Gl. (4.20) zu

$$D_{d\Omega}(\mathbf{r}) = \exp[i\mathbf{k}_0\mathbf{r}] . \quad (4.21)$$

Dieses einfache Resultat zeigt das interessante Ergebnis, daß ein scharf definierter Rückstoß *nur phasenverändernd nicht kohärenzzerstörend* wirkt, denn der Betrag von  $D_{d\Omega}(\mathbf{r})$  ist unabhängig von der Größe von  $\mathbf{r}$  gleich '1'.

Im allgemeinen Fall (4.20) wird die Abschwächung der Kohärenz durch den Betrag von  $D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})$  gegeben und hat folglich die Form

$$|D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})| = |\text{sinc}(k_0r[\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2]/2)| \quad (4.22)$$

$$= \left| \text{sinc} \left( k_0r \sin \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2} \sin \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2} \right) \right| . \quad (4.23)$$

Während der Ausdruck  $\vartheta_2 - \vartheta_1$  dem relevanten Öffnungswinkel des Detektors entspricht, bezeichnet  $(\vartheta_1 + \vartheta_2)/2$  die **Hauptachse** des Detektors. Gleichung (4.23) zeigt uns, daß  $|D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})|$  für festgehaltenen Öffnungswinkel  $\vartheta_2 - \vartheta_1$ , also effektiv gleich groß bleibenden Detektor, umso stärker abfällt, je mehr die Hauptachse des Detektors sich dem Äquator des Polarkoordinatensystems bei  $\pi/2$  nähert.

Vom Standpunkt des Atoms aus gesehen heißt das, daß die Dekohärenz in der Ebene

senkrecht zur Detektorhauptachse **am stärksten** ist. Außerdem gilt, je kleiner der Öffnungswinkel  $\vartheta_2 - \vartheta_1$ , **desto geringer** die Dekohärenz.

In dem wirklichkeitsnäheren Fall eines Detektors mit einem Sammelwinkel  $\Delta\Omega$ , dessen Form nicht von der Orientierung der Detektorhauptachse in Bezug auf den Differenzvektor  $\mathbf{r}$  abhängt, können wir die oben durchgeführten Rechnungen nicht geschlossen bis zu Ende führen.

Trotzdem sei nun ein Detektor gewählt, der immer rund ist, also einen kreisrunden Raumwinkel  $\Delta\Omega$  gleichbleibender Größe abdeckt, d.h. der Detektor soll die Polkappe  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$  bedecken. Die Richtung des Differenzvektors  $\mathbf{r}$  relativ zu dieser Kappe wollen wir mit den polaren Winkeln  $\phi$  und  $\Theta$  bezeichnen, vgl. Abb. 8 auf Seite 66. Wir erhalten

$$D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r}) = \text{const} \int_0^{\vartheta_1} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \times \exp [ik_0 r \{ \cos(\varphi - \phi) \sin \theta \sin \Theta + \cos \theta \cos \Theta \}] . \quad (4.24)$$

Das Integral über  $\varphi$  ergibt die Besselfunktion  $I_0$  und (4.24) wird zu

$$D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r}) = \text{const} \int_0^{\vartheta_1} \sin \theta d\theta I_0(k_0 r \sin \theta \sin \phi) \exp(ik_0 r \cos \theta \cos \Theta) . \quad (4.25)$$

Dieses Integral kann numerisch ausgewertet werden, wobei die Resultate in den Abb. 7 auf Seite 65 und Abb. 9 auf Seite 69 zu sehen sind. æ Mit wachsendem Sammelwinkel  $\Delta\Omega$  wird der Dekohärenzeffekt offenkundig stärker, soll heißen, der Betrag von  $D_{\Delta\Omega}$  fällt schneller ab: genau wie durch die analoge analytische Lösung (4.23) vorhergesagt. Außerdem sieht man im Einklang mit Lösung (4.23), daß der Dekohärenzeffekt quer zur Detektorhauptachse größer ist als längs derselben.

Abbildung 9: Dekohärenzfunktion bei isotroper Abstrahlung (zufällig orientierter Dipol) Gl.(4.25) in Abhängigkeit von den Komponenten des Verschiebungsvektors  $\mathbf{r}$  parallel ( $r_{\parallel}$ ) und senkrecht ( $r_{\perp}$ ) zur Hauptachse des Detektors.

LINKS: Der Sammelwinkel der Detektors bedeckt eine Polkappe mit dem Öffnungswinkel  $\theta_0 = \pi/3$ .

RECHTS: Der Detektor hat den Öffnungswinkel  $\theta_0 = \pi/10$ .

Man beachte die verschiedenen Mastbe der Koordinatenachsen in dieser und der Abb. 7!

#### 4.4. Dekohärenz: Mechanismus und Interpretation

In diesem Abschnitt soll der Mechanismus der Dekohärenz erklärt werden und die Form der Dekohärenzfunktion aus den Abschnitten 4.3.1. (Abb. 7, Seite 65) und 4.3.2. (Abb. 9, Seite 69) verständlich gemacht werden.

#### 4.4.1. Phasenauswaschung

Der **Mechanismus für die Dekohärenz ist die Phasenauswaschung**, wie sie in der Literatur schon beschrieben wurde, vgl. [116, 117]. In Referenz [116] wird sogar gezeigt, daß Dekohärenz **immer** durch die eine oder andere Art von Phasenauswaschung beschreibbar ist.

Im hier betrachteten Fall der spontanen Emission von Licht prägt der Rückstoß der emittierten Photonen dem Atom eine Veränderung seines Impulses und damit die entsprechende relative Phase  $\exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}]$  zwischen zwei Koordinaten  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ . Dieses geschieht innerhalb der Emissionszeit  $t \leq 10\gamma_0^{-1}$ . Die Mittelung über mehrere solcher aufgeprägten Phasen führt schließlich zum Auswaschen der Gesamtphase des Atoms, was formal durch die Integration in Gl. (4.16) beschrieben wird.

Schon das Aufprägen *nur zweier* verschiedener Phasen reicht mitunter, ein Interferenzmuster ganz zu zerstören. Die beiden Phasen müssen sich nur um (ein ungradzahliges Vielfaches von)  $\pi$  unterscheiden und dem Ensemble mit gleichem Gewicht (50%:50%) aufgeprägt werden; dieser Fall ist in Abb. 10 auf Seite 71 veranschaulicht. æ

Neben der Auswaschung ist auch die **Verschiebung** der Interferenzmusterstreifen aus der Mittelung über die Phasen abgeleitet – das komplexe Argument der Dekohärenzfunktion ist gerade die *resultierende Phase dieser Verschiebung*, wie wir uns schon in der Einleitung dieses Kapitels klargemacht hatten.

#### 4.4.2. Komplementaritätsargument

Man kann viele qualitative Details der Dekohärenz mit Hilfe eines Komplementaritätsarguments interpretieren und verstehen. In Abschnitt 4.5. wird gezeigt, daß die Dekohärenzfunktion eine apparaturunabhängige Funktion ist. Deswegen dürfen wir den Detektor, ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit, als eine optimal ortsauflösende Kamera betrachten. *Ortsmessungen* beschneiden räumliche Kohärenzen nach dem Komplementaritätsprinzip in demselben Maße, wie sie Ortsauflösung liefern:

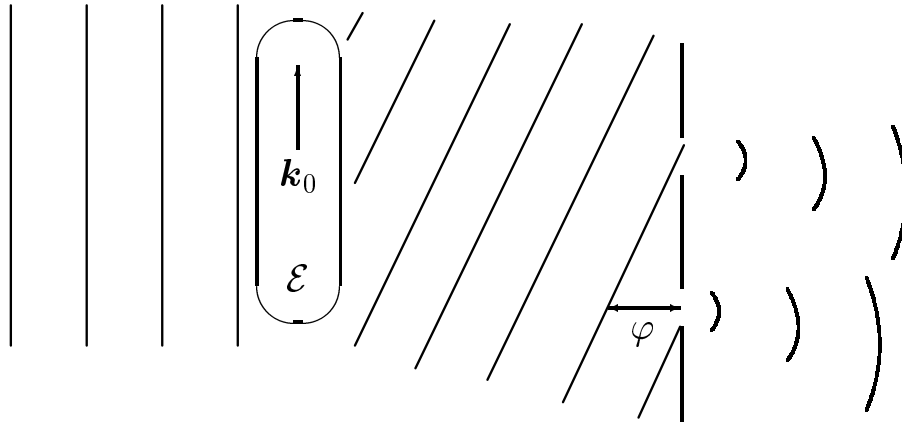


Abbildung 10: Durch die Emission eines Photons  $\mathbf{k}_0$  in der Emissionsregion  $\mathcal{E}$  wird die Wellenfront der atomaren de Broglie-Welle gekippt. Es resultiert eine Phasenveränderung  $e^{i\varphi}$  in den Lchern der Blende des Youngschen Doppelspalts.

Zum Beispiel bei einem Phasenwinkel  $\varphi = \pi$  wird das entsprechende Interferenzmuster im Fernfeld (gestrichelt) gegenüber dem ungestrten Interferenzmuster  $\varphi = 0$  (durchgezogen) genau antiphase. Zusammengenommen lsehen diese beiden – jeweils scharfen – Muster sich so gegenseitig komplett aus.

Abbildung 7 auf Seite 65 zeigt beispielsweise, daß die Kohärenz der Wellenfunktion des Atoms ab der Größenordnung einer Wellenlänge  $\lambda_0$  des emittierten Lichts zerstört wird. Dieser Befund ist mathematisch abgeleitet, entspricht aber ganz den Erwartungen des folgenden qualitativen Arguments:

Das ausgesandte Licht erlaubt mit Hilfe einer Abbildungsoptik im Fernfeld eine maximale mikroskopische Auflösung bis hinab zur Größenordnung einer Wellenlänge des benutzten Lichts. Entsprechend stark müssen Quantenkorrelationen nach dem Komplementaritätsprinzip beschnitten werden, denn diese Auflösungskraft besagt wie stark Emissionsorte, mit Abstand  $\mathbf{r}$  voneinander, unterscheidbar sind und unterscheidbare Wege dürfen nach dem Komplementaritätsprinzip nicht interferieren.

Die entsprechenden Dichtematrixelemente müssen also zueinander weniger kohärent werden:  $D(\mathbf{r}) < 1$ .

Das ist in schöner Übereinstimmung mit dem Ergebnis (4.19).

Mit dem Komplementaritätsargument lassen sich noch weitere Beobachtungen erklären, z.B. die Form der Dekohärenzfunktion  $|D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})|$  in Gleichung (4.23), welche in Abb. 9 abgebildet ist. Sie zeigt die zu erwartende Abhängigkeit vom Öffnungswinkel: Je größer dieser, desto stärker die potentielle Auflösungskraft des Detektors und umso stärker die Dekohärenz. Auch die Richtungsabhängigkeit der Dekohärenz relativ zur Hauptachse des Detektors ist gut zu verstehen. Die seitliche Auflösung eines Kamerabildes ist besser, als seine Tiefenauflösung, also ist zu erwarten, daß die Kohärenzen quer Detektorhauptachse viel stärker beschnitten werden als längs zu ihr. Eine entsprechende Diskussion unter Verwendung der Abbéschen Theorie findet man z. B. schon 1931 bei v. Weizsäcker [118].

Zusammenfassend haben wir gefunden, daß die Komplementaritätsargumente für eine qualitative Interpretation der Ergebnisse eine Alternative zur Beschreibung durch Phasenauswaschung darstellen.

## 4.5. Apparaturunabhängigkeit

Die Benutzung der Ebene-Wellen-Moden  $|\mathbf{k}\rangle$  bei der Berechnung der Dekohärenzfunktion erscheint auf den ersten Blick willkürlich. Natürlich kann man das Feld auch nach anderen Moden  $|\boldsymbol{\mu}\rangle$  entwickeln, z.B. nach den 'Kameramoden', die nach dem Passieren der Linse einer Kamera ein scharfes Bild auf der Filmebene liefern (dabei muß natürlich die Brennweite einigermaßen angepaßt sein – vgl. v. Weizsäcker [118]). Doch glücklicherweise ist solcher Aufwand wegen der *Zyklizität der Spur* gar nicht nötig, sie garantiert, daß wir bei der Spurbildung über die Ebene-Wellen-Moden exakt dasselbe Ergebnis bekommen, wie bei der Benutzung einer beliebigen anderen

Basis  $|\boldsymbol{\mu}\rangle$ :

$$\begin{aligned}\hat{\varrho}_F &\equiv \text{const} \int_{[\Delta\Omega]} d^3k \langle \mathbf{k} | \hat{\varrho} | \mathbf{k} \rangle \\ &= \text{const} \int_{[\Delta\Omega]} d^3\mu \langle \boldsymbol{\mu} | \hat{\varrho} | \boldsymbol{\mu} \rangle.\end{aligned}\tag{4.26}$$

Hierbei ist selbstverständlich angenommen, das über den gleichen Bereich  $[\Delta\Omega]$  integriert wurde.

Im Umkehrschluß lernen wir hieraus, daß  $D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})$  ein **apparaturunabhängiges** Dekohärenzmaß ist:

Ob beispielsweise eine ortsauflösende Kamera oder ein Detektor zur Messung der Photonenimpulse die Teilensembelauswahl  $[\Delta\Omega]$  trifft,  $D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r})$  bleibt hiervon unberührt, sofern nur der Raumwinkel  $\Delta\Omega$ , den beide Apparate ausnutzen, derselbe ist.

#### 4.5.1. Viele bedingte Muster

Die atomare Kohärenz scheint nach der spontanen Emission unwiederbringlich beschädigt. Alle Atome zusammengenommen zeigen im extremsten Fall gar kein Interferenzmuster mehr, weil die dekohärierende Wirkung der spontanen Emission<sup>2</sup> dieses zerstört hat. Wenn man sie auf die richtige Weise auswählt, kann man allerdings viele bedingte Teilmuster im verwaschenen Gesamtmuster erkennen:

Man kann einen größeren Detektor, der einen Raumwinkel  $\Delta\Omega$  abdeckt, in  $N$  kleinere nichtüberlappende Detektoren, die den größeren genau ausfüllen und jeder einen sehr kleinen Raumwinkel  $d\Omega_j$  im Sinne der Gl. (4.21) abdecken, zerlegen oder sich zerlegt denken. Wegen der Additivität der Spurbildung ist dann

$$D_{\Delta\Omega}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N_j} D_{d\Omega_j}(\mathbf{r}).\tag{4.27}$$

---

<sup>2</sup>Wie wir gesehen haben, hat  $D(\mathbf{r})$  i. a. Nullstellen, der Youngsche Doppelspaltbau beispielsweise, muß also nur dafür Sorge tragen, daß die Löcher bei  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} + \mathbf{r}$  so liegen, daß  $D(\mathbf{r}) = 0$ .

Z. B. für den Fall der isotropen (nicht Dipol-) Kopplung sind die Normalisierungskonstanten  $\mathcal{N}_j = \int_{d\Omega_j} d\varphi d\theta \sin\theta / \int_{\Delta\Omega} d\varphi d\theta \sin\theta$ . Die etwas triviale Aussage (4.27) wird interessant, wenn man sich an die Aussage  $D_{d\Omega_j}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})$  von in Gl. (4.21) erinnert. Dieses einfache Resultat zeigt das interessante Ergebnis, daß ein scharf definierter Rückstoß *nur phasenverändernd aber nicht kohärenzzerstörend* wirkt, denn der Betrag von  $D_{d\Omega}(\mathbf{r})$  ist unabhängig von der Größe von  $\mathbf{r}$  gleich '1'.

Kohärenzzerstörend wirkt erst eine *Rückstoßunschärfe* die eine Phasenmittelung mit sich bringt, wie gerade in Abschnitt 4.4.1. diskutiert.

Folglich zeigt (4.27), daß man sich das verwaschene Interferenzmuster eines größeren Ensembles aus vielen kontrastreichen, bedingten Teilmustern geeigneter kleiner Teilensembles zusammengesetzt vorstellen darf!

Kurzum, wählt man Unterensemble mit hinreichend scharfen Phasen aus, zeigen diese, für sich genommen, das ungetrübte Interferenzmuster eingebettet in das strukturlose Muster, welches das Gesamtensemble liefert. Erst die Überlagerung vieler solcher scharfer Interferenzmuster wäscht das Muster des Gesamtensembles aus [117, 81].

Würde man also technisch die Auswahl eines geeigneten Teilensembles aus dem gesamten beherrschen, würde man die *'Kohärenz zurückgewinnen'*. Dieses ist in dem erwähnten Blendenexperiment von Chapman *et al.* [90] schon bis zu einem gewissen Grade gelungen und soll in Konstanz mit aktiver Atom-Photon-Korrelierung auch bald demonstriert werden [115].

Um Mißverständnissen vorzubeugen: Eine Ortsmessung 'braucht' die gesamte Linsenöffnung ( $\Delta\Omega$ ) des Detektors. Ist die Messung durchgeführt, kann man sich nicht mehr auf einen Teilraumwinkel  $d\Omega_j$  zurückziehen. Man muß sich also bei der Messung entscheiden, ob man die *'Kohärenz zurückgewinnen'* oder eine hohe Ortsauflösung haben möchte – beides zugleich ist nicht möglich.

## 4.6. Freie und gestörte Bewegung

In diesem Abschnitt soll der Zusammenhang zwischen der **Interferenzstreifen-** und der **Einhüllendenverschiebung** des Interferenzmusters untersucht werden.

Wir werden zwei Fälle unterscheiden.

1. *Freie Bewegung* der Atome vom Ort der spontanen Emission bis zum Schirm.
2. Durch weitere Interferometerteile (Gitter, Blenden u.ä.) *gestörte Bewegung* der Atome zwischen dem Ort der spontanen Emission und dem Schirm.

Im ersten Fall sind Interferenzstreifen- und Einhüllendenverschiebung äquivalent, im zweiten sind sie es üblicherweise nicht, sondern scheinbar voneinander unabhängig<sup>3</sup>.

### 4.6.1. Mögliche Interferenzmusteränderungen

Bei der Betrachtung der Veränderungen von Interferenzmustern in Atomstrahlexperimenten haben wir uns bisher auf Änderungen von Kontrast und Phasenlage beschränkt, diese werden durch  $D(\mathbf{r})$  vollständig beschrieben. Im allgemeinen sind aber die folgenden Veränderungen möglich:

- i) Kontrastverminderung,
- ii) Verschiebung der Interferenzstreifen,
- iii) Verschiebung der Einhüllenden (Schwerpunktverschiebung) und
- iv) weitere Veränderungen, wie z.B.:
  - Lokales Zusammenziehen / Aufweiten und
  - Verschwinden / Erscheinen des Musters.

---

<sup>3</sup>Sie hängen natürlich nach wie vor miteinander zusammen, aber nicht mehr auf einfache Weise.

Die Verschiebung der Interferenzstreifen ist i.a. unabhängig von der Verschiebung der Einhüllenden, z.B. können sich die relativen Phasen in verschiedenen Interferometeräten ändern, ohne daß die Schwerpunktsbewegung nennenswert beeinflußt wird, ein entsprechendes Beispiel liefert [119].

Die 'weiteren Veränderungen' können z.B. daher rühren, daß das Interferenzmuster nichtlinear auf Störungen der Atomimpulse reagiert, so durch Linseneffekte bei dem Durchgang durch Stehwellenfelder [81, 120, 121] oder Mehrfachstreuung in einem dicken optischen Gitter [122].

Verschwinden oder Erscheinen von Mustern kann beispielsweise dadurch zustande kommen, daß ein Hindernis die Atome absorbiert oder vorbeiläßt, je nach Konfiguration und Richtung des Rückstoßes des emittierten Photons [90].

Wir beschränkten uns bisher auf die Betrachtung der beiden erstgenannten Effekte i) und ii), wofür wir folgende Gründe haben:

- Wir interessierten uns **nicht** für
  - die 'weiteren Veränderungen', iv), sie sind zu spezifisch für das jeweilige Interferometer, als daß sie bei den hier vorliegenden allgemeinen Betrachtungen von Interesse sein könnten.
  - die Verschiebung der Einhüllenden, iii), der Effekt ist meist von geringem meßtechnischen Interesse, weil er schwach ist.
- Wir interessierten uns für
  - die Verschiebung der Interferenzstreifen, ii), sie ist **die** interferometrische Meßgröße (um Phasenänderungen zu erkennen).
  - die Kontrastverminderung, i), weil sie die Funktionsweise eines Interferometers beeinträchtigt und für uns von besonderem Interesse ist, da sie die Abnahme originär quantenmechanischer Materiewellenkohärenzen widerspiegelt.

Weil im *Falle freier Bewegung* der Atome die vier Effekte i) bis iv) zwanglos in der Beschreibung berücksichtigt sind und diese Beschreibung zudem sehr instruktiv ist, wollen wir sie hier dem *Fall der gestörten Bewegung* gegenüberstellen. Wir werden dabei noch einiges über Vorteile und Grenzen der Beschreibung der Atome durch die Dekohärenzfunktion sowie eine sehr anschauliche Darstellung der von uns benutzten Näherungen erhalten.

#### 4.6.2. Freie Bewegung

Bei der Herleitung der Produktform (4.15) haben wir gezeigt, daß die Rückstoßdrift  $\hbar \mathbf{k}t/M$  gleich nach dem Abklingen der Emission ( $t \sim 10\gamma_0^{-1}$ ) vernachlässigbar klein ist; damit erhalten wir das Ergebnis (4.15):  $\varrho_{\text{emitt}}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}; t) = D(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}; t)$ . Hierbei ist implizit die Sichtweise benutzt worden, daß wir die Huygenssche Kugelwellenkonstruktion benutzen können<sup>4</sup>, um ausgehend von der Stelle, an der sich das atomare Wellenpaket zur Zeit  $t \sim 10\gamma_0^{-1}$  befindet, das Schirmbild aufzubauen.

Dieses Vorgehen ist ganz einwandfrei und nutzt letztlich aus, daß Materiewellen sich analog zur klassischen Wellentheorie gemäß einer Helmholtzgleichung bewegen, weswegen auch der Terminus 'Atom-' oder 'Teilchenoptik' geprägt wurde [81]. Die Huygenssche Kugelwellenkonstruktion ist hiervon der Spezialfall für den Fall der Bewegung ohne äußere Potentiale sowie quasimonochromatischer atomarer Wellenpakete, also solcher fast ohne Dispersion, [82].

Im hier diskutierten einfachen Fall freier Bewegung zwischen dem Ort spontaner Emission und dem Nachweisschirm ist es aber ebenso gut möglich, die Entwicklung der Dichtematrix des Atoms bei seiner Bewegung bis zum Schirm zu verfolgen.  $\varrho_{\text{emitt}}(\mathbf{s}, \mathbf{s}; T)$  liefert die atomare Schirmintensität  $I(\mathbf{s}, T)$  an der Schirmstelle  $\mathbf{s}$

$$I(\mathbf{s}, T) = \varrho_{\text{emitt}}(\mathbf{s}, \mathbf{s}; T) = \tag{4.28}$$

---

<sup>4</sup>Denke an die entfernungs- und laufzeitbedingten Phase  $\phi(\tau)$  aus Gl. (4.3).

$$\varrho_{\text{emitt}}(\mathbf{s}, \mathbf{s}; T) = \text{const} \int d^3k \frac{|\lambda_{\mathbf{k}}|^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma_0^2} \varrho(\mathbf{s} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}T, \mathbf{s} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{M}T; T). \quad (4.29)$$

Diese Gleichung ist die Verallgemeinerung von (4.10) für den Fall eines Gemisches und zeigt, daß man das Muster  $\varrho_{\text{emitt}}(\mathbf{s}, \mathbf{s}; T)$  auf dem Schirm als **rückstoßgemitteltes Muster der ungestörten aber verschobenen Verteilungen**  $\varrho(\mathbf{s} + \mathbf{v}T, \mathbf{s} + \mathbf{v}T; T)$  auffassen kann ( $\mathbf{v} = \hbar\mathbf{k}/M$ ).

*Die zwei Interpretationen, Phasenauswaschung à la Abschnitt 4.4.1. und Rückstoßdriftverschmierung gemäß (4.29), sind im Fall freier Bewegung, da sie unter denselben Annahmen abgeleitet wurden, äquivalent!*

Man sieht, daß dieses unabhängig von der Art der Präparation von  $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{r}; 0)$  gilt, also für Atome, die **beliebige Interferometer** durchlaufen haben. Dieses Ergebnis ist somit eine Verallgemeinerung der Behandlung von Tan und Walls [117], da es unabhängig von der Art des zuvor durchlaufenen Interferometers ist, solange nur die spontane Emission, ebenso wie in [117], *nach dem letzten* Beugungsgitter erfolgt.

Für den Fall gestörter Bewegung gilt diese Äquivalenz von Phasenauswaschung und Rückstoßdriftverschmierung nicht mehr, weil bei der Ableitung von Gl. (4.10) die Zeitentwicklung des freien Atoms (4.11) zugrundegelegt wurde. Allerdings ist im Fall freier Bewegung auf die Näherung aus Gl. (4.13) verzichtet worden und deswegen sind Verschiebungen der Einhüllenden und alle anderen Veränderungen des Interferenzmusters berücksichtigt. So wird auch klar, wie die *Veränderung der Einhüllenden* des Interferenzmusters, als gemittelte Wirkung der Verschiebungen der Teilmuster durch die Rückstoßmittelung (4.29), zustande kommt.

Folglich ist die Beschreibung der Dekohärenz durch Rückstoßdrift *weniger allgemein*, da auf die freie Bewegung beschränkt, *aber umfassender* als die Beschreibung durch die Phasenmittelung. Außerdem ist die Rückstoßdriftmittelung etwas anschaulicher als die Phasenbetrachtungen, weswegen wir sie auch gleich zu einer Betrachtung der von uns verwandten Näherungen heranziehen wollen.

## Geometrische Veranschaulichung der Impulsunschärfe und Näherungen

Wir wollen die Impulsunschärfe und die daraus resultierende Rückstoßdriftverschmierung geometrisch betrachten.

Abb. 11 auf Seite 80 zeigt uns die Unschärfe der Impulse bei vorgegebener Emissionshaupttrichtung  $\mathbf{k}_0$  und Öffnungswinkel  $\Delta\Omega$  (des zugehörigen Detektors). Im Impulsbild läßt sich damit anschaulich sofort verstehen, warum die Dekohärenz senkrecht zur Detektorhauptachse stärker ist als parallel dazu (vgl. Gl. (4.23) und Seite 72), denn aus simplen geometrischen Gründen ist  $\Delta k_{\perp} > \Delta k_{\parallel}$ .

Die anderen Unschärfen, welche wir im Rahmen der Näherungen vernachlässigt haben, sind im Vergleich zu dieser geometrischen Unschärfe sehr klein:  $\gamma_0/\omega_0 \sim 10^{-7}$ , um also die linienbreitenbedingte Impulsunschärfe mit Hilfe der Strichdicke in Abb. 11 wiederzugeben, müßten wir sie enorm vergrößern, der dünne Kreisbogen von relativ 1 % Dicke ist  $10^5$  mal zu dick gezeichnet. Die Linienverbreiterung durch die Rückstoßterme im Lorenznenner sind noch um Größenordnungen kleiner, vgl. Abschnitt 3.5.1. Die implizite Näherung der Resonanzlinie durch die effektive Frequenzbedingung  $\delta(k - k_0)$  – s. Anhang A2. – ist also berechtigt.

### 4.6.3. Gestörte Bewegung

Findet die spontane Emission beim Durchlaufen des Interferometers an beliebiger Stelle vor dem letzten Beugungsgitter statt, ist die Betrachtung mit Hilfe der Rückstoßimpulse allein, nicht mehr durchführbar, weil die Impulse nicht unverändert bleiben, so daß  $\hbar\mathbf{k}T/M$  im allgemein nicht die Rückstoßdrift ist.

Zur Illustration sei der Fall des 3-Gitter Interferometers betrachtet, wie es schon häufiger in Gebrauch war [81, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 90, 111]. Speziell in dem kürzlich von Chapman *et al.* durchgeführten Experiment [90] ist die Dekohärenz inmitten des Interferometers, kurz nach dem ersten der 3 Beugungsgitter, induziert

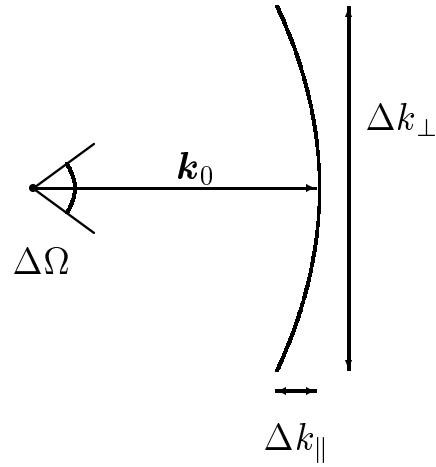


Abbildung 11: Die Unschärfe der Querimpulse  $\Delta k_{\perp}$  bei gegebenem – nicht zu großem – Öffnungswinkel  $\Delta\Omega$  ist ersichtlich größer, als die der Längsimpulse  $\Delta k_{\parallel}$ .

Der eingezeichnete Vektor  $\mathbf{k}_0$  weist in Richtung der Hauptachse des Detektors.

worden. Zu diesem Zweck wurde ein Anregungslaser quer zu dem gut monochromatisierten Atomstrahl geschickt, welcher letzter an dieser Stelle, also nach dem ersten Gitter, in zwei kohärente Teilstrahlen mit Abstand  $d$  aufgespalten war. Der Laserstrahl war so dimensioniert, daß er die Atome in einem  $\pi$ -Puls, d.h. mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit, anregte. Die Atome absorbierten also ein Photon und emittierten es dann spontan mit der Dipolcharakteristik.

Obwohl der Interferometeraufbau im Prinzip sehr einfach ist, gestaltet sich die Analyse der resultierenden Impulsänderungen, aufgrund der Tatsache, daß die Atomimpulse an dem zweiten Gitter (elastisch) umgelenkt werden, recht schwierig. Tatsächlich führt eine naive Analyse mit Hilfe der Rückstoßdrift sogar zu scheinbaren Widersprüchen, weil sich Interferenzstreifen und Einhüllende gegenläufig verschieben können [90].

Die im Vergleich dazu sehr einfache Analyse mit Bezug auf die erwarteten Phasen-

Abbildung 12: Skizze des 3-Gitter-Interferometers aus Referenz [90]:

Die klassischen Trajektorien der Atome (gestrichelte Linien) werden durch die Absorption ( $\vec{k}_i$ ) und anschließende spontane Emission ( $\vec{k}_f$ ) eines Photons verändert. Der Ort der spontanen Emission kann durch die Verschiebung des Anregungslasers ( $\vec{k}_i$ ) bezüglich des ersten Interferometergitters (gestrichelte Linie) variiert werden. Damit geht eine Variation des effektiven Abstandes  $\vec{d}$  der beiden Teilstrahlen des Atomstrahls einher, womit die entsprechende Dekohärenzfunktion  $D(\mathbf{d})$  der Messung direkt zugänglich wird.

Die Verschiebung des atomaren Schwerpunkts  $\Delta x$  entspricht hier im allgemeinen nicht der Verschiebung der Interferenzmusterstreifen.

mittelungen betätigt das allgemeine Ergebnis, daß  $D(\mathbf{d})$  die Dekohärenz und Streifenverschiebung beschreibt, sowohl theoretisch als auch experimentell glänzend [90].

*Wir haben gesehen, daß die Beschreibung der Dekohärenz durch die Rückstoßmittelung umfassend aber nicht allgemein ist, während die Dekohärenzfunktion eine allgemeine aber weniger umfassende Beschreibung liefert.*

## 4.7. Resümee

Mit den Komplementaritätsargumenten läßt sich schlußfolgern, daß das Ergebnis aus Kapitel 3. in Verbindung mit dem aus Kapitel 4. für die atomaren Kohärenzen in folgender Kurzweisheit zusammengefaßt werden kann:

*Das spontan emittierte Licht ist blind für das, was es nicht zerstört,  
und zerstört das, was es sehen kann.*

## 5. Zusammenfassung und Ausblick

In Kapitel 1. ist ein Projektionsoperatorschema zur Darstellung linearer Operatoren betrachtet. Mit Hilfe seiner mathematischen Grundstruktur lassen sich verschiedene Darstellungen gewinnen.

Eine ist die 'minimale' Darstellung, die nur so viele Projektoren benötigt, wie es unbekannte Matrixelemente des betreffenden Operators zu ermitteln gilt, während sie ansonsten fast keine Einschränkungen fordert – daher auch ihr Name. Die Anwendung dieser Darstellung für die meßtechnische Rekonstruktion von Dichteoperatoren steht im Vordergrund der Betrachtungen. Also ist geprüft worden, welche spezielle Formulierung der Minimaldarstellung die größte Toleranz gegenüber Meßfehlern hat und wie die Minimaldarstellung redundant erweitert werden kann, um solche Fehler durch zusätzliche Messungen zu korrigieren.

Eine zweite betrachtete Darstellung ist die 'Operatorbasisdarstellung', deren Struktur durch ihren Namen im wesentlichen erklärt ist und die vor allem ansprechende mathematische Eigenschaften aufweist. Was die Seite der meßtechnischen Operatorrekonstruktionen angeht, ist sie in der Minimaldarstellung enthalten also von keinem eigenen Interesse.

Schließlich ist die Übersetzung der Minimaldarstellung in ein quantenoptisches Gedankenexperiment vorgenommen, welches zu seiner Durchführung die Verfügbarkeit von Fockzustandslinearkombinationen voraussetzt. Deswegen wird eine experimentelle Umsetzung diese konzeptionell einfachen Schemas voraussichtlich noch ein wenig auf sich warten lassen.

Von der Grundstruktur des zugrundeliegenden Projektionsoperatorschemas herrührend haben alle vorgestellten Darstellungen gemeinsam, daß sie *nicht rekursiv* aufgebaut sind, sondern vielmehr die *Beschränkung auf jene Unterräume* erlauben, an deren Betrachtung einem gelegen ist.

Es wird interessant sein zu sehen, welche weiteren experimentell verwertbaren Meßvorschläge aus dem allgemeinen Projektionsoperatorschema und seinen Darstellungen zu gewinnen sein werden.

In Kapitel 2. wird ein Schema zur Synthese von Fockzuständen freilaufender Moden vorgestellt. Die meisten bisherigen Ideen zur Fockzustandserzeugung behandeln hierfür Resonatoren. Demgegenüber haben freilaufende Fockzustände weniger Wechselwirkungen mit Materie, können von Ort zu Ort weitergeleitet werden und unterliegen den für Resonatoren üblichen Frequenzbeschränkungen nicht. Allerdings sind weder die eine noch die andere Sorte Fockzustände bisher erzeugt worden, wenn man von der kontrollierten Erzeugung von Einphoton-Fockzuständen bei spontaner Down-Conversion absieht. Der Versuch, einen hochbesetzten Fockzustand auf direktem Wege – mit Hilfe hoher Nichtlinearitäten (Mehrphotonenprozesse) – zu erzeugen, ist nicht vielversprechend. Also wird vorgeschlagen, auf dem Vorhandenen aufzubauen: die kontrolliert erzeugten Einphoton-Fockzuständen sollen zur Synthese höher besetzter Zustände genutzt werden.

Die Benutzung passiver Mischer ist hierfür naheliegend und führt zur Betrachtung sogenannter  $N$ -Ports. Der optimale Aufbau eines solchen  $N$ -Ports wird bestimmt und mit Blick auf die auftretenden Verluste analysiert. Diese Verluste sind unvermeidbar und erheblich – aber vermutlich tragbar, wenn man nicht zu hoch besetzte Fockzustände erzeugen möchte. Vielleicht entpuppt sich also diese oder eine darauf aufbauende Idee als Schlüssel zur Gewinnung von Fockzuständen freilaufender Moden.

Kapitel 3. und 4. sind thematisch dadurch verknüpft, daß beide den quantenmechanischen Ortsmeßprozeß behandeln.

Kapitel 3. beantwortet einige aus einem Experiment erwachsene Fragen nach der Selbstinterferenz spontan emittierten Lichts sehr ausgedehnter Atome. Die experimentell gefundenen Interferenzstrukturen spontan emittierten Lichts sind damit nicht erklärt.

Die vermuteten Selbstinterferenzen sind aber prinzipiell unmöglich, womit wenigstens gezeigt ist, daß die dem betreffenden Experiment beigelegte Deutung falsch ist: So ist immerhin klar, in welcher Richtung man nicht weiterzusuchen braucht.

Da die experimentelle Situation leider ein wenig unübersichtlich ist, scheint es angeraten, die Ergebnisse der angestrebten Nachfolgeexperimente abzuwarten, um die Herkunft der auftretenden Interferenzen abschließend zu klären.

Kapitel 4. gibt nicht nur schon Gemessenes zum Verlust der atomaren Kohärenz in Atomstrahlinterferometern durch spontane Emission – ganz wie im Kapitel 3. – wieder, sondern vertieft unser Verstehen der Abläufe und Mechanismen. Eine elegante und zugleich klare und einfache Formulierung gelingt mit Hilfe des Dichtoperatorformalismus. Sie erlaubt zwanglos und in großer Allgemeinheit das Zustandekommen der Kohärenzverluste zu interpretieren, wozu verschiedene Betrachtungsstandpunkte eingenommen werden. Einerseits wird die Dekohärenz als Phasenauswaschung und somit ganz allgemein behandelt, andererseits wird sie durch eine Rückstoßdriftverschmierung und notwendigerweise in weniger allgemeinem Rahmen beschrieben. Während ersterer auf die Beschreibung mancher Details verzichtet, erlaubt der zweite Standpunkt, alle Veränderungen der Dichtematrix des Atoms – bei eingeschränktem Gültigkeitsbereich – zu berücksichtigen.

Eine weitere qualitative Beschreibung mit Hilfe des Komplementaritätsprinzips erlaubt die Ergebnisse zu interpretieren und schafft dabei auch die thematische Anknüpfung an das vorhergehende 3. Kapitel. Ohne Übertreibung darf gesagt werden, daß der Dichteoperatorformalismus dem Verständnis der Sache sehr hilft.

Bleibt zu hoffen, daß die Prognosen zu bedingten Interferenzmustern – aus Kapitel 4. – bald experimentell bestätigt werden.

## A Anhang

### A1. Herleitung der Intensitätsgleichung (3.18)

Der Operator des elektrischen Feldes ist [5] ( $\varepsilon_0 \equiv 1$ )

$$\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{x}) = \sum_j \sqrt{2\pi\omega_j/V} \mathbf{U}_j(\mathbf{x}) \hat{a}_j^\dagger, \quad (\text{A.1})$$

mit den Polarisations-eigenfunktionen  $\mathbf{U}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_j \exp[i\mathbf{k}_j \mathbf{x}]$ , die  $\mathbf{u}_j$  wurden vor Gl. (2.2) eingeführt. Mit der Abkürzung  $f_{\mu\nu}(\mathbf{R}) = 4\pi/V \sqrt{\omega_\mu \omega_\nu} \exp(-i(\mathbf{k}_\mu - \mathbf{k}_\nu)\mathbf{R})$ , können wir den Intensitätsoperator dann folgendermaßen schreiben

$$\hat{I}(\mathbf{R}) = 2\hat{\mathbf{E}}^{(-)}(\mathbf{R})\hat{\mathbf{E}}^{(+)}(\mathbf{R}) = \sum_{\mu\nu} f_{\mu\nu}(\mathbf{R}) \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\nu. \quad (\text{A.2})$$

Uns interessiert die Intensität nachdem das Atom mit Sicherheit gestrahlt hat, also  $t \gg \gamma_0^{-1}$ , dann ergibt sich als Erwartungswert der Intensität mit  $|\psi(t)\rangle$  aus Gl. (2.4)

$$\begin{aligned} I(\mathbf{R}, t) &\equiv \langle \Psi_t | \hat{I}(\mathbf{R}) | \Psi_t \rangle = \\ &= \int d^3k d^3k' \langle \mathbf{k} | \hat{I}(\mathbf{R}) | \mathbf{k}' \rangle \langle \mathbf{k}' | \hat{\rho}_F(t) | \mathbf{k} \rangle = \\ &= \text{const} \int d^3k \int d^3k' \sqrt{kk'} \exp[i(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\mathbf{R}] \\ &\quad \times d^3r |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \frac{\lambda_{\mathbf{k}} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t)]}{\omega - \omega_0 + i\gamma_0} \frac{\lambda_{\mathbf{k}'}^* \exp[i(\mathbf{k}'\mathbf{r} + \omega't)]}{\omega' - \omega_0 - i\gamma_0} \\ &= d^3r |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \left| \int d^3k \frac{\sqrt{k} \lambda_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \omega t)]}{\omega - \omega_0 + i\gamma_0} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Der Term zwischen den Betragsstrichen ist also

$$\begin{aligned} &\int d^3k \frac{\sqrt{k} \lambda_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \omega t)]}{\omega - \omega_0 + i\gamma_0} \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} dk k^{\frac{5}{2}} \lambda_k \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{R} - \mathbf{r}) - \omega t]}{\omega - \omega_0 + i\gamma_0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk k^{\frac{5}{2}} \lambda_k \int_{-1}^1 d\eta \frac{\exp(i(k|\mathbf{R} - \mathbf{r}| \cdot \eta - \omega t))}{(\omega - (\omega_0 - i\gamma_0))} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk k^{3/2} \lambda_k \frac{\exp(-i\omega t) [\exp(ik|\mathbf{R} - \mathbf{r}|) - \exp(-ik|\mathbf{R} - \mathbf{r}|)]}{-i|\mathbf{R} - \mathbf{r}|(\omega - (\omega_0 - i\gamma_0))}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Als nächstes folgt eine Residuenintegration über  $k$  mit dem Ergebnis

$$= \text{const } \omega_0^{3/2} \lambda_{\omega_0} \left[ \Theta\left(t - \frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c}\right) \exp[-i(\omega_0 - i\gamma_0)(t - \frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c})] - \Theta\left(t + \frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c}\right) \exp[-i(\omega_0 - i\gamma_0)(t + \frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c})] \right] , \quad (\text{A.5})$$

wobei  $\Theta$  die Heavisidesche Stufenfunktion bezeichnet. Aufgrund unserer Annahme  $t \gg \gamma_0^{-1}$  dürfen wir den stark abfallenden zweiten Summanden, der durch eine inkonsistente Behandlung dieser Näherung in unserer Rechnung aufgetaucht ist, wieder herauswerfen. Folglich finden wir

$$I(\mathbf{R}, t) = \text{const} \int d^3r |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \Theta\left(t - \frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c}\right) \frac{\exp[-2\gamma_0(t - \frac{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}{c})]}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|^2} . \quad (\text{A.6})$$

Das ist genau Gleichung (3.18).

## A2. Herleitung der Dekohärenzfunktion (4.19)

Mit  $\mathbf{d} = (d_x, d_y, d_z)$  hat die Dipolkopplung (3.2) die Form:

$$|\lambda_{\mathbf{k}}|^2 = g_k^2 (d_y \cos \varphi - d_x \sin \varphi)^2 + g_k^2 (d_x \cos \varphi \cos \theta + d_y \cos \theta \sin \varphi - d_z \sin \theta)^2$$

Nun die  $\varphi$  Integration, vgl. (4.24)

$$\int_0^{2\pi} d\varphi g_k^2 (d_y \cos \varphi - d_x \sin \varphi)^2 + g_k^2 (d_x \cos \varphi \cos \theta + d_y \cos \theta \sin \varphi - d_z \sin \theta)^2 \\ = g_k^2 \pi (d_x^2 + d_y^2 + d_x^2 \cos^2 \theta + d_y^2 \cos^2 \theta + 2 d_z^2 \sin^2 \theta)$$

Mit  $\sin \theta$ , dem Faktor aus dem Differential  $d^3k$ , multipliziert ergibt das

$$2 d_x^2 g_k^2 \pi \sin \theta + 2 d_y^2 g_k^2 \pi \sin \theta - d_x^2 g_k^2 \pi \sin^3 \theta - d_y^2 g_k^2 \pi \sin^3 \theta + 2 d_z^2 g_k^2 \pi \sin^3 \theta .$$

Gl. (4.17) umgeschrieben hat also die Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\pi} d\theta (2 d_x^2 g_k^2 \pi \sin \theta + 2 d_y^2 g_k^2 \pi \sin \theta - d_x^2 g_k^2 \pi \sin^3 \theta - \\ d_y^2 g_k^2 \pi \sin^3 \theta + 2 d_z^2 g_k^2 \pi \sin^3 \theta) e^{ikr \cos \theta} / [(\Omega - k)(\Omega^* - k)]$$

wobei  $\Omega \equiv \omega_0 + i\gamma_0$ .

Nun gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikr \cos \theta}}{(\Omega - k)(\Omega^* - k)} = -\frac{\pi c}{\gamma_0} e^{-\frac{\gamma_0 r |\cos \theta|}{c}} e^{i \frac{\omega_0 r \cos \theta}{c}} \quad (\text{A.7})$$

und ferner

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \exp\left[-\frac{\gamma_0 r |\cos \theta|}{c} + \frac{i \omega_0 r \cos \theta}{c}\right] \sin \theta &\equiv I_1(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\frac{\gamma_0}{c} r - i r \frac{\omega_0}{c}} - \frac{e^{-\left(\frac{\gamma_0}{c} r\right) + i r \frac{\omega_0}{c}}}{\frac{\gamma_0}{c} r - i r \frac{\omega_0}{c}} + \frac{1}{\frac{\gamma_0}{c} r + i r \frac{\omega_0}{c}} - \frac{e^{-\left(\frac{\gamma_0}{c} r\right) - i r \frac{\omega_0}{c}}}{\frac{\gamma_0}{c} r + i r \frac{\omega_0}{c}} \\ &\approx \exp\left[-r \frac{\gamma_0}{c}\right] \frac{2c}{r \omega_0} \sin \frac{\omega_0 r}{c} = 2 \exp\left[-r \frac{\gamma_0}{c}\right] \text{sinc } k_0 r \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \exp\left[-\frac{\gamma_0 r |\cos \theta|}{c} + \frac{i \omega_0 r \cos \theta}{c}\right] \sin^3 \theta &\equiv I_2(\mathbf{r}) \\ &= \frac{-\left(e^{i r \left(i \frac{\gamma_0}{c} + \frac{\omega_0}{c}\right)} (-4 - 4 \frac{\gamma_0}{c} r + 4 i r \frac{\omega_0}{c})\right)}{2 r^3 \left(\frac{\gamma_0}{c} - i \frac{\omega_0}{c}\right)^3} + \frac{4 + 4 \frac{\gamma_0}{c} r + 4 i r \frac{\omega_0}{c}}{2 e^{r \left(\frac{\gamma_0}{c} + i \frac{\omega_0}{c}\right)} r^3 \left(\frac{\gamma_0}{c} + i \frac{\omega_0}{c}\right)^3} + \\ &\quad \frac{-2 + \frac{\gamma_0}{c} r^2 - 2 i \frac{\gamma_0}{c} r^2 \frac{\omega_0}{c} - r^2 \frac{\omega_0}{c}^2}{r^3 \left(\frac{\gamma_0}{c} - i \frac{\omega_0}{c}\right)^3} - \frac{2 - \frac{\gamma_0}{c} r^2 - 2 i \frac{\gamma_0}{c} r^2 \frac{\omega_0}{c} + r^2 \frac{\omega_0}{c}^2}{r^3 \left(\frac{\gamma_0}{c} + i \frac{\omega_0}{c}\right)^3} \\ &\approx 4 e^{-r \frac{\gamma_0}{c}} \left[ \frac{\sin \frac{\omega_0 r}{c}}{\left(r \frac{\omega_0}{c}\right)^3} - \frac{\cos \frac{\omega_0 r}{c}}{\left(r \frac{\omega_0}{c}\right)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Zusammengenommen ergibt das für  $D(\mathbf{r})$ , Gl. (4.19)

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}) &= \frac{V k_0^2 |\lambda_{\omega_0}|^2 d^2}{3 \pi c \gamma_0} \frac{3}{8} \left( I_1(\mathbf{r}) 2(d_x^2 + d_y^2) + I_2(\mathbf{r}) (2d_z^2 - d_x^2 - d_y^2) \right) \\ &\approx 1 \cdot \frac{3}{8} \left( [2d_z^2 - d_x^2 - d_y^2] 4 e^{-r \frac{\gamma_0}{c}} \left[ \frac{\sin \frac{\omega_0 r}{c}}{\left(r \frac{\omega_0}{c}\right)^3} - \frac{\cos \frac{\omega_0 r}{c}}{\left(r \frac{\omega_0}{c}\right)^2} \right] + [2d_x^2 + 2d_y^2] e^{-r \frac{\gamma_0}{c}} \frac{2c}{r \omega_0} \sin \frac{\omega_0 r}{c} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Wegen  $\gamma_0/\omega_0 \sim 10^{-7}$  können wir den Einhüllendenfaktor  $\exp[-r\gamma_0/c]$  gegenüber den anderen unvergleichlich stärker abfallenden Funktionen, wie  $\text{sinc } k_0 r$  usw., vernachlässigen. Explizit entspricht das einer Frequenzauswahlbedingung  $\delta(k_0 - k)$ .

Mit der Substitution  $t = \cos \theta$  erhält man statt (A.8) und (A.9) folgende Integrale ( $a, b \geq 0$ )

$$\begin{aligned}
& \int_a^b dt \quad e^{r(-(gt)+itw)} \\
& = \quad \frac{e^{i ar (ig+w)}}{r(g-iw)} - \frac{e^{i br (ig+w)}}{r(g-iw)} \\
& \int_a^b dt \quad e^{r(-(gt)+itw)} t^2 \\
& = \quad - \frac{e^{i ar (ig+w)} (-2-2agr-a^2g^2r^2+2iarw+2ia^2gr^2w+a^2r^2w^2)}{r^3(g-iw)^3} \\
& \quad + \frac{e^{i br (ig+w)} (-2-2bgr-b^2g^2r^2+2ibrw+2ib^2gr^2w+b^2r^2w^2)}{r^3(g-iw)^3} \\
& \int_{-a}^{-b} dt \quad e^{r(-(gt)+itw)} \\
& = \quad - \frac{e^{r(-(ag)-iaw)}}{r(g+iw)} + \frac{e^{r(-(bg)-ibw)}}{r(g+iw)} \\
& \int_{-a}^{-b} dt \quad e^{r(-(gt)+itw)} t^2 \tag{A.11} \\
& = \quad - \frac{e^{r(-(ag)-iaw)}}{r(g+iw)} + \frac{e^{r(-(bg)-ibw)}}{r(g+iw)} \\
& \int_{-a}^b dt \quad e^{r(-(gt)+itw)} \\
& = \quad \frac{1}{gr-iw} - \frac{e^{i br (ig+w)}}{gr-iw} + \frac{1}{gr+iw} - \frac{e^{r(-(ag)-iaw)}}{gr+iw} \\
& \int_{-a}^b dt \quad e^{r(-(gt)+itw)} t^2 \\
& = \quad \frac{2}{r^3(g-iw)^3} + \frac{2}{r^3(g+iw)^3} - \frac{2+2agr+a^2g^2r^2+2iarw+2ia^2gr^2w-a^2r^2w^2}{e^{ar(g+iw)} r^3(g+iw)^3} + \\
& \quad + \frac{e^{i br (ig+w)} (-2-2bgr-b^2g^2r^2+2ibrw+2ib^2gr^2w+b^2r^2w^2)}{r^3(g-iw)^3}.
\end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe lassen sich allgemeinere Formen von  $I_1(\mathbf{r})$  und  $I_2(\mathbf{r})$ , d.h. von  $D(\mathbf{r})$  für beliebige Öffnungswinkel  $\vartheta_1, \vartheta_2$  unmittelbar konstruieren. Das ergibt dann die erwähnte allgemeine Form von  $D(\mathbf{r})$  im Dipolfall.  $\text{æ}$

## Literaturverzeichnis

- [1] H. Paul, *Photonen: Eine Einführung in die Quantenoptik*, (Teubner, Stuttgart, 1995).
- [2] P. Meystre und M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics*, (Springer, Berlin, 1991).
- [3] W. Vogel und D.-G. Welsch, *Lectures on Quantum Optics*, (Akademie, Berlin, 1994).
- [4] D. F. Walls und G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer, Berlin, 1994).
- [5] H. Haken, *Light*, (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- [6] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc und G. Grynberg, *Photons and Atoms*, (Wiley, New York, 1989).
- [7] B. E. A. Saleh und M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics*, (Wiley, New York, 1991).
- [8] O. Steuernagel und J. A. Vaccaro, *Reconstructing the Density Operator via Simple Projectors*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3201 (1995).
- [9] O. Steuernagel, *Synthesis of Fock states by N-ports*, Phys. Rev. A, eingereicht.
- [10] O. Steuernagel und H. Paul, *Spontaneous Emission from an extended wavepacket: Field correlations* Phys. Rev. A, im Druck.
- [11] O. Steuernagel und H. Paul, *Decoherence from spontaneous emission*, Phys. Rev. A **52**, R905 (1995).
- [12] O. Steuernagel und H. Paul, *Decoherence: Phase wash out and recoil smearing*, zur Veröffentlichung eingereicht.
- [13] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, (Addison-Wesley, Reading, 1965).
- [14] P. C. W. Davies und J. R. Brown, *The Ghost in the Atom*, (Cambridge, Cambridge, 1993).
- [15] J. A. Wheeler und W. H. Zurek, *Quantum Theory and Measurement*, (Princeton, New Jersey, 1983).
- [16] M. P. Silverman, *More than one Mystery* (Springer, N.Y., 1995).
- [17] J. S. Bell, *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics*, (Cambridge, New York, 1991).

- [18] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. **74**, 460 (1981).
- [19] A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, *Experimental realization of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A new violation of Bell inequalities*, Phys. Rev. Lett. **91**, 91 (1982).
- [20] P. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter, A. Zeilinger, A. V. Sergienko und Y. H. Shih, *New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photons Pairs*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).
- [21] D. V. Strekalov, A. V. Sergienko, D. N. Klyshko, Y. H. Shih, *Observation of Two-Photon „Ghost“ Interference and Diffraction*, Phys. Rev. Lett. **74**, 3600 (1995).
- [22] U. Fano, *Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques*, Rev. Mod. Phys. **29**, 74 (1957).
- [23] W. Gale, E. Guth und G. T. Trammell, *Determination of the quantum State by Measurements*, Phys. Rev. **165**, 1434, (1968).
- [24] R. G. Newton und B. Young, *Measurability of the Spin Density Matrix*, Ann. Phys. **49**, 393 (1968);
- [25] J. L. Park und W. Band, *A General Theory of Empirical State Determination in Quantum Physics: Part I*, Found. Phys. **1**, 211 (1971).
- [26] A. Royer, *Measurement of the Wigner Function*, Phys. Rev. Lett. **55**, 2745 (1985).
- [27] A. Royer, *Measurement of Quantum States and the Wigner Function*, Found. Phys **19**, 3, (1989).
- [28] J. Bohn, *Observable Characteristics of Pure Quantum States*, Phys. Rev. Lett. **66**, 1547, (1991).
- [29] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer und A. Faridani, *Measurement of the Wigner Distributioin and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezed States and the Vacuum*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1244 (1993).
- [30] S. Wallentowitz und W. Vogel, *Reconstruction of the Quantum Mechanical State of a Trapped Ion*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2932 (1995).

- [31] K. Vogel und H. Risken, *Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase*, Phys. Rev. A **40**, 2847 (1989).
- [32] H. Kühn, D. G. Welsch und W. Vogel, *Determination of density matrices from field distributions and quasiprobabilities*, J. Mod. Opt. **41**, 1607 (1994).
- [33] W. Vogel, *Homodyne correlation measurements with weak local oscillators*, Phys. Rev. A **51**, 4160 (1995).
- [34] U. Janicke und M. Wilkens, *Tomography of atom beams*, J. Mod. Opt. **42**, 2183 (1995).
- [35] U. Leonhardt und H. Paul, *Measuring the Quantum State of Light*, Prog. Quant. Electr. **19**, 89 (1995).
- [36] G. M. D'Ariano, U. Leonhardt und H. Paul, *Homodyne detection of the density matrix of the radiation field*, Phys. Rev. A **52**, R1801 (1995).
- [37] U. Leonhardt, H. Paul und G. M. D'Ariano, *Tomographic Reconstruction of the Density Matrix via Pattern Functions*, Phys. Rev. A **52**, 4899 (1995).
- [38] M. Freyberger und A. M. Herkommer, *Probing a Quantum State via Atomic Deflection*, Phys. Rev. Lett. **72**, 1952, (1994).
- [39] A. Orłowski und H. Paul, *Phase Retrieval in quantum mechanics*, Phys. Rev. A **50**, R921 (1994).
- [40] P. J. Bardroff, E. Mayr und W. P. Schleich, *Quantum state endoscopy: Measurement of the quantum state in a cavity*, Phys. Rev. A **51**, 4963 (1995).
- [41] H. Paul, *Interference between independent photons*, Rev. Mod. Phys. **58**, 209 (1986).
- [42] H. Paul, W. Brunner und G. Richter, *Interferenz zwischen unabhängigen Photonen*, Ann. Phys. (Leipzig) **12**, 325 (1963).
- [43] M. D. Petroff, M. G. Stapelbroek und W. A. Kleinmans, *Detection of individual 0.4-28 $\mu$ m wavelength photons via impurity-impact ionization in a solid-state photomultiplier*, Appl. Phys. Lett. **51**, 406 (1987).
- [44] P. G. Kwiat, A. M. Steinberg, R. Y. Chiao, P. H. Eberhard und M. D. Petroff, *High-efficiency single-photon detectors*, Phys. Rev. A **48**, R867 (1993).

- [45] P. H. Eberhard, P. G. Kwiat, M. D. Petroff, M. G. Stapelbroek und H. H. Hogue, *Detection Efficiency and Dark Pulse Rate of Rockwell (SSPM) Single-photon Counters*, to appear in the IEEE proceedings of the ICAPT 1994, Toronto Canada.
- [46] M. Munroe, D. Boggavarapu, M. E. Anderson, and M. G. Raymer, *Photon-number statistics from the phase-averaged quadrature-field distribution: Theory and ultrafast measurement*, Phys. Rev. A **52**, R924 (1995)
- [47] Ch. T. Lee, *External photodetection of cavity radiation*, Phys. Rev. A. **48**, 2285 (1993).
- [48] T. Kiss, U. Herzog und U. Leonhardt, *Compensation of losses in photodetection and in quantum-state measurements*, Phys. Rev. A, **52**, 2433 (1995).
- [49] W. Brunner, H. Paul und G. Richter, *Absorption und Streuung quantenmechanisch kohärenter Strahlung. II*, Ann. Phys (Leipzig) **15**, 17 (1965).
- [50] H. Paul, W. Brunner und G. Richter, *Lichtreflexion im Formalismus der Quantenelektrodynamik*, Ann. Phys (Leipzig) **17**, 262 (1966).
- [51] Z. Y. Ou und L. Mandel, *Derivation of reciprocity relations for a beam splitter from energy balance*, Am. J. Phys. **57**, 66 (1989).
- [52] R. A. Campos, B. E. A. Saleh und M. C. Teich, *Quantum-mechanical lossless beam splitter:  $SU(2)$  symmetry and photon statistics*, Phys. Rev. A **40**, 1371 (1989).
- [53] M. J. Holland und K. Burnett, *Interferometric Detection of Optical Phase Shifts at the Heisenberg Limit*, Phys. Rev. Lett. **71**, 1355 (1993).
- [54] C. K. Hong und L. Mandel, *Experimental Realization of a Localized One-Photon State*, Phys. Rev. Lett. **56**, 58 (1986).
- [55] P. Grangier, G. Roger, and A. Aspect, *Experimental Evidence for a Photon Anti-correlation Effect on a Beam Splitter: A new Light on Single-Photon Interferences*, Europhys. Lett. **1**, 173 (1986).
- [56] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller und H. J. Kimble, *Synthesis of Arbitrary Quantum States via Adiabatic Transfer of Zeeman Coherence*, Phys. Rev. Lett **71**, 3095 (1993).
- [57] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, O. Carnal, and H. J. Kimble, *Quantum-state mapping between multilevel atoms and cavity light fields*, Phys. Rev. A **51**, 1578 (1995).

- [58] S. Ya. Kilin und D. B. Horoshko, *Fock State Generation by the Methods of Nonlinear Optics*, Phys. Rev. Lett **74**, 5206 (1995).
- [59] P. Filipowicz, J. Javanainen und P. Meystre, *Quantum and semiclassical steady states of a kicked cavity mode*, J. Opt. Soc. Am. B **3**, 906 (1986).
- [60] J. Krause, M. O. Scully und H. Walther, *State reduction and  $|n\rangle$ -state preparation in a high- $Q$  micromaser*, Phys. Rev. A **36**, R4547 (1987).
- [61] J. Krause, M. O. Scully, T. Walther und H. Walther, *Preparation of a pure number state and measurement of the photon statistics in a high- $Q$  micromaser*, Phys. Rev. A **39**, 1915 (1989).
- [62] A. Liebman und G. J. Milburn, *Creating number states in the micromaser using feedback*, Phys. Rev. A **51**, 736 (1995).
- [63] K. An, J. J. Childs, R. R. Dasari und M. S. Feld, *Microlaser: A laser with One Atom in an Optical Resonator*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3375 (1995).
- [64] U. M. Titulaer und R. J. Glauber, *Density Operators for Coherent Fields*, Phys. Rev. **145**, 1041 (1966).
- [65] A. Imamoglu und Y. Yamamoto, *Turnstile Device for Heralded Single Photons: Coulomb blockade of Electron and hole Tunneling in Quantum Confined  $p-i-n$  Heterojunctions*, Phys. Rev. Lett. **72**, 210 (1994).
- [66] M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein und P. Bertani, *Experimental Realization of Any Discrete Unitary Operator*, Phys. Rev. Lett. **73**, 58 (1994).
- [67] R. Ghosh und L. Mandel, *Observation of Nonclassical Effects in the Interference of Two Photons*, Phys. Rev. Lett. **59**, 1903 (1987).
- [68] M. Żukowski, A. Zeilinger und H. Weinfurter, *Entangling Photons Radiated by Independent Pulsed Sources*, Ann. N. Y. Acad. Sci. **755**, 91 (1995).
- [69] M. Pavičić, J. Summhammer, *Interferometry with Two Pairs of Spin Correlated Photons*, Phys. Rev. Lett. **73**, 3191 (1994).
- [70] M. Pavičić, *Spin-correlated interferometry with beam splitters: preselection of spin-correlated photons*, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 821 (1995).

- [71] M. Żukowski, A. Zeilinger, M. A. Horne und A. K. Eckert, „*Event-Ready-Detectors*“ *Bell Experiment via Entanglement Swapping*, Phys. Rev. Lett. **71**, 4287 (1993).
- [72] H. Paul, P. Törmä, T. Kiss und I. Jex, *Photon Chopping: a new way to measure the quantum state of light*, Phys. Rev. Lett., eingereicht.
- [73] C. M. Caves, C. Zhu, G. J. Milburn und W. Schleich, *Photon Statistics of two-mode squeezed states and interference in four-dimensional phase space*, Phys. Rev. A **43**, 3854 (1991).
- [74] M. Artoni, U. P. Ortiz und J. L. Birman, *Photocount distribution of two-mode squeezed states*, Phys. Rev. A **43**, 3954 (1991).
- [75] L. J. Geerligs, V. F. Anderegg, P. A. M. Holweg und J. E. Mooij, *Frequency-Locked Turnstile Device for Single Electrons*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2691 (1990).
- [76] L. P. Kouwenhoven, A. T. Johnson, N. C. van der Vaart, C. J. P. M. Harmans und C. T. Foxon, *Quantized Current in a Quantum-Dot Turnstile Using Oscillating Tunnel Barriers*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1626 (1991).
- [77] F. de Martini und G. R. Jacobovitz, *Anomalous Spontaneous-Stimulated-Decay Phase Transition and Zero-Threshold Laser Action in a Microscopic Cavity*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1711 (1988).
- [78] G. Bjørk, H. Heitman und Y. Yamamoto, *Spontaneous-Emission coupling factor and mode characteristics of planar dielectric microcavity lasers*, Phys. Rev. A **47**, 4451 (1993).
- [79] P. Kwiat, *Comment on „Reliability of Bell-inequality measurements using polarized correlations in parametric-down-conversion photon sources“*, Phys. Rev. A, **52**, 3380 (1995).
- [80] V. Weisskopf und E. Wigner, *Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie*, Z. Phys. **63**, 54 (1930) und *ibid.* **65**, 18 (1930).
- [81] C. S. Adams, M. Sigel und J. Mlynek, *Atom Optics* Phys. Rep. **240**, 143 (1994).
- [82] M. Sigel, C. S. Adams und J. Mlynek, *Atom Optics* in Proc. Int. School of Physics „*Enrico Fermi*“, *Frontiers in Laser Spectroscopy*, Course CXX, Varenna, 1992, p.479 ff., edited by T. W. Hänsch und M. Inguscio, (North Holland, Amsterdam, 1994).

- [83] T. Sleator, O. Carnal, A. Faulstich und J. Mlynek, *Interferometry with Metastable Rare Gas Atoms in Quantum Measurements in Optics*, edited by P. Tombesi und D. F. Walls (Plenum Press, New York, 1994).
- [84] T. Pfau, S. Spälter, Ch. Kurtsiefer, C. R. Ekstrom und J. Mlynek, *Loss of Spatial Coherence by a Single Spontaneous Emission*, Phys. Rev. Lett. **73**, 1223 (1994).
- [85] J. Robert, Ch. Miniatura, O. Gorceix, S. Le Boiteux, V. Lorent, J. Reinhardt und J. Baudon, *Atomic quantum phase studies with a longitudinal Stern–Gerlach interferometer*, J. Phys. II **2**, 601 (1992).
- [86] J. Robert, Ch. Miniatura, S. Le Boiteux, V. Bocvarski, J. Reinhardt und J. Baudon, *Atomic interferometry with metastable hydrogen atoms* in Proceedings of the 10th International Conference on Laser Spectroscopy, edited by M. Ducloy, E. Giacobino und G. Camy (World Scientific, Singapore, 1992).
- [87] Ch. Miniatura, J. Robert, O. Gorceix, V. Lorent, S. Le Boiteux, J. Reinhardt und J. Baudon, *Atomic interference and the Topological Phase*, Phys. Rev. Lett. **69** 261 (1992).
- [88] Hubert Stoop, private Mitteilungen.
- [89] Kazimierz Rzążewski, private Mitteilungen.
- [90] M. S. Chapman, T. D. Hammond, A. Lenef, J. Schmiedmayer, R. A. Rubinstein, E. Smith und D. E. Pritchard, *Photon Scattering from Atoms in an Atom Interferometer: Coherence Lost and Regained*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3783 (1995).
- [91] C. Tanguy, S. Reynaud, C. Cohen-Tannoudji *Deflection of an atomic beam by a laser wave: transition between diffractive and diffusive regimes*, J. Phys. B **17** 4623 (1984).
- [92] Y. K. Wang und I. C. Khoo, *On the Wigner–Weisskopf Approximation in Quantum Optics*, Opt. Com. **11** 323 (1974).
- [93] S.-Y. Zhu, R. C. F. Chan und C. P. Lee, *Spontaneous emission from a three-level atom*, Phys. Rev. A **52**, 710 (1995).
- [94] K. Rzążewski und W. Żakowicz, *Spontaneous emission from an extended wavepacket*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **25**, L319 (1992).

- [95] M. Wilkens, *Significance of Röntgen current in quantum optics: Spontaneous emission of moving atoms*, Phys. Rev. A **48**, 570 (1994).
- [96] C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou und A. Aspect, *Review on Fundamental Processes in Laser Cooling* in Proceedings of the 10th International Conference on Laser Spectroscopy, edited by M. Ducloy, E. Giacobino und G. Camy (World Scientific, Singapore, 1992).
- [97] P. A. Schilpp, *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*, (Vieweg, Braunschweig, 1983).
- [98] R. J. Glauber, *Optical Coherence and Photon Statistics*, Les Houches Summer School 1964, (Gordon and Breach, New York, 1964).
- [99] S. Kikuchi, *Über die Fortpflanzung von Lichtwellen in der Heisenberg-Paulischen Formulierung der Quantenelektrodynamik*, Z. Phys. **66** 587 (1930).
- [100] H. Paul, *Die Form einer spontan emittierten Lichtwelle*, Wiss. Z. der Friedrich-Schiller-Universität. **2** 217 (1964).
- [101] J. E. Thomas, J. R. Gardner, G. R. Welch, M. L. Marable, T. A. Savard und L. J. Wang, *Uncertainty-Principle-Limited Position Measurement of Moving Atoms*, in Quantum Optics VI, Ed. D. F. Walls, J. D. Harvey, Springer, Berlin, (1994).
- [102] K. D. Stokes, C. Schnurr, J. R. Gardner, M. L. Marable, G. R. Welch und J. E. Thomas, *Precision Position Measurement of Moving Atoms Using Optical Fields*, Phys. Rev. Lett. **67**, 1997 (1991).
- [103] R. L. de Matos Filho und W. Vogel, *Second-sideband laser cooling and nonclassical motion of trapped ions*, Phys. Rev. A **50**, R1988 (1994).
- [104] L. Mandel, *Distribution of Atomic Momentum in Resonance Fluorescence*, J. Opt. **10**, 51 (1979).
- [105] O. Carnal und J. Mlynek, *Young's Double-Slit Experiment with Atoms: A Simple Atom Interferometer*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2689 (1991).
- [106] D. W. Keith, C. R. Ekstrom, Q. A. Turchette und D. E. Pritchard, *An Interferometer for Atoms*, Phys. Rev. Lett. **66**, 2693 (1991).

- [107] O. Carnal, M. Sigel, T. Sleator, H. Takuma und J. Mlynek, *Imaging and Focussing of Atoms by a Fresnel Zone Plate*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3231 (1991).
- [108] M. Weitz, B. C. Young und S. Chu, *Atomic Interferometer Based on Adiabatic Population Transfer*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2563 (1994).
- [109] E. M. Rasel, M. K. Oberthaler, H. Batelaan, J. Schmiedmayer, and A. Zeilinger, *Atom Wave Interferometry with Diffraction Gratings of Light*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2633 (1995).
- [110] D. M. Giltner, R. W. McGowan, S. A. Lee, *Atom Interferometer based on Bragg Scattering from Standing Light Waves*, Phys. Rev. Lett. **75**, 2638 (1995).
- [111] M. S. Chapman, C. R. Ekstrom, T. D. Hammond, R. A. Rubinstein, J. Schmiedmayer, S. Wehinger und D. E. Pritchard, *Optics and Interferometry with Na<sub>2</sub> Molecules*, Phys. Rev. Lett. **74**, 4783 (1995).
- [112] P. Marte, P. Zoller und J. L. Hall, *Coherent atomic mirrors und beam splitters by adiabatic passage in multilevel systems*, Phys. Rev. A **44**, R4118 (1991).
- [113] T. Pfau, Ch. Kurtsiefer, C. S. Adams, M. Sigel und J. Mlynek, *Magneto-Optical Beam Splitter for Atoms*, Phys. Rev. Lett. **71**, 3427 (1993).
- [114] T. M. Roach, H. Abele, M. G. Boshier, H. L. Grossman, K. P. Zetie und E. A. Hinds, *Realization of a Magnetic Mirror for Cold Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 629 (1995).
- [115] C. Kurtsiefer, private Mitteilungen.
- [116] A. Stern, Y. Aharonov und Y. Imry, *Phase uncertainty und loss of interference: A general picture*, Phys. Rev. A **7**, 3436 (1990).
- [117] S. M. Tan und D. F. Walls, *Loss of coherence in interferometry*, Phys. Rev. A **47**, 4663 (1993).
- [118] K. F. v. Weizsaecker *Ortsbestimmung eines Elektrons durch ein Mikroskop*, Z. Phys. **70**, 114 (1931).
- [119] M. O. Scully, B.-G. Englert und H. Walther, *Quantum optical tests of complementarity*, Nature **351**, 111 (1991).

- [120] H.-A. Bachor, Q. Li, B. W. Stenlake, I. Littler, K. Baldwin und D. E. McClelland, *Atom Optics with Standing Waves of Light*, in Quantum Optics VI, Ed. D. F. Walls, J. D. Harvey, Springer, Berlin, (1994).
- [121] D. S. Krähmer, A. M. Herkommer, E. Mayr, V. M. Akulin, I. Sh. Averbukh, T. van Leeuwen, V. P. Yakovlev und W. Schleich, *Atom Optics in Quantized Light Fields*, in Quantum Optics VI, Ed. D. F. Walls, J. D. Harvey, Springer, Berlin, (1994).
- [122] U. Janicke und M. Wilkens, *Atomic motion in a magneto-optical field*, Phys. Rev. A **50**, 3265 (1994).

æ



## Verzeichnis eigener Veröffentlichungen

Folgende Schriften habe ich (mit-) verfaßt und veröffentlicht oder zur Veröffentlichung eingereicht:

- O. Steuernagel und J. A. Vaccaro, *Reconstructing the Density Operator via Simple Projectors*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3201 (1995).
- O. Steuernagel, *Synthesis of Fock states by N-ports*, Phys. Rev. A, eingereicht.
- O. Steuernagel und H. Paul, *Spontaneous Emission from an extended wave-packet: Field correlations* Phys. Rev. A, im Druck.
- O. Steuernagel und H. Paul, *Decoherence from spontaneous emission*, Phys. Rev. A **52**, R905 (1995).
- O. Steuernagel und H. Paul, *Decoherence: Phase wash out and recoil smearing*, zur Veröffentlichung eingereicht.



# Lebenslauf und Ausbildung

von Ole Steuernagel, geboren am 4. 3. 1963 in Itzehoe:

- 1969–1973 Besuch der Grundschule Celle-Wietzenbruch
- 1973–1982 Besuch des Hölty-Gymnasiums in Celle  
Abitur mit „gut“
- 1982–1984 Armeezeit
- 1984–1986 Studium der Physik an der TU–München
- 1986–1991 Studium der Physik an der Ludwig–Maximilians–Universität  
München, Diplomarbeit bei Prof. Spohn über  
„Spektrale Eigenschaften eines dissipative Quantensystems“  
Diplomnote: „gut (1.7)“
- 1991–1992 Mitarbeit in der 'Chaosgruppe: Verein zur Förderung der  
Erforschung nichtlinearer Dynamik' der TU–München
- 1992–1993 Forschungsstudium an der Humboldt–Universität Berlin am  
Lehrstuhl für statistische Physik
- 1993–1996 Promotionsstudium bei der Max–Planck–Arbeitsgruppe  
„Nichtklassische Strahlung“ an der Humboldt–Universität Berlin

Diese Dissertation ist in der Zeit vom November 1993 bis Mai 1996 entstanden.



## Danksagung

Meinem Betreuer Harry Paul verdanke ich, daß ich diese Arbeit anfertigen konnte. Ich bin sehr froh über die Mischung aus Anleitung und Freiheit, die mir bei der Bearbeitung der verschiedenen Themen eingeräumt wurde, und daß mir durch die weit gefächerte Themenwahl ermöglicht wurde, verschiedene Aspekte der Quantenoptik in kurzer Zeit kennenzulernen. Im übrigen ist mir ist klar, daß ich noch gar nicht weiß, was ich 'nebenher' alles gelernt habe – für Alles vielen herzlichen Dank Herr Paul!

Meinen Kollegen, Promotionsmitstreitern und den Damen aus der Verwaltung unseres Instituts danke ich für die vielen Hilfestellungen, die herzliche kollegiale Atmosphäre, viele hilfreiche Diskussionen, angeregte Gespräche sowie für die Geduld, die sie hin und wieder beim Mittagessen unter Beweis gestellt haben. Ich bin froh eine solch reibungsarme Arbeitsumgebung kennengelernt zu haben.

Allen ein herzliches Dankeschön!

Den vielen Gästen danke ich für ihr Entgegenkommen bei der Diskussion ihrer und meiner Arbeit, viel verdanke ich Robert Lynch, Yakob Ben-Aryeh, Marek Żukowski, M. Suhail Zubairy, Berthold Englert, Martin Wilkens, Kazik Rzażewski, Władek Żakowicz, Jan Mostowski, Johannes Schuchhardt, Francisco De Zela, Alexei Chizhov, Igor Jex und Arkadiusz Orłowski.

Ganz besonders danke ich meinen Physikerfreunden John Vaccaro, Matteo Paris und Mladen Pavičić – Ihr habt mir in vielem sehr geholfen!

Arne, Heidi und Astrud danke ich für die Unterstützung meines Lebensweges und die Ermutigungen bei meiner Arbeit.

Schließlich möchte ich meine Freunden danken, vor allem dem interdisziplinären Ralf, dem ich die Einsicht verdanke, daß Juristen in dieser Welt doch zu etwas nütze sind. Jenny möchte ich vor allem für all' das danken, wofür ich ihr noch nicht gedankt habe, und für die Hilfe beim kalten Buffet....

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung erlaubter Hilfsmittel und der angegebenen Literatur angefertigt habe.

Berlin, den 21.5.96