Zwei Loop Störungsentwicklung der Schrödinger-Funktional Kopplung α_{SF} in der $SU(3)$ Gittereichtheorie.

D i s s e r t a t i o n

Digitale Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)
im Fach Physik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Dipl.-Phys. Achim Bode
geb. am 30. Mai 1966 in Wuppertal

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. Dr. h.c. H. Meyer

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I
Prof. Dr. J. P. Rabe

Gutachter :
1. Prof. Dr. M. Müller-Preussker
2. Dr. habil. R. Sommer
3. Prof. Dr. U. Wolff

Tag der mündlichen Prüfung : 21. August 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Das Schrödinger-Funktional **11**
2.1 Die dimensionelle Regularisierung 14
2.2 Die Gitterregularisierung 15
2.2.1 Der Kontinuumslimes 17

3 Störungsentwicklung in der Gitterformulierung **19**
3.1 Störungsentwicklung zu zweiter Ordnung 26
3.2 Die Propagatoren 27
3.3 Vertizes 33
3.3.1 Yang-Mills Vertizes 33
3.3.2 Entwicklung des Maßes 34
3.3.3 Entwicklung des Fadeev-Popov Termes 35
3.3.4 Entwicklung des Hintergrundfeldes 35
3.4 Die Symmetrien 36
3.5 Implementierung der Diagramme 42
3.5.1 Analytisch zu berechnende Diagramme 42
3.5.2 Diagramme mit lokalen Loops 43
3.5.3 Big Mac Diagramme 46
3.6 Implementierungsdetails 47
3.7 Tests 48

4 Der Kontinuumslimes der Störungstheorie **51**

5 Numerische Gitterrechnungen **63**

6 Die Entwicklung von $\alpha_{\overline{MS}}$ in α_0 **67**
6.1 Feynmandiagramme auf dem Gitter im Ortsraum 68
6.2 Background field Methoden 69

7 Anwendung der Störungsreihe **73**
7.1 Die Relation zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ und α_{SF} 73
7.2 Die Callan Symanzik β-Funktion 77
7.3 Der Λ Parameter 78
7.4 Relationen zu nackten Kopplungen 79
7.5 Der Kontinuumslimes der perturbativen step scaling Funktion 80

8 Zusammenfassung **83**

9 Danksagung **85**

A Benutzte Darstellung der $SU(3)$ **87**
A.1 Die Strukturkonstanten 88
A.2 Die Eigenwerte zu $\mathcal{A}d$ 89

B Benutzte Darstellung der $SU(2)$ **91**

C Das Hintergrundfeld und die kovariante Ableitung **93**

D Die Operatoren $\triangle_1$ und $\triangle_0$ **95**
D.1 Das $\star$ Produkt 95
D.2 Die Koeffizienten der Operatoren 96

Abbildungsverzeichnis **97**

Tabellenverzeichnis **99**

Literaturverzeichnis **101**

Kapitel 1

Einleitung

Quantenfeldtheorien gehören mit zu den erfolgreichsten Modellen der Physik. Das magnetische Dipolmoment des Elektrons stimmt mit der Vorhersage durch die Quantenelektrodynamik [1] mit großer Genauigkeit überein [2],[3]

$$(g_e - 2)_{exp.} = 2\ 319\ 304\ 386\ (20) \times 10^{-12}\ , \tag{1.1}$$

$$(g_e - 2)_{theor.} = 2\ 319\ 304\ 280\ (74) \times 10^{-12}\ . \tag{1.2}$$

Die Vereinheitlichung der schwachen Wechselwirkung und der Quantenelektrodynamik führt zu der Elektroschwachen Theorie [4]-[6], die zusammen mit der Quantenchromodynamik (QCD) [7]-[10] das Standardmodell der Elementarteilchen [11] bildet. Bisher konnten alle Phänomene der Elementarteilchenphysik durch das Standardmodell beschrieben werden, obwohl allgemein angenommen wird, daß das Standardmodell zumindest bei extrem hohen Energien einer Erweiterung bedarf. Dabei ist jedoch zu bemerken, daß aufgrund der Schwierigkeiten bei der Lösung von komplizierten Quantenfeldtheorien, die Möglichkeiten Vorhersagen aus der Theorie zu machen, limitiert sind. Selbst die klassischen Näherungen der Quantenfeldtheorien führen auf nichtlineare Gleichungen, die nicht allgemein gelöst werden können. Durch die unendlich vielen Freiheitsgrade der Quantenfeldtheorien treten Divergenzen auf, die durch eine Regularisierung parametrisiert werden müssen. Physikalische Größen bleiben durch die Renormierung der regularisierten Divergenzen endlich. Die Renormierung von Quantenfeldtheorien führt auf Kopplungskonstanten, die von der Energie abhängig sind, sogenannte „running“ Kopplungen.

Mit störungstheoretischen Ansätzen sind im Prinzip alle Effekte zu berechnen, in denen die Kopplungskonstanten klein sind. In der Elektroschwachen Theorie steigen die Kopplungen mit der Energie an, so daß mit der Störungstheorie Aussagen über Prozesse bei kleinen Energien gemacht wer-

den können. Es zeigt sich, daß die Kopplungen bis zu den heute experimentell zugänglichen Energien nur schwach variieren, also klein bleiben.

In der QCD fällt die Kopplung mit der Energie ab, es werden große Energien benötigt, um Vorhersagen der Störungstheorie zu verifizieren. Um die niederenergetischen Effekte, wie das experimentell gut bekannte Massenspektrum der Hadronen und Mesonen, zu bestimmen, werden nichtperturbative Ansätze benötigt.

Der allgemeinste nichtperturbative Zugang zu Quantenfeldtheorien, der von der fundamentalen Definition der Theorie ausgeht, ist die Gittereichtheorie. Dieser Zugang bereitet für die Elektroschwache Wechselwirkung aufgrund der linkshändigen Neutrinos theoretische Probleme. Die QCD kann jedoch im Rahmen der Gittereichtheorie behandelt werden.

Die Berechnung von physikalischen Größen wird in der Gittereichtheorie mit Hilfe von Computersimulationen ausgeführt. Die heute verfügbaren Computerressourcen werden jedoch dem numerischen Aufwand für die Simulationen nur partiell gerecht. Daher werden Näherungen der QCD betrachtet. Um diese zu erläutern, ist eine Einordnung der fundamentalen Felder der QCD hilfreich. Die Eichgruppe der QCD ist die nichtabelsche Gruppe $SU(3)$, durch sie wird die Anzahl der Gluonen, der Wechselwirkungsteilchen oder Eichbosonen, auf 8 festgelegt. Jedes Fermion der QCD besitzt 3 Freiheitsgrade, die an die Gluonen koppeln. Die 6 Fermionen der QCD heißen Quarks und unterscheiden sich durch ihre Masse und Eigenschaften bezüglich der Elektroschwachen Wechselwirkung. Der Einfluß der Fermionen auf niederenergetische Größen sinkt mit steigender Masse. Der numerische Aufwand zur Simulation von leichten Quarks ist extrem hoch. In der „quenched Approximation“ werden die Effekte durch virtuelle Quarks vernachlässigt. Diese Näherung liefert eindrucksvolle Resultate in der Berechnung von Massenspektren durch die Gittereichtheorie. Dabei muß allerdings auf den unbekannten, systematischen Fehler durch die Näherung hingewiesen werden. Die Berechnung von Größen in der „quenched Approximation“, bei denen keine Fermionen betrachtet werden, wird „pure gauge theory“ genannt. Darunter fallen die Kraft zwischen zwei statischen Farbladungen, die als unendlich schwere Quarks identifiziert werden können, und Massen von bisher unbeobachteten Bindungszuständen von Gluonen.

In der Gittereichtheorie wird eine Diskretisierung der Raumzeit eingeführt, die die Divergenzen der Theorie regularisiert. Der numerische Zugang zu Gittereichtheorien ist gekennzeichnet durch die endliche Anzahl von Gitterpunkten, die simuliert werden können. Einerseits muß ein endliches Volumen verwendet werden, dessen Ausdehnung groß gegenüber den relevanten Teilchen ist, und anderseits sind die Effekte durch die Diskretisierung klein, wenn der Gitterabstand klein ist. Damit können einzelne Gittersimulationen

praktisch nur Aussagen über Phänomene machen, deren relevante Energieskalen sich nur über wenige Größenordnungen erstrecken.

Bei der Berechnung von niederenergetischen Größen der QCD durch die Gittereichtheorien werden die freien Parameter der Theorie durch einige ausgewählte Größen fixiert. Die Anzahl dieser Größen hängt von der verwendeten Approximation ab. Da die freien Parameter in den Simulationen gemessen werden müssen, sind ebenfalls niederenergetische Größen auszuwählen. In dem störungstheoretischen Zugang sind die freien Parameter durch Größen zu fixieren, die bei großen Energien, also einer kleinen Kopplung, relevant sind. Es ist a priori nicht bekannt, ob durch einen Satz von fixierten Parametern die Effekte der QCD bei kleiner und großer Energie zu beschreiben sind.

Die ALPHA Kollaboration hat sich zur Aufgabe gemacht, diese Fragestellung zu untersuchen. Dazu muß nichtperturbativ, also mit Hilfe der Gittereichtheorie, eine Größe, die bei niedriger Energie fixiert wird, bei großer Energie berechnet werden. Die entwickelte Methode basiert auf der Definition des Schrödinger-Funktionals für die QCD. Das Schrödinger-Funktional liefert die Übergangsamplitude zwischen Feldeigenzuständen zu den Zeiten $t = 0$ und T. Die räumliche Ausdehnung der Zustände ist eine Box mit periodischen Randbedingungen und einer Ausdehnung $L = T$. Die spezielle Kopplung α_{SF} ist durch die Änderung der Amplitude unter Variation eines Parameters der Feldeigenzustände definiert. In dem Schrödinger-Funktional ist nur die eine Skala L relevant. Damit ist α_{SF} eine „running“ Kopplung der Skala $1/L$. Deren Entwicklung läßt sich mit finite step Techniken in der Gittereichtheorie nichtperturbativ von kleinen zu großen Energien berechnen. Die finite step Technik verwendet mehrere Gittersimulationen bei denen das Verhältnis zwischen den relevanten Energieskalen klein ist. Bei kleinen Energien kann die spezielle Kopplung mit den bekannten Methoden der Gittereichtheorie mit physikalischen niederenergetischen Größen in Relation gesetzt werden. Das heißt, die freien Parameter der Theorie werden fixiert. Bei hohen Energien kann mittels der Störungstheorie α_{SF} in die von Experimentalphysikern gemessene Kopplung $\alpha_{\overline{MS}}$ umgerechnet werden. Auf diesem Weg können hoch- und niederenergetische Effekte der QCD in Relation gestellt werden und es kann gezeigt werden, daß die QCD über einen großen Energiebereich gültig ist. Der Zusammenhang zwischen den Energieskalen und den Zugängen zu der QCD sind in Abbildung 1.1 illustriert.

Die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag zu der störungstheoretischen Relation zwischen α_{SF} und $\alpha_{\overline{MS}}$. Störungstheoretische Relationen werden durch die Anzahl der ineinander verschachtelten Integrale über die Raumzeit klassifiziert. Diese Integrale können durch Feynmangraphen dargestellt werden, jedes Integral entspricht dort einer Schleife. Eine Zwei Loop Relation

z.B. erfordert zwei ineinander verschachtelte Integrale. Die Ergebnisse der Störungstheorie sind immer nur für kleine Kopplungen gültig, der abschätzbare systematische Fehler ist bei Zwei Loop Resultaten jedoch kleiner als der von Ein Loop Relationen.

Der systematische Fehler durch die Anwendung der Störungstheorie für die Berechnung von $\alpha_{\overline{MS}}$ sollte kleiner sein als der statistische Fehler der numerisch bestimmten Kopplung α_{SF}. Dabei muß darauf hingewiesen werden, daß die Kopplung α_{SF} bisher in der „quenched Approximation“ berechnet wurde. Bei dem erreichten statistischen Fehler ist die Zwei Loop Relation zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ und α_{SF} notwendig, um keine Präzision durch die Umrechnung zu verlieren.

Aus verschiedenen Gründen wird diese Zwei Loop Relation aus den separaten Zwei Loop Relationen zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ und α_0 und zwischen α_{SF} und α_0 gewonnen. Das Ergebnis ist unabhängig von der nicht physikalischen, nackten Kopplung α_0. Die Störungstheorie für die Relation zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ und α_0 hängt in einfacher Art von der Eichgruppe $SU(N)$ ab. Der Koeffizient der Ein Loop Entwicklung von $\alpha_{\overline{MS}}$ in α_0 ist in [12] und [13] 1981 angegeben worden. Der Zwei Loop Koeffizient ist von Lüscher und Weisz in [14] 1995 publiziert worden. Die Berechnung der Entwicklung von α_{SF} in α_0 kann nur mit numerischen Methoden durchgeführt werden und ist nicht trivial von der Eichgruppe $SU(N)$ abhängig. Neben der Ein Loop Entwicklung von α_{SF} in α_0 für die $SU(2)$ sind in [15] grundlegende Eigenschaften des Schrödinger-Funktionals diskutiert[1]. Narayanan und Wolff haben für die $SU(2)$ in [16] den Zwei Loop Koeffizienten publiziert. Die hier vorliegende Arbeit beinhaltet die Bestimmung des Zwei Loop Termes für die $SU(3)$, der Eichgruppe der QCD. Im Vergleich zu der $SU(2)$ Eichgruppe treten strukturell neue Terme auf. Die Ergebnisse der $SU(2)$ konnten im Rahmen der Arbeit reproduziert werden. Desweiteren liefert die Arbeit einen im Zusammenhang mit dem Kontinuumslimes der Gittereichtheorie relevanten Koeffizienten. Dieser ist bereits in bisher unveröffentlichten, numerischen Simulationen verwendet worden.

Die Arbeit beginnt mit der Definition des Schrödinger-Funktionals in Kapitel (2) und dessen Regularisierung mit der dimensionellen Regularisierung (Kapitel 2.1) und der in der Arbeit benötigten Gitterregularisierung (Kapitel 2.2). Für die Gittertheorie wird der Kontinuumslimes in Kapitel (2.2.1) diskutiert.

Die Störungsentwicklung wird in Kapitel (3) für die Gittertheorie eingeführt und für die Berechnung des Zwei Loop Termes konkretisiert. Mit der Darstellung der Berechnung der Propagatoren und Vertizes in den Kapiteln

[1] Die Eichgruppe $SU(2)$ wird wegen ihrer einfachen Struktur für qualitative Studien der QCD verwendet.

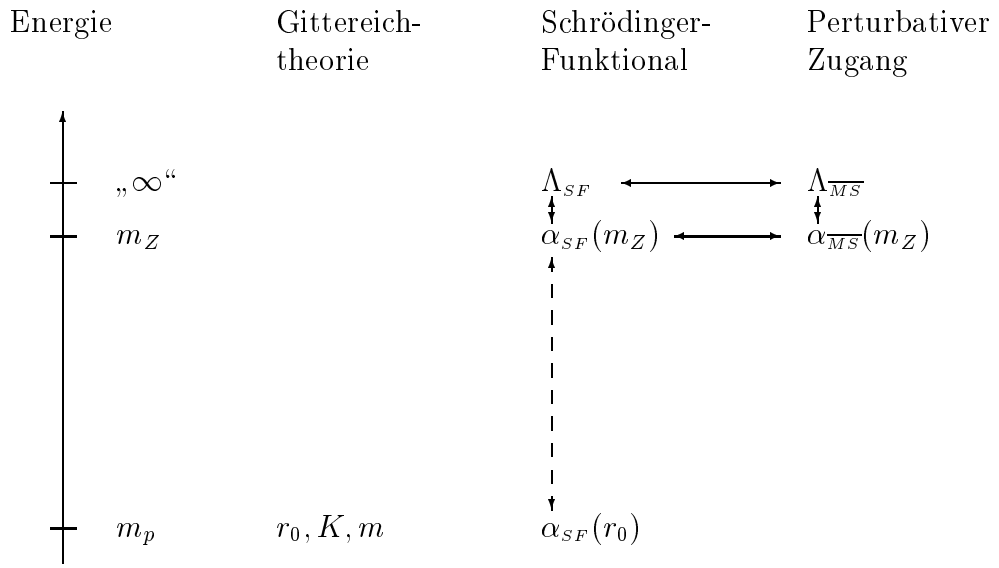


Abbildung 1.1: Die verschiedenen Zugänge zu der QCD und bestimmbare Größen in Abhängigkeit der Energie. $\longleftrightarrow$ bezeichnet störungstheoretische Relationen und $\leftarrow - \rightarrow$ eine durch numerische Gittersimulationen mit der finite step Technik zu berechnende Relation. Als niederenergetische Skala ist die Protonmasse m_p angegeben. Die Gittereichtheorie kann in diesem Energiebereich Größen, wie die String tension K, eine für die Kraft zwischen unendlich schweren Quarks relevante Größe, verschiedene Massen des Hadron- und Mesonspektrums m und die in Kapitel (5) diskutierte Skala r_0 bestimmen. Die Masse des neutralen Eichbosons der Elektroschwachen Theorie m_Z liegt in dem Bereich großer Energien, bei denen die Kopplungskonstante der QCD klein ist. Dort können mit Hilfe der Störungstheorie Relationen zwischen den Kopplungen und den Λ Parametern der QCD berechnet werden.

(3.2) und (3.3) wird die Grundlage für die Auswertung der Feynmandiagramme geschaffen. Die Symmetrien des Schrödinger-Funktionals werden in Hinblick auf die effiziente Berechnung der Feynmandiagramme in Kapitel (3.4) erläutert. Die Terme der Diagramme werden im einzelnen in Kapitel (3.5) aufgeführt. Einige Details der numerischen Implementation werden im Anschluß daran diskutiert (Kapitel 3.6). Die möglichen und durchgeführten Tests an die Berechnung sind in Kapitel (3.7) ausgeführt.

Der Kontinuumslimes der berechneten Koeffizienten wird mit Hilfe des Blocking Verfahrens von Lüscher und Weisz durchgeführt und ist in Kapitel (4) beschrieben. Er liefert unter anderem den Zwei Loop Koeffizienten der Störungsreihe.

Die numerische Berechnung der Kopplung mit der finite step Methode

und die prinzipielle Vorgehensweise zur Berechnung der Störungsreihe $\alpha_{\overline{MS}}$ in α_0 werden in Kapitel (5) und (6) diskutiert.

Mit diesen Ergebnissen kann die Kopplung $\alpha_{\overline{MS}}$ bei großen Energien, wie der Masse des neutralen Eichbosons der Elektroschwachen Theorie m_Z, berechnet werden (Kapitel 7.1). Mit der Callan Symanzik β-Funktion (Kapitel 7.2) läßt sich der mit der Kopplung $\alpha_{\overline{MS}}$ assoziierte Parameter $\Lambda_{\overline{MS}}$ (Kapitel 7.3) bestimmen. Mit der Störungsreihe können weitere Zwei Loop Relationen zu nackten Kopplungen aufgestellt und diskutiert werden (7.4). Die in dem Zusammenhang des Kontinuumslimes auftretenden Größen werden störungstheoretisch in Kapitel (7.5) untersucht.

In der Zusammenfassung (8) wird das Ergebnis der Arbeit im Rahmen des Programmes der ALPHA Kollaboration diskutiert, die mit Hilfe des Schrödinger-Funktionals weitere Ergebnisse erzielen konnte. Die Erweiterung des Schrödinger-Funktionals auf Fermionen und die dort benötigte Störungstheorie bildet in Kapitel (8) einen Ausblick auf die zukünftige Arbeit.

In den Anhängen (A-D) werden verschiedene Definitionen und Details präsentiert, die sich nur hinderlich in den Text der Arbeit einfügen ließen.

Kapitel 2

Das Schrödinger-Funktional

Wir beginnen mit der formalen Definition des Schrödinger-Funktionals im Hamilton Formalismus. In der im Folgenden angenommenen temporalen Eichung[1] ist die Theorie durch die Randbedingungen zur Zeit $x^0 = 0$ und $x^0 = T$, den kanonischen Vertauschungsrelationen zwischen den Feldvariablen und einem Hamiltonoperator definiert.

Um die finite-size Eigenschaften des Systems zu untersuchen, wählen wir einen kubischen, periodischen Raum mit der Kantenlänge L. Die Eichfelder sind durch die L-periodischen Vektorpotentiale $A_k(x)$ mit Werten in der Lie-Algebra der $SU(N)$ gegeben. Eichtransformationen $\Lambda(x)$, auch mit Werten in der Lie-Algebra der $SU(N)$, werden ebenfalls periodisch gewählt, so daß unter einer Eichtransformation der Eichfelder diese Eigenschaft erhalten bleibt

$$A_k(x) \to A_k^\Lambda(x) = \Lambda(x) A_k(x) \Lambda^{-1}(x) + \Lambda(x) \partial_k \Lambda^{-1}(x) \ . \tag{2.1}$$

In der Schrödinger Darstellung sind quantenmechanische Zustände Wellenfunktionale $\psi[A]$ von Feldkonfigurationen. Ein Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\langle \psi | \chi \rangle = \int DA \psi^*[A] \chi[A] \ , \qquad DA = \prod_{x,k} dA_k(x) \ . \tag{2.2}$$

Hier ist mit dA_k das normierte, invariante Maß der $SU(N)$ gemeint. Lediglich eichinvariante Zustände, also solche für welche

$$\psi[A^\Lambda] = \psi[A] \tag{2.3}$$

[1] $A_0 = 0$

für alle Λ gilt, sind physikalisch. Offensichtlich wird ein Wellenfunktional $\psi[A]$ auf den physikalischen Unterraum projiziert durch

$$\mathbb{P}\psi[A] = \int D\Lambda \psi[A^\Lambda] \ , \qquad D\Lambda = \prod_x d\Lambda(x) \ . \tag{2.4}$$

Die Gruppenelemente der Eichfelder $A_k^a(x)$ können als Operatoren interpretiert werden. Die kanonisch konjugierten Feldvariablen sind die Komponenten des farbelektrischen Feldes

$$F_{0k}^a(x) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta A_k^a(x)} \ . \tag{2.5}$$

Die farbmagnetischen Komponenten des Feldstärketensors[2] sind

$$F_{kl}^a(x) = \partial_k A_l^a(x) - \partial_l A_k^a(x) + f^{abc} A_k^b(x) A_l^c(x) \tag{2.6}$$

und der Hamiltonoperator lautet

$$\mathbb{H} = \int d^3x \left\{ \frac{g_0^2}{2} F_{0k}^a(x) F_{0k}^a(x) + \frac{1}{4g_0^2} F_{kl}^a(x) F_{kl}^a(x) \right\} \ , \tag{2.7}$$

wobei g_0^2 die nackte Kopplung ist.

Die Randbedingungen bei $x^0 = 0$ und T sind durch „scharfe“, oder δ-funktionsartige Zustände bestimmt. Sie sind formal durch einen, dem klassischen Eichfeld $C_k(x)$ assoziierten Zustand $|C\rangle$ gegeben, für den für alle Zustände ψ gilt

$$\langle C|\psi\rangle = \psi[C] \ . \tag{2.8}$$

Die eichinvariante Projektion des Zustandes $|C\rangle$ kann mit dem Projektor aus Gleichung (2.4) ermittelt werden. Das euklidische Schrödinger-Funktional ist nun definiert durch

$$\mathcal{Z}[C, C'] = \langle C'| \exp(-\mathbb{H}T)\mathbb{P}|C\rangle \ . \tag{2.9}$$

Die hier präsentierte euklidische Version des Schrödinger-Funktionals kann im Prinzip mit Hilfe einer Wick-Rotation [17]-[19] in den physikalischen Minkowski-Raum überführt werden, was im Folgenden jedoch nicht benötigt wird.

Aus der Spektraldarstellung mit einer normierten Basis der eichinvarianten Energieeigenzustände ψ_n

$$\mathcal{Z}[C, C'] = \sum_n \exp(-E_n T)\psi_n^*[C']\psi_n[C] \tag{2.10}$$

[2] Die f^{abc} sind die Strukturkonstanten der Eichgruppe.

ist die Eichinvarianz des Schrödinger-Funktionals bezüglich der Randbedingungen ersichtlich.

Um die Kopplung g^2_{SF} zu definieren, ist die Wahl von Randbedingungen notwendig. Wir beschränken uns auf konstante, abelsche und für alle räumliche Richtungen gleiche Randfelder. Die Felder der $SU(3)$ Eichgruppe sind

$$C = \frac{i}{L}\mathrm{diag}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \ , \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} C' &= \frac{i}{L}\mathrm{diag}(\phi'_1, \phi'_2, \phi'_3) \\ &= \frac{i}{L}\mathrm{diag}(-\frac{4\pi}{3} - \phi_1, \frac{2\pi}{3} - \phi_3, \frac{2\pi}{3} - \phi_2) \ , \end{aligned} \tag{2.12}$$

wobei die ϕ_i lineare Funktionen eines äußeren Parameters η sind. Die konkrete Wahl der ϕ_i ist im Anhang (C) auch für die $SU(2)$ angegeben. Die Skala L des Randfeldes ist gleich der Größe der räumlichen Ausdehnung gewählt, so wird keine zweite Skala eingeführt.

Die eichinvariante Information des Randfeldes ist nur in den Wilsonloops, die sich durch die räumlichen Ränder winden, enthalten. Sie sind unabhängig von der Skala L.

Mit Hilfe der effektiven Wirkung

$$\Gamma(\eta, L) = -\ln(\mathcal{Z}(\eta, L)) \tag{2.13}$$

und deren Ableitung nach dem Parameter η des Randfeldes

$$\Gamma'(L) = -\frac{\partial}{\partial\eta}\ln(\mathcal{Z}(\eta, L))\Big|_{\eta=0} \tag{2.14}$$

wird die Kopplung definiert

$$g^2_{SF}(L) = \frac{\Gamma'_0(L)}{\Gamma'(L)} \ . \tag{2.15}$$

Sie ist ausschließlich von der Skala L abhängig und kann als eine „running“ Kopplung identifiziert werden. Mit dieser Definition ergibt sich aus der Entwicklung von $\Gamma(L) = 1/g_0^2\Gamma_0 + \Gamma_1 + g_0^2\Gamma_2 + \ldots$ eine normierte Entwicklung der Form

$$g^2_{SF}(L) = g_0^2 + O(g_0^4) \ . \tag{2.16}$$

Dies vereinfacht störungstheoretische Relationen zu anderen Kopplungen. Die Ableitung in Gleichung (2.14) wird im Folgenden bei allen Größen durch $'$ dargestellt.

Wir wenden uns nach der formalen Definition des Schrödinger-Funktionals mit Hilfe der Hamilton Formulierung der Pfadintegralformulierung zu. Diese ist Ausgangspunkt für die in den numerischen Berechnungen verwendete Gitterformulierung (Kapitel 2.2). Die störungstheoretische Untersuchung der Kopplung $g^2_{\overline{MS}}$ ist ebenfalls in der Pfadintegralformulierung vorteilhaft.

Mit der Regularisierung (Kapitel 2.1 und 2.2) des Pfadintegrals werden die Divergenzen der Theorie parametrisiert. Damit ist die notwendige Renormierung der Divergenzen möglich.

Es ist allgemein angenommen, daß die Renormierbarkeit von Quantenfeldtheorien unabhängig von der Regularisierung ist. Für die behandelte Yang-Mills Wirkung ist in der dimensionellen Regularisierung und der Gitterregularisierung die Renormierbarkeit zu allen Ordnungen der Störungstheorie nachgewiesen [20, 21]. Ein nichtperturbativer Renormierbarkeitsbeweis liegt nicht vor, es wird jedoch davon ausgegangen, daß sich die Yang-Mills Wirkung in der Gitterregularisierung renormieren läßt.

In [15] ist gezeigt, das die Renormierung des Schrödinger-Funktionals im $\overline{MS}$ Schema zu erster Ordnung in g_0 ohne zusätzliche Renormierung der Randfelder auskommt. In der zweiten Ordnung der Störungstheorie ist in [16] numerisch gezeigt, daß das Schrödinger-Funktional der $SU(2)$ renormierbar ist. Die vorliegende Arbeit liefert diese Aussage für die $SU(3)$. Es ist aus der Arbeit von Symanzik in der ϕ^4 Theorie und Argumenten der Plausibilität zu erwarten, daß auch in höheren Ordnungen in g_0 das Randfeld keine Renormierung erfährt.

2.1 Die dimensionelle Regularisierung

Für die dimensionelle Regularisierung wird, von ganzzahligen Dimensionen ausgehend, die Theorie für Dimensionen aus der komplexen Ebene durch eine analytische Fortsetzung formuliert. Eine Entwicklung um $d = 4$ regularisiert die Divergenzen.

Im Allgemeinen wird bei der dimensionellen Regularisierung in der Impulsraumdarstellung der Feynmandiagramme eine Bogolubov-Schwinger Parametrisierung der Propagatoren gewählt. Diese ermöglicht die Impulsraumintegration in d Dimensionen auszuführen. Die so gewonnene Bogolubov-Schwinger Darstellung der Feynmandiagramme liefert die analytische Fortsetzung der Dimensionsabhängigkeit.

Für das Schrödinger-Funktional ist diese Methode durch die Form der Propagatoren und Vertizes nicht anwendbar. In [22] ist eine Methode im Ortsraum ausgearbeitet, die für den Renormierbarkeitsbeweis zu erster Ordnung der Störungstheorie des Schrödinger-Funktionals verwendet wurde.

Mit Hilfe des Renormierungsschema „Minimal subtraction“ ergibt sich die Entwicklung von g^2_{SF} in $g^2_{\overline{MS}}$. In [15] ist der Ein Loop Koeffizient mit dieser Methode bestimmt worden. Er stimmt mit dem Koeffizienten überein, der durch die Entwicklung von g^2_{SF} und $g^2_{\overline{MS}}$ in der Gitterkopplung gewonnen wurde.

Der Aufwand dieser Störungsrechnung ist insbesondere für höhere Ordnungen sehr groß, so daß die dimensionelle Regularisierung des Schrödinger-Funktionals im weiteren nicht betrachtet wird.

2.2 Die Gitterregularisierung

Mit der Formulierung des Schrödinger-Funktionals auf dem Gitter wird ein Ultraviolettcutoff a eingeführt, der die Eichinvarianz erhält. Die resultierende Gitterformulierung besitzt abzählbar unendlich viele Freiheitsgrade. Mit der Hilfe von Monte Carlo Simulationen, die Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden numerisch integrieren, ist ein nichtperturbativer Zugang gegeben. Dazu muß der Limes $a \to 0$ durch eine Sequenz von Simulationen durchgeführt werden. Die Gitterformulierung ist nicht eindeutig. Es wird im Folgenden eine Standardversion diskutiert.

Das Schrödinger-Funktional ist mit Hilfe der Gitterpunkte

$$x \in \Lambda = \left\{x = (x^0, \vec{x}) | x^k \in \{0, a, \ldots, (L-a)\}, x^0 \in \{0, a, \ldots, T\}\right\} \tag{2.17}$$

definiert, also mit einem 4 dimensionalen hyperkubischen Gitter ($T = L$) mit dem Gitterabstand a.

Die zentralen Objekte sind die Links oder Paralleltransporter

$$U(x, x+\hat{\mu}) = U_\mu(x) \in SU(N) \tag{2.18}$$

$$= \mathcal{P} \exp\left(a \int_0^1 dt A_\mu(x + t\hat{\mu})\right) , \tag{2.19}$$

wobei $\hat{\mu}$ ein Vektor der Länge a in Richtung μ ist. Gleichung (2.19) stellt die Verbindung zwischen Kontinuum und Gitterformulierung her. Die zeitartigen Links $U_0(x)$ sind für $0 \leq x^0 < T$ definiert, die raumartigen Links $U_k(x)$ für $0 \leq x^0 \leq T$. Die Gesamtheit aller Links $U_\mu(x)$ soll als U bezeichnet werden. U ist ein Element des Funktionenraumes $\mathcal{H}$, der Funktionen $\tilde{\Lambda} \to SU(N)$. Hier bezeichnet $\tilde{\Lambda}$ alle Ort- und Richtungspaare für die die Links definiert sind, also alle Links innerhalb von Λ.

Die Zustandssumme wird als Integral über alle Linkvariablen formuliert, welche den Randbedingungen

$$U_k(x^0, \vec{x}) = \begin{cases} W(C) = \exp(aC_k(\vec{x})) & x^0 = 0 \\ W(C') = \exp(aC'_k(\vec{x})) & x^0 = T \end{cases} \tag{2.20}$$

genügen.

Eine Eichtransformation mit $\Omega : \Lambda \to SU(N)$ wirkt auf die Links durch

$$U_\mu^\Omega(x) = \Omega(x) U_\mu(x) \Omega(x+\hat{\mu})^{-1} \ . \tag{2.21}$$

Sie muß die Randfelder $W(C)$ und $W(C')$ invariant lassen. Dies ist durch die Forderung $\Omega(0,\vec{x}) = \kappa$ und $\Omega(T,\vec{x}) = \kappa'$, wobei κ und κ' konstant und diagonal sind, erfüllt.

Entsprechend der Wilson Wirkung wird mit den Plaquettevariablen

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x) U_\nu(x+\hat{\mu}) U_\mu^{-1}(x+\hat{\nu}) U_\nu^{-1}(x) \ , \tag{2.22}$$

deren Spur eichinvariant ist, die Wirkung definiert als

$$S[U] = \frac{1}{g_0^2} \sum_p w(p) \mathrm{tr}(1 - U_p) \ , \tag{2.23}$$

wobei die Summe über p alle orientierten[3] Plaquetten meint. Das Gewicht $w(p)$ ist außer für die Plaquetten, die das Randfeld kontaktieren, eins. Wir werden später sehen (Kapitel 2.2.1), daß durch geeignete Wahl von $w(p)$ der Kontinuumsgrenzwert mit einer Rate proportional zu a^2 erreicht wird. Das Schrödinger-Funktional auf dem Gitter ist nun

$$\mathcal{Z}[C',C] = \int \mathcal{D}U \exp(-S[U]) \ , \qquad \mathcal{D}U = \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \tag{2.24}$$

mit dem Haar-Maß der $SU(N)$ Lie-Gruppe. Das Schrödinger-Funktional ist, auch in der Gitterformulierung, als von den Kontinuumsrandfeldern C und C' abhängig zu betrachten.

In der hier beschriebenen Gitterformulierung wird im Gegensatz zu der Kontinuumsformulierung kein expliziter Projektor auf eichinvariante Randbedingungen benötigt. Die Projektion ist durch die Integration über die zeitartigen Eichfelder $U_0(x)$ realisiert.

Für die Wilson Wirkung ist gezeigt, daß eine positive Transfermatrix $\mathbb{T}$, auch für $a \neq 0$, existiert

$$\mathcal{Z}[C',C] = \langle W(C') | \mathbb{T}^{T/a} \mathbb{P} | W(C) \rangle \ . \tag{2.25}$$

Aus dieser Darstellung ist eine Spektraldarstellung auf dem Gitter[4] abzuleiten, die für alle Werte von a gültig ist.

[3] positiv und negativ orientiert!

[4] Analog zu Gleichung (2.10).

2.2.1 Der Kontinuumslimes

Für numerische Rechnungen in der Gittereichtheorie können nur endlich viele Freiheitsgrade verwendet werden. Eine Extrapolation zu $a \to 0$ ist notwendig. Es ist daher von Vorteil, die Theorie so zu formulieren, daß der Kontinuumslimes anstatt mit einer Rate proportional zu a mit a^2 erreicht wird.

Nach Symanzik's Analyse [23], [24] der a Abhängigkeit von Feynmandiagrammen der ϕ^4 Theorie in der Gitterregularisierung ist auch für die effektive Wirkung des Schrödinger-Funktionals ein Beitrag zur l Loop Ordnung in Störungstheorie $\Gamma_l(\eta)$ von der Form

$$\Gamma_l(\eta) \underset{a\to 0}{\sim} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{l} \Gamma_{lmn}(\eta) a^m \ln^n(a) \tag{2.26}$$

zu erwarten. Die logarithmischen Divergenzen ($m = 0$ und $n > 0$) werden durch die Renormierung der Kopplung g_0 absorbiert. Die Verbesserung des Kontinuumslimes zu der Ordnung $O(a^2)$ ist in der Störungstheorie mit $\Gamma_{l1n}(\eta) = 0$ für alle l und n äquivalent.

Symanzik hat für die ϕ^4 Theorie mit periodischen Randbedingungen in [25, 26] die Verbesserung beschrieben. Für Eichtheorien mit periodischen Randbedingungen ist in [27, 28, 29, 30, 31, 32] ausgearbeitet, daß die Wirkung um Operatoren der Dimension 5 erweitert werden muß, um einen Kontinuumslimes der Ordnung $O(a^2)$ zu erhalten. Diese Operatoren sind mit einer von g_0^2 abhängigen Funktion zu gewichten.

Für die Wilson Wirkung ohne Fermionen sind keine eichinvarianten Operatoren[5] der Dimension 5 möglich, so daß die Wilson Wirkung mit periodischen Randbedingungen (Gleichung (2.23) mit $w(p) = 1$) den Kontinuumslimes mit einer Rate proportional zu a^2 erreicht.

Die Situation im Schrödinger-Funktional ist wegen der Randbedingungen komplizierter. Es sind Operatoren der Dimension 4 zu betrachten, die aus einer Summe über die Ränder ($t = 0, T$) gebildet werden. Es liegen zwei mit der Eichsymmetrie verträgliche Operatoren vor

$$O_t = \sum_{\vec{x},k} \operatorname{tr} U_{0k}(t,\vec{x}) + \operatorname{tr} U_{k0}(t,\vec{x}) \quad t = 0; t = T-1 \ , \tag{2.27}$$

$$O_s = \sum_{\vec{x},ik} \operatorname{tr} U_{ik}(t,\vec{x}) \qquad t = 0; t = T \ . \tag{2.28}$$

[5] Eichinvariante Operatoren sind grundsätzlich aus der Spur über Wilson Loops zu formulieren.

Eine Parametrisierung des Gewichtes $w(p)$ in Gleichung (2.23) durch

$$w(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_s(g_0^2) & \text{falls p eine raumartige Plaquette bei } t=0 \text{ oder} \\ & t=T \text{ indiziert,} \\ c_t(g_0^2) & \text{falls p eine zeitartige Plaquette bei } t=0 \text{ oder} \\ & t=T-1 \text{ indiziert,} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2.29}$$

liefert die notwendige Gewichtung der Operatoren O_s und O_t. Die nichtperturbative Bestimmung von c_t und c_s ist prinzipiell möglich. Die Koeffizienten der perturbativen Entwicklungen sind durch

$$c_t(g_0^2) = c_t^{(0)} + c_t^{(1)} g_0^2 + c_t^{(2)} g_0^4 + \dots \tag{2.30}$$

$$c_s(g_0^2) = c_s^{(0)} + c_s^{(1)} g_0^2 + c_s^{(2)} g_0^4 + \dots \tag{2.31}$$

definiert. Bei den in Kapitel (5) vorgestellten numerischen Simulationen des Schrödinger-Funktionals wurde die jeweils bekannte perturbative Entwicklung von c_t zur Ordnung g_0^2 verwendet.

Eine Berechnung der klassischen Wirkung liefert:

$$c_s^{(0)} = c_t^{(0)} = 1 \text{ für } SU(N) \ . \tag{2.32}$$

Durch die räumlich konstanten und abelschen Randfelder verschwindet O_s und die Betrachtung von c_s wird überflüssig[6].

Die Verwendung der Koeffizienten aus Gleichung (2.32) führt für die Entwicklungskoeffizienten der effektiven Wirkung auf

$$\Gamma_{l1l}(\eta) = 0 \ . \tag{2.33}$$

Aus dem störungstheoretischen Verbesserungsprogramm folgt, daß für eine Wirkung, die Ordnung $O(a)$ verbessert ist zur n-ten Loop Ordnung

$$\Gamma_{l1(l-n)} = 0 \text{ mit } l-n \geq 0 \tag{2.34}$$

gilt.

[6]Der Wert von $c_s^{(0)}$ wurde mit Hilfe eines selbstdualen Randfeldes berechnet.

Kapitel 3

Störungsentwicklung in der Gitterformulierung

Für die Störungsentwicklung muß zunächst das absolute Wirkungsminimum gefunden werden. Das sich aus den Randfeldern aus Gleichung (2.11,2.12) ergebende Hintergrundfeld, um welches die Felder zu entwickeln sind, ist bis auf Eichtransformationen eindeutig. Mit konstanten und abelschen Randfeldern, die in der Fundamentalen Domäne liegen

$$\phi_\alpha < \phi_{\alpha+1} \ , \qquad |\phi_\alpha - \phi_\beta| < 2\pi \tag{3.1}$$

ist in [15] bewiesen, das das Hintergrundfeld

$$B_0 = 0, \quad B_k(x) = C + \frac{x^0}{T}(C' - C) \tag{3.2}$$

für

$$\frac{TL}{a^2} > (N-1)\pi^2 \max\left(1, \frac{1}{16}N\right) \tag{3.3}$$

ein absolutes Minimum ist. Es ergibt sich für $N=2: T=L \geq 4$ und $N=3: T=L \geq 5$. Die Ungleichung (3.3) ist nicht physikalisch interpretierbar, sie erscheint als technisches Detail des Beweises. Der konstante Feldstärketensor des Hintergrundfeldes ist

$$G_{ij} = 0 \ , \quad G_{0i} = \frac{1}{a}(B_k(x+\hat{0}) - B_k(x)) \ . \tag{3.4}$$

Die Links und Plaquetten des Hintergrundfeldes sind

$$V_0(x) = 1 \ , \quad V_k(x) = \exp(aB_k(x)) \ , \tag{3.5}$$

$$V_{ij}(x) = 1 \ , \quad V_{0i}(x) = \exp(a^2 G_{0i}) \ , \tag{3.6}$$

$$V_{\mu\nu}(x) = \exp(a^2 G_{\mu\nu}) \ . \tag{3.7}$$

Mit den in dem Anhang (C) definierten Parametern ω_1, θ_1 und η der Randfelder und der in Anhang (A) angegebenen Elemente der Darstellung T^σ der $su(3)$ Lie-Algebra ergibt sich für die $SU(3)$

$$B_k(x) = C + x^0 \gamma \mathrm{T}^1 \text{ mit} \tag{3.8}$$

$$\gamma = \frac{2}{TL}\left(\frac{2\pi}{3} + \theta_1 + \eta\omega_1\right) \ . \tag{3.9}$$

Die räumlichen Komponenten der Links und die zeitartigen Komponenten des Feldstärketensors des Hintergrundfeldes sind

$$V_k(x) = \exp(aC + ax^0\gamma\mathrm{T}^1) \ , \tag{3.10}$$

$$G_{0i}(x) = \gamma\mathrm{T}^1 \ . \tag{3.11}$$

Für die $SU(2)$ Eichtheorie ergibt sich das Hintergrundfeld, welches im Anhang (C) definiert ist, zu

$$B_k(x) = C + x^0 \gamma \mathrm{T}^0 \text{ mit} \tag{3.12}$$

$$\gamma = \frac{2}{TL}\left(\pi + 2(\theta_1 + \eta\omega_1)\right) \ , \tag{3.13}$$

wobei T^0 ein Generator der in Anhang (B) definierten Darstellung der $su(2)$ Lie-Algebra ist. Entsprechend folgt

$$V_k(x) = \exp(aC + ax^0\gamma\mathrm{T}^0) \ , \tag{3.14}$$

$$G_{0i} = \gamma\mathrm{T}^0 \ . \tag{3.15}$$

Um die Notation einfach zu gestalten wird bei γ und anderen von der Gruppe $SU(N)$ abhängigen Größen der Gruppenindex unterdrückt. Diese Konvention ist insgesamt der Lesbarkeit der Formeln förderlich.

Die Links $U_\mu(x) \in SU(N)$ werden durch Elemente der Lie-Algebra $q_\mu(x) \in su(N)$ so parametrisiert, daß für $q_\mu(x) = 0$ gilt: $U_\mu(x) = V_\mu(x)$. Wir setzen an

$$U_\mu(x) = \exp(g_0 a q_\mu(x)) V_\mu(x) \ , \tag{3.16}$$

$$q_\mu(x) = q_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{T}^\sigma \ . \tag{3.17}$$

Die Gesamtheit aller $q_{\mu,\sigma}(x)$ bezeichnen wir analog zu U mit q. Entsprechend zu $\mathcal{H}$ bezeichnen wir den Raum der Funktionen $\tilde{\Lambda} \to su(N)$ mit $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$.

Das Haar-Maß in Gleichung (2.24) muß als Integrationmaß über q entwickelt werden

$$dU_\mu(x) = \rho(q_\mu(x)) \prod_\sigma dq_{\mu,\sigma} \tag{3.18}$$

mit dem zu bestimmenden Gewicht ρ. Betrachten wie die Parametrisierung eines Elementes der $SU(N)$ Lie-Gruppe durch $\exp(q)$. Die Invarianzeigenschaft von Integralen über die Gruppe mit dem Haar-Maß entspricht

$$\int f(\exp(q))\rho(q)\prod_\sigma dq_\sigma = \int f(\exp(q')\exp(q))\rho(q)\prod_\sigma dq_\sigma \ , \tag{3.19}$$

wobei q' ein weiteres Element der Lie-Algebra ist. Mit der Funktion $q''_\sigma(q',q)$ die die Relation $\exp(q')\exp(q) = \exp(q''(q',q))$ erfüllt, ergibt sich

$$\int f(\exp(q))\rho(q)\prod_\sigma dq_\sigma = \int f(\exp(q''(q',q)))\rho(q)\prod_\sigma dq_\sigma \tag{3.20}$$

$$= \int f(\exp(q''))\rho(q'')|\det\left(\frac{\partial q''}{\partial q}\right)|\prod_\sigma dq''_\sigma \tag{3.21}$$

nach einer Variablentransformation. Das Gewicht erfüllt daher die Relation

$$\rho(q) = \rho(q'')|\det\left(\frac{\partial q''}{\partial q}\right)| \ . \tag{3.22}$$

Die Determinate der Matrix

$$\rho_{\sigma\tau}(q) = \left(\exp(-q)\ \frac{d}{dt}\exp(q+t\mathrm{T}^\tau)\Big|_{t=0}\right)_\sigma \tag{3.23}$$

erfüllt genau diese Eigenschaft und definiert so bis auf eine irrelevante Konstante das Haar-Maß. Es kann gezeigt werden, daß

$$\rho_{\sigma\tau}(q) = E(\mathcal{A}d(q))_{\sigma\tau} \tag{3.24}$$

gilt, wobei

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(-x)^n \tag{3.25}$$

und

$$\mathcal{A}d(q)q' = [q,q'] \tag{3.26}$$

verwendet wurden. Für die perturbative Entwicklung ist es von Vorteil

$$S_m(q) = \mathrm{tr}\log(E(\mathcal{A}d(q))) \tag{3.27}$$

einzuführen. Das Haar-Maß für einen Link, parametrisiert durch Gleichung (3.16), folgt zu

$$dU_\mu(x) = \exp(S_m(g_0 a q_\mu(x))) \prod_\sigma dq_{\mu,\sigma}(x) \ . \tag{3.28}$$

Hier ist von der Invarianzeigenschaft aus Gleichung (3.19) des Haar-Maßes Gebrauch gemacht worden, um die Abhängigkeit von dem Hintergrundfeld zu eliminieren. Die Entwicklung von S_m in g_0 wird in Kapitel (3.3.2) diskutiert.

Eine Eichfixierung ist in der Störungstheorie notwendig, um Nullmoden in dem Gluonpropagator zu vermeiden [33]. Die in Kapitel (2.2) eingeführten Eichtransformationen Ω lassen die Randfelder invariant. Die konstanten abelschen Eichfunktionen transformieren das gesamte Hintergrundfeld V_μ invariant. In [15] ist gezeigt, daß keine weiteren Eichtransformationen existieren, die diese Eigenschaft haben. Für die Eichfixierung sind die konstanten Eichfreiheitsgrade nicht relevant, da sie keiner Anregung des q-Feldes entsprechen. Wir definieren daher $\mathcal{G}$ als den Raum aller Eichfunktionen $\Omega : \Lambda \to SU(N)$ mit[1]

$$\Omega(0, \vec{x}) = \exp(\kappa) \text{ mit } \kappa \in \mathcal{C}_\mathcal{N} \text{ und konstant} \ , \tag{3.29}$$

$$\Omega(T, \vec{x}) = 1 \ . \tag{3.30}$$

Entsprechend q führen wir

$$\Omega(x) = \exp(g_0 \omega(x)) \ , \tag{3.31}$$

$$\omega(0, \vec{x}) = \kappa \in \mathcal{C}_\mathcal{N} \text{ und konstant} \ , \tag{3.32}$$

$$\omega(T, \vec{x}) = 0 \tag{3.33}$$

ein und bezeichnen analog zu $\mathcal{L}_\mathcal{H}$ den Raum aller Funktionen $\omega : \Lambda \to su(N)$ mit den Eigenschaften aus Gleichung (3.32) und (3.33) als $\mathcal{L}_\mathcal{G}$.

Eine Eichtransformation ω wirkt auf q durch:

$$q_\mu(x) \to q_\mu^\omega(x) = q_\mu(x) + D_\mu \omega(x) + O(\omega^2) \tag{3.34}$$

mit der kovarianten Ableitung D_μ

$$D_\mu f(x) = \frac{1}{a} \left(V_\mu(x) f(x + \hat{\mu}) V_\mu^{-1}(x) - f(x) \right) \ . \tag{3.35}$$

Wir definieren weiter den Operator $d : \mathcal{L}_\mathcal{G} \to \mathcal{L}_\mathcal{H}$ durch

$$(d\omega)_\mu(x) = D_\mu \omega(x) \ . \tag{3.36}$$

[1] $\mathcal{C}_\mathcal{N}$ ist die Cartan'sche Subalgebra der $SU(N)$

Es gilt Kern$(d) = 0$. Es ist nützlich, Skalarprodukte auf $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ einzuführen

$$(q,r) = a^4 \sum_{\sigma,(x,\mu)\in\tilde{\Lambda}} q_\mu{}^\sigma(x) r_{\mu,\sigma}(x) \ , \tag{3.37}$$

$$(\omega,r) = a^4 \sum_{\sigma,x\in\Lambda} \omega^\sigma(x) r_\sigma(x) \ . \tag{3.38}$$

Die generelle Eichfixierung auf dem Gitter ist in [34] für die Störungstheorie ausgearbeitet. Sie basiert auf einer differenzierbaren Funktion, $F : \mathcal{H} \to \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$, die in einer ϵ-Umgebung $\mathcal{N}$ des Wirkungsminimums V definiert ist und für die $F(V) = 0$ gilt. Für alle Konfigurationen U aus der ϵ-Umgebung existiert genau eine Eichtransformation Ω, so daß $F(U^\Omega) = 0$ ist. Weiterhin muß die Determinate des linearen Operators $L(U) : \mathcal{L}_{\mathcal{G}} \to \mathcal{L}_{\mathcal{G}}$

$$L(U)\omega = \delta_\omega F(U) \tag{3.39}$$

$$= \omega_\sigma \left.\frac{\partial}{\partial\tilde{\omega}_\sigma} F(U^{\tilde{\Omega}})\right|_{\tilde{\Omega}=\exp(\tilde{\omega}_\sigma \mathrm{T}^\sigma)=1} \tag{3.40}$$

ungleich Null sein. Hier ist die Zerlegung $\omega = \omega_\sigma \mathrm{T}^\sigma$ bezüglich der Generatoren T^σ verwendet worden.

Wir erklären die Abbildung F mit Hilfe der Parametrisierung von U aus Gleichung (3.16) als lineare Funktion von q

$$F(U[q]) = d^* q = \hat{F}(q) \ , \tag{3.41}$$

wobei $-d^*$ der zu d bezüglich des Skalarproduktes aus Gleichung (3.37) adjungierte Operator sein soll. Aus dieser Definition von d^* folgt, unter der Berücksichtigung, daß Kern$(d) = 0$ ist,

$$d^* q(x) = \begin{cases} D^*_\mu q_\mu(x) & 0 < x^0 < T \ , \\ \frac{a^2}{L^3} \sum_{\vec{y}} [q(x^0,\vec{y})]_{\alpha\beta} & \alpha = \beta \text{ und } x^0 = 0 \ , \\ 0 & \text{sonst bei } x^0 = 0, T \end{cases} \tag{3.42}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D^*_\mu f(x) = \frac{1}{a}\left(f(x) - V_\mu^{-1}(x) f(x-\hat{\mu}) V_\mu(x)\right) \ . \tag{3.43}$$

Es ist in [34] bewiesen, daß

$$\int \mathcal{D}U f(U) = k \int_{\mathcal{N}} \mathcal{D}U f(U) \delta(F(U)) \det(L(U)) \tag{3.44}$$

für Funktionen f gilt, die nur für $U \in \mathcal{N}$ ungleich Null sind. Dies ist weiterhin gültig, wenn die δ-Funktion durch $\delta(F(U) - Z)$ ersetzt wird. Z ist aus $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$ mit $(Z, Z) < \epsilon$. Eine Integration über Z mit einem gaußischem Gewicht g_0^2/λ_0 darf ausgeführt werden, da die linke Seite von Gleichung (3.44) unabhängig von Z ist. Die Menge $\mathcal{N}$ ist gegebenfalls weiter einzuschränken. Insbesondere ist durch die Parametrisierung von U in Gleichung (3.31) sicher gestellt, daß U in der Störungsentwicklung in einer geeigneten Menge $\mathcal{N}$ liegt. Die Darstellung der Determinate durch Grassmann-Variablen führt in dem Pfadintegral zu dem Beitrag

$$\int \mathcal{D}\overline{c}\mathcal{D}c \, \exp(-S_{gf}[q] - S_{FP}[q, \overline{c}, c]) \text{ mit } , \tag{3.45}$$

$$S_{gf}[q] = \frac{\lambda_0}{2g_0^2}(\hat{F}(q), \hat{F}(q)) \; , \tag{3.46}$$

$$S_{FP}[q, \overline{c}, c] = -(\overline{c}, \delta_c \hat{F}(q)) \; . \tag{3.47}$$

Die Eichfixierung führt zu einer BRS-Invarianz [35], [36] des Pfadintegrals. Sie spiegelt die Eichsymmetrie der Yang-Mills Wirkung wieder.

Bevor wir die Propagatoren und Vertizes diskutieren, ist ein Blick auf die Randbedingungen hilfreich. Aus der Parametrisierung (3.16) folgt:

$$0 = q_k(0, \vec{x}) \; , \qquad 0 = \tilde{q}_k(0, \vec{p}) \; , \tag{3.48}$$

$$0 = q_k(T, \vec{x}) \; , \qquad 0 = \tilde{q}_k(T, \vec{p}) \; . \tag{3.49}$$

Die mit ˜ bezeichneten Größen sind die räumlich Fouriertransformierten

$$\tilde{q}(\vec{p}) = \sum_{\vec{x}} \exp(-i\vec{x}\vec{p}) q(\vec{x}) \; . \tag{3.50}$$

Die Gleichung (3.42) ist äquivalent zu

$$d^* q(x) = D^*_\mu q_\mu(x) \; , \tag{3.51}$$

wenn wir das Feld q auf $x = (-1, \vec{x})$ und $(T, \vec{x})$ für die $\mu = 0$ Komponente erweitern und geeignete Randbedingungen stellen. Es sei betont, daß die neuen Komponenten keine physikalische Relevanz besitzen, sie erleichtern lediglich die Formulierung der Randbedingungen. Der Operator D^*_μ ist mit dem erweiterten Feld q für alle $x \in \Lambda$ erklärt.

Wir erhalten somit im Impulsraum die Randbedingungen[2]

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{0,\sigma}(0, \vec{p}) &= \tilde{q}_{0,\sigma}(-1, \vec{p}) && \sigma \notin \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \text{ oder } \vec{p} \neq \vec{0} \; , \\ \tilde{q}_{0,\sigma}(-1, \vec{p}) &= 0 && \sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}} \text{ und } \vec{p} = \vec{0} \; , \\ \tilde{q}_{0,\sigma}(T, \vec{p}) &= \tilde{q}_{0,\sigma}(T-1, \vec{p}) \; . \end{aligned} \tag{3.52}$$

[2]In diesem Kapitel steht $\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ für σ mit $\mathrm{T}^\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ = Cartan'sche Subalgebra.

Die Randbedingungen für die Ghostfelder sind festgelegt durch die Darstellung der Determinate $L(U)$ als Funktionalintegral über c und $\overline{c}$ und durch Gleichung (3.32) und (3.33). Weil die nicht verschwindenden Moden von $L(U)$, über die zu integrieren ist, die Eichmoden von der Form $q_\mu = D_\mu \omega$ sind, ergeben sich mit den Randbedingungen an q die Randbedingungen $D_\mu c_\sigma(x) = q_{\mu,\sigma}(x)$ für c. Die Randbedingungen können durch ein auf $x = (-1, \vec{x})$ erweitertes Ghostfeld bequem formuliert werden

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{c}_\sigma(-1,\vec{p}) \quad && \sigma \notin \mathcal{C}_\mathcal{N} \text{ oder } \vec{p} \neq \vec{0}\ , \\ 0 &= \tilde{c}_\sigma(0,\vec{p}) \quad && \sigma \notin \mathcal{C}_\mathcal{N} \text{ oder } \vec{p} \neq \vec{0}\ , \\ \tilde{c}_\sigma(0,\vec{p}) &= \tilde{c}_\sigma(-1,\vec{p}) \quad && \sigma \in \mathcal{C}_\mathcal{N} \text{ und } \vec{p} = \vec{0}\ , \\ 0 &= \tilde{c}_\sigma(T,\vec{p})\ , \end{aligned} \tag{3.53}$$

wobei die $\overline{c}$ Komponenten die gleichen Randbedingungen erfüllen.

An dieser Stelle sind alle Beiträge für die Störungsentwicklung zu beliebiger Ordnung im Schrödinger-Funktional definiert. Teilen wir die Wirkung $S_{YM}[U]$ aus Gleichung (2.23) in einen von q unabhängigen Teil S_B, der Wirkung des Hintergrundfeldes, und in einen von q abhängigen Teil $S_{YM}[q]$ auf, ergibt sich

$$\mathcal{Z}(\eta, L) = \int \mathcal{D}q_\mu(x)\mathcal{D}\overline{c}(x)\mathcal{D}c(x)\exp(-S[q,\overline{c},c])\ , \tag{3.54}$$

$$S[q,\overline{c},c] = S_B + S_{YM}[q] + S_m[q] + S_{FP}[q,\overline{c},c] + S_{gf}[q]\ , \tag{3.55}$$

wobei die Integration von q über die modifizierte Menge $\tilde{\Lambda}$ und die der Grassmann-Variablen $\overline{c}$ und c über Λ (siehe Gleichung 2.17) mit den diskutierten Randbedingungen auszuführen ist.

Die Anteile der Wirkung S_X mit $X \in \{m, YM, FP, B, gf\}$ mit Ordnung n in g_0 werden bezeichnet mit $S_X^{(n)}$

$$S = \sum_{X,n} g_0^n\, S_X^{(n)}\ . \tag{3.56}$$

Zu der Bestimmung der Koeffizienten $c_t^{(n)}$ mit $n > 0$ muß die Abhängigkeit von ihnen explizit gemacht werden. Der Koeffizient $c_t^{(0)} = 1$ ist nicht aufgeführt. Für den Yang-Mills Teil der Wirkung S_{YM} definieren wir

$$S_{YM}^{(n)} = S_{YM}^{(n,0)} + \sum_{1 \leq 2k \leq n+1} c_t^{(k)} S_{YM}^{(n,k)}\ . \tag{3.57}$$

Aufgrund der Relation

$$S_B = \frac{1}{g_0^2} S_B^{(-2)}(1 + \frac{2a}{T}(g_0^2 c_t^{(1)} + g_0^4 c_t^{(2)})) + O(g_0^4) \tag{3.58}$$

aus Kapitel (3.3.4) ist die Abhängigkeit der Wirkung des Hintergrundfeldes S_B von $c_t^{(n)}$ trivial

$$S_B^{(2n)} = c_t^{(n+1)} \frac{2a}{T} S_B^{(-2)} \quad n \geq 0 \ . \tag{3.59}$$

Aus $S_{YM}^{(0,0)} + S_{gf}^{(0)}$ wird der Gluonpropagator und aus $S_{FP}^{(0)}$ der Ghostpropagator bestimmt. Die Vertizes sind durch $S_{YM}^{(n)}$, $S_{FP}^{(n)}$ und $S_m^{(n)}$ für $n > 0$ gegeben. Die Wirkung $S_B^{(-2)}$ ist analytisch zu berechnen. Die Terme bis zu Zweiter Ordnung in g_0 sind im Folgenden für die Zwei Loop Entwicklung der Kopplung g_{SF} zusammengefaßt. Die Gitterkonstante a ist für die folgenden Kapitel gleich eins gesetzt.

3.1 Störungsentwicklung zu zweiter Ordnung

Die einzelnen nichtverschwindenden Beiträge bis zur Ordnung g_0^2 sind

$$S^{(-2)} = S_B^{(-2)} \ , \tag{3.60}$$

$$S^{(0)} = S_{YM}^{(0,0)} + S_{FP}^{(0)} + S_{gf}^{(0)} + S_B^{(0)} \ , \tag{3.61}$$

$$S^{(1)} = c_t^{(1)} S_{YM}^{(1,1)} + S_{YM}^{(1,0)} + S_{FP}^{(1)} \ , \tag{3.62}$$

$$S^{(2)} = c_t^{(1)} S_{YM}^{(2,1)} + S_{YM}^{(2,0)} + S_{FP}^{(2)} + S_m^{(2)} + S_B^{(2)} \ . \tag{3.63}$$

Die Anzahl der Gluon- und Ghostlinien der Vertizes sind in Tabelle 3.1 angegeben. Die Beiträge der Entwicklung der effektiven Wirkung

$$\Gamma = g_0^{-2} \Gamma_0 + \Gamma_1 + g_0^2 \Gamma_2 + O(g_0^4) \tag{3.64}$$

sind durch die Kontraktion $\langle \rangle_0$ bezüglich der Gluonpropagatoren H und Ghostpropagatoren G ausgedrückt

$$\Gamma_0 = S^{(-2)} = S_B^{(-2)} \ , \tag{3.65}$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2} \ln \det(H) + \ln \det(G) \ , \tag{3.66}$$

$$\Gamma_2 = \left\langle S^{(2)} - \frac{1}{2} S^{(1)} S^{(1)} \right\rangle_0 \ . \tag{3.67}$$

Die mit Γ_0 normierten Beiträge zu der Kopplung g_{SF}^2 bezeichnen wir mit

$$m_1 = -\frac{\Gamma_1'}{\Gamma_0'} \ , \tag{3.68}$$

$$m_2 = -\frac{\Gamma_2'}{\Gamma_0'} \ . \tag{3.69}$$

Vertex	Gluonlinen	Ghostlinen
$S_{YM}^{(1,1)}$	1	0
$S_{YM}^{(2,1)}$	2	0
$S_{YM}^{(1,0)}$	3	0
$S_{YM}^{(2,0)}$	4	0
$S_{FP}^{(1)}$	1	2
$S_{FP}^{(2)}$	2	2
$S_{m}^{(2)}$	2	0

Tabelle 3.1: Die Anzahl der Gluon- und Ghostlinien der Vertizes.

Die Entwicklung der Kopplung ist

$$g_{SF}^2(L) = g_0^2 + m_1(L) g_0^4 + \left\{ m_2(L) + m_1(L)^2 \right\} g_0^6 + O(g_0^8) \ . \tag{3.70}$$

Die Abhängigkeit von den Koeffizienten $c_t^{(1)}$ und $c_t^{(2)}$ wird durch

$$m_1(L) = m_1^a(L) + c_t^{(1)} m_1^b(L) \ , \tag{3.71}$$

$$m_2(L) = m_2^a(L) + c_t^{(1)} m_2^b(L) + \left[c_t^{(1)} \right]^2 m_2^c(L) + c_t^{(2)} m_2^d(L) \tag{3.72}$$

parametrisiert, wobei die Koeffizienten m_i^X gegeben sind durch

$$m_1^a = \frac{1}{\Gamma_0'} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{2} \ln \det(H) - \ln \det(G) \Big|_{\eta=0} \ , \qquad m_1^b = -\frac{2}{L} \ , \tag{3.73}$$

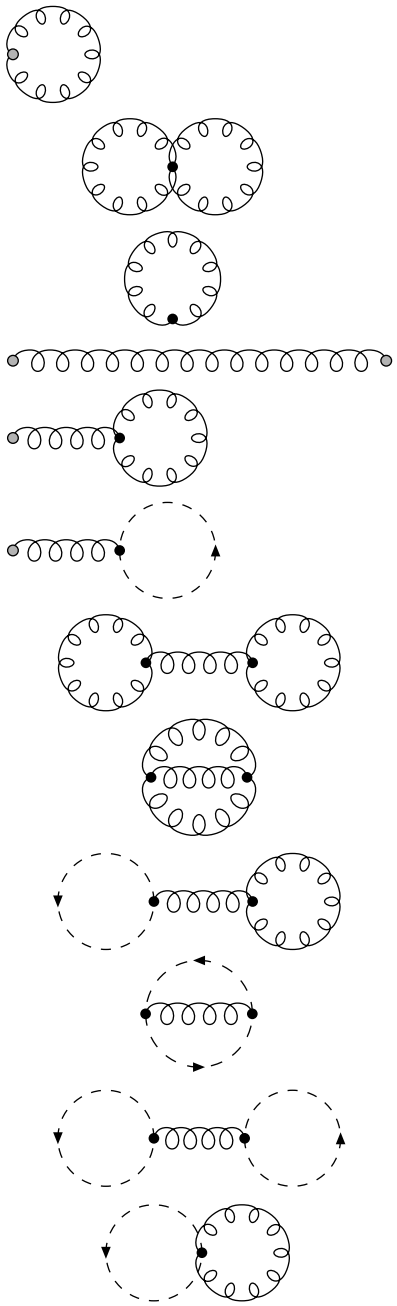
$$m_2^a = -\frac{1}{\Gamma_0'} \left\{ D_2' + D_3' + D_8' + D_9' + D_{10}' + D_{11}' + D_{12}' + D_{13}' \right\} \ , \tag{3.74}$$

$$m_2^b = -\frac{D_1' + D_6' + D_7'}{\Gamma_0'} \ , \qquad m_2^c = -\frac{D_5'}{\Gamma_0'} \ , \qquad m_2^d = -\frac{2}{L} \ . \tag{3.75}$$

Hier ist die Relation aus Gleichung (3.59) in m_1^b und m_2^d berücksichtigt worden. Die Graphen zu den Feynmandiagrammen D_i sind in Abbildung 3.1 angegeben.

3.2 Die Propagatoren

Die quadratischen Formen der Felder in $S^{(0)}$, der Wirkung Nullter Ordnung in g_0, definieren die inversen Propagatoren.



$$D_1 = S_{YM}^{(2,1)}$$

$$D_2 = S_{YM}^{(2,0)}$$

$$D_3 = S_m^{(2)}$$

$$D_5 = -\tfrac{1}{2} S_{YM}^{(1,1)} S_{YM}^{(1,1)}$$

$$D_6 = -S_{YM}^{(1,1)} S_{YM}^{(1,0)}$$

$$D_7 = -S_{YM}^{(1,1)} S_{FP}^{(1)}$$

$$D_8 = -\tfrac{1}{2} S_{YM}^{(1,0)} S_{YM}^{(1,0)}$$

$$D_9 = -\tfrac{1}{2} \left[S_{YM}^{(1,0)} \right]^2 \text{ Big Mac}$$

$$D_{10} = -S_{YM}^{(1,0)} S_{FP}^{(1)}$$

$$D_{11} = -\tfrac{1}{2} \left[S_{FP}^{(1)} \right]^2 \text{ Big Mac}$$

$$D_{12} = -\tfrac{1}{2} S_{FP}^{(1)} S_{FP}^{(1)}$$

$$D_{13} = S_{FP}^{(2)}$$

Abbildung 3.1: Die Feynmangraphen: Gestrichelte Linien symbolisieren Ghostpropagatoren, gewundene Gluonpropagatoren. Ausgefüllte Kreise stellen Vertizes dar. Diagramme mit Randfeldvertizes, die durch graue Kreise gekennzeichnet sind, liefern einen Beitrag zu m_2^b oder m_2^c.

Für den Gluonpropagator ist dies die Wirkung $S_{YM}^{(0,0)} + S_{gf}^{(0)}$ und für den Ghostpropagator $S_{FP}^{(0)}$. Wir definieren

$$\langle q_{\mu,\sigma}(x) q_\nu{}^\sigma(y)\rangle_0 = H_{\mu\nu,\sigma}{}^\sigma(x,y) \ , \tag{3.76}$$

$$\langle c_\sigma(x)\overline{c}^\sigma(y)\rangle_0 = G_\sigma{}^\sigma(x,y) \ . \tag{3.77}$$

Beide Propagatoren, der Gluon- und der Ghostpropagator, sind diagonal in der Root-Basis (Anhang A und B) der $su(N)$. Daher ist im Folgenden der Farbraumindex unterdrückt.

Der Gluonoperator setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen

$$(\triangle_1 q)_\mu(x) = (\hat{\triangle}_1 q)_\mu(x) - (\lambda_0 dd^* q)_\mu(x) \ , \tag{3.78}$$

wobei sich aus der Entwicklung der Wirkung $S_{YM}^{(0,0)}$ für einen konstanten und abelschen Gluonfeldstärketensor $G_{\mu\nu}$ ergibt

$$\begin{aligned}(\hat{\triangle}_1 q)_\mu(x) = \sum_{\nu\neq\mu} \{&\cosh(G_{\mu\nu}) \star [-D_\nu^* D_\nu q_\mu(x) + D_\nu^* D_\mu q_\nu(x)] \\ &- \sinh(G_{\mu\nu}) \star [2q_\nu(x) + (D_\nu^* + D_\nu) q_\mu(x) + D_\nu^* D_\mu q_\nu(x)]\} \ .\end{aligned} \tag{3.79}$$

Das $\star$ Produkt ist im Anhang (D.1) definiert. Für verschwindendes Hintergrundfeld geht der Operator in den bekannten Ausdruck[3]

$$(\hat{\triangle}_1 q)_\mu(x) = \sum_{\nu\neq\mu} \{-\partial_\nu^* \partial_\nu q_\mu(x) + \partial_\nu^* \partial_\mu q_\nu(x)\}$$

über. Die mit dem linearen Operator assoziierte Matrix ist definiert durch

$$\sum_{\nu,t',\vec{y}} \triangle_{1\mu\nu}(t,t',\vec{x}-\vec{y}) q_\nu(t',\vec{y}) = (\triangle_1 q)_\mu(x) \ . \tag{3.80}$$

Die räumliche Translationsinvarianz ist in der Definition berücksichtigt. Bei der Transformation in den Impulsraum muß der natürliche Aufpunkt der Felder berücksichtigt werden, um einen reellen Operator zu erhalten, er liegt in der Mitte zwischen den Endpunkten der Links. Durch eine Phasentransformation werden die Felder auf das Gitter Λ transportiert

$$P_\mu(t,\vec{p}) = \begin{cases} i & \text{für } \mu = 0 \ , \\ \exp(\frac{-i}{2}(p_\mu + \beta_\mu(t))) & \text{sonst} \ . \end{cases} \tag{3.81}$$

Die Funktion $\beta_\mu(t)$ ist im Anhang (C) definiert. Mit Gleichung (C.10) wird die Definition der Phasentransformation (2.18) als Paralleltransporter für

[3] ∂_k und ∂_k^* sind gleich D_k und D_k^* für verschwindendes Hintergrundfeld.

einen halben Gitterabstand physikalisch plausibel. Die Phasenverschiebung und die gewöhnliche Fouriertransformation (Gleichung 3.50) liefert uns die Matrix des Gluonoperators im Impulsraum

$$\tilde{\triangle}_{1,\mu\nu}(t,t',\vec{p}) = \sum_{\vec{x}} P_\mu(t,\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \triangle_{1,\mu\nu}(t,t',\vec{x}) P_\nu(t',-\vec{p}) \ . \tag{3.82}$$

Für die fourier- und phasentransformierten Größen verwenden wir die Bezeichnung ˜. Die Fouriertransformation wurde bisher nur in Kapitel (3) für die Randbedingungen an q (Gleichung 3.48, 3.49 und 3.52) verwendet. Die Phasenverschiebung wirkt in diesen Gleichungen trivial. Die simultane Verwendung der ˜ für fouriertransformierte skalare Felder, wie den Ghostfeldern, führt zu keinen Bezeichnungskonflikten.

Mit den im Anhang (D.2) explizit angegebenen, von $\vec{p}$ abhängigen, reellen Matrizen A und B ist die Gleichung (3.82) zu schreiben als

$$\tilde{\triangle}_{1,\mu\nu}(t,t',\vec{p}) = A_{\mu\nu}(t)\delta_{t,t'+1} + B_{\mu\nu}(t)\delta_{t,t'} + A_{\nu\mu}(t-1)\delta_{t+1,t'} \ . \tag{3.83}$$

Der Propagator im Ortsraum erfüllt wegen der Phasenverschiebung nicht die Relationen einer reellen fouriertransformierten Funktion, an Stelle dessen aber die in Kapitel (3.4) diskutierte CP-Symmetrie.

Der Ghostoperator und die assoziierte Matrix ergeben sich mit $S_{FP}^{(0)}$ (siehe Kapitel 3.3.3) zu

$$(\triangle_0 c)(x) = -d^* dc(x) \ , \tag{3.84}$$

$$= \sum_{t',\vec{y}} \tilde{\triangle}_0(t,t',\vec{x}-\vec{y}) c(t',\vec{y}) \ . \tag{3.85}$$

Die Matrix ist im Impulsraum durch

$$\tilde{\triangle}_0(t,t',\vec{p}) = \sum_{\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{x}} \triangle_0(t,t',\vec{x}) \tag{3.86}$$

$$= -\delta_{t,t'+1} + 8 - 2\sum_k \cos(p_k + \beta_k(t))\delta_{t,t'} - \delta_{t+1,t'} \tag{3.87}$$

gegeben. Die Propagatoren $\tilde{H}$ und $\tilde{G}$ im Fourierraum erfüllen die Gleichungen

$$\delta_{t,\hat{t}}\delta_{\mu,\nu} = \sum_{t',\rho} \tilde{\triangle}_{1,\mu\rho}(t,t',\vec{p}) \tilde{H}_{\rho\nu}(t',\hat{t},\vec{p}) \ , \tag{3.88}$$

$$\delta_{t,\hat{t}} = \sum_{t'} \tilde{\triangle}_0(t,t',\vec{p}) \tilde{G}(t',\hat{t},\vec{p}) \ . \tag{3.89}$$

Da die Operatoren und Randbedingungen im Impulsraum diagonal sind, gilt dies auch für die Propagatoren. Die Impulsabhängigkeit wird daher in den folgenden Formeln unterdrückt.

Die $\vec{p} = \vec{0}$, $\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ Komponenten der Propagatoren können analytisch gelöst werden

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(t,t',\vec{0}) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_0}\left(1+\min(t,t')\right) & \text{für} \quad \mu=\nu=0 \\ \frac{1}{c_1}\left(\min(t,t') - \frac{tt'}{T}\right) & \text{für} \quad \mu=\nu=i \\ 0 & \text{für} \quad \mu\neq\nu \end{cases} , \tag{3.90}$$

$$\tilde{G}(t,t',\vec{0}) = T - \max(t,t') \ . \tag{3.91}$$

Der in Anhang (D.1) definierte, von σ und η abhängige Koeffizient c_1 ergibt sich aus dem in Gleichung (3.79) verwendeten $\star$ Produkt. Die Lösungen erfüllen die Randbedingungen aus den Gleichungen (3.48), (3.49), (3.52) und (3.53). Davon sind differenziert nach η nur $\tilde{H}'_{kk}(t,t',\vec{0}) = -\frac{c_1'}{c_1}\tilde{H}_{kk}(t,t',\vec{0})$ ungleich Null.

Für alle anderen Komponenten der Propagatoren wird eine Rekursionsformel in der Zeit verwendet. Sie erlaubt es, den numerischen Aufwand der Inversionen von Gleichungen (3.83) und (3.87) von der Ordnung T^3 auf T zu senken. Die Methode ist in [37] und [16] allgemein ausgearbeitet. Hier wird nur der gluonische Teil diskutiert, die Formeln für den Ghostpropagator folgen trivial.

Die Methode basiert sowohl auf der Symmetrie des Differenzenoperators

$$\tilde{\triangle}_{1,\mu\nu}(t,t') = \tilde{\triangle}_{1,\nu\mu}(t',t) \tag{3.92}$$

als auch darauf, daß die Randbedingungen bei $x^0 = 0, T$ gesetzt sind. Wir werden die Lösung aus den forward ψ^f und backward ψ^b Lösungen der homogenen Gleichung[4] konstruieren. Sie genügen den Relationen

$$\psi^f_\mu(t+1) = -A(t)^{-1}_{\mu\rho}\{B(t)_{\rho\nu}\psi^f_\nu(t) + A(t-1)(t)^t_{\rho\nu}\psi^f_\nu(t-1)\} \ , \tag{3.93}$$

$$\psi^b_\mu(t-1) = -A(t-1)^{t-1}_{\mu\rho}\{B(t)_{\rho\nu}\psi^b_\nu(t) + A(t)_{\rho\nu}\psi^b_\nu(t+1)\} \ . \tag{3.94}$$

Die Randbedingungen des q-Feldes in Gleichung (3.48), (3.49) und (3.52) können als Randbedingungen an die homogenen Lösungen ausgedrückt werden. Eine Wahl ist

$$\psi^f_{0a}(-1) = \delta_{0,a} \ , \tag{3.95}$$

$$\psi^f_{\rho a}(0) = \delta_{0,\rho}\delta_{0,a} \ , \tag{3.96}$$

$$\psi^f_{ka}(1) = \delta_{k,a} \ , \tag{3.97}$$

$$\psi^b_{\rho a}(T) = \delta_{0,\rho}\delta_{0,a} \ , \tag{3.98}$$

$$\psi^b_{\rho a}(T-1) = \delta_{\rho,a} \ . \tag{3.99}$$

[4] Rechte Seite der Gleichung (3.88) gleich Null.

Die verschiedenen Lösungen zu den Randbedingungen werden mit lateinischen Buchstaben a und b indiziert. Entsprechend dem 4 dimensionalen Raum existieren 4 unabhängige Lösungen der vektorwertigen Größen ψ^f und ψ^b. Der Propagator kann aus diesen konstruiert werden

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\rho\nu}(t,t') &= \psi^f_{\rho a}(t)\hat{N}^f_a(t') \quad \text{für} \quad t \leq t' \ , \\ \tilde{H}_{\rho\nu}(t,t') &= \psi^b_{\rho a}(t)\hat{N}^b_a(t') \quad \text{für} \quad t \geq t' \ . \end{aligned} \tag{3.100}$$

Die Gleichung (3.92) impliziert für den Gluonpropagator $\tilde{H}$

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(t,t') = \tilde{H}_{\nu\mu}(t',t) \ . \tag{3.101}$$

Daraus folgt mit neuen Konstanten N_{ab}

$$\tilde{H}_{\rho\nu}(t,t') = \begin{cases} \psi^f_{\rho a}(t)N_{ab}\psi^b_{\nu b}(t') & \text{für} \quad t \leq t' \ , \\ \psi^b_{\rho a}(t)N_{ba}\psi^f_{\nu b}(t') & \text{für} \quad t \geq t' \ . \end{cases} \tag{3.102}$$

Die N_{ab} sind so konstruiert, daß sie zeitlich konstant sind. Dies ist leicht explizit zu zeigen. Die Auswertung der Definitionsgleichung für den Propagator für $t = t'$ ergibt

$$N^{-1} = \psi^b_{\rho a}(t+1)A_{\nu\rho}(t)\psi^f_{\nu b}(t) - \psi^b_{\rho a}(t)A_{\rho\nu}(t)\psi^f_{\nu b}(t+1) \ . \tag{3.103}$$

Bei der Herleitung wurde vorausgesetzt, daß der Ausdruck

$$\psi^f_{\rho a}(t)A_{\rho\nu}(t)\psi^f_{\nu b}(t+1) \tag{3.104}$$

für alle t symmetrisch in a und b ist. Dies läßt sich aus den Randbedingungen in den Gleichungen (3.95) bis (3.99) folgern. Äquivalent dazu ist die Symmetrie eines entsprechenden Ausdrucks für die backward Lösungen. Die Matrix N^{-1} ist am bequemsten bei $t = 0$ auszuwerten und leicht zu invertieren.

Die ebenfalls benötigte η-Ableitung der Propagatoren ist auf eine Summation mit einem Quellenterm zurückzuführen

$$\sum_{\alpha,\hat{t}} \tilde{\triangle}_{1,\mu\alpha}(t,\hat{t})\tilde{H}'_{\alpha\nu}(\hat{t},t') = -\sum_{\alpha,\hat{t}} \tilde{\triangle}'_{1,\mu\alpha}(t,\hat{t})\tilde{H}_{\alpha\nu}(\hat{t},t') \ , \tag{3.105}$$

$$\tilde{H}'_{\mu\nu}(t,t') = -\sum_{\alpha\beta,\bar{t}\hat{t}} \tilde{H}_{\mu\alpha}(t,\hat{t})\tilde{\triangle}'_{1,\alpha\beta}(\hat{t},\bar{t})\tilde{H}_{\beta\nu}(\bar{t},t') \ . \tag{3.106}$$

Eine Analyse ergibt hier, daß $\tilde{G}'_{(23)}(t,t',\vec{0}) = 0$ gilt.

Die Transformation in den Ortsraum ist durch eine Fouriertransformation und der Phasenverschiebung numerisch implementiert. Die η-Abhängigkeit der Phasenverschiebung muß für H' berücksichtigen werden

$$\begin{aligned} H'_{\mu\nu}(t,t',\vec{x}) = \frac{1}{L^3}\sum_{\vec{p}} e^{i\vec{x}\vec{p}}\Big[& P'_{\ \mu}(t,\vec{p})\tilde{H}_{\mu\nu}(t,t',\vec{p})P_\nu(t',-\vec{p}) \\ & +P_\mu(t,\vec{p})\tilde{H}'_{\mu\nu}(t,t',\vec{p})P_\nu(t',-\vec{p}) \\ & +P_\mu(t,\vec{p})\tilde{H}_{\mu\nu}(t,t',\vec{p})P'_{\ \nu}(t',-\vec{p})\Big] \ . \end{aligned} \tag{3.107}$$

Abschließend sei die Notation für die Propagatoren den folgenden Gleichungen angepaßt. Da sie diagonal im Farbraum sind, ist ein Index ausreichend. Für die Kontraktion mit den Vertizes ist es von Vorteil beide Farbraumindizes nach unten zu ziehen

$$H_{\mu\nu,\sigma}(x,y) = H_{\mu\nu,\sigma\sigma^{\mathfrak{t}}}(x,y) = g_{\sigma\sigma^{\mathfrak{t}}} H_{\mu\nu,\sigma}{}^{\sigma}(x,y) \ , \tag{3.108}$$

$$G_\sigma(x,y) = G_{\sigma\sigma^{\mathfrak{t}}}(x,y) = g_{\sigma\sigma^{\mathfrak{t}}} G_\sigma{}^{\sigma}(x,y) \ . \tag{3.109}$$

Weiterhin ist es von Vorteil, die Propagatoren für getrennte zeitliche und räumliche Argumente zu definieren. Dabei wird die räumliche Translationsinvarianz verwendet

$$H_{\mu\nu,\sigma}((t,\vec{x}),(t',\vec{y})) = H_{\mu\nu,\sigma}(t,t',\vec{x}-\vec{y}) \ , \tag{3.110}$$

$$G_\sigma((t,\vec{x}),(t',\vec{y})) = G_\sigma(t,t',\vec{x}-\vec{y}) \ . \tag{3.111}$$

Durch Inspektion der Koeffizienten der Operatoren im Anhang (D.2) ergibt sich weiter

$$H_{\mu\nu,\sigma}(t,t',\vec{x}) = \overline{H_{\nu\mu,\sigma^{\mathfrak{t}}}(t,t',\vec{x})} \ , \tag{3.112}$$

$$G_\sigma(t,t',\vec{x}) = \overline{G_{\sigma^{\mathfrak{t}}}(t,t',\vec{x})} \ . \tag{3.113}$$

Das heißt, es müssen ledigich die Hälfte der Propagatoren mit $\sigma \notin \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ berechnet werden.

3.3 Vertizes

3.3.1 Yang-Mills Vertizes

Die Entwicklung der Spur der Plaquetten in der Wilson Wirkung S_{YM} in den Feldern q wird vereinfacht durch die Formel

$$\mathrm{tr}[U_{\mu\nu}] = \mathrm{tr}\big[e^{G_{\mu\nu}} e^{-g_0(1+D_\nu)q_\mu} e^{-g_0 q_\nu} e^{g_0 q_\mu} e^{g_0(1+D_\mu)q_\nu}\big] \ . \tag{3.114}$$

Hier sind alle Ausdrücke am Ort x auszuwerten. Sie folgt aus Gleichung (3.16) und

$$(1+D_\mu)q_\nu(x) = V_\mu(x)q_\nu(x+\hat{\mu})V_\mu^{-1}(x)\ . \tag{3.115}$$

Mit Hilfe von Gleichung (3.114) kann der Gluonoperator $\triangle_1$ in Gleichung (3.79) einfach abgeleitet werden.

Die Entwicklung des Realteils (siehe Kapitel 3.4) wurde mit Hilfe von MAPLE analytisch durchgeführt und kann durch die Tensoren V ausgedrückt werden

$$\Re\mathrm{tr}[U_{\mu\nu}(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} g_0^n \sum_{\substack{\sigma_i,\mu_i,e_i \\ i=1}}^{n} V^{\substack{\sigma_1\cdots\sigma_n \\ e_1\cdots e_n \\ \mu_1\cdots\mu_n}}(t,\mu,\nu)\prod_{k=1}^{n} q_{\mu_i,\sigma_i}(x+e_i)\ . \tag{3.116}$$

V ist unabhängig von $\vec{x}$ (Translationsinvarianz) und symmetrisch in den Indexzeilen. Nur für $\mu_i \in \{\mu,\nu\}$ und $e_i \in \{\hat{\mu},0,\hat{\nu}\}$ hat V nicht verschwindende Einträge. Die kubische Symmetrie liefert weitere Relationen zwischen den Komponenten von V.

Für die analytische Berechnung einiger Diagramme wird $S_{YM}^{(1,1)}$ benötigt. Es ergibt sich

$$S_{YM}^{(1,1)} = \sum_{k,\vec{x}} C_{(1,a)}\Big[q_{k,\varsigma}(1,\vec{x}) - q_{k,\varsigma}(T-1,\vec{x})\Big]\ , \tag{3.117}$$

$$C_{(1,a)} = \begin{cases} 2[\sin(\gamma)+\sin(\gamma/2)] & \text{für } SU(3) \\ 2\sin(\gamma/2) & \text{für } SU(2) \end{cases}\ , \tag{3.118}$$

$$\varsigma = 1 \text{ für } SU(3) \text{ und } \varsigma = 0 \text{ für } SU(2)\ . \tag{3.119}$$

Der Randfeldvertex mit einer Gluonlinie trägt demnach nur das neutrale Gluon ς.

3.3.2 Entwicklung des Maßes

Wie aus der Herleitung von S_m in Gleichung (3.28) hervorgeht, ist

$$S_m[q] = \sum_{(x,\mu)\in\tilde{\Lambda}} S_m(g_0 q_\mu(x)) \tag{3.120}$$

$$S_m(q_\mu(x)) = \mathrm{tr}\log(E(\mathcal{A}d(g_0 q_\mu(x)))) \tag{3.121}$$

$$= -\frac{g_0^2}{24}\mathrm{tr}(\mathcal{A}d^2(q_\mu(x))) + O(g_0^4) \tag{3.122}$$

$$S_m^{(2)}(q_\mu(x)) = \frac{1}{8}\sum_{\sigma} q_{\mu,\sigma}(x)q_\mu^\sigma(x) \tag{3.123}$$

für die $SU(3)$. Für die $SU(2)$ ist der Faktor 1/8 durch 1/12 zu ersetzen.

3.3.3 Entwicklung des Fadeev-Popov Termes

Der Fadeev-Popov Term in Gleichung (3.47) enthält die Variation δ_X aus Gleichung (3.40), die nun auch entsprechend auf $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$ wirken soll

$$S_{FP}[q,\overline{c},c] = -(\overline{c},\delta_c d^* q) \ . \tag{3.124}$$

Mit der Entwicklung von $\delta_c q_\mu$ in g_0

$$\begin{aligned} \delta_c q_\mu = \ & D_\mu c + g_0 \mathcal{A}d(q_\mu)c \\ & + \left[\frac{g_0}{2}\mathcal{A}d(q_\mu) + \frac{g_0^2}{12}(\mathcal{A}d(q_\mu))^2 + O(g_0^3)\right] D_\mu c \end{aligned} \tag{3.125}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} S_{FP}[q,c] = & -(\overline{c}, D_\mu^* D_\mu c) + g_0(D_\mu \overline{c}, \mathcal{A}d(q_\mu)(1+\frac{1}{2}D_\mu)c) \\ & + \frac{g_0^2}{12}(D_\mu\overline{c}, \mathcal{A}d^2(q_\mu)D_\mu c) + O(g_0^3) \ . \end{aligned} \tag{3.126}$$

Mit den Strukturkonstanten $f^{\sigma\tau\rho}$ (siehe Anhang A.1 und B) und den Konstanten

$$e^{\sigma\epsilon\tau\rho} = -2\mathrm{tr}(\mathrm{T}^\tau \mathcal{A}d(\mathrm{T}^\sigma)\mathcal{A}d(\mathrm{T}^\epsilon)\mathrm{T}^\rho) \tag{3.127}$$

sind die Beiträge der einzelnen Ordnungen

$$S_{FP}^{(0)}[c] = \sum_{x,\mu,\sigma} \overline{c}_\sigma(x) D_\mu^* D_\mu c^\sigma(x) \ , \tag{3.128}$$

$$S_{FP}^{(1)}[q,c] = -\sum_{\substack{x,\mu,\\ \tau\rho\sigma}} f^{\tau\rho\sigma} D_\mu \overline{c}_\tau(x) q_{\mu\sigma}(x)(1+\frac{1}{2}D_\mu)c_\rho(x) \ , \tag{3.129}$$

$$S_{FP}^{(2)}[q,c] = \frac{1}{12}\sum_{\substack{x,\mu,\\ \sigma\epsilon\tau\rho}} e^{\sigma\epsilon\tau\rho} D_\mu \overline{c}_\tau(x) q_{\mu\sigma}(x) q_{\mu\epsilon}(x) D_\mu c_\rho(x) \ . \tag{3.130}$$

3.3.4 Entwicklung des Hintergrundfeldes

Die Wirkung des Hintergrundfeldes S_B, proportional zu $1/g_0^2$, ist

$$S_B^{(-2)} = \sum_{x,\mu\nu} \mathrm{tr}(1 - V_{\mu\nu}(x)) \tag{3.131}$$

$$= 12\frac{TL^3}{a^4}\sum_{\alpha=1}^{N} \sin^2\left(\frac{1}{2TL}(\phi_\alpha - \phi'_\alpha)\right) \ \text{für } SU(N) \tag{3.132}$$

$$= 12\frac{TL^3}{a^4}\begin{cases} \sin^2(\gamma/2) + 2\sin^2(\gamma/4) & \text{für } SU(3) \\ 1-\cos(\gamma/2) & \text{für } SU(2) \end{cases} \ . \tag{3.133}$$

Für die Ableitung nach η ergibt sich

$$S_B^{(-2)'} = 12\omega_1 L^2 \begin{cases} (\sin(\gamma) + \sin(\gamma/2)) & \text{für } SU(3)\ , \\ 2\sin(\gamma/2) & \text{für } SU(2)\ . \end{cases} \tag{3.134}$$

Da die Plaquetten des Hintergrundfeldes $V_{\mu\nu}(x)$ von x unabhängig sind und der Verbesserungskoeffizient c_t zwei Zeitebenen (bei $t = 0, T$) gewichtet, folgt

$$S_B = \frac{1}{g_0^2}\left[1 + \frac{2a}{T}(g_0^2 c_t^{(1)} + g_0^4 c_t^{(2)} + \ldots)\right] S_B^{(-2)}\ , \tag{3.135}$$

$$S_B' = \frac{1}{g_0^2}\left[1 + \frac{2a}{T}(g_0^2 c_t^{(1)} + g_0^4 c_t^{(2)} + \ldots)\right] S_B^{(-2)'}\ . \tag{3.136}$$

Die Wirkung $S_B^{(-2)}$ ist die klassische Gitterwirkung. Ein Vergleich mit der klassischen Kontinuumswirkung[5]

$$S_B^{(-2),cont} = \frac{1}{2}\int d^4x\ \mathrm{tr}(G_{\mu\nu}(x)G_{\mu\nu}(x)) \tag{3.137}$$

$$= 3\frac{L}{T}\sum_{\alpha=1}^{N}(\phi_\alpha - \phi'_\alpha)^2 \tag{3.138}$$

zeigt

$$S_B^{(-2),cont} = S_B^{(-2)} + O\left(\frac{a^4}{T^2L^2}\right) \tag{3.139}$$

eine Konvergenz der Ordnung $O(a^4)$. Für andere Hintergrundfelder (z.B. selbstduale Felder) ist lediglich eine Konvergenz von $O(a^2)$ zu finden. Die konstanten abelschen Hintergrundfelder führen zu einem günstigen Kontinuumsverhalten, nicht nur in der klassischen Approximation. Dies hat, unter anderem, die ALPHA Kollaboration bewogen, konstante abelsche Hintergrundfelder zu wählen.

3.4 Die Symmetrien

Die Symmetrien des Schrödinger-Funktionals können zu der Reduktion der Anzahl der zu berechnenden Ausdrücke verwendet werden. Die Poincarésymmetrie des Schrödinger-Funktionals im Kontinuum ist durch die Randbedingungen gebrochen. Es verbleibt die Drehgruppe $O(3)$ und Translationsinvarianz im Raum. Die C, P und T Invarianzen der QCD reduzieren sich auf eine CP und eine modifizierte T Invarianz.

[5] Das Hintergrundfeld im Kontinuum entspricht $B_\mu(t)$. Es ist jedoch für $0 \leq t \leq T$ definiert. Entsprechend ist $G_{\mu\nu}$ im Kontinuum konstant und gleich dem Ausdruck auf dem Gitter.

Die Symmetrien werden im Folgenden in der Gittertheorie anhand des Termes

$$I = \sum_{\substack{\mu\nu\alpha\beta \\ tt',\vec{x}\vec{y}}} \langle \mathrm{tr}(U_{\mu\nu}(t,\vec{x}))\mathrm{tr}(U_{\alpha\beta}(t',\vec{y}))\rangle \tag{3.140}$$

diskutiert. Dieser Ausdruck ist als typisches Beispiel zu betrachten, insbesondere treten Teile dieses Termes in dem numerisch aufwendigsten Diagramm D_9 auf, daher ist I von besonderem Interesse.

Durch die Gitterregularisierung ist die Translationsinvarianz im Raum beschränkt auf Vielfache des Gitterabstandes a. Sie erlaubt die räumlichen Summationen von n-fach Summen auf $(n-1)$-fach Summen zu reduzieren

$$I = L^3 \sum_{\substack{\mu\nu\alpha\beta \\ tt',\vec{x}}} \left\langle \mathrm{tr}(U_{\mu\nu}(t,\vec{x}))\mathrm{tr}(U_{\alpha\beta}(t',\vec{0}))\right\rangle \ . \tag{3.141}$$

Die Summe über t, t' ist wegen der Symmetrie der Summanden unter Austausch von t und t' mit einem geeigneten Gewicht $w_T^{\mu\nu\alpha\beta}(t,t')$ auf $t \leq t'$ zu beschränken

$$I = L^3 \sum_{\substack{\mu\nu\alpha\beta \\ t\leq t',\vec{x}}} w_T^{\mu\nu\alpha\beta}(t,t') \left\langle \mathrm{tr}(U_{\mu\nu}(t,\vec{x}))\mathrm{tr}(U_{\alpha\beta}(t',\vec{0}))\right\rangle \ . \tag{3.142}$$

Wegen $U_{\mu\nu}(x) = U_{\nu\mu}^\dagger$ gilt weiter

$$I = 4L^3 \sum_{\substack{\mu<\nu\alpha<\beta \\ t\leq t',\vec{x}}} w_T^{\mu\nu\alpha\beta}(t,t') \left\langle \Re\mathrm{tr}(U_{\mu\nu}(t,\vec{x}))\Re\mathrm{tr}(U_{\alpha\beta}(t',\vec{0}))\right\rangle \ . \tag{3.143}$$

Das Gitter reduziert die $O(3)$ Gruppe auf die kubische Gruppe. Diese Symmetrie kann zu der Reduktion der Summe über $\vec{x}$ mit einem geeigneten Gewicht verwendet werden. Dabei reduziert sich die Anzahl der Terme in der Summe asymptotisch für große L um einen Faktor 6. In der Implementation wurde stattdessen aus technischen Gründen die Summe über $\mu < \nu, \alpha < \beta$ von 36 Terme auf 8 Terme reduziert. Dazu führen wir ein

$$\begin{aligned} K = \{&(0101),(0102),(0112),(0123), \\ &(1201),(2301),(1212),(1223)\} \ , \end{aligned} \tag{3.144}$$

$$w_K^{\mu\nu\alpha\beta} = \begin{cases} 12 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (0101) \ , \\ 24 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (0102) \ , \\ 24 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (0112) \ , \\ 12 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (0123) \ , \\ 24 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (1201) \ , \\ 12 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (2301) \ , \\ 12 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (1212) \ , \\ 24 \text{ für } (\mu\nu\alpha\beta) = (1223) \ . \end{cases} \tag{3.145}$$

Durch Anwendung der kubischen Gruppe, also Permutationen in den räumlichen Indizes, können aus der Menge K alle 36 Indexkombinationen $(\mu\nu\alpha\beta)$ generiert werden. Wir erhalten

$$I = L^3 \sum_{\substack{(\mu\nu\alpha\beta)\in K \\ t\leq t',\vec{x}}} w_T^{\mu\nu\alpha\beta}(t,t') w_K^{\mu\nu\alpha\beta} \left\langle \Re\mathrm{tr}(U_{\mu\nu}(t,\vec{x}))\Re\mathrm{tr}(U_{\alpha\beta}(t',\vec{0})) \right\rangle \ . \quad (3.146)$$

Eine CP Transformation wirkt durch[6]

$$U_0(t,\vec{x}) \overset{CP}{\to} U_0^*(t,-\vec{x}) \ , \quad (3.147)$$

$$U_k(t,\vec{x}) \overset{CP}{\to} U_k^{-1*}(t,-\vec{x}-\hat{k}) \ , \quad (3.148)$$

$$V_k(t) \overset{CP}{\to} V_k(t) \ , \quad (3.149)$$

$$U_{0k}(t,\vec{x}) \overset{CP}{\to} U_{0k}^{-1*}(t,-\vec{x}-\hat{k}) \ , \quad (3.150)$$

$$U_{kl}(t,\vec{x}) \overset{CP}{\to} U_{kl}^*(t,-\vec{x}-\hat{k}-\hat{l}) \ . \quad (3.151)$$

Das Hintergrundfeld[7] ist invariant unter einer CP Transformation, weil es diagonal und räumlich konstant ist. Räumliche Summen über Plaquetten können mit einem geeigneten Gewicht asymptotisch um einen Faktor 2 reduziert werden. Für das im Term I auftretende Produkt zweier Plaquetten führt die CP Transformation mit einer Translation zu

$$U_{\mu\nu}(t,\vec{x})U_{\alpha\beta}(t',\vec{0}) \overset{CP}{\to} U_{\mu\nu}^{f(\mu,\nu)}(t,-\vec{x}-\overline{\mu}-\overline{\nu}+\overline{\alpha}+\overline{\beta})U_{\alpha\beta}^{f(\alpha,\beta)}(t',\vec{0}) \text{ mit} \quad (3.152)$$

$$f(\mu,\nu) = \begin{cases} * & \text{für } \mu=0 \text{ und } \nu=0 \ , \\ \mathtt{t} & \text{sonst} \ , \end{cases} \quad (3.153)$$

$$\overline{\mu} = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu=0 \ , \\ \hat{\mu} & \text{sonst} \ . \end{cases} \quad (3.154)$$

Um die reduzierte Summation über $\vec{x}$ zu formulieren führen wir

$$\overline{\Lambda} = \{\vec{x} \text{ mit } 0 \leq x_1 < (L+1)/2\} \quad (3.155)$$

ein und erhalten

$$I = L^3 \sum_{\substack{(\mu\nu\alpha\beta)\in K \\ t\leq t',\vec{x}\in\overline{\Lambda}}} w_T^{\mu\nu\alpha\beta}(t,t') w_K^{\mu\nu\alpha\beta} w_{CP}^{\mu\nu\alpha\beta}(\vec{x}) \quad (3.156)$$

$$\left\langle \Re\mathrm{tr}(U_{\mu\nu}(t,\vec{x}))\Re\mathrm{tr}(U_{\alpha\beta}(t',\vec{0})) \right\rangle \ ,$$

[6] Da $V_0(t) = 1$ ist, transformiert sich die 0-Komponente des Hintergrundfeldes trivial.
[7] und damit auch das Randfeld

wobei das Gewicht w_{CP} geeignet zu wählen ist.

Durch eine T Transformation werden die Randfelder ausgetauscht. Mit einer C Transformation und einer zentralen Konjugation Z werden die Randfelder ineinander überführt, so daß insgesamt das Schrödinger-Funktional invariant ist. Die Kombination der Transformationen T, C und Z wird mit $\hat{T}$ bezeichnet.

Die zentrale Konjugation Z ist eine Symmetrie von $SU(N)$ Eichtheorien, die in einem endlichen periodischen Raum definiert sind. Betrachten wir die drei $l = 1, 2, 3$ zeitunabhängigen $SU(N)$ wertigen Funktionen über Λ

$$Z_l(x + \hat{\mu}L) = \begin{cases} \exp(i2\pi/N) Z_l(x) & \text{für } \mu = l \ , \\ Z_l(x) & \text{sonst} \ . \end{cases} \tag{3.157}$$

Eine Realisierung der Funktionen Z_l ist durch

$$Z_l(x) = \exp\left(\frac{x^l}{L} W\right) \ \text{mit} \tag{3.158}$$

$$W_{kl} = i\frac{2\pi}{N}(\delta_{kl} - N\delta_{1k}\delta_{1l}) \ , \tag{3.159}$$

$$W = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\mathrm{T}^1 & \text{für } SU(3) \ , \\ 2\pi\mathrm{T}^0 & \text{für } SU(2) \end{cases} \tag{3.160}$$

gegeben. Die Matrix W ist ein Element aus der Lie-Algebra $su(N)$. Mit Hilfe dieser Funktionen transformieren wir die Eichfelder U

$$U_\mu(x) \xrightarrow{Z_l} U_\mu^{Z_l}(x) = Z_l(x) U_\mu(x) Z_l^{-1}(x + \hat{\mu}) \ . \tag{3.161}$$

Die zentralen Konjugationen Z_l überführen periodische Eichfelder in periodische Eichfelder und sind daher erlaubte Transformationen. Die Wirkung ist invariant unter den zentralen Konjugationen, die Randfelder jedoch nicht. Desweiteren betrachten wir eine globale Permutation P im Farbraum, die auf die Eichfelder wie die zentralen Konjugationen Z_l in Gleichung (3.161) wirken. Diese geben wir nur für die $SU(2)$ und $SU(3)$ an, da wir nur für diese Gruppen die Randfelder vollständig spezifiziert haben[8]

$$P = \begin{cases} i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } SU(2) \ , \\ e^{i\pi/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{für } SU(3) \ . \end{cases} \tag{3.162}$$

[8]Die Phasenfaktoren sind notwendig damit P ein Element der Lie-Gruppe ist.

Das durch $Z = PZ_1Z_2Z_3$ transformierte Hintergrundfeld V ist

$$V_\mu(x) \xrightarrow{Z} V_\mu^Z(x) = \begin{cases} V_\mu(x) = 1 & \text{für } \mu = 0 \ , \\ P \exp\left(\frac{-1}{L} W\right) V_\mu(x) P^{-1} & \text{für } \mu = k \ . \end{cases} \tag{3.163}$$

Die Zeitumkehr-Transformation T wirkt auf das Hintergrundfeld V und das Eichfeld U durch

$$V_\mu(t) \xrightarrow{T} V_\mu^T(t) = \begin{cases} V_\mu(t) = 1 & \text{für } \mu = 0 \ , \\ V_\mu(T-t) & \text{für } \mu = k \ , \end{cases} \tag{3.164}$$

$$U_\mu(t, \vec{x}) \xrightarrow{T} U_\mu^T(t, \vec{x}) = \begin{cases} U_\mu^{-1}(T-t-1, \vec{x}) & \text{für } \mu = 0 \ , \\ U_\mu(T-t, \vec{x}) & \text{für } \mu = k \ . \end{cases} \tag{3.165}$$

Die $\hat{T}$ Transformation ist so konstruiert, daß sie das Hintergrundfeld identisch transformiert. Auf das q-Feld wirkt $\hat{T}$ nicht trivial durch

$$q_{0,\sigma}(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{\hat{T}} q_{0,\sigma}^{\hat{T}}(x^0, \vec{x}) = f_\sigma \rho_\sigma(\vec{x}) q_{0,g(\sigma)}(T - x^0 - 1, \vec{x}) \ , \tag{3.166}$$

$$q_{k,\sigma}(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{\hat{T}} q_{k,\sigma}^{\hat{T}}(x^0, \vec{x}) = f_\sigma \rho_\sigma(\vec{x}) q_{k,g(\sigma)}(T - x^0, \vec{x}) \ , \tag{3.167}$$

mit

$$f_\sigma \mathrm{T}^{g(\sigma)} = P \mathrm{T}^{\sigma^{\mathrm{t}}} P^{-1} \ , \tag{3.168}$$

$$\rho_\sigma(\vec{x}) = \exp\left(\alpha^W(\sigma) \frac{x^1 + x^2 + x^3}{L}\right) \ . \tag{3.169}$$

Offensichtlich sind die Randbedingungen nicht invariant unter einer $\hat{T}$ Transformation. Anstelle der Gleichungen (3.32, 3.33) kann jedoch gefordert werden

$$\omega(0, \vec{x}) = \kappa \ , \qquad \omega(T, \vec{x}) = -\kappa \ , \tag{3.170}$$

wobei κ konstant und diagonal, also $\kappa \in \mathcal{C}_\mathcal{N}$ ist. Aus dem Raum aller Eichfunktionen mit $\Omega(x) = \exp(g_0 \omega(x))$ sind, so wie in $\mathcal{G}$, die konstanten und abelschen Eichfunktionen ausgeschlossen. Wie bei der Eichfixierung in Kapitel (3) ergeben sich für das erweiterte q-Feld die Randbedingungen aus der Gleichung (3.36). Es ändern sich gegenüber Gleichung (3.52) nur die Randbedingungen für die $\vec{p} = \vec{0}$ und $\sigma \in \mathcal{C}_\mathcal{N}$ Komponenten zu

$$\tilde{q}_{0,\sigma}(-1, \vec{0}) = -\tilde{q}_{0,\sigma}(T, \vec{0}) \tag{3.171}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tilde{q}_{0,\sigma}(0, \vec{0}) - \tilde{q}_{0,\sigma}(T-1, \vec{0})\right) \ . \tag{3.172}$$

Auch bei den Ghostfeldern ändern sich lediglich die Randbedingungen für die $\vec{p} = \vec{0}$ und $\sigma \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ Komponenten (Gleichung 3.53) zu

$$\tilde{c}_\sigma(0,\vec{0}) = -\tilde{c}(T,\vec{0}) \ , \tag{3.173}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\tilde{c}_\sigma(-1,\vec{0}) - \tilde{c}_\sigma(T+1,\vec{0})\Big) \ , \tag{3.174}$$

wobei hier das Feld auf $t = -1$ und $t = T+1$ erweitert wurde um zu erreichen, daß $D_\mu c$ die gleichen Randbedingungen wie q_μ erfüllt. Die entsprechenden Komponenten der Propagatoren können analytisch gelöst werden

$$\tilde{H}_{00}(t,t',\vec{0}) = \frac{1}{4\lambda_0}\Big((T+1) - 2|t-t'|\Big) \ , \tag{3.175}$$

$$\tilde{G}(t,t',\vec{0}) = \frac{1}{4}\Big(T - 2|t-t'|\Big) \ . \tag{3.176}$$

Die $\hat{T}$ Symmetrie reduziert die Summe über t, t' asymptotisch um einen Faktor 2.

Durch die Symmetrie bezüglich der Indexzeilen der Entwicklungskoeffizienten V in Gleichung (3.116) folgt eine weitere Reduktion der Terme. Dazu betrachten wir einen Term in der Entwicklung von I in $g_0\ I^s_{\mu\nu\mu'\nu'}(t,t',\vec{x})$, der durch die Kontraktion mit drei Gluonpropagatoren entsteht

$$I^s_{\mu\nu\mu'\nu'}(t,t',\vec{x}) = \sum_{\substack{\sigma_i\tau_i,e_if_i,\mu_i\nu_i \\ i=1}}^{3} V^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{\substack{e_1e_2e_3 \\ \mu_1\mu_2\mu_3}}(t,\mu,\nu) V^{\tau_1\tau_2\tau_3}_{\substack{f_1f_2f_3 \\ \nu_1\nu_2\nu_3}}(t',\mu',\nu') \tag{3.177}$$

$$\prod_{i=1}^{3} H_{\mu_i\nu_i,\sigma_i\tau_i}(t+e_i^0, t'+f_i^0, \vec{x}+\vec{e}_i-\vec{f}_i) \ .$$

Dieser Term wird in dem Diagramm D_9 berechnet. Wir führen eine beliebige Ordnungsrelation zwischen den Elementen $I_i = (\sigma_i, e_i, \mu_i)$ und $J_i = (\tau_i, f_i, \nu_i)$ ein. Zwei Elemente I_i und I_k sollen gleich sein, wenn $\sigma_i = \sigma_k$, $e_i = e_k$ und $\mu_i = \mu_k$ gilt. Die Symmetrie der Entwicklungkoeffizienten ist mit

$$V[I_1,I_2,I_3](t,\mu,\nu) = V^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}_{\substack{e_1e_2e_3 \\ \mu_1\mu_2\mu_3}}(t,\mu,\nu) \tag{3.178}$$

gegeben durch die Symmetrie von V unter Permutationen von I_k. Offensichtlich gilt mit einem geeigneten Gewicht $w^{J_1,J_2,J_3}_{I_1,I_2,I_3}$

$$I^s_{\mu\nu\mu'\nu'}(t,t',\vec{x}) = \tag{3.179}$$

$$\sum_{\substack{I_1\le I_2\le I_3 \\ J_1\le J_2\le J_3}} w^{J_1,J_2,J_3}_{I_1,I_2,I_3}\ V[I_1,I_2,I_3](t,\mu,\nu) V[J_1,J_2,J_3](t',\mu',\nu')$$

$$\prod_{i=1}^{3} H_{\mu_i\nu_i,\sigma_i\tau_i}(t+e_i^0, t'+f_i^0, \vec{x}+\vec{e}_i-\vec{f}_i) \ .$$

3.5 Implementierung der Diagramme

Aus den Vertizes und den Propagatoren werden die Diagramme konstruiert. Für die numerische Implementation ist es günstig die Terme mit Hilfe ihrer Symmetrie zu reduzieren. Im Folgenden sind die für die Implementation wesentlichen Ausdrücke angegeben.

In den Ausdrücken für die Diagramme sind nicht alle Symmetrien berücksichtigt um die Übersicht zu bewahren. Sie sind, wie in Kapitel (3.4) beschrieben, durch Beschränkung und Gewichtung der Summen einzuführen.

3.5.1 Analytisch zu berechnende Diagramme

Neben $S_B^{(0)}$ und $S_B^{(2)}$ (siehe Kapitel 3.3.4) ist D_5 analytisch zu berechnen

$$D_5 = -\frac{1}{2}\left[C_{(1,a)}\right]^2 A \tag{3.180}$$

mit $C_{(1,a)}$ aus der Gleichungen (3.118)

$$\begin{aligned} A = &\sum_{\vec{x}\vec{y},kl}\Big[H_{kl,\varsigma}(1,1,\vec{x}-\vec{y}) - H_{kl,\varsigma}(1,T-1,\vec{x}-\vec{y}) \qquad (3.181)\\ &-H_{kl,\varsigma}(1,T-1,\vec{x}-\vec{y}) + H_{kl,\varsigma}(T-1,T-1,\vec{x}-\vec{y})\Big]\\ = &L^3\sum_{kl}\Big[\tilde{H}_{kl,\varsigma}(1,1,\vec{0}) - 2\tilde{H}_{kl,\varsigma}(1,T-1,\vec{0}) \qquad (3.182)\\ &+\tilde{H}_{kl,\varsigma}(T-1,T-1,\vec{0})\Big]\ . \end{aligned}$$

Das neutrale Gluon ς des Randfeldvertex $S_{YM}^{(1,1)}$ wurde in Gleichung (3.119) definiert. Mit der Lösung des Propagators für $\vec{p} = \vec{0}$ in Gleichung (3.90) finden wir

$$A = \frac{6}{c_1^\varsigma}L^2(L-2)\ , \tag{3.183}$$

wobei c_1^ς ein von der Gruppe abhängiger und im Anhang (D.1) definierter Parameter ist. Für die $SU(3)$ ergibt sich

$$D_5 = -\frac{12}{c_1^\varsigma}\left[\sin(\gamma)+\sin(\gamma/2)\right]^2 L^2(L-2)\ . \tag{3.184}$$

Die η Ableitung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} D_5' &= D_5\left(2\gamma'\frac{\cos(\gamma)+\cos(\gamma/2)/2}{\sin(\gamma)+\sin(\gamma/2)} - \frac{c_1^{\varsigma\,\prime}}{c_1^\varsigma}\right)\\ &= D_5\gamma'\left(2\frac{\cos(\gamma)+\cos(\gamma/2)/2}{\sin(\gamma)+\sin(\gamma/2)} + \frac{2\sin(\gamma)+\sin(\gamma/2)/2}{2\cos(\gamma)+\cos(\gamma/2)}\right)\ . \end{aligned} \tag{3.185}$$

3.5.2 Diagramme mit lokalen Loops

In den Diagrammen D_6, D_7, D_8, D_{10} und D_{12} werden Loops (Kontraktionen) innerhalb der Vertizes $S_{YM}^{(1,0)}$ und $S_{FP}^{(1)}$ benötigt. Die Abhängigkeiten von dem verbleibenden Gluonfeld lassen sich durch von t, μ und σ abhängige Funktionen darstellen. Da die Funktionen für $\mu = 0$ wegen der CP-Symmetrie verschwinden, werden diese nur für $\mu = k$ definiert. Aufgrund der kubischen Symmetrie sind die Funktionen unabhängig von $\mu = k$, so daß die Funktionen kein Argument für μ benötigen. Entsprechend zu $\hat{\mu}$ definieren wir einen räumlichen Vektor der Länge a in Richtung k mit $\vec{k}$.

Die Funktion der lokalen Ghostschleife von $S_{FP}^{(1)}$ ist

$$B(t,\sigma) = 2i \sum_{\tau \in \mathcal{H}_{\mathcal{N}}} w_N(\tau) f^{\tau\tau^{\mathrm{t}}\sigma} \Im \left\{ (\exp(i\beta_k^\tau(t)) G_\tau(t,t,\vec{k}) \right\} \ . \quad (3.186)$$

Sie ist nicht von $\vec{x}$ abhängig und die kubische Symmetrie des Ghostpropagators erlaubt, die rechte Seite für ein beliebiges k auszuwerten. Aus den Strukturkonstanten ergibt sich weiter, daß B für $\sigma \notin \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ verschwindet. Die Summation über τ ist für die $SU(3)$ auf

$$\mathcal{H}_{\mathcal{N}} = \{0, 1, (12), (13), (23)\} \quad (3.187)$$

und für die $SU(2)$ auf $\mathcal{H}_{\mathcal{N}} = \{0, +\}$ eingeschränkt. Das Gewicht $w_N(\tau)$ ist in beiden Fällen für $\tau \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ gleich Eins und für die nicht diagonalen Generatoren gleich Zwei.

Für die lokalen Gluonloops läßt sich eine ähnliche Funktion herleiten. Dazu betrachten wir die Kontraktion mit einem Gluonpropagator in $S_{YM}^{(1,0)}$

$$F(t,\sigma) = \sum_{\mu\nu} \sum_{e \in \{\hat{0},\hat{\mu},\hat{\nu}\}} \sum_{\substack{\tau,\mu_2\mu_3 \\ e_2 e_3}} V^{\substack{\sigma\ \tau\ \tau^{\mathrm{t}} \\ e\ e_2 e_3 \\ k\ \mu_2\mu_3}}(t - e^0, \mu, \nu) \quad (3.188)$$
$$H_{\mu_2\mu_3,\tau}(t - e^0 + e_2^0, t - e^0 + e_3^0, \vec{e}_2 - \vec{e}_3) \ .$$

Auch hier ist die rechte Seite bei einem beliebigen k auszuwerten.

Für die Diagramme D_6, D_7, D_8, D_{10} und D_{12}, die von F und B abhängig sind, kann der Propagator im Impulsraum mit $\vec{p} = \vec{0}$ verwendet werden. Die kubische Symmetrie und Ausdrücke für die Propagatoren sind in den Gleichungen berücksichtigt worden.

$$D_6 = -C_{(1,a)} L^3 \sum_{t,\vec{x},kl} F(t,\varsigma)(H_{kl,\varsigma}(1,t,\vec{x}) - H_{kl,\varsigma}(t,T-1,\vec{x})) \quad (3.189)$$
$$= -C_{(1,a)} L^3 \frac{3}{c_1^\varsigma} \sum_t F(t,\varsigma) \frac{1-2t}{T} \quad (3.190)$$

und entsprechend

$$D_7 = -C_{(1,a)} L^3 \sum_{t,\vec{x},kl} B(t,\varsigma)(H_{kl,\varsigma}(1,t,\vec{x}) - H_{kl,\varsigma}(t,T-1,\vec{x})) \quad (3.191)$$

$$= -C_{(1,a)} L^3 \frac{3}{c_1^\varsigma} \sum_t B(t,\varsigma) \frac{1-2t}{T} \ . \quad (3.192)$$

Die anderen Diagramme werden ähnlich reduziert

$$D_8 = -\frac{L^3}{2} \sum_{\substack{tt',\vec{x},kl \\ \sigma\in\mathcal{C}_\mathcal{N}}} B(t,\sigma) H_{kl,\sigma}(t,t',\vec{x}) B(t',\sigma) \quad (3.193)$$

$$= -\frac{3L^3}{2} \sum_{\substack{tt',k \\ \sigma\in\mathcal{C}_\mathcal{N}}} B(t,\sigma) \tilde{H}_{kk,\sigma}(t,t',\vec{0}) B(t',\sigma) \quad (3.194)$$

$$= -\frac{3L^3}{2} \sum_{tt',\sigma\in\mathcal{C}_\mathcal{N}} B(t,\sigma) \frac{1}{c_1^\sigma} \left(\min(t,t') - \frac{tt'}{T} \right) B(t',\sigma) \ . \quad (3.195)$$

Das Diagramm D_{12} geht aus D_8 hervor, indem B durch F ersetzt wird

$$D_{12} = -\frac{3L^3}{2} \sum_{tt',\sigma\in\mathcal{C}_\mathcal{N}} F(t,\sigma) \frac{1}{c_1^\sigma} \left(\min(t,t') - \frac{tt'}{T} \right) F(t',\sigma) \ . \quad (3.196)$$

Das Diagramm D_{10} besteht aus einem lokalen Gluonloop und einem lokalen Ghostloop und ist bezogen auf D_8 mit einem Faktor 2 zu gewichten

$$D_{10} = -3L^3 \sum_{tt',\sigma\in\mathcal{C}_\mathcal{N}} F(t,\sigma) \frac{1}{c_1^\sigma} \left(\min(t,t') - \frac{tt'}{T} \right) B(t',\sigma) \ . \quad (3.197)$$

Für diese Diagramme gilt

$$D_8 + D_{10} + D_{12} = -\frac{3L^3}{2} \sum_{tt',\sigma\in\mathcal{C}_\mathcal{N}} [F(t,\sigma) + B(t,\sigma)] \quad (3.198)$$
$$\frac{1}{c_1^\sigma} \left(\min(t,t') - \frac{tt'}{T} \right) [F(t',\sigma) + B(t',\sigma)] \ .$$

Das Diagramm D_1 besteht aus einer lokalen Gluonschleife bei $t = 0$ und $t = T-1$, wobei nur die zeitartigen Plaquetten $(\mu\nu) \in \{(0i),(i0)\}$ beitragen

$$D_1 = L^3 \sum_{\substack{(\mu\nu)\in\{(0i),(i0)\} \\ \sigma,e_1e_2,t=0,T-1}} V^{\sigma\ \sigma^{\mathrm{t}}}_{\substack{e_1 e_2 \\ \mu\ \nu}}(t,\mu,\nu) H_{\mu\nu,\sigma}(t+e_1^0, t+e_2^0, \vec{e}_1 - \vec{e}_2) \ . \quad (3.199)$$

Für die $SU(2)$ ist bei D_3 der Faktor 8 durch 12 zu ersetzen

$$D_3 = \frac{L^3}{8} \sum_{\mu,t,\sigma} g^{\sigma\sigma^{\mathrm{t}}} H_{\mu\mu,\sigma}(t,t,\vec{0}) \ . \tag{3.200}$$

Die in dem Diagramm D_{13}

$$D_{13} = \frac{1}{12} \sum_{x,\mu,\tau\sigma\epsilon\rho} e^{\sigma\epsilon\tau\rho} \left\langle D_\mu \overline{c_\tau}(x) q_{\mu,\sigma}(x) q_{\mu,\epsilon}(x) D_\mu c_\rho(x) \right\rangle_0 \tag{3.201}$$

auftretenden Konstanten $e^{\sigma\epsilon\tau\rho}$ sind in Gleichung (3.127) definiert. Sie erfüllen die Relationen

$$e^{\sigma\epsilon\tau\rho} = e^{\sigma^{\mathrm{t}}\epsilon^{\mathrm{t}}\tau^{\mathrm{t}}\rho^{\mathrm{t}}} = e^{\epsilon^{\mathrm{t}}\sigma^{\mathrm{t}}\rho^{\mathrm{t}}\tau^{\mathrm{t}}} \ . \tag{3.202}$$

Mit dem Ausdruck

$$G_{\mu,\sigma}(t) = \left\langle D_\mu c_\sigma(t,\vec{0}) D_\mu \overline{c}_{\sigma^{\mathrm{t}}}(t,\vec{0}) \right\rangle_0 \tag{3.203}$$

und den Relationen aus Gleichung (3.202) folgt

$$\begin{aligned} D_{13} = \frac{L^3}{6} \sum_{t,\mu} \Big[& \sum_{(\tau\sigma)\in A_1} e^{\sigma\sigma^{\mathrm{t}}\tau\tau^{\mathrm{t}}} \left\{ G_{\mu,\sigma}(t) H_{\mu\mu,\tau}(t,t,\vec{0}) + G_{\mu,\tau}(t) H_{\mu\mu,\sigma}(t,t,\vec{0}) \right\} \\ & + \sum_{\tau\in A_2} e^{\tau\tau^{\mathrm{t}}\tau\tau^{\mathrm{t}}} G_{\mu,\tau}(t) H_{\mu\mu,\tau}(t,t,\vec{0}) \Big] \ . \end{aligned} \tag{3.204}$$

Die Indexmengen A_1 und A_2 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(0,12),(0,13),(0,23),(1,12), \\ &\qquad (1,13),(12,23),(12,31),(23,13)\} && \text{für } SU(3) \ , \\ A_2 &= \{(12),(23),(13)\} && \text{für } SU(3) \ , \\ A_1 &= \{(0,+)\} && \text{für } SU(2) \ , \\ A_2 &= \{+\} && \text{für } SU(2) \ . \end{aligned} \tag{3.205}$$

Die kubische Symmetrie vereinfacht die Summe über μ weiter.

Das Zwei Loop Gluondiagramm D_2 ergibt sich zu

$$\begin{aligned} D_2 = L^3 \sum_{\mu\nu,t,\vec{x}} \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,e_1\ldots e_4 \\ \mu_1\ldots\mu_4}} & V^{\substack{\sigma_1\sigma_1^{\mathrm{t}}\sigma_2\sigma_2^{\mathrm{t}} \\ e_1\,e_2\,e_3\,e_4 \\ \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}}(t,\mu,\nu) \\ & H_{\mu_1\mu_2,\sigma_1}(t+e_1^0, t+e_2^0, \vec{e}_1-\vec{e}_2) H_{\mu_3\mu_4,\sigma_2}(t+e_3^0, t+e_4^0, \vec{e}_3-\vec{e}_4) \ . \end{aligned} \tag{3.206}$$

3.5.3 Big Mac Diagramme

Für das Big Mac Diagramm D_{11} mit zwei Ghostlinien und einer Gluonlinie definieren wir

$$E_{\mu\nu,\sigma}(x,y) = \left\langle \left(1 + \frac{1}{2}D_\mu\right) c_\sigma(x) D_\nu \overline{c}_{\sigma^{\mathfrak{t}}}(y) \right\rangle_0 \tag{3.207}$$

und erhalten

$$D_{11} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu,\tau\rho\sigma,xy} c^{\tau\rho^{\mathfrak{t}}\sigma} c^{\rho\tau^{\mathfrak{t}}\sigma^{\mathfrak{t}}} E_{\mu\nu,\tau}(x,y) E_{\nu\mu,\rho}(y,x) H_{\mu\nu,\sigma}(x,y) \ . \tag{3.208}$$

Die Funktion E ist in zwei Teile zu separieren

$$E_{\mu\nu,\sigma}(x,y) = \alpha_{\mu\nu,\sigma}(x,y) + \beta_{\mu\nu,\sigma}(x,y) \ , \tag{3.209}$$

wobei α und β die folgenden Relationen erfüllen

$$\begin{aligned} \alpha_{\mu\nu,\sigma}(x,y) &= \overline{\alpha_{\nu\mu,\sigma}(y,x)} = \alpha_{\nu\mu,\sigma^{\mathfrak{t}}}(y,x) \ , \\ \beta_{\mu\nu,\sigma}(x,y) &= -\overline{\beta_{\nu\mu,\sigma}(y,x)} = -\beta_{\nu\mu,\sigma^{\mathfrak{t}}}(y,x) \ . \end{aligned} \tag{3.210}$$

Die Translationsinvarianz ist mit der Definition von $\alpha_{\mu\nu,\sigma}(x^0, y^0, \vec{x} - \vec{y}) = \alpha_{\mu\nu,\sigma}(x,y)$ inkorporiert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{11} = L^3 \sum_{\substack{\mu\nu, \\ tt', \vec{x}}} \sum_{(\lambda\rho)\in A} [c^{\lambda\rho\rho^{\mathfrak{t}}}]^2 \\ \Big[H_{\mu\nu,\lambda}(t,t',\vec{x}) \left\{ |\alpha_{\mu\nu,\rho}(t,t',\vec{x})|^2 - |\beta_{\mu\nu,\rho}(t,t',\vec{x})|^2 \right\} \\ +2\alpha_{\mu\nu,\lambda}(t,t',\vec{x}) \Re \left(H_{\mu\nu,\rho}(t,t',\vec{x}) \overline{\alpha_{\mu\nu,\rho}(t,t',\vec{x})} \right) \\ -2\beta_{\mu\nu,\lambda}(t,t',\vec{x}) \Re \left(H_{\mu\nu,\rho}(t,t',\vec{x}) \overline{\beta_{\mu\nu,\rho}(t,t',\vec{x})} \right) \Big] \\ + 2 \sum_{(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in B} -[c^{\sigma_1\sigma_2^{\mathfrak{t}}\sigma_3}]^2 \Re \Big(H_{\mu\nu,\sigma_3}(t,t',\vec{x}) \\ \left\{ \alpha_{\mu\nu,\sigma_1}(t,t',\vec{x}) \overline{\alpha_{\mu\nu,\sigma_2}(t,t',\vec{x})} - \beta_{\mu\nu,\sigma_1}(t,t',\vec{x}) \overline{\beta_{\mu\nu,\sigma_2}(t,t',\vec{x})} \right\} \Big) \ . \end{aligned} \tag{3.211}$$

Die Indexmengen sind

$$\begin{aligned} A &= \{(0,12),(0,13),(0,23),(1,12),(1,13)\} && \text{für } SU(3) \ , \\ B &= \{((12),(13),(23)),((32),(12),(13)), \\ &\quad ((23),(13),(12))\} && \text{für } SU(3) \ , \\ A &= \{(0,+)\} && \text{für } SU(2) \ , \\ B &= \emptyset && \text{für } SU(2) \ . \end{aligned} \tag{3.212}$$

Die kubische Symmetrie erlaubt die Summation über $(\mu\nu)$ auf (00), (01), (10), (11) und (12) einzuschränken, wobei geeignete Gewichte zu wählen sind.

Das numerisch aufwendigste Diagramm ist der Drei Gluon Big Mac

$$D_9 = -\frac{1}{2}L^3 \sum_{\substack{\mu\nu\mu'\nu',\\ tt',\vec{x}}} \sum_{\substack{\sigma_i,e_i f_i,\mu_i\nu_i\\ i=1}}^{3} V^{\substack{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\\ e_1e_2e_3\\ \mu_1\mu_2\mu_3}}(t,\mu,\nu) V^{\substack{\sigma_1^{\mathrm{t}}\sigma_2^{\mathrm{t}}\sigma_3^{\mathrm{t}}\\ f_1f_2f_3\\ \nu_1\nu_2\nu_3}}(t',\mu',\nu') \quad (3.213)$$
$$\prod_{i=1}^{3} H_{\mu_i\nu_i,\sigma_i}(t+e_i^0, t'+f_i^0, \vec{x}+\vec{e}_i-\vec{f}_i)\ .$$

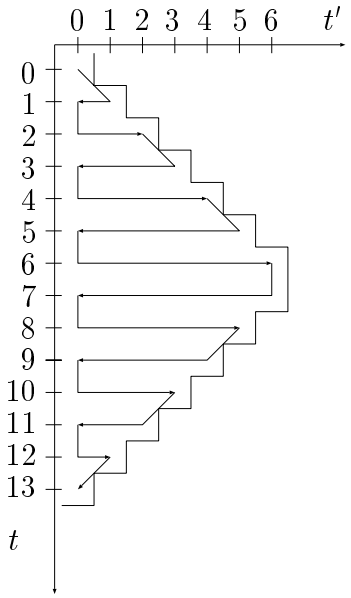
Dieses Diagramm benötigt in der $SU(3)$ etwa 90% der Rechenzeit. Unter Verwendung der in Kapitel (3.4) betrachteten Symmetriereduktionen für den Term I verbleiben für die Summe über die Einträge von V etwa 17000 Terme. Die Summation über $\mu\nu\mu'\nu'$, $\vec{x}$ und t, t' multipliziert die Gesamtanzahl der Terme mit T^2L^3. Ohne die Verwendung der in Kapitel (3.4) diskutierten Symmetrien vergrößert sich die Anzahl der Terme um einen Faktor 36.

3.6 Implementierungsdetails

Für eine effiziente Implementierung sind die in Kapitel (3.4) beschriebenen Symmetrien zu berücksichtigen.

Da die Propagatoren aufgrund ihres Speicherbedarfs nicht alle im Hauptspeicher gehalten werden können, muß die Summation über die Zeit besonders geordnet werden. Das Speichern und Laden auf und von einer Festplatte ist dabei unumgänglich. Das verwendete Schema minimiert die benötigten Festplattenzugriffe und berücksichtigt den Festplattenplatz. Für ein Zeitpaar eines Gluon- und Ghostpropagators werden mit 8-Byte Arithmetik auf einem $L = 32$ Gitter 30MB benötigt. Die Struktur der YM Vertizes legt Nahe, daß folgende vier Zeitpaare gleichzeitig im Hauptspeicher präsent sind: $(t, t'), (t+1, t'), (t, t'+1)$ und $(t+1, t'+1)$. Damit ist ein Hauptspeicherbedarf von $\approx$ 120MB festgelegt. In Abbildung 3.2 ist die Reihenfolge der Berechnung in der t, t' Summation dargelegt. Die maximale Anzahl der Propagatoren eines Zeitpaares, die auf der Festplatte ausgelagert werden, ist von der Ordnung $O(T/2)$. So verbleibt ein temporärer Festplattenbedarf von 480MB ($T = L = 32$). Mit einer Workstation sind diese Erfordernisse zu erfüllen.

Da circa 90% der Rechenzeit für das Big Mac Diagramm D_9 aufzuwenden ist, wurde hier eine hierarchische Summe implementiert. Das heißt, die Summe über das Produkt der drei Propagatoren wurde mit Hilfe des Distri-



Die Reihenfolge der Berechnung der t, t' Summation. Aufgrund der $\hat{T}$ Symmetrie sind nur $\approx 1/4T^2$ Summanden notwendig. Der Ablauf der Summation in der Implementation des Programmes ist in der Abbildung durch die Pfeile gekennzeichnet. Es sind maximal $\approx 1/2T$ Propagatoren auf der Festplatte ausgelagert. Für die Abbildung ist $T = 13$ gewählt.

Abbildung 3.2: Ordnung der t, t' Summation

butivgesetzes manipuliert. Zur Auswertung des Ausdruckes $(P_a * P_b * P_c) + (P_a * P_b * P_d)$ sind vier Multiplikationen und eine Addition notwendig. Dagegen sind für die Berechnung von $(P_a * P_b) * (P_c + P_d)$ nur zwei Multiplikationen und eine Addition erforderlich. Da diese Ausdrücke innerhalb einer Summe über den Raum $(\vec{x})$ und einer Doppelsumme über die Zeit (t, t') in dem Diagramm D_9 stehen, wird eine Anzahl von Multiplikationen der Ordnung $O(L^5)$ eingespart. Nicht alle Terme in D_9 lassen sich auf diese Weise reduzieren. Für die Wahl der umzuordnenden Terme wird ein ad hoc Verfahren gewählt. Dieses isoliert bevorzugt Propagatoren, die diagonal in der $SU(3)$ (bzw. $SU(2)$) sind.

Die Entwicklungskoeffizienten des Realteils der Plaquette V (Gleichung 3.116) werden in einer Tabelle gespeichert. So wird die Summation über Koeffizienten, die gleich Null sind, vermieden.

Die für die Produktion verwendete Rechenzeit belief sich auf einer HP735 Workstation auf 2 Monate. Durch die zu L^5 proportionale Rechenzeit ist ein signifikant größeres $L_{max} = 32$ nur schwer zu erzielen.

3.7 Tests

Ein wichtiger Teil der Arbeit beinhaltet zu zeigen, daß das Programm keine falschen Ergebnisse produziert. Daher wurden verschiedene Tests durchge-

führt, die eine hinreichend hohe Sicherheit gewährleisten, daß die Rechnung die korrekten Ergebnisse liefert.

Während der Programmentwicklung wurden die fertiggestellten Teile getestet. Die Propagatoren erfüllen die Symmetrien (Kubische, $\hat{T}$, CP) sowohl im Impulsraum als auch im Ortsraum. Die Differenzengleichungen wurden mit Erfolg auf die Propagatoren angewendet. Die Implementation der Fouriertransformation wurde mit Hilfe einer inversen Fouriertransformation geprüft. Dazu wurden die Propagatoren und einfache Testfelder verwendet. Die Überprüfung der Randbedingungen im Ortsraum lieferte die erwarteten Ergebnisse.

Die Vertizes wurden mit dem Programm MAPLE generiert, welches algebraische Manipulationen erlaubt. Da V die Entwicklungskoeffizienten des Realteils der Plaquette sind, gilt

$$0 = \mathcal{I}m\left(\sum_{\substack{\sigma_i, e_i, \mu_i \\ i=1}}^{n} V^{\sigma_1 \cdots \sigma_n}_{\substack{e_1 \cdots e_n \\ \mu_1 \cdots \mu_n}}(t, \mu, \nu) \prod_{k=1}^{n} q_{\mu_i, \sigma_i}(e_i) \right) \tag{3.214}$$

für alle t, μ, ν und $q_{\mu,\sigma}(x)$. Bei dieser Relation gehen die Beziehungen (Gleichung A.5 und B.4) zwischen den Koeffizienten $q_{\mu,\sigma}(x)$ des q-Feldes kritisch ein. Das Programm ist nur von der Gruppe und ihrer Darstellung abhängig, von welcher allerdings angenommen wird, daß sie in der Gruppe diagonale, kovariante Ableitungen D^*_μ und D_μ liefert. MAPLE generiert für die Entwicklungskoeffizienten V ein Fortran Programm. So konnte die gesamte Numerik in dem Fortran Programm zur Berechnung der Diagramme implementiert werden und dort einfach zwischen verschiedenen Präzisionen ausgewählt werden. Abschließend sind einige Vertizes „mit Papier und Bleistift“ zur Kontrolle bestimmt worden.

Die verschiedenen Symmetrien wurden sukzessive implementiert, so konnten zunächst die Symmetrien explizit überprüft werden und anschließend die Ergebnisse mit der symmetriereduzierten Version verglichen werden.

Die analytische Implementierung der η Ableitung wurde mit einer numerischen Ableitung verglichen.

Die Gruppenstruktur wurde variabel programmiert, wodurch die Resultate für die $SU(2)$ [16] bestätigt werden konnten. Zu beachten ist allerdings, daß die Gruppenstruktur der $SU(3)$ strukturell neue Terme beinhaltet. Dies ist explizit bei der Berechnung des Gluon-Ghost-Gluon Big Mac Diagrammes D_{11} mit Gleichung (3.211) zu berücksichtigen.

Ein kritischer Test ist die Unabhängigkeit von Γ' von dem Parameter λ_0 der Eichfixierung. Da die Eichfixierung der Theorie nicht von den Verbesserungskoeffizienten $c_t^{(i)}$ abhängig ist, sind die m_i^X einzeln unabhängig von dem Eichparameter λ_0. Aus den analytischen Resultaten ist diese Eigenschaft für

m_1^c (D_5) und m_2^d ablesbar. Der Test für m_2^b beinhaltet die drei Diagramme D_1, D_6 und D_7 und damit die Ausdrücke der lokalen Loops F und B aus den Gleichungen (3.186) und (3.188). Der Koeffizient m_2^a wird aus der Summe der verbleibenden 8 Diagramme gebildet. Da keine Untermengen von dem Eichparameter λ_0 unabhängig sind, können an dieser Stelle keine Fehler lokalisiert werden.

Peter Weisz hat unabhängig von meiner Arbeit eine eigene Programmversion erarbeitet, die die Diagramme im Impulsraum berechnet. Der numerische Aufwand dieser Rechnung steigt mit L^8 und ist somit ungeeignet für die Bestimmung von m_2^X für große L. Der Vergleich der Koeffizienten für $L = 4$ und $L = 5$ liefert jedoch einen weiteren wichtigen Test der vorliegenden Koeffizienten.

Aus den berechneten Koeffizienten m_2^X werden, wie in Kapitel (4) beschrieben wird, die Kontinuumsresultate extrahiert. Dabei werden bekannte Resultate reproduziert und so die Ergebnisse der Rechnung weiter bestätigt. Der universelle Zwei Loop Koeffizient der Callan Symanzik β-Funktion b_1 ist mit 0.7% Genauigkeit extrahiert worden. Aus der β-Funktion folgt weiter, daß m_2^a keine Divergenz der Form $\ln^2(L)$ hat. Durch die Verwendung von $c_t^{(0)} = 1$ ist jeweils ein Koeffizient der Entwicklungen von m_2^a und m_2^b in L zu Null fixiert. Der aus den Ein Loop Resultaten bekannte Wert von $c_t^{(1)}$ kann aus m_2^a und m_2^b unabhängig bestimmt werden. Innerhalb der Fehler lassen sich diese Bedingungen an den Koeffizienten überprüfen. In Tabelle 4.2 sind die Fehler im einzelnen angegeben.

Das Programm zur Bestimmung der Kontinuumsresultate wurde mit den Ein Loop Koeffizienten m_1^X und mit den Koeffizienten der $SU(2)$ getestet.

Kapitel 4

Der Kontinuumslimes der Störungstheorie

Der Kontinuumslimes $a \to 0$ bei fixierter physikalischer Boxgröße ist äquivalent zu $L/a = I \to \infty$. Die in Kapitel (2.2.1) diskutierte Analyse der Abhängigkeit der Feynmandiagramme von dem Ultraviolettcutoff führt zu

$$m_2^a(I) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n^a + s_n^a \ln(I) + t_n^a \ln^2(I)}{I^n} \ , \tag{4.1}$$

$$m_2^b(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^b + s_n^b \ln(I)}{I^n} \ . \tag{4.2}$$

In diesem Kapitel wird beschrieben, wie die Koeffizienten r_n, s_n und t_n mit $n \leq 1$ aus den berechneten Koeffizienten $m_2^a(I)$ und $m_2^b(I)$ zu bestimmen sind. Letztere sind für $I = 4 \ldots 32$ in Tabelle 4.1 aufgeführt. Zur Anwendung kommt eine angepaßte Version der in [38] beschrieben Methode.

Einige Koeffizienten in Gleichung (4.1) sind bekannt. Aus der Verbesserung des Kontinuumslimes zu der Ordnung $O(a^2)$ in niedrigster Ordnung Störungstheorie ($c_t^{(0)} = 1$) folgt $t_1^a = 0$. Die logarithmischen Divergenzen sind durch die universellen Koeffizienten der β-Funktion bestimmt: $t_0^a = 0$ und $s_0^a = 2b_1$. Der konvergente Anteil von m_2^a ist daher mit $\tilde{m}_2^a(I) = m_2^a(I) - 2b_1 \ln(I)$ exakt anzugeben.

Eine Inspektion der analytischen Resultate liefert

$$m_2^c(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n^c}{I^n} \ \text{ und } \ m_2^d(I) = \frac{r_1^d}{I} \tag{4.3}$$

mit $r_1^c = 2$ und $r_1^d = -2$.

I	$m_2^a(I)$	$m_2^b(I)$
4	0.052943274533542	0.106270501583520
5	0.056838593961882	0.100438272480780
6	0.05975069070789	0.09439258604949
7	0.06197806027570	0.08867849757097
8	0.06374136571959	0.08343000201173
9	0.06518532139185	0.07867547537704
10	0.06640139951338	0.07439325408456
11	0.06744855730398	0.07054052556373
12	0.06836628672255	0.06706893587917
13	0.0691821005300	0.06393184996835
14	0.0699158333750	0.06108717717361
15	0.0705822007834	0.05849809311936
16	0.0711923868147	0.0561328521011
17	0.0717550680760	0.0539642582909
18	0.0722770966172	0.0519690528035
19	0.0727639684486	0.0501273255443
20	0.0732201529077	0.0484219921318
21	0.0736493291767	0.0468383453838
22	0.0740545593455	0.0453636778366
23	0.0744384171842	0.0439869669949
24	0.0748030854189	0.0426986139530
25	0.0751504302247	0.0414902265431
26	0.075482058988	0.0403544392531
27	0.075799365607	0.0392847633581
28	0.076103566396	0.0382754618367
29	0.076395728812	0.0373214446266
30	0.076676794651	0.0364181805963
31	0.076947598928	0.0355616232918
32	0.077208885368	0.0347481480648

Tabelle 4.1: Die berechneten Werte von m_2^a und m_2^b. Die angegebenen Stellen sind signifikant.

Eine Ausgleichsrechnung liefert für die Koeffizienten r_n, s_n und t_n keine Resultate die zufriedenstellend sind. Die Schwierigkeiten einer Ausgleichsrechnung werden bei der Fehlerabschätzung der verwendeten Methode diskutiert.

Betrachten wir zunächst die willkürliche Funktion[1]

$$f(I) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n + s_n \ln(I) + t_n \ln^2(I)}{I^i} \ , \tag{4.4}$$

so ist $A_0 = f(I^0_{max})$ ein erster Schätzer für r_0. Der Fehler oder Restterm $A_0 - r_0$ ist von der Ordnung $O(I^{-1})$. Wir definieren die Operatoren

$$R_n[f](I) = \frac{1}{2}(f(I_+) + f(I_-)) + \frac{I}{n}(f(I_+) - f(I_-)) \quad n \neq 0 \ , \tag{4.5}$$

$$R_0[f](I) = I \times (f(I_+) - f(I_-)) \ , \tag{4.6}$$

$$R_L[f](I) = I f(I) \ , \tag{4.7}$$

mit $I_\pm = I \pm \frac{1}{2}$. Die Verwendung von halbzahligen Argumenten bereitet keine Schwierigkeiten. Mit Hilfe dieser Operatoren läßt sich sukzessive die Ordnung des Resttermes verkleinern

$$h(I) = a + c \ln^m(I)/I^n \ , \tag{4.8}$$

$$R_n[h](I) = \begin{cases} a + O(1/I^{n+1}) & \text{für } m = 0 \ , \\ a + O(\ln^{m-1}(I)/I^{-n}) & \text{für } m > 0 \ . \end{cases} \tag{4.9}$$

Sie verkleinern jedoch auch den Definitionsbereich, so daß sich der verbesserte Schätzer $A_1 = (R_1)^3[f](I^1_{max})$ mit $I^1_{max} = I^0_{max} - 3/2$ ergibt. Durch wiederholte Anwendung wird demnach die Ordnung des Resttermes kleiner, allerdings auch der Definitionsbereich und damit I^n_{max}. Wir erhalten

$$f_n(I) = \left[\prod_{i=1}^{n} (R_i)^3\right] [f](I) \ , \tag{4.10}$$

$$A_n = f_n(I^0_{max} - \frac{3n}{2}) \tag{4.11}$$

$$= r_0 + O(I^{-(n+1)}) \ . \tag{4.12}$$

Eine Fehlerabschätzung ist grundsätzlich notwendig. Sie kann hier verwendet werden, um das optimale n zu bestimmen. Wir definieren den absoluten Fehler zu

$$\delta_n(I) = |f_n(I) - r_0| \tag{4.13}$$

[1] Die Behandlung von m_2^b ergibt sich durch triviale Modifikationen.

und schätzen diesen mit einer Ausgleichsrechnung von

$$\hat{f}_n(I) = \hat{r}_0 + \frac{\hat{r}_n + \hat{s}_n \ln(I) + \hat{t}_n \ln^2(I)}{I^{n+1}} \tag{4.14}$$

an f_n ab. Dazu minimieren wir

$$m = \sum_{I \in I_{fit}} w(I) \left[f_n(I) - \hat{f}_n(I) \right]^2 \tag{4.15}$$

mit dem Gewicht $w(I) = I^{2n+2}$. Die Wahl des Summationsbereiches I_{fit} sollte nicht zu kleine I beinhalten, da die Abweichung der asymptotischen Reihe von der Funktion $\hat{f}$ für kleine I groß sein kann. Weil mit $\hat{f}_n$ nur die führende Ordnung des Resttermes beschrieben wird, ist ein Fehler in den Größen $\hat{r}_n$, $\hat{s}_n$ und $\hat{t}_n$ zu erwarten. Es läßt sich jedoch zeigen, daß mit

$$\hat{\delta}_n(I) = \begin{cases} |\hat{r}_n + \hat{s}_n \ln(I) + \hat{t}_n \ln^2(I)|/I^{n+1} \\ \qquad\qquad \text{für } \hat{s}_n/\hat{r}_n \geq 0 \text{ und } \hat{t}_n/\hat{r}_n \geq 0 \ , \\ \max(|\hat{r}_n + \hat{s}_n \ln(I)|, |\hat{t}_n \ln^2(I)|)/I^{n+1} \\ \qquad\qquad \text{für } \hat{s}_n/\hat{r}_n \geq 0 \text{ und } \hat{t}_n/\hat{r}_n < 0 \ , \\ \max(|\hat{r}_n + \hat{t}_n \ln^2(I)|, |\hat{s}_n \ln(I)|)/I^{n+1} \\ \qquad\qquad \text{für } \hat{s}_n/\hat{r}_n < 0 \text{ und } \hat{t}_n/\hat{r}_n \geq 0 \ , \\ \max(|\hat{r}_n|, |\hat{s}_n \ln(I) + \hat{t}_n \ln^2(I)|)/I^{n+1} \\ \qquad\qquad \text{für } \hat{s}_n/\hat{r}_n < 0 \text{ und } \hat{t}_n/\hat{r}_n < 0 \end{cases} \tag{4.16}$$

eine Größe gegeben ist, für die erwartet wird

$$\delta_n(I) \leq \hat{\delta}_n(I) \ . \tag{4.17}$$

Die max-Funktion in Gleichung (4.16) wurde eingeführt, um eine Unterschätzung des Fehlers im Falle eines Nulldurchgangs der Funktion $\hat{r}_n + \hat{s}_n \ln(I) + \hat{t}_n \ln^2(I)$ zu verhindern. Bevor wir $\hat{\delta}_n$ zur Abschätzung des Fehlers von A_n benutzen, sollte sichergestellt sein, daß die Qualität der Ausgleichsrechnung ausreichend ist. In [38] ist als Definition der Qualität

$$Q(I) = \frac{I}{I_{max}^n} \frac{|f_n(I) - \hat{f}_n(I)|}{\hat{\delta}_n(I)} \tag{4.18}$$

benutzt worden. Der Term $|f_n(I) - \hat{f}_n(I)|$ ist ein Maß für die in der Ausgleichsrechnung nicht berücksichtigten Terme der Reihenentwicklung und daher von der Ordnung $O(I^{-(n+2)})$. Da der abgeschätzte Fehler $\hat{\delta}_n$ von der Ordnung $O(I^{-(n+1)})$ ist, wird mit dem Faktor I/I_{max}^n in Gleichung (4.18) erreicht, daß die Qualität $Q(I)$ einer Entwicklung der Form $Q(I) = c + O(I^{-2})$ genügt. Die

Bedingung an die Qualität $Q(I) < 0.1$ stellt sicher, daß die in der Ausgleichsrechnung nicht berücksichtigten Terme keinen Einfluß auf die Abschätzung des Fehlers durch $\hat{\delta}_n$ haben.

Es zeigt sich jedoch, daß der abgeschätzte Fehler größer als die Variation von $f_n(I)$ bezüglich I ist. Dies kann in einer schlechten Abschätzung des Fehlers begründet sein und wird auf zwei Ursachen zurückgeführt:

- Ist $\hat{s}_n/\hat{r}_n < 0$ oder $\hat{t}_n/\hat{s}_n < 0$, so wird $\hat{\delta}_n(I)$ durch die max-Funktion in Gleichung (4.16) zu groß, auch wenn der Nulldurchgang bei kleinem I lokalisiert ist.

- Die Schätzer $\hat{r}_n$, $\hat{s}_n$ und $\hat{t}_n$ können stark korreliert sein. In diesem Fall können numerische Fehler der Koeffizienten $m_i^X(I)$ einen großen Einfluß auf den Wert des Schätzers des Fehlers $\hat{\delta}_n(I)$ haben.

Beide Punkte können an fiktiven Datensätzen überprüft und bestätigt werden. Insbesondere ergibt sich, daß mit

$$\tilde{\delta}_n(I) = |\hat{r}_n + \hat{s}_n \ln(I) + \hat{t}_n \ln^2(I)|/I^{n+1} \tag{4.19}$$

$\delta_n(I)$ nicht abgeschätzt werden kann. Der Fehler $\tilde{\delta}(I)$ steigt im Falle eines Nulldurchgangs bei kleinem I für $I \approx I_{max}^n$ weiter an. Solche Situationen können nicht mit Hilfe der Qualität $Q(I)$ erkannt werden, da diese bei dem Nulldurchgang ebenfalls sehr klein wird.

Die starke Korrelation zwischen den Schätzern kann genutzt werden, um $\hat{t}_n$ beziehungsweise $\hat{s}_n$ zu Null zu fixieren. Für die Koeffizienten von m_2^b kann so der Fehler wirkungsvoll reduziert werden, da dann dort nur $\hat{r}_0$ und $\hat{r}_n$ anzugleichen sind.

Der Koeffizient $\hat{t}_n$ von m_2^a ist um einen Faktor 10^{10} kleiner als $\hat{s}_n$ und $\hat{r}_n$. Es ergeben sich Inkonsistenzen bei der Bestimmung von $c_t^{(1)}$, wenn $\hat{t}_n$ gleich Null gesetzt wird und in einem zweiten Schritt die Reduktion der Parameter aufgrund der starken Korrelation durchgeführt wird. Der so bestimmte Wert stimmt dann innerhalb des systematischen Fehlers nicht mit dem aus der Ein Loop Entwicklung bestimmten Koeffizienten $c_t^{(1)}$ überein. Die Methode wird daher verworfen und jeweils nur ein Schätzer zu Null fixiert.

Bei der Auswertung muß neben dem oben diskutierten systematischen Fehler $\delta(I)$ auch die numerische Genauigkeit der Werte von m_2^X berücksichtigt werden. Diese werden als unabhängig und gemäß einer Gauß-Funktion verteilt betrachtet. Die Fehlerfortpflanzung bei dem Blocking generiert korrelierte Datensätze, aus denen für die Fehlerquadrate für $f_n(I)$ die entsprechenden Diagonalelemente der Korrelationsmatix verwendet wurden. Der Gesamtfehler ist dann die Summe aus dem numerischen und dem systematischen Fehler.

Der numerische Fehler wurde bis $I = 17$ mit einer auf 4 Byte[2] und einer auf 16 Byte genauen Arithmetik abgeschätzt. Der Fehler der 4 Byte Version kann durch die 8 Byte oder 16 Byte Version bestimmt werden, der Fehler der 8 Byte Version mit Hilfe der 16 Byte Version. In Abbildung 4.1 ist der Logarithmus des relativen Fehlers in Abhängigkeit von I für die 4 Byte und 8 Byte Version für m_2^a und m_2^b aufgetragen. Die verwendete Extrapolation des relativen Fehlers

$$8 \cdot 10^{-17} L^3 \quad \text{für } m_2^a \ , \tag{4.20}$$

$$5 \cdot 10^{-17} L^3 \quad \text{für } m_2^b \tag{4.21}$$

ist mit dem Ansatz αL^β bestimmt worden. Der Fehler skaliert wie erwartet zwischen den 8 Byte und 4 Byte Versionen.

Im Folgenden wird eine erweiterte Notation für die Koeffizienten benutzt

$$r_n^{y,k} \text{ für } r_n \text{ aus } m_k^y \tag{4.22}$$

und entsprechend für s_n und t_n. Desweiteren werden die Koeffizienten von m_1^a und m_2^b diskutiert. Die bekannten Koeffizienten neben denen von m_1^b, m_2^c und m_2^d sind

$$\begin{aligned}
m_1^a: \quad & s_0^{a,1} = 2b_0 && \text{universelle } \beta\text{-Funktion} \ , \\
& s_1^{a,1} = 0 && \text{tree-level Verbesserung}, \\
m_2^a: \quad & t_0^{a,2} = 0 && \text{universelle } \beta\text{-Funktion} \ , \\
& s_0^{a,2} = 2b_1 && \text{universelle } \beta\text{-Funktion} \ , \\
& t_1^{a,2} = 0 && \text{tree-level Verbesserung}.
\end{aligned}$$

Sie können zur Kontrolle bestimmt werden. Aus den Gleichungen

$$0 = r_1^{a,1} + c_t^{(1)} r_1^{b,1} \qquad I^{-1} \text{ in } m_1 \ , \tag{4.23}$$

$$0 = s_1^{a,2} + c_t^{(1)} s_1^{b,2} \qquad \ln(I) I^{-1} \text{ in } m_2 \ , \tag{4.24}$$

$$0 = r_1^{a,2} + c_t^{(1)} r_1^{b,2} + \left[c_t^{(1)}\right]^2 r_1^{c,2} + c_t^{(2)} r_1^{d,2} \qquad I^{-1} \text{ in } m_2 \tag{4.25}$$

folgt jeweils das Verschwinden der angegebenen I Potenzen. Mit geeigneter Wahl der Verbesserungskoeffizienten $c_t^{(1)}$ und $c_t^{(2)}$ wird der Kontinuumslimes mit der Ordnung $O(a^2)$ erreicht. Die Konsistenz der Gleichungen (4.23) und (4.24) kann als weiterer Test an die Zwei Loop Rechnung verstanden werden. Mit Hilfe der Gleichung (4.25) wird der Zwei Loop Koeffizient $c_t^{(2)}$ fixiert.

[2] 4 Byte entspricht einer relativen Genauigkeit von etwa $10^{7.2}$, 8 Byte von $10^{15.9}$ und 16 Byte von 10^{34}.

Die zu bestimmenden Koeffizienten $r_n^{y,k}$, $s_n^{y,k}$ und $t_n^{y,k}$ können mit Hilfe der Operatoren aus den Gleichungen (4.5) und (4.6) auf die Form der Gleichung (4.4) gebracht werden. Die Koeffizienten der Ein Loop Störungstheorie sind zur Kontrolle analysiert worden, wobei $m_1^a(I)$ von Peter Weisz verwendet wurde.

In Abbildung 4.2 sind die aus dem Blocking hervorgegangenen Datensätze für $r_0^{a,2}$ aufgelistet. In allen Daten dominiert der systematische Fehler. Wie in [16] beschrieben, ist der systematische Fehler in der asymptotischen Natur der Entwicklung zu suchen und nur durch Daten mit größerem I zu reduzieren. Falls m_2^X für $I > 32$ mit 8 Byte Präzision bekannt wäre, würde der weiter ansteigende numerische Fehler den Gesamtfehler bestimmen und so eine Fehlerreduktion verhindern. Daher werden für eine deutliche Verringerung des Fehlers größere I bei erweiterter Präzision benötigt. Beides zusammen ist mit heutigen Workstations nicht praktikabel.

Aus den Zwei Loop Koeffizienten folgt $c_t^{(1)} = -0.093(13)$, was innerhalb der Fehler mit dem genaueren Wert der Ein Loop Entwicklung $c_t^{(1)} = -0.08896(23)$ übereinstimmt.

Es zeigt sich, daß für die Extrapolation von $c_t^{(2)}$ eine spezielle Größe eingeführt werden muß. Die Bestimmung der Koeffizienten $r_1^{a,2}$ und $r_1^{b,2}$ durch die Subtraktion der logarithmischen Terme mit den vorher bestimmten Koeffizienten $s_1^{a,2}$ und $s_1^{b,2}$ ist aussichtslos. Dies liegt an den, im Vergleich zu den numerischen Fehlern der Koeffizienten m_2^X, erheblich größeren Fehlern von $s_1^{a,2}$ und $s_1^{b,2}$. Mit dem Interpolationsoperator $R_{Int}[f](I) = (f(I_+) + f(I_-))/2$ ist $R_{rln} = R_{Int} - \ln(I)R_0$ zu konstruieren. Dieser Operator extrahiert den konstanten Term aus $r + s\ln(I) + O(I^{-1})$ und ermöglicht damit die Bestimmung von $r_1^{a,2}$ und $r_1^{b,2}$. Die Verwendung der Gleichung (4.25) liefert dann jedoch nur einen ungenauen Wert für $c_t^{(2)}$. Mit den, entsprechend $\tilde{m}_2^a$ definierten, von Divergenzen befreiten Koeffizienten $\tilde{m}_1^a(I) = m_1^a(I) - 2b_0\ln(I)$ ist $c_t^{(1)}(I) = 1/r_1^{b,1}R_{-1}R_L[\tilde{m}_1^a](I)$ gegeben. Die I abhängige Größe C, deren konstanter Anteil $c_t^{(2)}$ ist, ist durch

$$C(I) = -\frac{1}{r_1^{d,2}}\left\{R_{-1}R_L\left[\tilde{m}_2^a + m_2^b c_t^{(1)}\right](I) + r_1^{c,2}\left[c_t^{(1)}(I)\right]^2\right\} \tag{4.26}$$

mit

$$\left(\tilde{m}_2^a + m_2^b c_t^{(1)}\right)(I) = \tilde{m}_2^a(I) + m_2^b(I)c_t^{(1)}(I) \tag{4.27}$$

gegeben. Dieser Schätzer liefert für $c_t^{(2)}$ den kleinsten Fehler.

In Tabelle (4.2) sind für alle extrapolierten Koeffizienten die anzuwendenden Blocking-Schritte und Ausgleichsrechnungen angegeben.

Die Entwicklungskoeffizienten der Störungsreihe

$$g_{SF}^2(L) = g_0^2 + e_1(L/a)g_0^4 + \left[e_2(L/a) + e_1(L/a)^2\right] g_0^6 + O(g_0^8) \quad (4.28)$$

sind im Kontinuumlimes

$$e_1(I) = 0.36828215(13) + 2b_0 \ln(I) \ , \quad (4.29)$$

$$e_2(I) = 0.048085(63) + 2b_1 \ln(I) \ . \quad (4.30)$$

Die Entwicklung von c_t ist

$$c_t(g_0^2) = 1 - 0.08896(23)g_0^2 - 0.0301(25)g_0^4 + O(g_0^6) \ . \quad (4.31)$$

Koeffizient	Bestimmter Wert	Kommentar	Blocking mit	auf
$t_0^{a,2}$	$0 \pm 9 \cdot 10^{-4}$	$\ln^2$-Divergenz von m_2^a	$\prod_{i=1}({R_i}^3 F_i^4){R_0}^2$	$-\frac{1}{2}m_2^a$
$s_0^{a,2}$	$2b_1 \pm 1.4\%$	universelle β-Funktion	$\prod_{i=2}({R_i}^3 F_i^4){R_1}^2 F_1^3 R_0$	m_2^a
$r_0^{a,2}$	0.048085(63)	$e_2(1)$	$\prod_{i=2}({R_i}^3 F_i^4){R_1}^2 F_1^3$	$\tilde{m}_2^a$
$t_1^{a,2}$	$0 \pm 1.5 \cdot 10^{-3}$	tree-level Verbesserung	$\prod_{i=1}({R_i}^3 F_i^4){R_0}^2 R_L R_0$	$-\frac{1}{2}\tilde{m}_2^a$
$s_1^{a,2}$	0.0259(36)	mit $s_1^{b,2}$ folgt $c_t^{(1)}$	$\prod_{i=1}({R_i}^3 F_i^4) R_0 R_L R_0$	$-\tilde{m}_2^a$
$r_1^{a,2}$	$-0.074(54)$	mit $r_1^{b,2}$, $c_t^{(1)}$ folgt $c_t^{(2)}$	$\prod_{i=1}({R_i}^3 F_i^4)) R_{rln} R_L R_0$	$-\tilde{m}_2^a$
$r_0^{b,2}$	$0 \pm 3.1 \cdot 10^{-5}$	konst. Teil von m_2^b	$\prod_{i=1}({R_i}^2 F_i^3)$	m_2^b
$s_1^{b,2}$	0.27848(40)	mit $s_1^{a,2}$ folgt $c_t^{(1)}$	$\prod_{i=1}({R_i}^2 F_i^3) R_0 R_L$	m_2^b
$r_1^{b,2}$	0.16831(84)	mit $r_1^{a,2}$, $c_t^{(1)}$ folgt $c_t^{(2)}$	$\prod_{i=1}({R_i}^2 F_i^3) R_{rln} R_L$	m_2^b
$s_0^{a,1}$	$2b_0 \pm 0.07\%$	universelle β-Funktion	$\prod_{i=1}({R_i}^2 F_i^3) R_0$	m_1^a
$s_1^{a,1}$	$0 \pm 3.1 \cdot 10^{-3}$	tree-level Verbesserung	$\prod_{i=1}({R_i}^2 F_i^3) R_0 R_L R_0$	$-\tilde{m}_1^a$
$r_0^{a,1}$	0.3682815(13)	$e_1(1)$	$\prod_{i=2}({R_i}^2 F_i^3) R_1 F_1^2$	$\tilde{m}_1^a$
$r_1^{a,1}$	$-0.17791(45)$	mit $r_1^{b,1}$ folgt $c_t^{(1)}$	$\prod_{i=1}({R_i}^2 F_i^3) R_L$	$\tilde{m}_1^a$
r_0^C	$-0.0301(25)$	$c_t^{(2)}$	$\prod_{i=1}({R_i}^3 F_i^4)$	C

Tabelle 4.2: Die extrapolierten Koeffizienten mit Resultaten und dem verwendeten Blocking. F_n^k bezeichnet eine Ausgleichsrechnung mit k Parametern und einer Potenz des Resttermes von n. Abhängigkeiten von analytischen Koeffizienten sind in der Kommentarspalte nicht aufgeführt. e_1 und e_2 sind in Gleichung (4.29) definiert. Die analytisch bekannten Größen werden innerhalb der Fehler reproduziert, daher ist dort nur der Fehler angegeben. Alle Fehler werden von dem systematischen Fehler dominiert.

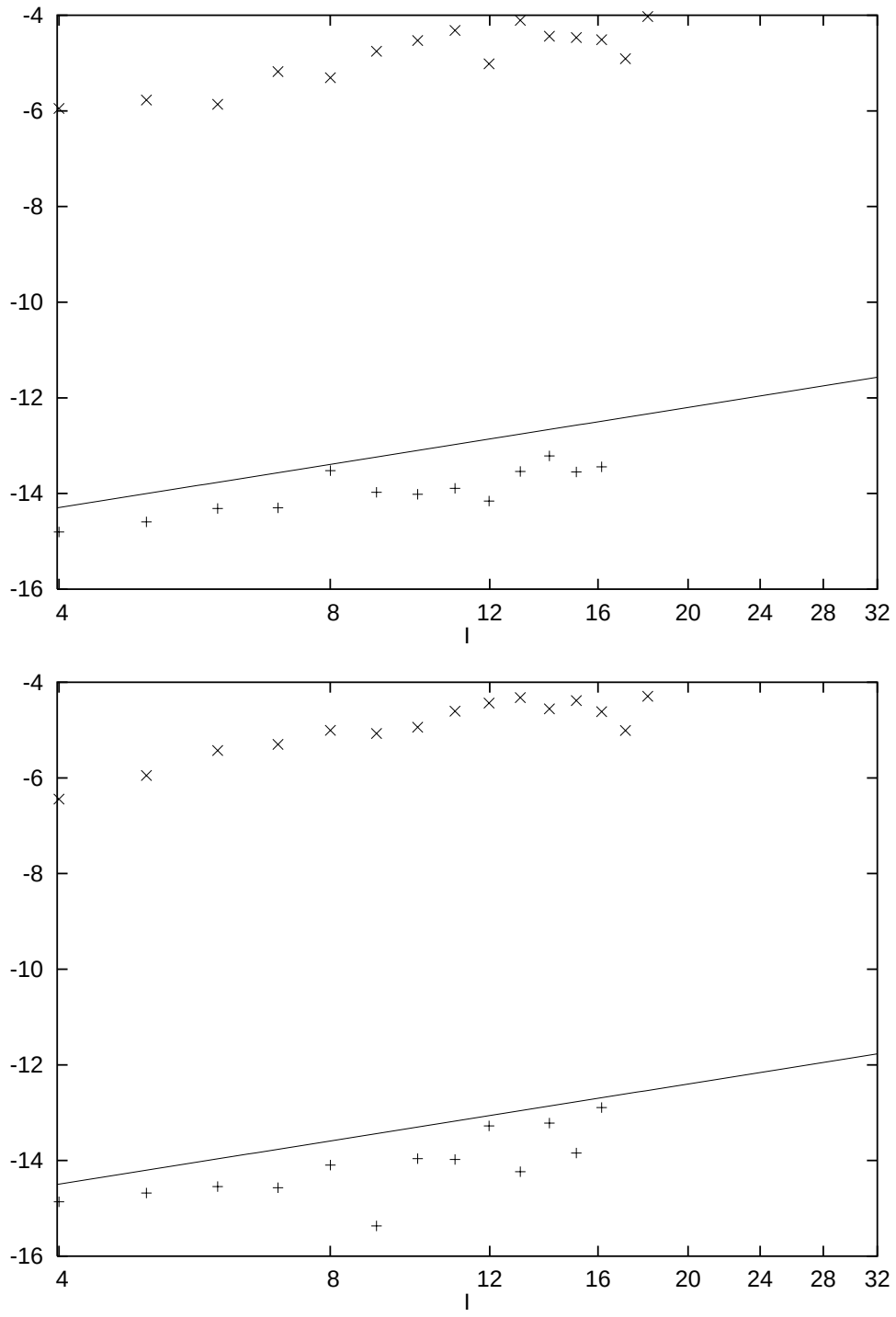


Abbildung 4.1: Der dekadische Logarithmus des relativen Fehlers von m_2^a (oben) und von m_2^b (unten) in Abhängigkeit von I für die 4 Byte ($\times$) und 8 Byte Version ($+$) des Programmes, sowie die verwendete Extrapolation.

```
# \tilde{m}_2^a: r0 assumed: t0=0,s0,t1=0
# Fitparameter:
const   .04903893    .04809044     .04810319     .04993232
1/L    -.00562286    .05477608    1.77914873     .419E+04
lnL/L  -.01759328   -.60895884    **********     *********
# L    Data:
18.0                                            .048(42)
18.5
19.0                                            .048(35)
19.5                                .04810(25)
20.0                                            .048(30)
20.5                                .04810(22)
21.0                .04809(13)                  .048(25)
21.5                                .04809(19)
22.0   .04877(26)   .04809(12)                  .049(23)
22.5                                .04809(17)
23.0   .04879(25)   .04809(11)                  .047(21)
23.5                                .04809(15)
24.0   .04880(24)   .048088(98)                 .051(20)
24.5                                .04809(14)
25.0   .04882(23)   .048087(91)                 .044(21)
25.5                                .04809(13)
26.0   .04883(22)   .048087(85)                 .051(24)
26.5                                .04809(12)
27.0   .04884(21)   .048086(80)                 .048(30)
27.5                                .04809(11)
28.0   .04884(21)   .048086(75)                 .048(38)
28.5                                .048091(94)
29.0   .04885(20)   .048085(71)
29.5                                .048093(88)
30.0   .04885(19)   .048085(67)
30.5
31.0   .04886(19)   .048085(63)
31.5
32.0   .04886(18)
Q      .03697123    .00003074      .00687602     .00980847
```

Abbildung 4.2: Die geblockten Koeffizienten $r_0^{a,2}$ in Abhängigkeit von I.

Kapitel 5

Numerische Gitterrechnungen

Hier sollen nicht alle Einzelheiten und Methoden von Gittersimulationen diskutiert werden. Vorausgesetzt werden Kenntnisse über das Monte Carlo Verfahren und dessen Fehlerabschätzungen. Die Methode zur Berechnung der Skalenabhängigkeit der Kopplung $g^2_{SF}(L)$ mit Hilfe des Schrödinger-Funktionals wird genauer erläutert.

Die nichtperturbative Berechnung der Kopplung $g^2_{SF}(L)$ auf dem Gitter basiert auf endlichen Reskalierungen des Arguments, also auf der Reskalierung der Boxgröße L. Dazu wird die step scaling Funktion σ bestimmt. Für eine Kopplung $g^2_{SF}(L)$ in dem Schrödinger-Funktional mit Boxgröße L ist $\sigma(s, g^2_{SF}(L))$ gleich der Kopplung $g^2_{SF}(sL)$ in der um s skalierten Box

$$g^2_{SF}(sL) = \sigma(s, g^2_{SF}(L)) \ . \tag{5.1}$$

Sie ist verbunden mit der Callan Symanzik β-Funktion

$$\beta(g_{SF}(L)) = -L\frac{\partial}{\partial L} g_{SF}(L) \tag{5.2}$$

durch

$$\ln(s) = -\int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{\beta(u)} \quad \left| \begin{array}{l} u_2^2 = g^2_{SF}(sL) = \sigma(s, g^2_{SF}(L)) \\ \\ u_1^2 = g^2_{SF}(L) \end{array} \right. \ . \tag{5.3}$$

Die step scaling Funktion ist also die integrierte β-Funktion[1]. Sie erfüllt die rekursive Relation

$$g^2_{SF}(s_1 s_2 L) = \sigma(s_1 s_2, g^2_{SF}(L)) \tag{5.4}$$

$$= \sigma(s_1, \sigma(s_2, g^2_{SF}(L))) \ . \tag{5.5}$$

[1] $\frac{\partial}{\partial s}\sigma(s, g^2_{SF}(L))\big|_{s=1} = -2g_{SF}(L)\beta(g_{SF}(L))$ ist äquivalent zu Gleichung (5.3). Diese Darstellung wird hier nicht verwendet.

Auf dem Gitter ist es möglich, die Kopplung $g^2_{SF}(L)$ des Schrödinger-Funktionals präzise zu bestimmen, da durch eine Observable [39] die Kopplung direkt gemessen werden kann

$$g^2_{SF}(L) = \Gamma'_0 \left\langle \frac{\partial S}{\partial \eta} \right\rangle^{-1} \tag{5.6}$$

mit

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = -c_t(g_0^2) \frac{2a^3}{g_0^2 L} \sum_{\vec{x},k} \left(E_k(\vec{x}) - E'_k(\vec{x}) \right) \ , \tag{5.7}$$

$$E_k(\vec{x}) = \frac{-1}{a^2} \begin{cases} \Re\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}^1 U_{0k}(t,\vec{x})\right)\big|_{t=0} & \text{für } SU(3) \ , \\ \Re\mathrm{tr}\left(\mathrm{T}^0 U_{0k}(t,\vec{x})\right)\big|_{t=0} & \text{für } SU(2) \end{cases} \tag{5.8}$$

und entsprechend für E' bei $t = T - 1$. Andere Kopplungen können nur indirekt aus Observablen gewonnen werden, wie zum Beispiel $g^2_{qq}(r)$. Sie ist durch das statische Potential zwischen zwei Quarks im Abstand r definiert und wird durch Wilson Loops mit einer Extrapolation zu unendlich großer Ausdehnung in der Zeit bestimmt.

Zur Berechnung der step scaling Funktion mit großem $s = 2^k$ ist wegen Gleichung (5.5) eine Sequenz von Werten

$$u_{k+1} = \sigma(2, u_k) \tag{5.9}$$

ausreichend. Es wird kein um 2^k skaliertes Gitter benötigt.

Um die finite-a Effekte in Simulationen zu quantifizieren, wird eine Funktion

$$\Sigma(s, u, a/L) = \sigma(s, u) + O(a/L) \tag{5.10}$$

eingeführt. Die Extrapolation von $\Sigma(s, u, a/L)$ zu $a/L \to 0$ liefert $\sigma(s, u)$. Mit den unbekannten nichtperturbativen Koeffizienten $c_t(g_0^2)$ verbessert sich die Konvergenz zu dem Kontinuumslimes zu a^2.

Zunächst wird für verschiedene L/a die nackte Kopplung $g_0^2 = 2N/\beta$ so eingestellt, daß sich die Kopplung u_k ergibt. Zur Berechnung von $\Sigma(2, u_k, a/L)$ wird nun die Anzahl der Gitterpunkte jeder Dimension um $s = 2$ skaliert und Σ bestimmt. Durch die Wahl desselben β bleibt der Gitterabstand a konstant.

Aus der beschriebenen Extrapolation ist nun $u_{k+1} = \sigma(2, u_k)$ zu ermitteln. Die Berechnung der nächsten Kopplung u_{k+2} geschieht auf die gleiche Weise. Insbesondere können Gitter mit der gleichen Anzahl von Gitterpunkten verwendet werden. In Abbildung 5.1 ist das Verfahren illustriert.

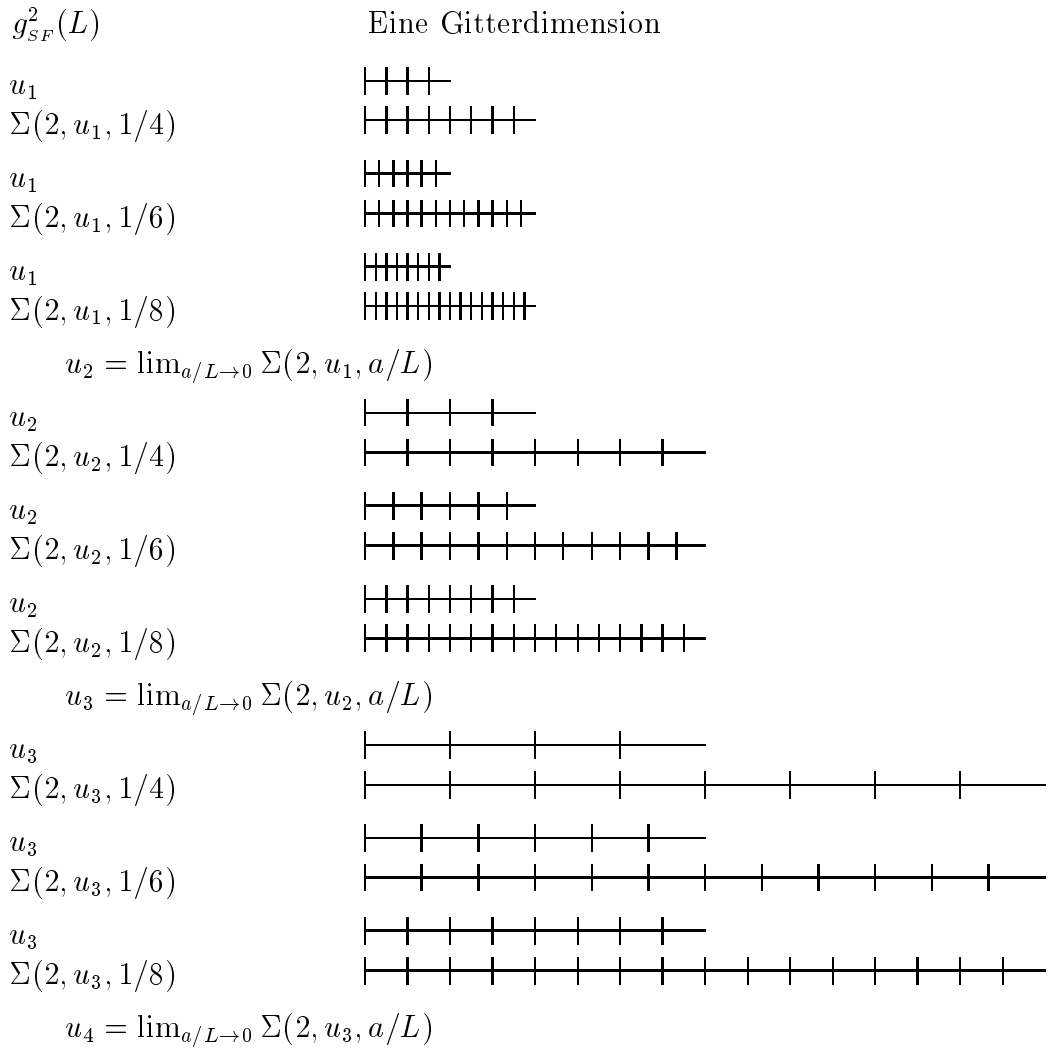


Abbildung 5.1: Mit den Sequenzen von Monte Carlo Simulationen (pro Zeile eine) wird sukzessive $u_{k+1} = \sigma(2, u_k) = \lim_{a/L\to 0} \Sigma(2, u_k, a/L)$ bestimmt. Dabei ist für die verschiedenen Gitterabstände eine Abstimmung von $\beta = 2N/g_0^2$ erforderlich, so daß sich die Kopplung u_k ergibt. Die Verwendung der Gleichung (5.5) liefert $u_4 = \sigma(8, u_1)$.

Die Abstimmung der nackten Kopplung g_0^2 kann mit der perturbativ bekannten Näherung der Funktion $g_0^2(a)$ vereinfacht werden. In den numerischen Simulationen wurden die jeweils bekannten perturbativen Entwicklungskoeffizienten von c_t verwendet. Für die $SU(3)$ wurde in [40] die Ein Loop Näherung genutzt. Innerhalb der statistischen Fehler wurde für die verwendeten Kopplungen und Gittergrößen keine a/L Abhängigkeit von $\Sigma(s, g^2_{SF}(L), a/L)$ beobachtet. Die Berechnungen in der $SU(2)$ wurden zu-

nächst mit dem tree-level Wert $c_t = 1$ durchgeführt [41]. In [42] ist der Einfluß von $c_t^{(1)}$ auf die Kontinuumsextrapolation nachgewiesen. Dies ist die erste Arbeit in der der Erfolg des störungstheoretischen Verbesserungsprogramms in einer 4-dimensionalen Yang-Mills Theorie nachgewiesen wurde.

Die Gitterartefakte werden durch

$$\delta(a/L, s, g_{SF}^2(L)) = \frac{\Sigma(s, g_{SF}^2(L), a/L) - \sigma(s, g_{SF}^2(L))}{\sigma(s, g_{SF}^2(L))} \tag{5.11}$$

parametrisiert und können mit der Entwicklung von $\delta(a/L, s, g_{SF}^2)$ in g_{SF}^2 verglichen werden. Dabei können die Effekte durch die Verwendung der störungstheoretischen Verbesserungskoeffizienten $c_t^{(i)}$ in den Monte Carlo Simulationen bei der Auswertung berücksichtigt werden [39]. Die Entwicklung von $\delta(a/L, s, g_{SF}^2)$ in g_{SF}^2 wird für die $SU(3)$ in Kapitel (7.5) diskutiert.

Die Skala wird nichtperturbativ in der Regel durch Vergleich mit Operatoren, die in einem unendlichen Volumen definiert sind, fixiert. Dazu ist eine Sequenz von Simulationen notwendig bei der für die Skala r gilt $a \ll r \ll L$.

Für die $SU(2)$ [39] wurde dazu zunächst die String tension gewählt, später, wie auch für die $SU(3)$ [40], die Sommer-Skala r_0 [42]. Sie ist durch die Kraft F zwischen einem statischen Quark-Antiquark Paar definiert

$$F(r_0)r_0^2 = 1.65\ . \tag{5.12}$$

Der Wert 1.65 führt in verschiedenen phänomenologischen Modellen (z.B. Cornell [43] und Richardson [44]) zu $r_0 = 0.5$fm. Um mit der String tension die Skala mit einem ähnlichen Fehler wie die Sommer-Skala r_0 zu berechnen, müssen zusätzliche Annahmen über das Verhalten des Potentials bei mittleren Skalen verwendet werden. In der „quenched Approximation“ oder Simulationen der QCD mit dynamischen Quarks kann die Skala Modellunabhängig durch eine Meson- oder Hardronmasse gesetzt werden.

Die erreichte numerische Genauigkeit in der Berechnung von Σ ist ausreichend, um mit dem extrapolierten σ die Gleichung (5.5) mehrfach zu verwenden. Dabei ist von Vorteil, daß die Werte von Σ in unabhängigen Simulationen gewonnen werden, also unkorreliert sind. Für die $SU(3)$ sind drei Iterationen mit $s = 2$ und eine mit $s = 3/2$ durchgeführt worden. Die Evolution der Kopplung ist so über $s_{total} = 24$ bestimmt worden. In einer bisher nur in Übersichtsartikeln [45, 46, 47, 48] veröffentlichten, erweiterten Bestimmung von g_{SF}^2 ist die Skala auf $s_{total} = 256$ vergrößert worden.

Kapitel 6

Die Entwicklung von $\alpha_{\overline{MS}}$ in α_0

In diesem Kapitel soll die Berechnung der Entwicklung von $\alpha_{\overline{MS}}$ in α_0

$$\alpha_{\overline{MS}}(s/a) = \alpha_0 + d_1(s)\alpha_0^2 + \left[d_2(s) + d_1(s)^2\right]\alpha_0^3 \ldots \tag{6.1}$$

skizziert werden. Zusammen mit der in dieser Arbeit bestimmten Entwicklung von α_{SF} in α_0, kann die Zwei Loop Relation zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ in α_{SF} angegeben werden. Die Ein Loop Relation zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ und α_{SF} ist, wie in Kapitel (2.1) beschrieben ist, auch direkt bestimmt worden. Die dort verwendete Methode ist nur schwer auf die Zwei Loop Entwicklung auszudehnen und die Verbesserungkoeffizienten können so nicht bestimmt werden. Für die $SU(N)$ ist der Ein Loop Koeffizient $d_1(s)$ in [12] und [13] angegeben worden.

Der Zwei Loop Koeffizient ist von Lüscher und Weisz mit der im Folgenden diskutierten Methode berechnet worden und in [14] publiziert. Die Berechnung basiert auf der Background field Methode, welche für das Gitter allgemein ausgearbeitet und verwendet wurde [49]. Dort werden die bekannten Ausdrücke für die dimensionell regularisierten Propagatoren im $\overline{MS}$ Schema mit den nicht renormierten Propagatoren auf dem Gitter in Relation gesetzt.

Ein wesentlicher Bestandteil der Methode basiert auf der effizienten numerischen Bestimmung von Feynmandiagrammen auf dem Gitter in unendlichem Volumen [50]. Dabei sind die Propagatoren und Vertizes, im Gegensatz zu dem Schrödinger-Funktional, nicht von dem Background field abhängig. Details der Rechnung sind in [14] zu finden, während in [51] die Ergebnisse diskutiert sind.

Die Darstellung beschränkt sich auf einen Überblick der Berechnung von Feynmandiagrammen auf dem Gitter, die für die anschließend diskutierte Background field Methode benötigt werden.

6.1 Feynmandiagramme auf dem Gitter im Ortsraum

Die Berechnung von Feynmandiagrammen mit dem Propagator

$$1/\hat{p}^2 \quad \text{mit } \hat{p}_\mu = 2\sin(p_\mu/2) \quad \text{und } \hat{p}^2 = \sum_\mu \hat{p}_\mu^2 \tag{6.2}$$

der Form

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2 \hat{q}^2 \hat{r}^2} \quad r = -k - q \tag{6.3}$$

soll hier skizziert werden. Mit dem Propagator im Ortsraum

$$G(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipx}}{\hat{p}^2} \tag{6.4}$$

ergibt sich

$$A = \sum_{x \in \Lambda} G(x)^3 \ . \tag{6.5}$$

Grundlage der numerischen Bestimmung des freien Propagators auf dem Gitter ist

$$(\nabla_\mu^* + \nabla_\mu) G(x) = x_\mu H(x) \ , \tag{6.6}$$

mit

$$\nabla_\mu f(x) = f(x + \hat{\mu}) - f(x) \ , \tag{6.7}$$

$$\nabla_\mu^* f(x) = f(x) - f(x - \hat{\mu}) \ , \tag{6.8}$$

wobei $H(x)$ eine bekannte, nicht von μ abhängige Funktion ist. Dies führt auf eine Rekursionsformel, die erlaubt den Propagator als Linearkombination von

$$G(0,0,0,0), G(1,0,0,0), G(1,1,0,0), G(1,1,1,0), G(1,1,1,1) \tag{6.9}$$

auszudrücken. Die Definitionsgleichung für den Propagator im Ortsraum $-\sum_\mu \nabla_\mu^* \nabla_\mu G(x) = \delta_{x,0}$ und Gittersymmetrien reduzieren die Abhängigkeit des Propagators auf zwei Werte

$$G(x) = r_1(x) G(0,0,0,0) + r_2(x) G(1,1,0,0) + r_3(x)/\pi^2 + r_4(x) \ , \tag{6.10}$$

wobei die r_i exakt zu berechnende, rationale Funktionen sind. Werden die beiden Unbekannten in Gleichung (6.10) als Linearkombination von $G(n,0,0,0)$ und $G(n,1,0,0)$ ausgedrückt, so können genau diese für große n vernachlässigt werden, da ihre Koeffizienten von der Ordnung $O(10^{-n})$ sind.

Die numerische Berechnung der Summe aus Gleichung (6.5) kann mit der asymptotischen Form von $G(x)^3 : \{G(x)^3\}_{as}$ präzise durchgeführt werden. Die Summe

$$A' = \sum_{x\in\Lambda\setminus 0} G(x)^3 - \{G(x)^3\}_{as} \tag{6.11}$$

konvergiert schnell. Durch eine verallgemeinerte Zeta-Funktion ist ebenfalls

$$A'' = \sum_{x\in\Lambda\setminus 0} \{G(x)^3\}_{as} \tag{6.12}$$

zu berechnen. Damit ergibt sich

$$A = A' + A'' + G(0)^3 \ . \tag{6.13}$$

Die Berechnung von komplizierteren Diagrammen kann mit denselben Methoden durchgeführt werden. Es ergibt sich zum Beispiel

$$\sum_{x\in\Lambda,\mu} \left(-\nabla^*_\mu \nabla_\mu G(x)\right)^2 G(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\hat{k}^2_\mu \hat{q}^2_\mu}{\hat{k}^2 \hat{q}^2 \hat{r}^2} \quad r = -k - q \ . \tag{6.14}$$

Für Diagramme mit äußerem Impuls ist im Kontinuumslimes nur die Entwicklung für $p \to 0$ relevant. Durch geeignete Subtraktion der Divergenzen ist auch hier die numerische Bestimmung durch eine Konstruktion von stark konvergenten Summen möglich.

6.2 Background field Methoden

Die Verwendung von Background field Methoden ist in der dimensionellen Regularisierung zum Studium der Renormierbarkeit von nicht abelschen Eichtheorien schon lange erfolgreich genutzt worden [52, 53]. Die perturbative Entwicklung der Renormierungskonstante $Z_1^{-1} Z_3^{3/2}$ für die Kopplung ist aus dem Gluon- und Background field Propagatoren zu extrahieren. Es muß also nicht, wie üblich, eine Drei Punkt Funktion berechnet werden. Dies reduziert die Anzahl der Feynmandiagramme erheblich.

Das Hintergrundfeld B wird als unabhängiges Feld betrachtet und in die Kontinuumswirkung durch[1] $A_\mu = B_\mu + g_0 q_\mu$ eingeführt. Das Hintergrundfeld

[1] q_μ ist das „Quanten“ Feld.

muß nicht den klassischen Feldgleichungen genügen. Es hat den Charakter einer Quelle.

Die Legendretransformierte freie Energie der eichfixierten Zustandssumme in Abhängigkeit der konjugierten Quellen für q, c und $\overline{c}$, die effektive Wirkung

$$\Gamma[B, Q, \overline{C}, C] \ , \tag{6.15}$$

erfüllt die BRS-Symmetrie. Sie ist eine Konsequenz der Eichsymmetrie der nicht eichfixierten Wirkung. Die Shift Transformation ist in der Kontinuumstheorie definiert durch die Variation

$$\delta_S F[B, q]^a_\mu = g_0 \frac{\delta F}{\delta B^a_\mu} - \frac{\delta F}{\delta q^a_\mu} \ , \tag{6.16}$$

wobei F ein beliebiges Funktional sein kann. Die Transformation kann als Shift in den Quantenfeldern der nicht eichfixierten Wirkung angesehen werden. Es gilt für die Kontinuumswirkung S

$$[\delta_S S]^a_\mu = \delta_{BRS}[(D_\mu + g_0 \mathcal{A} dq_\mu)\overline{c}]^a \ . \tag{6.17}$$

Eine entsprechende Gleichung existiert auf dem Gitter ebenfalls. Es folgen Relationen für die Zwei Punkt Funktionen und Vertizes der effektiven Wirkung und für die freie Energie. Die n Punkt Funktionen werden durch die Entwicklung der effektiven Wirkung nach Potenzen der Felder definiert, nicht durch die Entwicklung in der Kopplungskonstante g_0. Die BRS-Symmetrie wird auch von der renormierten effektiven Wirkung erfüllt. Diese Eigenschaft schränkt die möglichen Counterterme ein und ermöglicht so, effiziente Renormierbarkeitsbeweise zu führen.

Für die perturbative Entwicklung der Kopplungskonstante ist die Background field Methode besonders geeignet, da das Hintergrundfeld keine Renormierung erfährt. Wir haben für die Zwei Punkt Funktionen der effektiven Wirkung

$$\Gamma_R^{Backg}(p, g_R) = \Gamma_0^{Backg}(p, g_0) \ , \tag{6.18}$$

$$\Gamma_R^{Gluon}(p, g_R, \lambda_R) = Z_3 \Gamma_0^{Gluon}(p, g_0, \lambda_0) \ , \tag{6.19}$$

mit $g_R = Z_1^{-1} Z_3^{3/2} g_0$ und $\lambda_R = Z_3 \lambda_0$. Da die Background field Funktion proportional zu $1/g^2$ ist, läßt sich aus den beiden Zwei Punkt Funktionen die Renormierung der Kopplung bestimmen. Wie zu erwarten ist, verschwindet die Abhängigkeit von dem Eichparameter λ. Für die Relationen zwischen den Zwei Punkt Funktionen ist es ausreichend, die skalaren Amplituden in

den Funktionen zu betrachten. Die Amplituden in der dimensionellen Regularisierung im $\overline{MS}$ Schema sind bekannt und zum Beispiel in [54] und [55] publiziert. Die Berechnungen auf dem Gitter müssen daher nur bis zu der Ordnung $O(p^2)$ durchgeführt werden.

Kapitel 7

Anwendung der Störungsreihe

Durch die Kombination von Störungsentwicklungen in g_0^2 kann g_{SF}^2 in $g_{\overline{MS}}^2$ für kleine Kopplungen umgerechnet werden. Verschiedene Verfahren liefern dabei Werte, die in der betrachteten Ordnung der Störungsentwicklung gleich sind. Mit Hilfe der Entwicklungskoeffizienten kann die Anwendbarkeit der störungstheoretischen Relationen nicht nur für $g_{\overline{MS}}^2$ diskutiert werden.

In diesem Kapitel betrachten wir die impulsabhängigen Kopplungen

$$\alpha_X(q) = \frac{g_X^2(L)}{4\pi} \text{ mit } q = 1/L \ , \tag{7.1}$$

um bei der üblichen Konvention zu bleiben. Die Relationen zwischen den Kopplungen sind

$$\alpha_{\overline{MS}}(\hat{s}/a) = \alpha_0 + d_1(\hat{s})\alpha_0^2 + \left[d_2(\hat{s}) + d_1(\hat{s})^2\right]\alpha_0^3 \ldots \ , \tag{7.2}$$

$$\alpha_{SF}(\tilde{s}q) = \alpha_0 + e_1(\tilde{s})\alpha_0^2 + \left[e_2(\tilde{s}) + e_1(\tilde{s})^2\right]\alpha_0^3 \ldots \ , \tag{7.3}$$

$$\alpha_P(q) = \frac{\alpha_0}{P} = \alpha_0 - p_1\alpha_0^2 + (p_1^2 - p_2)\alpha_0^3 \ldots \ , \tag{7.4}$$

mit bekannten Koeffizienten. α_P ist die Tadpole verbesserte Kopplung nach [56], [57] und [58] mit den aus [59] bekannten Entwicklungskoeffizienten der Plaquette[1] P in α_0, p_1 und p_2. Die Berechnung der in [14] publizierten Koeffizienten d_1 und d_2 ist in Kapitel (6) diskutiert. Referenzen zu e_1 sind in der Einleitung (1) zu finden. Es sei hier noch einmal betont, daß in der vorliegenden Arbeit ausschließlich e_2 für die $SU(3)$ berechnet wurde.

7.1 Die Relation zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ und α_{SF}

Durch die Kombination von Gleichung (7.2) mit (7.3) ergibt sich

$$\alpha_{\overline{MS}}(sq) = \alpha_{SF}(q) + c_1(s)\alpha_{SF}^2(q) + \left[c_2(s) + c_1(s)^2\right]\alpha_{SF}^3(q) \ldots \tag{7.5}$$

[1] Der Drei Loop Koeffizient p_3 ist in [60] zu finden.

mit den Koeffizienten[2]

$$c_1(s) = d_1(s) - e_1(1) = -8\pi b_0 \ln(s) + 1.2556232(62) \ , \tag{7.6}$$

$$c_2(s) = d_2(s) - e_2(1) = -32\pi^2 b_1 \ln(s) + 1.197(10) \ . \tag{7.7}$$

Das Skalenverhältnis s ist zunächst beliebig. Es sollte daher so gewählt werden, daß der Fehler durch Verwendung der trunkierten Gleichung (7.5) minimiert wird. Durch den Skalenfaktor s ergibt sich die Kopplung mit gegebenem $\alpha_{SF}(q)$ bei sq. Dies kann ausgeglichen werden durch die Verwendung der nichtperturbativen, integrierten β-Funktion vor der Konversion oder durch die perturbative β-Funktion im $\overline{MS}$ Schema. Die Abhängigkeit von dem gewählten Skalenparameter sollte dabei klein sein.

Die Wahl von s sollte eine gute Konvergenz der Reihe erwarten lassen, das heißt, die Beiträge sollten mit ansteigender Ordnung sinken, um den Fehler durch höhere Ordnungen abschätzen zu können. Ein großer Skalenfaktor erfordert die „lange“ Integration der β-Funktion und ist deshalb mit zusätzlichem Fehler behaftet. Wenn möglich, ist die Wahl in ähnlichen Entwicklungen durch nichtperturbative Rechnungen zu motivieren. Wird in Gleichung (7.5) q durch q/s ersetzt, ist die linke Seite von s unabhängig. Es ist zu erwarten, daß die rechte Seite der modifizierten Gleichung nur schwach von s abhängig ist, wenn die Reihe gut konvergiert. Im Folgenden werden drei Wege zur Fixierung der Skala s diskutiert.

I. Wir setzten $s = 1$. Die Entwicklungskoeffizienten sind in keiner Weise optimiert.

II. Wir stellen die Bedingung $c_1(s) = 0$. Dies läßt sich mit einer Ein Loop Berechnung realisieren. Die Koeffizienten ergeben sich zu

$$\ln(s^{(\mathrm{II})}) = \frac{c_1(1)}{8\pi b_0} \ , \tag{7.8}$$

$$c_1(s^{(\mathrm{II})}) = 0 \ , \tag{7.9}$$

$$c_2(s^{(\mathrm{II})}) = c_2(1) - \frac{4\pi b_1 c_1(1)}{b_0} \ . \tag{7.10}$$

Der Skalenparameter fällt mit dem in Kapitel (7.3) diskutierten Verhältnis der Λ-Parameter zusammen.

III. Die Methode II läßt sich durch $c_n(s)\frac{d}{ds}c_n(s) = 0$ auf höhere Ordnungen verallgemeinern. Dabei sollte $\frac{d^2}{ds^2}c_n(s)^2 > 0$ gelten, so daß $|c_n(s)|$

[2]Die Fehler an einigen Koeffizienten werden der Übersichtlichkeit halber nicht angegeben. Alle angegebenen Stellen sind jedoch signifikant.

minimal gewählt ist. Diese Methode ist im Folgenden nur für $n = 2$ diskutiert. Es ergibt sich

$$\ln(s^{(\mathrm{III})}) = \frac{b_1 + 2b_0 c_1(1)/4\pi}{4b_0^2} \ , \tag{7.11}$$

$$c_1(s^{(\mathrm{III})}) = -\frac{4\pi b_1}{2b_0} \ , \tag{7.12}$$

$$c_2(s^{(\mathrm{III})}) = c_2(1) - \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi b_1}{b_0}\right)^2 - \frac{4\pi b_1 c_1(1)}{b_0} \ . \tag{7.13}$$

Die Minimierung des Zwei Loop Termes erfordert nur den Ein Loop Koeffizienten. Der Wert von $c_1(s^{(\mathrm{III})})$ ist, wie in [16] publiziert, universell.

Es gilt die universelle und für die $SU(N)$ von N unabhängige Beziehung

$$s^{(\mathrm{III})} = s^{(\mathrm{II})} \exp\left(\frac{b_1}{4b_0^2}\right) \tag{7.14}$$

$$\approx 1.23460 \ s^{(\mathrm{II})} \ . \tag{7.15}$$

Das Verhältnis der Skalenfaktoren ist ≈ 1 und deutet damit auf die erwartete, schwache Abhängigkeit der Skalenfixierung hin.

Für Entwicklungen von hohen Ordnungen sind weitere Schemata denkbar, die z.B. eine kollektive Bedingung an die Koeffizienten formulieren.

Im Folgenden werden zum Vergleich alle drei Alternativen berechnet, wobei lediglich II und III sinnvoll sind. Sie sollten im Sinne der schwachen Abhängigkeit dieselben Resultate ergeben.

In [40] ist neben α_{SF} eine weitere Kopplung α_{TP} nichtperturbativ in der $SU(2)$ berechnet worden[3]. Die Wahl des Skalenparameters zwischen der Entwicklung dieser beiden physikalischen Kopplungen konnte dort nichtperturbativ untersucht werden. Die Grundlage bildet die Berechnung von $\alpha_{TP}^{(\mathrm{nonp})}(q_{max})$ bei einem q_{max} das implizit durch $\alpha_{SF}(q_{max}) = 0.16535$ bestimmt ist. Die auf Ein Loop Niveau bekannte Entwicklung ist

$$\alpha_{TP}(sq) = \alpha_{SF}(q) + (1.5017 - 8\pi b_0 \ln(s))\alpha_{SF}^2(q) + O(\alpha_{SF}^3(q)) \ . \tag{7.16}$$

Die Methode I muß hier vollständig verworfen werden, da der Ein Loop Term $1.5017\alpha_{SF}^2(q_{max})$ nur etwa 50% zu der Differenz der Kopplungen $\alpha_{TP}(q_{max}) - \alpha_{SF}(q_{max})$ beiträgt. Ein Zwei Loop Koeffizient, der die verbleibende Differenz

[3] Die Kopplung α_{TP} ist auf einem Torus mit verdrehten (twisted) räumlichen Randbedingungen definiert und basiert auf Polyakov Loops.

reproduzieren kann, läge in der Größenordnung von 7. Mit der Methode I kann eine Fehlerabschätzung mit $\alpha_{SF}^3(q_{max})$ zu falschen Ergebnissen führen.

Mit der Verwendung der nichtperturbativen β-Funktion ergibt sich für die Methode II und III der Skalenfixierung

$$\alpha_{TP}^{(\mathrm{II})}(q_{max}) = 0.2289(6) + O(\alpha_{SF}^3) \ , \tag{7.17}$$

$$\alpha_{TP}^{(\mathrm{III})}(q_{max}) = 0.2299(9) + O(\alpha_{SF}^3) \ , \tag{7.18}$$

$$\alpha_{TP}^{(\mathrm{nonp})}(q_{max}) = 0.2374(26) \ . \tag{7.19}$$

Die Abweichungen lassen sich gut durch den Fehler des Termes der Ordnung $O(\alpha_{SF}^3)$ erklären

$$\alpha_{TP}^{nonp}(q_{max}) - \alpha_{TP}^{(i)}(q_{max}) = \alpha_{SF}(q_{max}/s)^3 \begin{cases} 0.7(3) & \text{für } i = \mathrm{II} \ , \\ 0.6(3) & \text{für } i = \mathrm{III} \ . \end{cases} \tag{7.20}$$

Die nichtperturbative Bestimmung zweier Kopplungen in [40] motiviert die Methode II und III.

Für die $SU(3)$ ergeben die drei Methoden der Skalenfixierung

$$\alpha_{\overline{MS}}^{(\mathrm{I})}(q) = \alpha_{SF}(q) + 1.255\alpha_{SF}(q)^2 + 2.774(11)\alpha_{SF}(q)^3 \ , \tag{7.21}$$

$$\alpha_{\overline{MS}}^{(\mathrm{II})}(2.048q) = \alpha_{SF}(q) + 0.271(11)\alpha_{SF}(q)^3 \ , \tag{7.22}$$

$$\alpha_{\overline{MS}}^{(\mathrm{III})}(2.529q) = \alpha_{SF}(q) - 0.36895\alpha_{SF}(q)^2 + 0.135(11)\alpha_{SF}(q)^3 \ . \tag{7.23}$$

Durch die nichtperturbative Bestimmung von α_{SF} bis zu $q = 14\mathrm{GeV}$ in [40] ist die Anwendung der Störungsreihe gerechtfertigt. Mit der Zwei Loop Relation ergibt sich für zwei exemplarisch gewählten Energien

$$\begin{aligned} \alpha_{\overline{MS}}^{(\mathrm{III})}(14.5\mathrm{GeV}) &= 0.1151(26)(\ \ 2) && \text{Zwei Loop} \ , \\ \alpha_{\overline{MS}}^{(\mathrm{III})}(78.2\mathrm{GeV}) &= 0.08400(130)(\ \ \ 6) && \text{Zwei Loop} \ . \end{aligned} \tag{7.24}$$

Die Quelle des ersten Fehlers ist die statistische Unsicherheit von α_{SF}. Der zweite Fehler ist der zu α_{SF}^4 abgeschätzte Fehler der trunkierten Störungsreihe. Die Fehler in den Koeffizienten und durch die Anwendung der perturbativen β-Funktion sind in allen Fällen vernachlässigbar klein. Diese Ergebnisse sind zu vergleichen mit der Bestimmung von $\alpha_{\overline{MS}}$ ohne den Zwei Loop Koeffizient[4]

$$\begin{aligned} \alpha_{\overline{MS}}^{(\mathrm{III})}(14.5\mathrm{GeV}) &= 0.1148(26)(17) && \text{Ein Loop} \ , \\ \alpha_{\overline{MS}}^{(\mathrm{III})}(78.2\mathrm{GeV}) &= 0.08400(130)(\ 70) && \text{Ein Loop} \ . \end{aligned} \tag{7.25}$$

Im Vergleich zu der Ein Loop Berechnung vermindert die Zwei Loop Berechnung den Fehler der Umrechnung von α_{SF} zu $\alpha_{\overline{MS}}$ um einen Faktor 10. Die statistischen Fehler sind, im Gegensatz zu der Ein Loop Relation, in der Zwei Loop Relation dominant.

[4] Der zweite Fehler ist gleich α_{SF}^3.

7.2 Die Callan Symanzik β-Funktion

Die nichtperturbativ bestimmte β-Funktion (Gleichung 5.2) von α_{SF} kann mit der Störungsreihe

$$\beta(g) = -g^3 \sum_{i=0}^{\infty} b_i g^{2i} \tag{7.26}$$

verglichen werden. Der erste nicht universelle Koeffizient ist der Drei Loop Koeffizient b_2. In [61] ist

$$b_2^{\overline{MS}} = \frac{2857N^3}{54} \frac{1}{(4\pi)^6} \tag{7.27}$$

im $\overline{MS}$ Schema für die $SU(N)$ bestimmt worden. Mit Hilfe dieses Koeffizienten und der Entwicklungskoeffizienten c_1 und c_2 kann der Drei Loop Koeffizient im SF Schema berechnet werden

$$b_2^{SF} = b_2^{\overline{MS}} - b_0 c_2(1)/(4\pi)^2 + b_1 c_1(1)/(4\pi) \tag{7.28}$$

$$= 0.4828(88)/(4\pi)^3 \ . \tag{7.29}$$

Das heißt, die nichtperturbative β-Funktion kann im SF Schema mit einer Drei Loop Entwicklung verglichen werden. In Abbildung 7.1 sind die nichtperturbativ bestimmten Werte der Kopplung und die integrierte Drei Loop und Zwei Loop β-Funktion eingezeichnet. Die Integrationskonstante ist mit der Kopplung $\alpha_{SF}(q)$ bei maximalem Impuls q fixiert.

Die nichtperturbative Evolution der Kopplung kann durch einen effektiven Koeffizienten $b_2^{eff} = 1.5(8)/(4\pi)^3$ parametrisiert werden. Die statistischen Fehler der Kopplung werden durch den Fehler an b_2^{eff} repräsentiert [40].

Die Abweichungen von b_2^{SF} sind auf die Eigenschaft der asymptotischen Reihenentwicklung, Terme höherer Ordnung und das nichtperturbativen Verhalten der Kopplung zurückzuführen[5]. Daß b_2^{eff} und b_2^{SF} in der gleichen Größenordnung liegen, ist daher als besonderes Resultat zu werten. Die Schrödinger-Funktional Kopplung läßt sich bis zu relativ[6] kleinen Energien durch ihr perturbatives Verhalten gut beschreiben. Diese Eigenschaft ist nicht auf andere Kopplungen zu übertragen.

[5]Eine Ausgleichsrechnung an die Werte der step scaling Funktion mit $s = 2$ mit der perturbativen Drei Loop Entwicklung und freiem b_2 führt zu $b_2^{eff'} = 4.4(2.3)$. Die Abweichung von b_2^{eff} kann durch die unterschiedliche Behandlung Terme höherer Ordnungen in α_{SF} bei den beiden Parametrisierungen erklärt werden.

[6]Im Vergleich zu r_0.

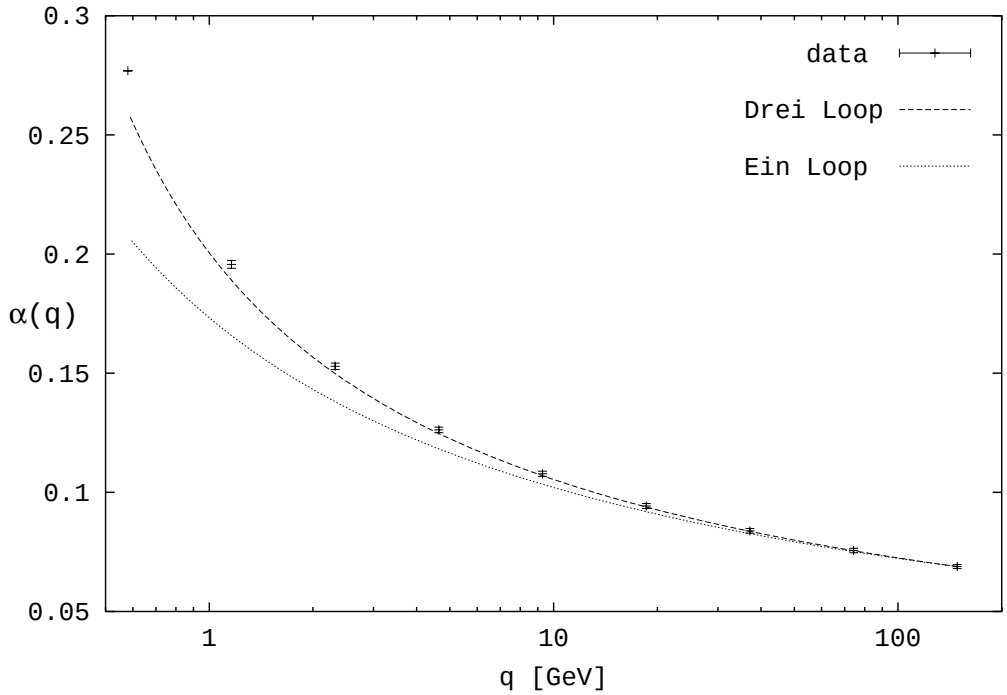


Abbildung 7.1: Die nichtperturbativ bestimmten Werte der Kopplung α_{SF} aus [62] und die integrierte Drei Loop und Ein Loop β-Funktion.

7.3 Der Λ Parameter

Der Λ Parameter ist eine Renormierungsgruppeninvariante oder auch Integrationskonstante der Renormierungsgruppengleichung (5.2). Daher ist er als Referenz besser geeignet als der Wert der Kopplung bei einer speziellen Energie. Er ist definiert durch[7]

$$\Lambda = \lim_{q\to\infty} \; q \left(b_0 g^2(q)\right)^{\frac{-b_1}{2b_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2b_0 g^2(q)}\right) \; . \tag{7.30}$$

Λ ist von dem gewählten Schema abhängig und kann mit Hilfe des Ein Loop Koeffizienten umgerechnet werden

$$\Lambda_{\overline{MS}} = \Lambda_{SF} \exp\left(\frac{c_1(1)}{8\pi b_0}\right) \; . \tag{7.31}$$

Da die Kopplung nicht bis $q = \infty$ berechnet werden kann, ist die perturbative Näherung der β-Funktion für die Integration der Kopplung ab dem

[7] In Gleichung (7.30) und (7.32) verwenden wir die impulsabhängige Kopplung $g(q)$ um die üblichen Formeln zu erhalten.

maximalen Impuls q zu verwenden

$$\Lambda = q\left(b_0 g^2(q)\right)^{\frac{-b_1}{2b_0^2}} \exp\left(-\frac{1}{2b_0 g^2(q)}\right) \times \exp\left(-\int_0^{g(q)} dx \frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{b_0 x^3} - \frac{b_1}{b_0^2 x}\right) . \tag{7.32}$$

Der Fehler durch die Verwendung der trunkierten perturbativen β-Funktion ist systematischer Natur. Durch die Verwendung eines β-Funktionskoeffizienten der nächsten, unbekannten Ordnung von $b_n = 1/(4\pi)^{n+1}$ kann die Größenordnung des Fehlers abgeschätzt werden. Wir erhalten

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{(0)} = 257(21)(13)\ \text{MeV} \quad 2\ \text{Loop} , \tag{7.33}$$

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{(0)} = 251(21)(0.5)\ \text{MeV} \quad 3\ \text{Loop} , \tag{7.34}$$

wobei der erste Fehler durch die statistische Unsicherheit in $\alpha_{SF}(q)$ gegeben ist und der zweite Fehler durch die Verwendung der perturbativen β-Funktion fixiert ist. Der Index (0) verweist auf $n_f = 0$, also auf das Fehlen von dynamischen Fermionen. Es existiert keine zuverlässige Methode, um den Einfluß von dynamischen Fermionen ohne ihre Simulation abzuschätzen. Daher ist ein Vergleich mit dem experimentell bestimmten world average[8] aus [2]

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{(5)} = 219^{+25}_{-23}\ \text{MeV} \tag{7.35}$$

nicht möglich. Die in den letzten Jahren durchgeführten numerischen Simulationen mit dynamischen Quarks zeigen in vielen Größen eine schwache Abhängigkeit von dynamischen Fermionen. Daraus ist jedoch keine zuverlässige Fehlerabschätzung für nicht untersuchte Observablen möglich.

In Kapitel (8) wird der Einschluß von dynamischen Fermionen in das Schrödinger-Funktional und die Implikationen für die Störungsrechnung diskutiert.

7.4 Relationen zu nackten Kopplungen

Die Entwicklungen von physikalischen Kopplungen in der nackten Gitterkopplung α_0 führt nach der allgemeinen Erfahrung zu großen Entwicklungskoeffizienten. Für α_{SF} ist dies zu bestätigen

$$\alpha_{SF}^{(\mathrm{I})}(1/a) = \alpha_0 + 4.62797(14)\alpha_0^2 + 29.011(12)\alpha_0^3 , \tag{7.36}$$

[8] Hier wurde eine etwas andere Definition von Λ verwendet, die für kleine Kopplungen nicht von Gleichung (7.32) abweicht.

$$\alpha_{SF}^{(\mathrm{II})}(14.0622(11)/a) = \alpha_0 + 4.178(11)\alpha_0^3 \ , \tag{7.37}$$

$$\alpha_{SF}^{(\mathrm{III})}(17.3611(14)/a) = \alpha_0 - 0.36895\alpha_0^2 + 4.042(11)\alpha_0^3 \ . \tag{7.38}$$

Eine Abschätzung des Drei Loop Termes durch α_0^4 ist auf Grund des großen Zwei Loop Koeffizienten fragwürdig. Dies geht einher mit einem großen Skalenparameter bei der Methode II und III.

Die in [56], [57] und [58] diskutierte Tadpole verbesserte Kopplung basiert auf der Überlegung, große Beiträge der Störungstheorie zu subtrahieren, indem die Kopplung α_0 durch $\alpha_P = \alpha_0/P$ ersetzt wird. Dabei ist P der nichtperturbative Erwartungswert der Plaquette. Die drei Methoden der Skalenfixierung liefern

$$\alpha_{SF}^{(\mathrm{I})}(1/a) = \alpha_P + 0.43918(14)\alpha_P^2 + 2.431(11)\alpha_P^3 \ , \tag{7.39}$$

$$\alpha_{SF}^{(\mathrm{II})}(1.285127(97)/a) = \alpha_P + 1.914(11)\alpha_P^3 \ , \tag{7.40}$$

$$\alpha_{SF}^{(\mathrm{III})}(1.58661(12)/a) = \alpha_P - 0.36895\alpha_P^2 + 1.778(11)\alpha_P^3 \ . \tag{7.41}$$

Der Skalenparameter ist für α_P im Vergleich zu α_0 klein. Der Zwei Loop Koeffizient ist für alle Methoden der Skalenfixierung groß, so daß keine gute Konvergenz der Reihe zu erwarten ist. Es ergibt sich für $\beta = 6.5 = 6/g_0^2$ eine Kopplung von $\alpha_P = 0.11$ ($P = 0.6384$). Bei der Methode (III) der Skalenfixierung beträgt der Ein Loop Effekt 4.3% und der Zwei Loop Term hat einen Einfluß von 2.4% auf die Kopplung. Weil die Koeffizienten der Störungsreihe groß sind, kann der Effekt von höherer Ordnungen in α_P nur unzuverlässig abgeschätzt werden.

Die Anwendung der Störungstheorie für die Tadpole verbesserte Kopplung muß für heute realistische Gitterrechnungen, die für die Bestimmung niederenergetischer Größen ($L > 1$fm) geeignet sind, zumindest kritisch betrachtet werden.

Diese Beobachtung ist für $\alpha_{\overline{MS}}$ in der $SU(N)$ [51] und für α_{SF} in der $SU(2)$ [16] ebenfalls zutreffend.

7.5 Der Kontinuumslimes der perturbativen step scaling Funktion

In Kapitel (5) wird die step scaling Funktion für einen endlichen Gitterabstand a und im Kontinuum definiert. Die perturbative Entwicklung von Gleichung (5.11), also des relativen Fehlers durch ein endliches a, ist

$$\delta(a/L, s, g_{SF}^2) = \delta_1(a/L, s)g_{SF}^2 + \delta_2(a/L, s)g_{SF}^4 + O(g_{SF}^6) \ . \tag{7.42}$$

Die Koeffizienten sind gegeben durch

$$\delta_1(a/L,s) = m_1(sL/a) - m_1(L/a) - 2b_0\ln(s)\ , \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned}\delta_2(a/L,s) = {} & m_2(sL/a) - m_2(L/a) - 2b_1\ln(s) \\ & + \Big[m_1(sL/a) - m_1(L/a) - 2b_0\ln(s)\Big]\Big[m_1(sL/a) - m_1(L/a)\Big]\ .\end{aligned} \tag{7.44}$$

Die Verbesserung des Kontinuumslimes durch korrekt gewählte Verbesserungskoeffizienten $c_t^{(i)}$ führt zu einer asymptotischen Konvergenz der Koeffizienten $\delta_i(a/L,s)$ von der Ordnung $O((a/L)^2)$. Bei der nichtperturbativen Bestimmung der Kopplung wurden die perturbativen Verbesserungskoeffizienten verwendet. Der Einfluß auf die Kontinuumsextrapolation kann in der Störungstheorie untersucht werden. In [39] wurde für die $SU(2)$ eine im Vergleich zu Σ verbesserte Größe konstruiert, die keine störungstheoretischen Ein und Zwei Loop Effekte der Kontinuumsextrapolation enthielt. So ergibt sich für das klassisch verbesserte Schrödinger-Funktional ($c_t(g_0^2) = 1$)

$$\delta^{(0)}(a/L,s,g_{SF}^2) = \delta_1^{(0)}(a/L,s)g_{SF}^2 + \delta_2^{(0)}(a/L,s)g_{SF}^4 + O(g_{SF}^6)\ , \tag{7.45}$$

und für das zu Ein Loop verbesserte Schrödinger-Funktional ($c_t(g_0^2) = 1 + c_t^{(1)}g_0^2$)

$$\delta^{(1)}(a/L,s,g_{SF}^2) = \delta_1^{(1)}(a/L,s)g_{SF}^2 + \delta_2^{(1)}(a/L,s)g_{SF}^4 + O(g_{SF}^6)\ . \tag{7.46}$$

Die Entwicklung von $\delta(a/L,s,g_{SF}^2)$ mit dem Zwei Loop verbesserten Schrödinger-Funktional $c_t(g_0^2) = 1 + c_t^{(1)}g_0^2 + c_t^{(1)}g_0^4$ bezeichnen wir mit

$$\delta^{(2)}(a/L,s,g_{SF}^2) = \delta_1^{(2)}(a/L,s)g_{SF}^2 + \delta_2^{(2)}(a/L,s)g_{SF}^4 + O(g_{SF}^6)\ . \tag{7.47}$$

Da die Koeffizienten δ_i nur von den Verbesserungskoeffizienten $c_t^{(j)}$ mit $j \leq i$ abhängen, gilt $\delta_i^{(i)} = \delta_i$. Daß heißt, es gilt $\delta_1 = \delta_1^{(1)} = \delta_1^{(2)}$ und $\delta_2 = \delta_2^{(2)}$. In Tabelle 7.1 sind die Koeffizienten für $s = 2$ und $4 \leq L/a \leq 16$ angegeben. Die Koeffizienten $\delta_i^{(i)}$ zeigen die erwartete asymptotische Abhängigkeit von a der Ordnung $O((a/L)^2)$.

L/a	$\delta_1^{(0)}$	$\delta_1^{(1)}$	$\delta_2^{(0)}$	$\delta_2^{(1)}$	$\delta_2^{(2)}$
4	0.01192	−0.01023	0.00642	0.00577	−0.00168
5	0.01155	−0.00617	0.00514	0.00501	−0.00095
6	0.01089	−0.00387	0.00412	0.00435	−0.00061
7	0.01004	−0.00262	0.00334	0.00382	−0.00043
8	0.00918	−0.00189	0.00275	0.00341	−0.00032
9	0.00841	−0.00144	0.00230	0.00307	−0.00024
10	0.00773	−0.00113	0.00195	0.00279	−0.00019
11	0.00714	−0.00091	0.00168	0.00256	−0.00015
12	0.00663	−0.00075	0.00145	0.00236	−0.00012
13	0.00618	−0.00063	0.00126	0.00219	−0.00010
14	0.00579	−0.00054	0.00111	0.00205	−0.00008
15	0.00544	−0.00046	0.00098	0.00192	−0.00007
16	0.00513	−0.00040	0.00087	0.00180	−0.00006

Tabelle 7.1: Die störungstheoretischen Effekte der Verbesserung des Kontinuumslimes von $\Sigma(2, g_{SF}^2, a/L)$. Die a/L Abhängigkeit des Koeffizienten $\delta_2^{(0)}$ ist von der Ordnung $O((a/L)^2)$, was jedoch keine Bedeutung im Rahmen des Verbesserungsprogramms hat.

Kapitel 8

Zusammenfassung

Die vorliegende Zwei Loop Störungsentwicklung der Kopplung α_{SF} in α_0 ist ein notwendiger Beitrag zu dem Programm der ALPHA Kollaboration. Die Arbeit ermöglicht, zusammen mit der Zwei Loop Entwicklung der Kopplung $\alpha_{\overline{MS}}$ in α_0, den systematischen Fehler in der Konversion vom SF Schema zu dem $\overline{MS}$ Schema gegenüber der Ein Loop Relation deutlich zu senken. Mit der nichtperturbativ bestimmten Kopplung α_{SF} können bei großen Energien aus einer niederenergetischen Größe, mit im Vergleich zu dem statistischen Fehler, kleinem systematischen Fehler Größen im $\overline{MS}$ Schema berechnet werden. Besonders geeignet ist der $\Lambda_{\overline{MS}}$ Parameter der QCD. Mit ihm wird die gesamte Information über die Asymptotik der Kopplung bei hoher Energie durch eine dimensionsbehaftete Größe festgelegt. Aus dem $\Lambda_{\overline{MS}}$ Parameter kann die Kopplung $\alpha_{\overline{MS}}$ bei großen Energien durch Anwendung von Störungstheorie aus der Renormierungsgruppengleichung rekonstruiert werden. Die Verbindung von hoch- und niederenergetischen Größen der QCD mit kleinem, kontrollierten Fehler in der QCD ohne Fermionen ist auf diese Weise von der ALPHA Kollaboration durchgeführt worden.

Die Berechnung des Zwei Loop Termes erfordert einen hohen numerischen Aufwand. Durch die Implementierung der Summen in den Feynmandiagrammen im Ortsraum konnte die Abhängigkeit von der Gittergröße L von der Ordnung $O(L^8)$ im Impulsraum auf die Ordnung $O(L^5)$ reduziert werden. Nur durch die sorgsame Verwendung aller in dem System vorliegenden Symmetrien war eine Gittergröße von $L = 32$ zu erreichen. Durch umfangreiche Tests an Teilergebnissen und dem Gesamtergebnis konnte sichergestellt werden, daß das korrekte Ergebnis berechnet wurde. Weiterhin konnten die Ergebnisse der $SU(2)$ Eichtheorie reproduziert werden. Da es keine Testmöglichkeit für die einzelnen Diagramme gibt und lediglich die Summen großer Untermengen der Diagramme unabhängig von dem Eichparameter sind gestaltete sich die Fehlersuche in dieser Phase der Programment-

wicklung schwierig. Wegen der strukturell einfacheren Eichgruppe ist dieser Test alleine jedoch nicht ausreichend.

Es zeigte sich, daß der Kontinuumslimes mit ähnlicher Präzision wie in der $SU(2)$ Eichtheorie durchzuführen war. Die Berechnung der Koeffizienten bis zu einer Gittergröße von $L = 32$ und einer numerischen Genauigkeit in der Berechnung der Diagramme von 8 Byte liefert die Koeffizienten mit hinreichender Präzision.

Die Berechnung des Zwei Loop Verbesserungskoeffizienten konnte im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt werden. Dieser wurde bereits erfolgreich in der numerischen Simulation des Schrödinger-Funktionals verwendet [63].

Die Berücksichtigung von dynamischen Quarks bei der Bestimmung des $\Lambda_{\overline{MS}}$ Parameters der QCD ist das nächste Ziel der ALPHA Kollaboration. Die theoretischen Grundlagen für den Einschluß von Fermionen sind in [64] ausgearbeitet. Damit sind Untersuchungen in der „quenched Approximation“ möglich und durchgeführt worden. Die nichtperturbative Entwicklung der renormierten Quarkmasse ist in [45], [46], [47] und [48] publiziert worden. Im Rahmen dieser Arbeit ist das Schrödinger-Funktional für die nichtperturbative Bestimmung verschiedener Verbesserungskoeffizienten verwendet worden. Insbesondere konnte der für die Verbesserung des Kontinuumslimes der Fermionwirkung wichtige Koeffizient c_{SW} berechnet werden. Er ist, anders als c_t, unabhängig von den Randbedingungen und in Simulationen der Gittereichtheorie zu der Bestimmung von niederenergetischen Größen verwendet worden [65].

Die angestrebte numerische Bestimmung der Kopplung α_{SF} mit dynamischen Fermionen erfordert Parallelrechner der nächsten Generation. Bisherige Voruntersuchungen legen nahe, daß mit dem Computer *APE*mille die Kopplung mit einer ähnlichen Präzision wie in der „pure gauge theory“ zu bestimmen ist.

Die Störungstheorie ist ebenfalls auf Fermionen zu erweitern. Die Zwei Loop Relation zwischen $\alpha_{\overline{MS}}$ und α_0 ist in [66] publiziert. Im Anschluß an diese Arbeit ist geplant, zusammen mit Peter Weisz, die notwendigen Berechnungen für die Entwicklung von α_{SF} in α_0 durchzuführen.

Kapitel 9

Danksagung

An erster Stelle danke ich meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Ulli Wolff. Er konnte mir stets durch seine klare Sicht auf meine Verständnislücken weiterhelfen und mich sicher an das Ziel der Arbeit führen. Auch für die menschliche Größe, die er selbst in schwierigen Situationen gezeigt hat, möchte ich an dieser Stelle danken.

Das informelle „Dienstags“ Seminar hat mich in mehrfacher Weise inspiriert. Die dort geführten fachlichen Diskussionen haben meinen Blick auf die Physik erheblich vergrößert. Der Kontakt mit unterschiedlichen Herangehensweisen an Probleme hat mein physikalisches Verständnis erweitert.

Dank gilt der gesamten ALPHA Kollaboration, die sich sehr geduldig mit mir gezeigt hat. Die Mitarbeit in dieser Gruppe erfüllt mich mit einem gewissen Stolz.

Viel Energie und Freude verdanke ich meinen Freunden und Freundinnen, die mich während meiner Doktorarbeit motiviert haben.

Anhang A

Benutzte Darstellung der $SU(3)$

Die verwendeten Definitionen sind für die $SU(2)$ im Anhang (B) komprimiert angegeben, soweit sie von denen der $SU(3)$ abweichen.

Die verwendete Darstellung der $su(3)$ Lie-Algebra ist

$$\mathrm{T}^0 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{A.1}$$

$$\mathrm{T}^1 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{A.2}$$

$$\left(\mathrm{T}^{\alpha\beta}\right)_{kl} = \frac{1}{i}\delta^\alpha_k \delta^\beta_l . \tag{A.3}$$

Ein Element der $su(3)$ Lie-Algebra mit $\sigma \in \{0, 1, 12, 21, 13, 31, 23, 32\}$ wird dargestellt durch

$$q = q_\sigma \mathrm{T}^\sigma . \tag{A.4}$$

Die Koeffizienten erfüllen die Relationen

$$q_0 = q_0^* , \quad q_1 = q_1^* , \quad q_{\alpha\beta} = q^*_{\beta\alpha} . \tag{A.5}$$

Ein Element der $SU(3)$ Lie-Gruppe ist

$$Q = \exp(q_\sigma \mathrm{T}^\sigma) . \tag{A.6}$$

Die Spur über zwei Generatoren liefert

$$\mathrm{tr}(\mathrm{T}^\sigma \mathrm{T}^\tau) = -d^\sigma \delta^{\sigma\tau^{\mathrm{t}}} , \quad d^0 = \frac{1}{2} , \quad d^1 = \frac{3}{2} , \quad d^{\alpha\beta} = 1 , \tag{A.7}$$

wobei der transponierte Index definiert ist durch

$$\sigma^{\mathtt{t}} = \begin{cases} \sigma & \text{für} \quad \sigma \in \{0,1\} \ , \\ (\beta\alpha) & \text{für} \quad \sigma = (\alpha\beta) \ . \end{cases} \tag{A.8}$$

Die Cartan Killing Form, das Skalarprodukt der $su(3)$, ist definiert durch

$$(q,r) = -2\mathrm{tr}(q,r) \tag{A.9}$$

$$= q_0 r_0 + 3 q_1 r_1 + 2 \sum_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} \tag{A.10}$$

$$=: q_\sigma r^\sigma \ , \tag{A.11}$$

wobei die Metrik

$$|g|^{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&3&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&2&0&0&0&0 \\ 0&0&2&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&2&0&0 \\ 0&0&0&0&2&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&2 \\ 0&0&0&0&0&0&2&0 \end{pmatrix} \tag{A.12}$$

mit der Indexordnung von oben verwendet wurde. In Komponenten ist dies äquivalent zu:

$$q^0 = q_0 \ , \quad q^1 = 3q_1 \ , \quad q^{\alpha\beta} = 2q_{\beta\alpha} \ . \tag{A.13}$$

Die diagonalen Generatoren T^0 und T^1 bilden eine Basis der Cartan'schen Subalgebra $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$.

A.1 Die Strukturkonstanten

Mit Hilfe von

$$f^{\tau\sigma}{}_\rho \mathrm{T}^\rho = [\mathrm{T}^\tau, \mathrm{T}^\sigma] \tag{A.14}$$

sind die Strukturkonstanten definiert. Sie erfüllen die Jakobi Identität. Wir benötigen für den Fadeev Popov Term

$$f^{\tau\sigma\rho} = f^{\tau\sigma}{}_\epsilon g^{\epsilon\rho} \ . \tag{A.15}$$

Sie erfüllen die Relation

$$f^{\tau\sigma\rho} = -f^{\tau^{\mathtt{t}}\sigma^{\mathtt{t}}\rho^{\mathtt{t}}} \ . \tag{A.16}$$

Die 6 nicht verschwindenden, unabhängigen Werte der Strukturkonstanten sind

$f^{\tau\sigma\rho}$	τ	σ	ρ
i	(0)	(12)	(21)
$-i$	(0)	(13)	(31)
$-2i$	(0)	(23)	(32)
$-3i$	(1)	(12)	(21)
$-3i$	(1)	(13)	(31)
$2i$	(12)	(23)	(31)

A.2 Die Eigenwerte zu $\mathcal{A}d$

Die Eigenvektoren zu $\mathcal{A}d(h)$ mit $h \in \mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ bilden eine Basis in der die kovariante Ableitung in dem Farbraum diagonal ist. Für die Generatoren T^σ gilt

$$\mathcal{A}d(h)(\mathrm{T}^\sigma) = [h, \mathrm{T}^\sigma] = \alpha^h(\sigma)\mathrm{T}^\sigma \ , \tag{A.17}$$

die Eigenwerte von T^σ bezüglich h sind $\alpha^h(\sigma)$. Es gilt

$$-\alpha^h(\sigma^{\mathtt{t}}) = \alpha^h(\sigma) \text{ und } \alpha^{\mathrm{T}^\tau}(\sigma) = f^{\tau\sigma}{}_\sigma \ . \tag{A.18}$$

h	$\alpha^h(0)$	$\alpha^h(1)$	$\alpha^h(12)$	$\alpha^h(13)$	$\alpha^h(23)$
T^0	0	0	$\frac{-1}{2i}$	$\frac{1}{2i}$	$\frac{1}{i}$
T^1	0	0	$\frac{3}{2i}$	$\frac{3}{2i}$	0
C	0	0	$i\frac{\phi_1-\phi_2}{L}$	$i\frac{\phi_1-\phi_3}{L}$	$i\frac{\phi_2-\phi_3}{L}$

Zu der Formulierung des $\star$ Produktes in Anhang (D.1) definieren wir für $\sigma \neq 1$:

$$\{\mathrm{T}^1, \mathrm{T}^\sigma\} = \alpha^{\mathrm{T}^1}_{\{\}}(\sigma)\mathrm{T}^\sigma \tag{A.19}$$

$\alpha^{\mathrm{T}^1}_{\{\}}(0)$	$\alpha^{\mathrm{T}^1}_{\{\}}(1)$	$\alpha^{\mathrm{T}^1}_{\{\}}(12)$	$\alpha^{\mathrm{T}^1}_{\{\}}(13)$	$\alpha^{\mathrm{T}^1}_{\{\}}(23)$
i	Nicht definiert	$\frac{1}{2i}$	$\frac{1}{2i}$	$-\frac{1}{i}$

Beide Funktionen sind trivial bilinear.

Anhang B

Benutzte Darstellung der $SU(2)$

Die verwendete Darstellung der $su(2)$ ist

$$\mathrm{T}^0 = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{B.1}$$

$$\mathrm{T}^+ = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{B.2}$$

$$\mathrm{T}^- = \frac{1}{i}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \tag{B.3}$$

Damit ist $\sigma \in \{0, +, -\}$ und die Koeffizienten erfüllen die Relationen

$$q_0 = q_0^* , \quad q_+ = q_-^* . \tag{B.4}$$

Die Spur über zwei Generatoren liefert

$$\mathrm{tr}(\mathrm{T}^\sigma \mathrm{T}^\tau) = -d^\sigma \delta^{\sigma\tau^{\mathtt{t}}} , \quad d^0 = \frac{1}{2} , \quad d^+ = 1 , \tag{B.5}$$

wobei der transponierte Index definiert ist durch $+^{\mathtt{t}} = -$, $-^{\mathtt{t}} = +$ und $0^{\mathtt{t}} = 0$. Die Cartan Killing Form ist

$$(q, r) = q_0 r_0 + 2q_+ r_- + 2q_- r_+ \tag{B.6}$$

$$=: q_\sigma r^\sigma \tag{B.7}$$

mit der Metrik

$$|g|^{\sigma\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{B.8}$$

mit der Indexordnung von oben. In Komponenten ist dies äquivalent zu

$$q^0 = q_0 , \quad q^+ = 2q_- . \tag{B.9}$$

Die Cartan'sche Subalgebra $\mathcal{C}_{\mathcal{N}}$ ist eindimensional und proportional zu dem Generator T^0. Es gibt nur einen nicht verschwindenden, unabhängigen Wert der Strukturkonstanten: $f^{0+-} = -2i$. Die Eigenvektoren zu $\mathcal{A}d$ sind wie in der $SU(3)$ die gewählten Generatoren T^σ mit

$$\alpha^{\mathrm{T}^0}(0) = 0 \ , \tag{B.10}$$

$$\alpha^{\mathrm{T}^0}(+) = -i \ . \tag{B.11}$$

Für die $SU(2)$ führen wir $\alpha^{\mathrm{T}^0}_{\{\}}(\sigma)$ für $\sigma \neq 0$ ein.

$$\alpha^{\mathrm{T}^0}_{\{\}}(0) \quad \text{nicht definiert,} \tag{B.12}$$

$$\alpha^{\mathrm{T}^0}_{\{\}}(+) = 0 \ . \tag{B.13}$$

Anhang C

Das Hintergrundfeld und die kovariante Ableitung

Die η Abhängigkeit der ϕ_i ist

$$\phi_i = \theta_i + \eta\omega_i \tag{C.1}$$

mit $\sum \theta_i = \sum \omega_i = 0$. Für die $SU(3)$ wurde (Punkt A in [40]) verwendet

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 \,, & \theta_1 &= -\pi/3 \,, \\ \omega_2 &= -1/2 \,, & \theta_2 &= 0 \,, \\ \omega_3 &= -1/2 \,, & \theta_2 &= \pi/3 \,. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Die Hintergrundfelder der $SU(2)$ aus [15] sind definiert durch

$$C = \frac{i}{L}\mathrm{diag}(\phi_1, \phi_2) \,, \tag{C.3}$$

$$C' = \frac{i}{L}\mathrm{diag}(-\pi - \phi_1, \pi - \phi_2) \,, \tag{C.4}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 1 \,, & \theta_1 &= -\pi/4 \,, \\ \omega_2 &= -1 \,, & \theta_2 &= \pi/4 \,. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Daraus ergibt sich die Gleichungen (3.9) und (3.13)

$$\gamma = \frac{2}{TL}\left(\pi + 2\phi_1\right) \quad \text{für } SU(2) \,, \tag{C.6}$$

$$\gamma = \frac{2}{TL}\left(\frac{2\pi}{3} + \phi_1\right) \quad \text{für } SU(3) \,. \tag{C.7}$$

Mit Hilfe von $\mathcal{A}d$ und

$$i\beta_\mu^\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \mu = 0 \ , \\ \alpha^C(\sigma) + \alpha^{\mathrm{T}^1}(\sigma)\gamma x^0 & \text{für } \mu = k, SU(3) \ , \\ \alpha^C(\sigma) + \alpha^{\mathrm{T}^0}(\sigma)\gamma x^0 & \text{für } \mu = k, SU(2) \end{cases} \tag{C.8}$$

halten wir fest

$$V_\mu(x)\mathrm{T}^\sigma V_\mu^{-1}(x) = \exp(\beta_\mu^\sigma(x))\mathrm{T}^\sigma \ . \tag{C.9}$$

Damit ergeben sich die kovarianten Ableitungen aus Gleichung (3.35) und (3.43) zu

$$D_\mu f_\sigma(x)\mathrm{T}^\sigma = \frac{1}{a}\left(\exp(i\beta_\mu^\sigma(x))f_\sigma(x+\hat{\mu}) - f_\sigma(x)\right)\mathrm{T}^\sigma \ , \tag{C.10}$$

$$D_\mu^* f_\sigma(x)\mathrm{T}^\sigma = \frac{1}{a}\left(f_\sigma(x) - \exp(-i\beta_\mu^\sigma(x))f_\sigma(x-\hat{\mu})\right)\mathrm{T}^\sigma \ . \tag{C.11}$$

Offensichtlich sind die kovarianten Ableitungen diagonal in den Darstellungen aus Anhang (A) und (B). Das motiviert die Wahl der Darstellungen.

Anhang D

Die Operatoren $\triangle_1$ und $\triangle_0$

Zur Vorbereitung wird das $\star$ Produkt und die Parametrisierung der Terme, die in dem Gluonpropagator verwendet werden, eingeführt.

D.1 Das $\star$ Produkt

Wir definieren für alle komplexen $N \times N$ Matrizen M und G

$$M \star G = \frac{1}{2}\left[(MG + GM^\dagger) - \frac{1}{N}\mathrm{tr}(MG + GM^\dagger)\right] \tag{D.1}$$

für $G \in su(N)$ ist $M \star G \in su(N)$.

Die benötigten Ausdrücke des $\star$ Produktes sind

$$\cosh(G_{\mu\nu}) \star \mathrm{T}^\sigma = \mathrm{T}^\sigma \begin{cases} c_1^\sigma c_2^\sigma & \text{für} \quad \mu = 0, \nu = k \quad \text{oder} \quad \mu = k, \nu = 0 \\ 1 & \text{für} \quad \mu = l, \nu = k \ , \end{cases} \tag{D.2}$$

$$\sinh(G_{\mu\nu}) \star \mathrm{T}^\sigma = \mathrm{T}^\sigma i c_1^\sigma s_2^\sigma \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \mu = 0, \nu = k \ , \\ -1 & \text{für} \quad \mu = k, \nu = 0 \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{D.3}$$

mit den Koeffizienten

$$c_1^\sigma = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{2}\gamma\right) & \text{für } \sigma = 0 \text{ und } SU(2) \ , \\ \frac{1}{3}\left(2\cos(\gamma) + \cos(\frac{1}{2}\gamma)\right) & \text{für } \sigma = 1 \text{ und } SU(3) \ , \\ \cos\left(\frac{1}{2}\alpha_{\{\}}^{i\mathrm{T}^1}(\sigma)\gamma\right) & \text{sonst} \ , \end{cases} \tag{D.4}$$

$$c_2^\sigma = \cos\left(\frac{1}{2}\alpha^{i\mathrm{T}^1}(\sigma)\gamma\right) \ ,$$

$$s_2^\sigma = \sin\left(-\frac{1}{2}\alpha^{i\mathrm{T}^1}(\sigma)\gamma\right) \ .$$

D.2 Die Koeffizienten der Operatoren

Da die Propagatoren im Gruppenraum und räumlichen Impulsraum diagonal sind, werden die entsprechenden Indizes unterdrückt.Weiter führen wir

$$s_k(t) = 2\sin\left(\frac{1}{2}(p_k + \beta_k(t))\right) \tag{D.5}$$

ein. Die Koeffizienten für $\triangle_1$ ergeben sich zu

$$A_{00}(t) = -\lambda_0 \ , \tag{D.6}$$
$$A_{0l}(t) = \lambda_0 s_l(t+1) - c_1 s_l(t) \ , \tag{D.7}$$
$$A_{k0}(t) = 0 \ , \tag{D.8}$$
$$A_{kl}(t) = -c_1 \delta_{kl} \ , \tag{D.9}$$
$$B_{00}(t) = 2\lambda_0 + c_1 s_j(t) s_j(t+1) \ , \tag{D.10}$$
$$B_{0l}(t) = c_1 s_l(t+1) - \lambda_0 s_l(t) \ , \tag{D.11}$$
$$B_{k0}(t) = B_{0k}(t) \ , \tag{D.12}$$
$$B_{kl}(t) = \delta_{kl}\left[s_j(t)s_j(t) + 2c_1c_2\right] + (\lambda_0 - 1)s_k(t)s_l(t) \ , \tag{D.13}$$

und die von $\triangle_0$ sind

$$A(t) = -1 \ , \tag{D.14}$$
$$B(t) = 2 + 2s_j(t)s_j(t) \ . \tag{D.15}$$

Diese Formeln sind für die $SU(2)$ und $SU(3)$ gültig.

Abbildungsverzeichnis

1.1 Die verschiedenen Zugänge zu der QCD 9

3.1 Feynmangraphen 28
3.2 Ordnung der t, t' Summation 48

4.1 Numerischer Fehler 60
4.2 Geblockte Koeffizienten 61

5.1 Darstellung der Berechnung der step scaling Funktion σ 65

7.1 Integrierte β-Funktion 78

Tabellenverzeichnis

3.1 Die Anzahl der Gluon- und Ghostlinien der Vertizes. 27

4.1 Die berechneten Werte von m_2^a und m_2^b 52
4.2 Extrapolation der Koeffizienten 59

7.1 Störungstheoretische $O(a)$ Effekte 82

Literaturverzeichnis

[1] Silvan S. Schweber, *QED and the men who made it: Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga*, Princeton University Press, New Jersey 1994

[2] R. M. Barnett et al., *Review of particle physics, Particle Data Group*, Phys. Review D54 (1996) and 1997

[3] T. Kinoshita, *Quantum Electrodynamics*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong 1990

[4] S. L. Glashow, *Partial symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. 22 (1961) 579

[5] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264

[6] A. Salam, *Weak and electromagnetic interactions*, in N. Svartholm, Proceedings of the 8th Nobel symposium (Almquist and Wiskell, Stockholm, 1968)

[7] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of nonabelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1343

[8] H. D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Lett. 30 (1973) 1346

[9] S. Weinberg, *Nonabelian gauge theories of the strong interactions*, Phys. Rev. Lett. 31 (1973) 494

[10] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, *Advantages of the color octet gluon picture*, Phys. Lett. B 47 (1973) 365

[11] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, *Dynamics of the standard model*, Cambridge University Press, Cambridge 1992

[12] A. Hasenfratz and Peter Hasenfratz, *The scales of euclidean and hamiltonian lattice QCD.*, Nucl. Phys. B193 (1981) 210

[13] R. Dashen and D. Gross, *Relationship between lattice and continuum definitions of the gauge-theory coupling*, Phys. Rev. D 23 (1981) 2340

[14] M. Lüscher and P. Weisz, *Computation of the relation between the bare lattice coupling and the MSbar coupling in SU(N) gauge theories to two loops*, Nucl. Phys. B452 (1995) 234

[15] M. Lüscher, R. Narayanan, P. Weisz and U. Wolff, *The Schrödinger Functional — a Renormalizable Probe for Non-Abelian Gauge Theories*, Nucl. Phys.B384 (1992) 168

[16] R. Narayanan and U. Wolff, *Two Loop Computation of a Running Coupling in Lattice Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. B444 (1995) 425

[17] F. J. Dyson, *The S-Matrix in quantum elektrodynamics*, Phys. Rev. 75 (1949) 1736

[18] G. C. Wick, *Properties of the bethe-Salpeter wave functions*, Phys. Rev. 96 (1954) 1124

[19] J. Schwinger, *On the Euclidian structure of relativistic field theory*, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 44 (1958) 956

[20] G. t' Hooft and M. Veltman, *Regularization and renormalization of gauge fields*, Nucl. Phys. B44 (1972) 189

[21] T. Reisz, *Lattice gauge theory: renormalization to all orders in the loop expansion.*, Nucl. Phys. B318 (1989) 417

[22] M. Lüscher, *Dimensional regularization in the presence of large background fields*, Ann. Phys. 142 (1982) 359

[23] K. Symanzik, *Cutoff dependence in lattice ϕ^4 theory, Lectures given at Les Houches 1988*, Fields, strings and critical phenomena, ed. E. Brézin and J. Zinn-Justin (North Holland, Amsterdam, 1989)

[24] K. Symanzik, *Concerning the continuum limit in some lattice theories*, 21st Int. Conf. on high energy physics, Paris, 1983, ed Petiau and Porneuf, J. Phys. (Paris) 43 (1982) C3; 254

[25] K. Symanzik, *Some topics in quantum filed theorie*, Mathematical problems in theoretical physics, ed. R. Schrader et al., Lecture Notes in Physics, vol. 153 (Springer Berlin, 1982)

[26] K. Symanzik, *Continuum limit and improved action in lattice theories. 1. Principles and phi**4 theory.*, Nucl. Phys. B 226 (1983) 187

[27] P. Weisz, *Continuum limit improved lattice action for pure Yang-Mills theory. 1.*, Nucl. Phys B212 (1983) 1

[28] P. Weisz and R. Wohlert, *Continuum limit improved lattice action for pure Yang-Mills theory. 2.*, Nucl. Phys. B236 (1984) 397, Erratum: B247 (1984) 544

[29] G. Curci, P. Menotti and G. Paffuti, *Symanzik's improved lagrangian for lattice gauge theory*, Phys. Lett. B130 (1983) 205, ERRATUM Phys. Lett. B135 (1984) 516

[30] M. Lüscher and P. Weisz, *On-shell improved lattice gauge-theories*, Commun. Math. Phys. 97 (1985) 59 [Erratum Commun. Math. Phys. 98 (1985) 433]

[31] M. Lüscher, *Improved lattice gauge theories, Seminar given at Les Houches (1984)*, Critical phenomena, random systems, gauge theories, ed. K. Osterwald an R. Stora (North Holland, Amsterdam, 1986)

[32] M. Lüscher and P. Weisz, *Computation of the action for on-shell improved lattice gauge theories at weak coupling.*, Phys. Lett. B158 (1985) 250; Nucl. Phys. B266 (1986) 309

[33] I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, Cambridge 1994

[34] M. Lüscher, *Selected topics in lattice field theory*, Les Houches Summer School (1988) 451

[35] C. Furrer and A. Lesniewski, *BRS transformation in lattice gauge theories*, Phys. Lett. B148 (1984) 143

[36] J. Zinn-Justin, *Renormalization and stochastic quantization*, Nucl. Phys. B275 (1986) 135

[37] M. Lüscher, *Determinats of second order difference operators*, unpublished note, 20. May 1991

[38] M. Lüscher and P. Weisz, *Efficient numerical techniques for perturbative lattice gauge theory computations*, Nucl. Phys. B266 (1986) 309

[39] G. de Divitiis, R. Frezzotti, M. Guagnelli, M. Lüscher, R. Petronzio, R. Sommer, P. Weisz and U. Wolff, *Universality and the approach to the continuum limit in lattice gauge theory*, Nucl. Phys. B437 (1995) 447

[40] M. Lüscher, R. Sommer, P. Weisz and U. Wolff, *A Precise Determination of the Running Coupling in the SU(3) Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. B413 (1994) 481

[41] M. Lüscher, P. Weisz, R. Sommer and U. Wolff, *Computation of the Running Coupling in the SU(2) Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. B389 (1993) 247

[42] R. Sommer, *A New Way to Set the Energy Scale in Lattice Gauge Theories and its Application to the Static Force and α_s in SU(2) Yang–Mills Theory*, Nucl. Phys. B411 (1994) 839

[43] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K.D. Lane and T.T. Yan, *Charmonium: comparison with experiment*, Phys. Rev. D. 21 (1980) 203

[44] J. L. Richardson, *The heavy quark potential and the upsilon, j / psi systems*, Phys. Lett. 82B (1979) 272

[45] S. Capitani, M. Guagnelli, M. Lüscher, S. Sint, R. Sommer, P. Weisz and H. Wittig, *Non-perturbative quark mass renormalization*, hep-lat/9709125, Lattice '97 Proceedings

[46] R. Sommer, *The Λ-parameter and m_s of quenched QCD*, DESY 97-223

[47] M. Lüscher, *Theoretical advances in lattice QCD*, hep-ph/9711205

[48] R. Sommer, *Non-perturbative renormalization of QCD*, hep-ph/9711243

[49] M. Lüscher and P. Weisz, *Background field technique and renormalization in lattice gauge theory*, Nucl. Phys. B452 (1995) 213

[50] M. Lüscher and P. Weisz, *Coordinate space methods for the evaluation of Feynman diagrams in lattice field theory*, Nucl. Phys. B445 (1995) 429

[51] M. Lüscher and P. Weisz, *Two-loop relation between the bare lattice coupling and the MSbar coupling in pure SU(N) gauge theories*, Phys. Lett. B349 (1995) 165

[52] B. S. de Witt, *Quantum Theory Of Gravity (I and II)*, Phys. Rev. 162 (1967) 1195 and 1239

[53] H. Klugberg-Stern and J. B. Zuber, *Renormalization of nonabelian gauge theories in a background field gauge: 1. green functions.*, Phys. Rev. D12 (1975) 482

[54] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke and T. Muta, *Deep inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories*, Phys. Rev. D18 (1978) 3998

[55] E. Braaten and J. P. Leveille, *Minimal subtraction and momentum subtraction in QCD at two loop order*, Phys. Rev. D24 (1981) 1369

[56] G. Parisi, *Recent progresses in gauge theories*, Presented at 20th Int. Conf. on High Energy Physics, Madison, (1980), Published in Madison H.E. Physics 1980

[57] A. X. El-Khadra, G. Hockney, A. S. Kronfeld and P B. Mackenzie, *A determination of the strong coupling constant from the charmonium spectrum.*, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 729

[58] G. P. Lepage and P. B. Mackenzie, *On the viability of lattice perturbation theory*, Phys. Rev. D. 48 (1993) 2250

[59] R. Wohlert, P. Weisz and W. Wetzel, *Weak coupling perturbative calculations of the Wilson loop for the standard action*, Nucl. Phys. B259 (1985) 85

[60] B. Allés, A. Feo and H. Panagopoulos, *Scaling Corrections in QCD with Wilson Fermions from the 3-Loop Average Plaquette*, hep-lat/9801003, Pisa-Cyprus preprint, in preparation

[61] O. V. Tarasov, A. A. Vladimirov and A. Yu. Zharkov, *The Gell-Mann-Low function of QCD in three-loop approximation*, Phys. Lett. B93 (1980) 429

[62] A. Bode, P. Weisz and U. Wolff, , in preparation

[63] M. Guagnelli, R. Sommer and H. Wittig, *Precision computation of a low-energy reference scale in quenched lattice QCD*, DESY-98-064, OUTP-98-45-P and hep-lat/9806005

[64] S. Sint, *One loop renormalization of the QCD Schrödinger functional*, Nucl. Phys. B451 (1995) 416

[65] M. Talevi, *A first taste of dynamical fermions with an O(a) improved action*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 63 (1998) 227

[66] C. Christou, A. Feo, H. Panagopoulos and E. Vicari, *The three-loop beta function of SU(N) lattice gauge theories with Wilson fermions*, hep-lat/9801007