Aspekte unendlichdimensionaler Martingaltheorie und ihre Anwendung in der Theorie der Finanzmärkte

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Diplom-Mathematiker Thomas Schöckel
geboren am 28.05.1966 in Köln

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Jürgen Mlynek

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät I:
Prof. Dr. Elmar Kulke

Gutachter:

i) Prof. Dr. Hans Föllmer
ii) Prof. Dr. Alexander Schied
iii) Prof. Dr. Martin Schweizer

eingereicht am: 15. Oktober 2003
Tag der mündlichen Prüfung: 10. Februar 2004

Abstract

We model a financial market with infinitely many assets as a stochastic process X with values in a separable Hilbert space H. In this setting we show the equivalence of market completeness and the uniqueness of the equivalent martingale measure, if X has continuous paths. Another result for our model is, that under some technical conditions, the absence of asymptotic arbitrage of the first/second kind (in the sense of Kabanov/Kramkov) is equivalent to the absolute continuity of the reference measure to a unique, locally equivalent, martingale measure. If X has continuous paths, the absence of general asymptotic arbitrage is equivalent to the existence of an equivalent local martingale measure. Furthermore, we give a sufficient condition for the existence of the optional decomposition of X. We apply this result to the problem of risk minimization with given upper limit for investion (efficient hedging (Föllmer/Leukert)). This allows us to solve this optimization problem in our infinite dimensional context. Another result is an infinite dimensional extension of the Heath-Jarrow-Morton term structure model. Two further term structure models are constructed, using the Markov potential approach developed by Rodgers.

As a contribution to the theory of stochastic analysis in Hilbert spaces, we proof a pathwise version of the Ito formula for stochastic processes with continuous paths in a separable Hilbert space. This leads to a pathwise version of the interchangability theorem for stochastic and Lebesgue integrals. We also show a version of the Clark formula for Hilbert space valued Brownian motion.

Keywords:
term structure models, stochastic analysis in Hilbert spaces, equivalent martingale measures, optional decomposition

Zusammenfassung

Wir modellieren einen Finanzmarkt mit unendlich vielen Wertpapieren als stochastischen Prozeß X in stetiger Zeit mit Werten in einem separablen Hilbertraum H. In diesem Rahmen zeigen wir die Äquivalenz von Vollständigkeit des Marktes und der Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes unter der Bedingung, daß X stetige Pfade besitzt. Weiter zeigen wir, daß (unter gewissen technischen Bedingungen) für X die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten/zweiten Art (im Sinne von Kabanov/Kramkov) äquivalent zur Absolutstetigkeit des Referenzmaßes zu einem eindeutigen, lokal äquivalenten Martingalmaß ist. Hat X stetige Pfade, so ist die Abwesenheit von allgemeiner asymptotischer Arbitrage äquivalent zur Existenz eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes. Außerdem geben wir ein Kriterium für die Existenz einer optionalen Zerlegung von X an. Dies wenden wir auf das Problem der Risikominimierung bei vorgegebener Investitionsobergrenze (effizientes Hedgen (Föllmer/Leukert)) an, um dieses im unendlichdimensionalen Kontext zu behandeln. Außerdem stellen wir eine unendlichdimensionale Erweiterung des Heath-Jarrow-Morton-Modells vor und nutzen den Potentialansatz nach Rodgers, um zwei weitere Zinsstrukturmodelle zu konstruieren.

Als Beitrag zur allgemeinen stochastischen Analysis in Hilberträumen beweisen wir eine pfadweise Version der Itôformel für stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden in einem separablen Hilbertraum. Daraus läßt sich eine pfadweise Version des Satzes über die Vertauschbarkeit von stochastischem und Lebesgue-Integral ableiten. Außerdem zeigen wir eine Version der Clark-Formel für eine Brownsche Bewegung mit Werten in einem Hilbertraum.

Schlagwörter:
Zinsstrukturmodelle, stochastische Analysis in Hilberträumen, äquivalente Martingalmaße, optionale Zerlegung

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Zur stochastischen Theorie der Finanzmärkte 2

1.2 Übersicht über die Arbeit 4

1.2.1 Kapitel 2 und 3 5

1.2.2 Kapitel 4 5

1.2.3 Kapitel 5 und 6 7

1.2.4 Kapitel 7 9

1.2.5 Kapitel 8 10

1.2.6 Kapitel 9 und 10 10

1.3 Einiges zur Notation 12

2 Stochastische Analysis in Hilberträumen **15**

2.1 Martingale mit Werten in einem Hilbertraum 15

2.2 Brownsche Bewegung mit Werten in einem Hilbertraum 16

2.3 Stochastische Integration 18

3 Pfadweiser Itô-Kalkül **21**

3.1 Ein pfadweiser Beweis der Itôformel in Hilberträumen 22

3.2 Eine Version des Satzes von Fubini für stochastische Integrale . . 27

4 Darstellungseigenschaft und Clark-Formel **29**

4.1 Ein Beispiel für ein nicht vollständiges Modell mit eindeutigem Martingalmaß 30

4.2 Die Darstellungseigenschaft 33
4.3 Endlichdimensionale Approximationen stochastischer Integrale . . 37
4.4 Die Clark-Formel 45

5 Martingalmaße und asymptotische Arbitrage 53
5.1 Asymptotische Arbitrage der ersten und zweiten Art 54
5.2 Allgemeine asymptotische Arbitrage im stetigen Fall 65

6 Beispiele zur asymptotischen Arbitrage 71
6.1 Arbitrage der ersten Art 71
6.2 Arbitrage der zweiten Art 77

7 Optionale Zerlegung und Superhedging 83
7.1 Existenz der optionalen Zerlegung bei Brownscher Filtrierung . . 84
7.2 Quantil-Hedgen und effizientes Hedgen 91

8 Martingalmaße und lokale Spezifikationen 101
8.1 Bedingte Verteilungen im unendlichdimensionalen Diffusionsmodell 103
8.2 Erweiterung des Modells durch Transformation 107

9 Ein unendlichdimensionales HJM-Modell 115
9.1 Modellierung der Zinsstruktur 117
9.2 Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes 120

10 Der Potentialansatz nach Rogers 123
10.1 Das Konstruktionsverfahren 124
10.2 Beispiel 1: Quadratisches Funktional 126
10.3 Zweites Beispiel: Summe exponentieller Funktionale 129

11 Ausblick 133

A Eigenschaften von H 137

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Theorie unendlichdimensionaler Martingale und ihrer Anwendung auf die Modellierung von Finanzmärkten mit unendlich vielen Wertpapieren. Das Spektrum der behandelten Themen reicht dabei von unendlichdimensionaler stochastischer Analysis über finanzmathematisch motivierte Probleme der Existenz und Eindeutigkeit von äquivalenten Martingalmaßen für unendlichdimensionale Semimartingale bis zu konkreten Finanzmarktmodellen mit unendlich vielen Wertpapieren, insbesondere Zinsstrukturmodellen. In den meisten Fällen ist dabei die stochastische Grundlage ein Semimartingal mit Werten in einem separablen Hilbertraum. Schwerpunktmäßig betrachten wir Prozesse mit stetigen Pfaden.

Methodisch bewegt sich diese Arbeit vom Abstrakten zum Konkreten. So behandeln die Kapitel 2 und 3 allgemeine Aussagen der stochastischen Analysis in Hilberträumen. Die Kapitel 4 und 5 behandeln die Frage nach Kriterien für die Existenz und Eindeutigkeit von zu einem Referenzmaß äquivalenten (oder absolutstetigen) Wahrscheinlichkeitsmaßen, unter denen ein vorgegebener unendlichdimensionaler Prozeß ein lokales Martingal ist. Dies sind bereits finanzmathematisch motivierte Fragestellungen (siehe dazu Abschnitt 1.1 und die beiden genannten Kapitel), die mit martingaltheoretischen Methoden untersucht werden. Kapitel 6 ergänzt Kapitel 5 um Beispiele. Kapitel 7 behandelt dann Probleme der Risikovermeidung bzw. -minimierung. Insbesondere werden eine unendlichdimensionale Variante des Optional Decomposition Theorems und die Konstruktion von effizienten Hedgingstrategien untersucht. Kapitel 8 berechnet bedingte endlichdimensionale Verteilungen für eine Klasse von unendlichdimensionalen Diffusionsprozessen. In den Kapiteln 9 und 10 werden schließlich zwei konkrete Klassen von

Modellierungen der Zinsstruktur vorgestellt.

Eine ausführliche Vorstellung der Inhalte findet sich in Abschnitt 1.2. Zuvor jedoch erläutern wir im folgenden Abschnitt kurz einige Begriffe und Kernaussagen der stochastischen Theorie der Finanzmärkte, soweit wir sie in dieser Arbeit im Rahmen eines unendlichdimensionalen Modells behandeln. Am Schluß der Einleitung findet sich eine Zusammenstellung von in dieser Arbeit verwendeten Notationskonventionen und Bezeichnungen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. H. Föllmer für anregende Gespräche und die gute Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit bedanken.

1.1 Zur stochastischen Theorie der Finanzmärkte

Die stochastische Theorie der Finanzmärkte betrachtet, entwickelt und analysiert Modelle für die ungewisse zeitliche Entwicklung der Preise von Wertpapieren (Aktien, festverzinsliche Anleihen, Optionen, etc.). Diese Preise werden durch reellwertige stochastische Prozesse dargestellt, die entweder in diskreter oder in kontinuierlicher Zeit ablaufen. In dieser Arbeit betrachten wir, außer in einigen illustrierenden Beispielen, nur Modelle in stetiger Zeit. Modelliert werden in der Regel die Wertverläufe von "Basiswertpapieren" wie Aktien und festverzinslichen Wertpapieren. Ein Hauptziel eines solchen Modells ist es, aus diesen Wertverläufen Preise von Derivaten, wie z. B. Optionen, abzuleiten. Ein *Derivat* oder *contingent claim* ist in allgemeiner Form definiert als meßbare Funktion der Werte der Basiswertpapiere des Finanzmarktes bis zu einem bestimmten Fälligkeitszeitpunkt. Ein *faires Preissystem* ordet jedem contingent claim einen Preis so zu, daß es in dem Finanzmarkt keine *Arbitragemöglichkeit* gibt. Das heißt, es ist nicht möglich, den Wert eines contingent claims bei Fälligkeit durch eine geschickte Investitionsstrategie nachzubilden und dabei weniger als den durch das Preissystem festgelegten Preis investieren zu müssen. Insbesondere bedeutet dies, daß das Finanzmarktmodell keine Möglichkeit bietet, mit positiver Wahrscheinlichkeit Gewinn zu machen, ohne dabei ein finanzielles Risiko einzugehen. Eine wichtige Fragestellung ist demnach, welche Kriterien es für die Arbitragefreiheit eines Modells gibt.

Fundamental hierfür und allgemein für die Stochastik der Finanzmärkte ist die Beziehung zwischen Preissystemen und geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaßen (ein

Klassiker hierzu ist die Arbeit von Harrison und Kreps [HK79]). Es zeigt sich nämlich, daß in der Regel der (genauer: *ein*) fairer Preis eines contingent claims C als Erwartungswert von C bezüglich eines *äquivalenten (lokalen) Martingalmaßes* interpretiert werden kann. Ein solches Maß ist ein zum Referenzmaß des Modells äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem alle Wertpapierprozesse (lokale) Martingale sind.

Aus dieser Identifizierung von Preissystemen mit Martingalmaßen ergibt sich das sogenannte "(first) fundamental theorem of asset pricing". Es besagt (cum grano salis), daß die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes für den Preisprozeß äquivalent zur Arbitragefreiheit des Marktes ist. In konkreten Versionen dieses Theorems muß präzisiert werden, welche Investitionsstrategien zulässig sind, und der Begriff "arbitragefrei" muß je nach Allgemeinheit noch leichten technischen Adaptionen unterzogen werden. Klassische Versionen finden sich in den Arbeiten von Harrison und Kreps, bzw. Harrison und Pliska ([HK79], [HP81]). Seine allgemeinsten Konkretisierungen für endlichdimensionale Preisprozesse in stetiger Zeit liefern die Arbeiten [DS94] und [DS98] von Delbaen und Schachermayer. Darin wird die No-Arbitrage-Bedingung durch eine asymptotische Form ("No Free Lunch With Vanishing Risk"(NFLVR)) ersetzt. Sind die zugrundeliegenden Preisprozesse nicht lokal beschränkt, so ist NFLVR nur noch äquivalent zur Existenz eines äquivalenten Sigma-Martingal-Maßes ([DS98]).

Eine andere wichtige Fragestellung der Stochastik der Finanzmärkte ist, welche Derivate sich durch eine Investitionsstrategie *duplizieren* lassen. Ein Derivat wird durch eine Investitionsstrategie dupliziert, wenn das Investitionsportfolio bei Fälligkeit des Derivats denselben Wert wie dieses besitzt. Dies führt zum Begriff der *Vollständigkeit* eines Finanzmarktes. Ein Finanzmarkt heißt vollständig, wenn jeder (hinreichend reguläre) contingent claim duplizierbar ist. Die Duplizierbarkeit durch eine Investitionsstrategie entspricht mathematisch der Darstellbarkeit des contingent claims als stochastisches Integral mit dem den Finanzmarkt repräsentierenden Prozeß als Integrator. Das sogenannte "second fundamental theorem of asset pricing" postuliert, daß in einem arbitragefreien Finanzmarkt die Vollständigkeit des Marktes äquivalent zur Eindeutigkeit des äquivalenten (lokalen) Martingalmaßes ist. Für endliche Wahrscheinlichkeitsräume läßt sich dieses Ergebnis mit elementarer linearer Algebra herleiten. Das entsprechende Resultat für einen Finanzmarkt in stetiger Zeit und somit unendlichem Wahrscheinlichkeitsraum ist jedoch viel tiefliegender. Eine Version für endlich viele Assets findet sich in [HP81], Theorem 3.35 und Corollary 3.36.

Da man in einem Finanzmarktmodell, das mehr als ein äquivalentes Martingalmaß besitzt, nicht mehr jeden contingent claim duplizieren kann, stellt sich die Frage, ob man den contingent claim zumindest immer risikofrei absichern kann. Anders formuliert: Gibt es eine Investitionsstrategie, deren Portfolio bei Fälligkeit mindestens den Wert des abzusichernden claims hat? Eine Antwort hierauf gibt das *Optional Decomposition Theorem* im endlichdimensionalen Modell. Es besagt, daß eine Strategie (die sogenannte *Superhedging-Strategie*) existiert, die als Startkapital das Supremum der Erwartungswerte aller äquivalenten Martingalmaße benötigt und zum Endzeitpunkt den Wert des contingent claims liefert. Dabei wird kontinuierlich das im weiteren Verlauf nicht mehr benötigte Kapital aus dem Portfolio abgezogen. Der Wertverlauf ist dabei unter jedem äquivalenten Martingalmaß ein Supermartingal. Die Struktur einer solchen optionalen Zerlegung wurde von El Karoui und Quenez in [EKQ95] herausgearbeitet. Dieses zunächst für eine spezielle Klasse von Prozessen hergeleitete Resultat wurde von Kramkov ([Kra96]) auf lokal beschränkte Semimartingale und von Föllmer und Kabanov ([FK98]) auf beliebige Semimartingale verallgemeinert.

Eine spezielle Form von Finanzmarktmodellen sind *Zinsstrukturmodelle*. Ein Zinsstrukturmodell beschreibt die zeitliche Entwicklung der Preise sogenannter *Zero-Coupon-Bonds*. Das sind Wertpapiere, die eine feste Auszahlung von 1 in einem zukünftigen Zeitpunkt (Fälligkeitszeitpunkt) T garantieren. Sie entsprechen damit festverzinslichen Wertpapieren, bei denen das eingesetzte Kapital und die Zinsen gemeinsam am Schluß des Anlagezeitraums ausgezahlt werden. Der Fälligkeitszeitpunkt T kann bei Modellierung in stetiger Zeit jeden Wert in einem betrachteten Handelszeitraum $[0, T_0]$ annehmen. Wenn es im Modell zu jedem T einen entsprechenden Zero-Coupon-Bond gibt, haben wir es mit einem Kontinuum von Wertpapieren zu tun. Dies ist eine Hauptmotivation für die Betrachtung unendlichdimensionaler Finanzmarktmodelle, wie sie auch in dieser Arbeit unternommen wird.

1.2 Übersicht über die Arbeit

Wir geben im folgenden eine kapitelweise Zusammenfassung der Inhalte und Ergebnisse dieser Arbeit:

1.2.1 Kapitel 2 und 3

In Kapitel 2 stellen wir die im Verlauf der Arbeit benötigten Begriffe aus der Stochastischen Analysis in Hilberträumen bereit. Dies umfaßt die Konzepte eines Martingals mit Werten in einem (separablen) Hilbertraum und einer Hilbertraumwertigen Brownschen Bewegung. Wir fassen danach die Konstruktion des stochastischen Integrals in diesem Kontext zusammen und definieren die hierfür relevanten Räume und Topologien, um den Unterschied zur und die Gemeinsamkeiten mit der endlichdimensionalen Herleitung deutlich zu machen.

Als erste Anwendung der in Kapitel 2 referierten Theorie leiten wir in Kapitel 3 eine pfadweise Version der Itôformel für stochastische Prozesse mit stetigen Pfaden in einem Hilbertraum her (Satz 3.5). Im Gegensatz zur allgemeinen stochastischen Integration, die nicht strikt pfadweise durchführbar ist, lassen sich Itô-Integrale längs einzelnen Pfaden berechnen. Dies von Föllmer in [Föl81] für den endlichdimensionalen Fall hergeleitete Resultat erweitern wir auf separable Hilberträume. In der Stochastik der Finanzmärkte ist ein pfadweiser Zugang zur stochastischen Integration sicher sinnvoll, da man bei der Realisierung einer Investitionsstrategie mit einem beobachteten Pfad arbeiten muß. Da die hierbei auftretenden stochastischen Integrale oft aus einer Anwendung der Itôformel resultieren, liefert eine pfadweise Version der Itôformel die Rechtfertigung für das pfadweise Berechnen dieser stochastischen Integrale. Der von uns gegebene Beweis der Itôformel kommt zudem mit schwächeren Voraussetzungen aus, als die üblichen, mit stochastischer Konvergenz arbeitenden Beweise, wie etwa der in Abschnitt 3.8 in [MP80]. Dort wird gefordert, daß die zweite Ableitung der betrachteten Funktion (lokal) gleichmäßig differenzierbar ist, was wir nicht benötigen. Als Anwendung der Itôformel für Prozesse mit Werten in einem Hilbertraum leiten wir eine Version des Satzes über die Vertauschbarkeit von stochastischem und Lebesgue-Integral her ("Stochastischer Satz von Fubini"). Auch hier erfolgt die Argumentation pfadweise (Satz 3.7). Dabei ist der Lebesgue-Integrationsoperator die Funktion des Pfades, auf die die Itôformel angewandt wird.

1.2.2 Kapitel 4

In Kapitel 4 wenden wir die allgemeine stochastischen Analysis der vorigen zwei Kapitel auf die Stochastik der Finanzmärkte an. Wie bereits oben erwähnt, spielt die Frage der Duplizierbarkeit eines contingent claims C eine wichtige Rolle dabei. Wie sieht es nun mit der Beziehung zwischen der Vollständigkeit und der

Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes in einem Finanzmarkt mit unendlich vielen Wertpapieren aus? In Abschnitt 4.1 zeigen wir anhand eines Beispiels mit nur einer Zeitperiode, daß in einem Finanzmarkt mit unendlich vielen Wertpapieren aus der Eindeutigkeit des Martingalmaßes im allgemeinen nicht die Vollständigkeit des Modells folgt. Dies liegt hierbei nicht daran, daß die Menge der zulässigen Strategien zu klein gewählt ist. Diese umfaßt im Beispiel alle Strategien, für die der Wert am Ende der Zeitperiode wohldefiniert ist. Wir brauchen daher mehr Regularität bei den zugrundeliegenden Prozessen. Delbaen gibt in Theorem 6.5 von [Del92] eine Version des "second fundamental theorem of asset pricing" für beliebig, auch unendlich viele Wertpapiere, deren Preisprozesse stetige und beschränkte Pfade besitzen, beschränkt sich aber auf die Betrachtung von Strategien, bei denen nur in endlich viele Wertpapiere investiert wird. Er nennt das Modell vollständig, wenn die mit solchen Strategien duplizierbaren contingent claims dicht im gesamten Raum der betrachteten contingent claims liegen. Seine Definition von "Vollständigkeit" ist somit etwas schwächer als die eingangs erwähnte, ermöglicht es dafür aber, auch bei unendlich vielen Wertpapieren ohne unendlichdimensionale stochastische Integration auszukommen.

Unsere, in Abschnitt 4.2 gegebene Version benutzt dagegen einen der endlichdimensionalen Situation analogen Vollständigkeitsbegriff, der direkt mit unendlichdimensionalen stochastischen Integralen arbeitet. Für unseren Satz benötigen wir die Voraussetzung, daß der Wertprozeß bei gleichzeitiger Betrachtung aller Wertpapiere als stochastischer Prozeß mit stetigen Pfaden in einem separablen Hilbertraum aufgefaßt werden kann. Eine Beschränktheit der Pfade benötigen wir jedoch nicht. Unsere Herleitung dieses Resultats benutzt die Ergebnisse von Kapitel XI in [Jac79]. Jacod betrachtet dort das sogenannte Martingalproblem und untersucht die Eigenschaften von extremalen Lösungen des Martingalproblems. Damit zeigen wir für unsere Situation die Äquivalenz von Vollständigkeit des Modells und Eindeutigkeit des Martingalmaßes. Eine weitere unendlichdimensionale Version, die auch für unstetige Prozesse gilt, präsentieren Jarrow und Madan in [JM99]. Die Anforderungen an Prozesse sowie zu duplizierende Wertverläufe sind hier vom Bounded-Mean-Oscillation-Typ.

In der Praxis kann man auch bei einem Markt mit (zumindest potentiell) unendlich vielen Wertpapieren nur in je endlich viele investieren. Daher stellt sich die Frage, ob sich stochastische Integrale mit unendlichdimensionalem Integrator durch solche annähern lassen, die nur endlich viele Koordinaten desselben benutzen. Unsere Herleitung einer solchen Approximation fußt auf der Kunita-Watanabe-Zerlegung. Die Kunita-Watanabe-Zerlegung eines quadratisch inte-

grierbaren Martingals stellt dieses als Summe aus einem stochastischen Integral mit dem Preisprozeß als Integrator und einem zum Raum der stochastischen Integrale orthogonalen Prozeß dar. Eine allgemeine Version für lokale Martingale findet sich in Lemma III.4.24 in [JS87]. Wir zeigen in Abschnitt 4.3 die Konvergenz der Kunita-Watanabe-Zerlegung des Martingals der bedingten Erwartungen eines quadratisch integrierbaren contingent claims C bezüglich Projektionen des (ebenfalls quadratisch integrierbaren) Preisprozesses auf endlichdimensionale Unterräume gegen die Kunita-Watanabe-Zerlegung von C bezüglich des ganzen Prozesses. Wenn C durch eine unendlich-dimensionale Strategie duplizierbar ist, bedeutet dies insbesondere, dass man C beliebig genau (im L^2-Sinn) mit Strategien nachbilden kann, bei denen nur in endlich viele Wertpapiere investiert wird.

Zum Abschluß von Kapitel 4 zeigen wir in Abschnitt 4.4 eine Version der Clark-Formel für eine Brownsche Bewegung mit Werten in einem separablen Hilbertraum. Die klassische Clark-Formel gibt an, wie der Integrand ξ in der aufgrund der Vollständigkeit der eindimensionalen Brownschen Bewegung W existierenden Darstellung

$$F = \mathrm{E}[F] + \int_0^1 \xi_t \, dW_t$$

einer quadratisch integrierbaren Zufallsvariable F aussieht, wenn F hinreichend regulär ist. Eine Verallgemeinerung der Clark-Formel für die unendlichdimensionale Brownsche Bewegung (aufgefaßt als Kollektion abzählbar vieler unabhängiger eindimensionaler Brownscher Bewegungen) leitet J. Blum in [Blu86] her. Unser Hilbertraum-wertiger Ansatz beruht nicht auf dem Resultat von Blum, sondern überträgt die Beweistechnik von Bismut ([Bis86]) auf die unendlichdimensionale Situation. Unsere Form der Clark-Formel unterscheidet sich von der endlichdimensionalen Version und von derjenigen Blums dadurch, daß der Covarianzoperator C der Brownschen Bewegung (siehe Definition 2.4) eine wichtige Rolle bei der Herleitung spielt und auch in der Clark-Formel selbst auftaucht. Dies spiegelt die Tatsache wieder, daß die Struktur der Hilbertraum-wertigen Brownschen Bewegung nicht vollkommen symmetrisch ist.

1.2.3 Kapitel 5 und 6

In Kapitel 5 beschäftigen wir uns mit Varianten des “first fundamental theorem of asset pricing”. Dabei geht es nicht um die Herleitung eines Resultates von möglichst großer Allgemeinheit, sondern stattdessen um eine Untersuchung der

Tragfähigkeit intuitiver No-Arbitrage-Begriffe in spezielleren Situationen. Wir betrachten zunächst die von Kabanov und Kramkov in [KK96] eingeführten Formen asymptotischer Arbitrage im Rahmen eines sogenannten *Large Financial Markets*. Wir erläutern die Begriffe der asymptotischen Arbitrage der ersten bzw. zweiten Art in unserem (unendlichdimensionalen) Finanzmarktmodell. Anschließend betrachten wir ein Finanzmarkmodell mit unendlich vielen Wertpapieren, in dem es für die endlichdimensionalen Teilmärkte zum Referenzmaß P auf den entsprechenden Unter-σ-Algebren äquivalente Martingalmaße gibt, von denen nur eines, im folgenden Q genannt, ein Martingalmaß für jeden endlichdimensionalen Teilmarkt ist. Es gibt also genau ein zu P (in diesem Sinn) lokal äquivalentes Martingalmaß. Unser Hauptresultat in Abschnitt 5.1 besagt dann, daß unter einer Kompaktheitsbedingung an die Mengen der Martingalmaße der endlichdimensionalen Teilmodelle die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art äquivalent zur Absolutstetigkeit von P zu Q sowie die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der zweiten Art äquivalent zur Absolutstetigkeit von Q zu P ist. Grundlegend für die Herleitung dieses Satzes sind die Ergebnisse in [KK96],[KS96] und [KK98].

In Abschnitt 5.2 betrachten wir ein Konzept asymptotischer Arbitrage, das in enger Beziehung zu den Resultaten von Delbaen ([Del92]) über Martingalmaße für Prozesse mit stetigen und beschränkten Pfaden steht. Eine *allgemeine asymptotische Arbitragemöglichkeit* ist hier durch eine Folge von endlichdimensionalen Strategien gegeben, deren Wertprozesse nach unten gleichmäßig beschränkt sind und deren Werte bei Fälligkeit stochastisch gegen eine nicht-negative, nicht P-fast sicher verschwindende Funktion konvergieren. Wir zeigen, daß bei Preisprozessen mit stetigen und lokal beschränkten Pfaden die Abwesenheit von allgemeiner asymptotischer Arbitrage äquivalent zur Existenz eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes ist. Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt brauchen wir hier nicht die Eindeutigkeit des Martingalmaßkandidaten. Wir müssen stattdessen jedoch die Stetigkeit der Pfade fordern.

Kapitel 6 ergänzt das vorhergehende Kapitel um zwei ausführliche Beispiele von unendlichdimensionalen Diffusionsmodellen, in denen jeweils genau eine der beiden Arten asymptotischer Arbitrage nach Kabanov/Kramkov existiert. Die stochastische Basis ist jeweils eine unendlichdimensionale Brownsche Bewegung. Wesentlich für die Konstruktion der Arbitragestrategien ist in beiden Fällen eine Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen.

1.2.4 Kapitel 7

Kapitel 7 hat als Thema das "Optional Decomposition Theorem" und seine Übertragung auf den unendlichdimensionalen Fall. Das oben erwähnte Beispiel in Abschnitt 4.1 zeigt nicht nur, daß in einem Finanzmarkt mit unendlich vielen Wertpapieren aus der Eindeutigkeit des Martingalmaßes im allgemeinen nicht die Vollständigkeit des Modells folgt, sondern sogar, daß es in unendlichdimensionalen Modellen keine optionale Zerlegung eines contingent claims geben muß. Das "Optional Decomposition Theorem" kann demnach hier nicht allgemein gültig sein. In Abschnitt 7.1 zeigen wir die Existenz einer optionalen Zerlegung im unendlichdimensionalen Modell, wenn die zugrundeliegende Filtrierung die Eigenschaft hat, daß jedes an sie adaptierte lokale reellwertige Martingal P-fast sicher stetige Pfade hat.

Das Theorem über die Existenz der optionalen Zerlegung gibt eine Antwort auf die Frage: Was kostet eine Strategie, die einen gegebenen contingent claim absichert, mindestens? Der resultierende (Superhedging-)Preis ist aber oft nur eine triviale obere Schranke für den Preis des claims und damit für praktische Zwecke zu hoch. Dies wird zum Beispiel von Eberlein und Jacod in [EJ97] für eine große Klasse von Levy-Prozessen und Optionen, deren Auszahlung eine konvexe Funktion des Wertpapierpreises ist, gezeigt.

Wenn ein Investor nur bereit ist, eine kleinere Summe als die für das Superhedging notwendige zu investieren, muß er das Risiko in Kauf nehmen, bei Fälligkeit des contingent claims ein Portfolio zu haben, das zur Deckung des claims nicht ausreicht. Somit stellt sich die Frage, welche Strategie bei gegebenem Startkapital das Verlustrisiko minimiert. Diese Fragestellung ist auch im vollständigen Modell sinnvoll, da auch hier der Investor nicht bereit oder in der Lage sein kann, den zur Duplizierung notwendigen Betrag einzusetzen. Denn auch hier ist die perfekte Absicherung nicht unbedingt erwünscht, da man damit zwar keinerlei Risiko eingeht, aber auch keine Chance hat, Gewinn zu machen. Föllmer und Leukert behandeln das Problem der Risikominimierung bei vorgegebener Investitionsobergrenze in den Arbeiten [FL99] und [FL00] im endlichdimensionalen Modell. Wir erweitern ihre Ergebnisse in Abschnitt 7.2 auf den unendlichdimensionalen Fall. Da die optimale Strategie hier durch Anwendung des Optional Decomposition Theorem auf eine Modifikation des ursprünglichen contingent claims gewonnen wird, kommen dieselben Voraussetzungen zum Tragen wie in Abschnitt 7.1.

1.2.5 Kapitel 8

Kapitel 8 befasst sich mit einem durch die Theorie der Gibbsmaße motivierten Ansatz zur Approximation eines unendlichdimensionalen Finanzmarktes durch endlichdimensionale Modelle. Man betrachtet hier endlich viele Koordinaten des Preisprozesses und nimmt alle Information über die restlichen Koordinaten als gegeben an. Man sieht sich also die bedingten Verteilungen endlich vieler Koordinaten, gegeben die von allen bis auf jeweils diese Koordinaten erzeugten σ-Algebren, an. Dies ist gewissermaßen ein zur Methode in Abschnitt 4.3 komplementärer Ansatz. Dort wird nur die von den endlich vielen Koodinaten erzeugte σ-Algebra zugrundegelegt. Beim Übergang zu bedingten Verteilungen verlieren die beteiligten Prozesse jedoch leicht die Eigenschaft, Semimartingale zu sein. Dies demonstrieren wir an einem einfachen Beispiel. Außerdem sind die resultierenden bedingten Verteilungen meist nicht explizit angebbar. In Abschnitt 8.2 stellen wir das von Deuschel in [Deu85] behandelte unendlichdimensionale Diffusionsmodell vor. In diesem Modell bleibt die Semimartingaleigenschaft beim Übergang zu bedingten Verteilungen erhalten, und die bedingten Verteilungen können explizit berechnet werden. Diese Ergebnisse von Deuschel referieren wir in diesem Abschnitt. Deuschel berechnet mehrdimensionale bedingte Verteilungen nur für den Fall, daß der Martingalanteil des Prozesses eine unendlichdimensionale Brownsche Bewegung ist. Zwar erweitert er das Modell auch auf nicht-triviale Volatilitäten, bestimmt hier jedoch nur eindimensionale bedingte Verteilungen des Prozesses. Um auch mehrdimensionale bedingte Verteilungen in allgemeineren Situationen behandeln zu können, erweitern wir das Brownsche Modell von Deuschel in Abschnitt 8.2 durch geeignete Transformationen der einzelnen Koordinaten. Wir bestimmen die Dynamik der transformierten Prozesse. Desweiteren geben wir ein Kriterium an, wann es zu den bedingten Verteilungen äquivalente Martingalmaße gibt und berechnen die entsprechenden Dichten. Zum Abschluß des Kapitels betrachten wir noch den konkreten Fall, daß die Martingalanteile aller Koordinaten geometrische Brownsche Bewegungen sind.

1.2.6 Kapitel 9 und 10

Die beiden letzten Kapitel 9 und 10 befassen sich mit Zinsstrukturmodellen. Auch wenn ein zeitstetiges Zinsstrukturmodell im Prinzip immer unendlichdimensional ist, haben die meisten Modellierungen in der Literatur einen endlichdimensionalen Prozeß als stochastische Basis. Ausnahmen sind hier das unendlichdimensionale

Gaußsche Modell von Kennedy ([Ken94], [Ken97]), die auf einer endlichdimensionalen Brownschen Bewegung und einem zufälligen Maß beruhenden Modellierung von Björk, Di Masi, Kabanov und Runggaldier ([BDMKR97]), sowie das Modell von Filipović ([Fil00]), auf das wir weiter unten noch genauer eingehen. In Kapitel 9 stellen wir ein unendlichdimensionales Zinsstrukturmodell vor, das eine Verallgemeinerung des in [HJM92] präsentierten Heath-Jarrow-Morton-Modells ist. Das Heath-Jarrow-Morton-Modell ist eine allgemeine Modellierung der Zinsstruktur mit den forward rates als Basisgrößen. Die Modellierung erfolgt durch eine Familie von Prozessen, die stochastische Differentialgleichungen bezüglich einer zugrundeliegenden endlichdimensionalen Brownschen Bewegung erfüllen. Dies liefert ein sehr flexibles Modell in kontinuierlicher Zeit mit stetigen Pfaden. Wie Musiela und Sondermann in [MS93] zeigen, ist diese Darstellung äquivalent zu einer Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Zinsstruktur als stochastischer Prozeß mit Werten in einem geeigneten Funktionenraum. Die stochastische Basis ist dabei jedoch weiterhin durch eine endlichdimensionale Brownsche Bewegung gegeben.

In Abschnitt 9.1 erweitern wir dieses Modell, indem wir als stochastische Basis eine Brownsche Bewegung mit Werten in einem separablen Hilbertraum zugrundelegen. Die Modellierung orientiert sich dabei mehr am Originalmodell von Heath, Jarrow und Morton als an der Variante von Musiela und Sondermann. Dort wird eine andere Parametrisierung (über Restlaufzeiten) verwandt. Eine Modellierung mit einer unendlichdimensionalen Brownschen Bewegung in der letztgenannten Parametrisierung findet sich in [Fil00]. Auch wenn das hier vorgestellte Modell diesem recht ähnlich ist, sind die Unterschiede doch hinreichend groß, eine Ausarbeitung des Modells in unserer Parametrisierung zu rechtfertigen. Insbesondere legen wir in unserer Darstellung Wert auf die Tatsache, daß die Ableitung der Dynamik der Bondpreise aus der Dynamik der zugrundeliegenden forward rates nur auf der Anwendung der Itôformel beruht. Dies bedeutet im Licht von Kapitel 3, daß das Modell strikt pfadweise behandelt werden kann, was für die praktische Anwendung sinnvoll ist. In Abschnitt 9.2 leiten wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes her, unter dem der Prozeß der abdiskontierten Bondpreise ein lokales Martingal ist. Einige für dieses Kapitel benötigte technische Lemmata befinden sich in Anhang A.

Kapitel 10 befaßt sich mit einem von Rogers ([Rog97]) entwickelten Verfahren zur Konstruktion von Zinsstrukturmodellen. Für das in Kapitel 9 betrachtete Modell kann jede bestehende Zinsstrukturkurve als Startwert dienen, da diese

einfach in den Wert der forward rates im Zeitpunkt 0, der eine relativ frei wählbare Funktion ist, übertragen werden kann. Es ist somit ein Modell, das an jede konkrete Situation angepaßt werden kann. Andererseits muß man aber auch viele Modellparameter spezifizieren. Man kann sich daher fragen, welche Größen man mindestens für ein Zinsstrukturmodell benötigt, in dem die Bewertung von Derivaten möglich ist, ohne daß man bereits vor der Konkretisierung des Modells den Anspruch auf Allgemeinheit aufgibt. Dieses Problem wird von Rogers in [Rog97] untersucht. Es stellt sich heraus, daß die wesentliche Größe zur Festlegung eines Zinsstrukturmodells die sogenannte *state price density* ist. Dies ist der Quotient aus dem Dichtemartingal eines äquivalenten Martingalmaßes und dem Diskontfaktor. Hieraus lassen sich die Werte der Zinsen und die Bondpreise ableiten. Rogers untersucht die Frage, wie man die state price density ζ spezifizieren muß, damit die in den Formeln für Zinsen und Bondpreise auftretenden bedingten Erwartungswerte explizit berechenbar sind. Bei der in [Rog97] vorgestellten Konstruktionsmethode für ζ wird als stochastische Basis ein Markovprozeß gewählt. Der Prozeß ζ wird dann mittels der Resolvente des Markovprozesses konstruiert. Wir erläutern dieses Verfahren in Abschnitt 10.1 und erstellen damit in den Abschnitten 10.2 und 10.3 zwei konkrete Modelle, bei denen der zugrundeliegende Markovprozeß eine Brownsche Bewegung mit Werten in einem separablen Hilbertraum ist.

Wir beschließen die Arbeit mit einem kurzen Ausblick auf sich aus der Arbeit ergebende weiterführende Fragestellungen.

1.3 Einiges zur Notation

Wir stellen hier in loser Folge einige Besonderheiten der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Notation vor.

Zur Unterscheidung von Erwartungswerten bezüglich verschiedener Wahrscheinlichkeitsmaße schreiben wir im allgemeinen

$$\mathrm{E}_P[\cdots]\,,$$

geben also das zugrundeliegende Maß (hier P) als Index an.

Zur Vereinfachung der Schreibweise unterscheiden wir nicht zwischen Funktionen und den ihnen entsprechenden Äquivalenzklassen in L^p-Räumen, sofern die im Kontext betrachteten Wahrscheinlichkeitsmaße untereinander äquivalent sind. In

dieser Situation führt diese Ungenauigkeit nicht zu unzulässigen Schlüssen. In diesem Sinne sind auch Gleichungen zwischen Zufallsvariablen (insbesondere bedingten Erwartungen) zu lesen. Wir schreiben kurz „=“ auch dort, wo nur P-fast sichere Gleichheit besteht, wenn wir nur an Maßen aus der Äquivalenzklasse von P interessiert sind.

Bei Normen in normierten Vektoräumen schreiben wir in der Regel den Raum als Index der Norm, also zum Beispiel $\|\cdot\|_H$ für die Norm im Hilbertraum H. Entsprechendes gilt für Skalarprodukte. $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet die Supremumsnorm auf dem zugrundeliegenden Raum.

Natürliche Isomorphismen zwischen Vektorräumen werden implizit benutzt, ohne im Einzelfall explizit angegeben zu werden. So wird zum Beispiel eine Bilinearform auf einem Raum H bei Bedarf auch als Linearform auf dem Tensorprodukt von H mit sich selbst aufgefaßt.

Ist $(X_t)_{t\geq 0}$, bzw. $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ ein stochastischer Prozeß, so bezeichnen wir diesen auch kurz mit X, wenn es um globale Eigenschaften des Prozesses geht. Entsprechend reden wir von der Filtrierung $\mathcal{F}$, wenn $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gemeint ist und keine Verwechslung möglich ist.

Im folgenden geben wir eine Übersicht über die verwendeten Bezeichnungen und Abkürzungen für in dieser Arbeit vorkommende spezielle Räume, Operatoren, etc.:

Operatoren und Funktionen:

tr	Spur eines Operators
$\langle\cdot,\cdot\rangle_H$	Skalarprodukt im Hilbertraum H
$\langle\langle X\rangle\rangle_t$	$\otimes$-quadratische Variation von X in t
$\langle X\rangle_t$	$\|\cdot\|_H$-quadratische Variation von X in t, wenn X Werte im Hilbertraum H annimmt, bzw. die quadratische Variation von X in t, wenn X reellwertig ist
1_A	Indikatorfunktion einer meßbaren Menge A

Spezielle Räume:

$H\widehat{\otimes}_2 H$	Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren auf einem Hilbertraum H
$H\widehat{\otimes}_1 H$	Raum der nuklearen Operatoren
$\mathrm{Hom}(U,V)$	Raum aller linearen Abbildungen von einem Vektorraum U in einen Vektorraum V
$L(U,V)$	Raum der stetigen linearen Abbildungen zwischen zwei topologischen Vektorräumen U und V
$U^{\perp}$	Orthogonales Komplement eines Unterraums U in einem Hilbertraum
$L^2(M,G)$	Raum von Prozessen mit Werten in $\mathrm{Hom}(U,G)$ für einen (eventuell von t abhängenden) Unterraum U von H mit der durch den Covarianzoperator des H-wertigen, quadratisch integrierbaren Martingals M induzierten Norm (Details siehe Abschnitt 2.3)
$\Lambda^2(H,G,M)$	der durch Isometrieabschluß erhaltene Raum der G-wertigen Integranden für das H-wertige, quadratisch integrierbare Martingal M
$\Lambda^2_{loc}(H,G,M)$	Raum aller G-wertigen Integranden für das H-wertige, lokale Martingal M
$\Lambda^2(M)$	Kurzschreibweise für $\Lambda^2(H,\mathbb{R},M)$
$\Lambda^2_{loc}(M)$	Kurzschreibweise für $\Lambda^2_{loc}(H,\mathbb{R},M)$
$\mathcal{R}^2(M,\mathcal{P})$	Raum der quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen, die eine Darstellung als stochastisches Integral bezüglich des quadratisch integrierbaren Martingals M besitzen.

Kapitel 2

Stochastische Analysis in Hilberträumen

In diesem Kapitel wollen wir die im weiteren Text benötigten Konzepte aus der Stochastischen Analysis in Hilberträumen zusammenstellen. Wir definieren Hilbertraum-wertige Brownsche Bewegungen und Martingale und führen das stochastische Integral in diesem Kontext ein. Als Grundlage dient dabei das Buch "Stochastic Integration" von M. Metivier und J. Pellaumail ([MP80]), daraus insbesondere die Abschnitte 4 und 14.

Wir fixieren im folgenden einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, versehen mit einer rechtsstetigen Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. H sei ein separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

2.1 Martingale mit Werten in einem Hilbertraum

Definition 2.1 (Martingal) Ein adaptierter Prozeß $(M_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in H ist ein *Martingal*, falls für alle $t \geq 0$

$$\mathrm{E}_P[\|M_t\|_H] < \infty$$

ist und für $0 \leq s \leq t$

$$\mathrm{E}_P[M_t \,|\, \mathcal{F}_s] = M_s$$

ist. Insbesondere ist für alle $h \in H$ $(\langle h, M_t \rangle_H)_{t\geq 0}$ ein reellwertiges Martingal.

Wie im endlichdimensionalen Fall ist der Prozeß $(M_t)_{t\geq 0}$ ein *lokales Martingal*, wenn es eine aufsteigende Folge $T_0 \leq T_1 \leq \cdots$ von Stoppzeiten gibt, so daß jeder der Prozesse

$$M_t^{T_n} := M_{t\wedge T_n} \quad (t \geq 0)$$

ein Martingal ist.

Ein Martingal M heißt *p-fach integrierbar* bzw. *L^p-Martingal*, falls für alle $t \geq 0$

$$\mathrm{E}_P[\|M_t\|_H^p] < \infty$$

ist.

2.2 Brownsche Bewegung mit Werten in einem Hilbertraum

Wir wollen nun definieren, was eine Brownsche Bewegung mit Werten in einem Hilbertraum ist. Dazu müssen wir noch zwei Tensorprodukt-Räume einführen:

Definition 2.2 (Hilbert-Schmidt-Operatoren und nukleare Operatoren) Der Raum $H\widehat{\otimes}_2 H$ der *Hilbert-Schmidt-Operatoren* ist die Vervollständigung des algebraischen Tensorproduktes $H \otimes H$ bezüglich der durch

$$\|g \otimes h\|_{H\widehat{\otimes}_2 H} := \|g\|_H \; \|h\|_H$$

definierten Norm auf $H \otimes H$. Via

$$(h_1 \otimes h_2)(g) := \langle h_2, g\rangle_H \; h_1$$

können die Elemente von $H\widehat{\otimes}_2 H$ mit stetigen linearen Operatoren auf H identifiziert werden. Da die Operatoren der Form $h_1 \otimes h_2$ kompakt sind (ihr Bild ist eindimensional) und jedes Element von $H\widehat{\otimes}_2 H$ die Form $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} h_{i,1} \otimes h_{i,2}$ hat, sind alle Elemente von $H\widehat{\otimes}_2 H$ kompakte Operatoren.

$H\widehat{\otimes}_2 H$ ist wieder ein separabler Hilbertraum mit dem durch

$$\langle g_1 \otimes g_2, h_1 \otimes h_2\rangle := \langle g_1, h_1\rangle_H \; \langle g_2, h_2\rangle_H$$

induzierten Skalarprodukt.

Der Banachraum $H\widehat{\otimes}_1 H \subset H\widehat{\otimes}_2 H$ der *nuklearen Operatoren* ist die über die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts definierte Erweiterung von $H \otimes H$ (genauer: es ist das Tensorprodukt von H mit sich selbst in der Kategorie der Banachräume, siehe [MP80], Abschnitt 14.2 (2)).

Bemerkung 2.3 Für selbstadjungierte kompakte lineare Operatoren C auf H mit Spektraldarstellung

$$C\, e_n = \lambda_n\, e_n,$$

$\lambda_n \in \mathbb{R}$, bezüglich einer Orthonormalbasis $(e_n)_{n=1,2,\ldots}$ aus Eigenvektoren, gilt:

$$C \in H\widehat{\otimes}_2 H \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty,$$

und

$$C \in H\widehat{\otimes}_1 H \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty.$$

Insbesondere ist für $C \in H\widehat{\otimes}_2 H$ das Quadrat C^2 ein Element von $H\widehat{\otimes}_1 H$ und umgekehrt liegt für positiv definite $C \in H\widehat{\otimes}_1 H$ die Wurzel $C^{\frac{1}{2}}$ in $H\widehat{\otimes}_2 H$.

Definition 2.4 (Brownsche Bewegung) Ein adaptierter H-wertiger Prozeß $(W_t)_{t\geq 0}$ ist eine H-wertige *Brownsche Bewegung* mit *Covarianzoperator* $C \in H\widehat{\otimes}_1 H$, falls für alle $s < t$ gilt:

i) $W_t - W_s$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_s$.

ii) Für alle $h \in H$ ist $\langle h, W_t - W_s\rangle_H$ normalverteilt mit Mittelwert 0 und Varianz $(t-s)\ \langle h, C(h)\rangle_H$.

Bemerkung 2.5 Damit die zweite Bedingung der Definition erfüllt sein kann, muß C ein positiv semi-definiter, selbstadjungierter Operator sein. Die Charakterisierung in Bemerkung 2.3 und Teil ii) der Definition besagen dann, daß es eine Orthonormalbasis $(e_n)_{n=1,2,\ldots}$ gibt, bezüglich der W die Darstellung

$$W_t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\, W_t^n\, e_n,$$

mit unabhängigen eindimensionalen Brownschen Bewegungen W^n besitzt. Für die Koeffizienten $\lambda_n \geq 0$ ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.

W hat die $\|\cdot\|_H$-*quadratische Variation*

$$\langle W \rangle_t = \operatorname{tr}(C)\, t,$$

das heißt $\|W_t\|_H^2 - \operatorname{tr}(C)\, t$ ist reellwertiges Martingal, und die $\otimes$-*quadratische Variation*

$$\langle\langle W \rangle\rangle_t = t\, C \in H \widehat{\otimes}_1 H \subset H \widehat{\otimes}_2 H,$$

das heißt $W_t \otimes W_t - t\, C$ ist $H \widehat{\otimes}_2 H$-wertiges Martingal.

Bemerkung 2.6 Ein stetiger H-wertiger adaptierter Prozeß W ist genau dann eine Brownsche Bewegung mit Covarianzoperator C, wenn er ein quadratisch integrierbares Martingal mit

$$\langle\langle W \rangle\rangle_t = t\, C$$

ist. Für jedes L^2-Martingal M existiert ein $H \widehat{\otimes}_1 H$-wertiger Prozeß $(C_t)_{t \geq 0}$, so daß

$$\langle\langle M \rangle\rangle_t = \int_0^t C_s \, d \langle M \rangle_s \, .$$

$C_t(\omega)$ ist für alle $\omega \in \Omega$ und alle $t \geq 0$ ein selbstadjungierter, positiv semi-definiter Operator mit $\operatorname{tr} C_t(\omega) = 1$ und somit $\|C_t(\omega)\| \leq 1$.

2.3 Stochastische Integration

Dieser Abschnitt beschreibt kurz die Konstruktion des stochastischen Integrals für Martingale mit Werten in einem separablen Hilbertraum H. Zuvor wollen wir noch die Definition der previsiblen σ-Algebra und previsibler Prozesse in Erinnerung rufen:

Definition 2.7 (previsible σ-Algebra, previsible Prozesse) Auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ ist die *σ-Algebra der previsiblen Mengen (previsible σ-Algebra)* die von den Mengen der Form $A \times (s, t]$, mit $0 \leq s < t$ und $A \in \mathcal{F}_s$ erzeugte σ-Algebra auf $\Omega \times [0, \infty)$. Ein stochastischer Prozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Werten in einem Hilbertraum H heißt *previsibel*, wenn er, aufgefaßt als Abbildung von $\Omega \times [0, \infty)$ nach H, meßbar bezüglich der previsiblen σ-Algebra ist.

Im folgenden bezeichne $\mathrm{Hom}(U,V)$ den Raum aller linearen Abbildungen von einem Vektorraum U in einen Vektorraum V und $L(U,V)$ den Raum der *stetigen* linearen Abbildungen zwischen zwei topologischen Vektorräumen U und V. G sei ein weiterer separabler Hilbertraum.

Wie im endlichdimensionalen Fall wird das stochastische Integral bezüglich eines L^2-Martingals $(M_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in einem separablen Hilbertraum H konstruiert, indem das Integral zunächst für elementare previsible Prozesse der Form

$$X_t = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\, A_i,$$

mit $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ und $L(H,G)$-wertigen, $\mathcal{F}_{t_i}$-meßbaren Zufallsvariablen A_i $(i = 0,\ldots,n-1)$, definiert wird als

$$\int_0^\infty X_s\, dM_s := \sum_{i=0}^{n-1} A_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

beziehungsweise

$$\int_0^t X_s\, dM_s := \sum_{i=0}^{n-1} A_i(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})$$

(nicht-antizipierende Riemann-Summen). Das stochastische Integral ist dann für feste Obergrenze $t \in [0,\infty]$ eine G-wertige Zufallsvariable.

Das Integral wird dann via Isometrie auf den Abschluß des aufgespannten Vektorraums bezüglich einer geeigneten Norm fortgesetzt. Der Raum, in dem der Abschluß gebildet wird, ist der Raum $L^2(M,G)$ aller Prozesse $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in $\mathrm{Hom}(U,G)$ für einen (eventuell von t abhängenden) Unterraum U von H mit folgenden Eigenschaften:

i) Der Definitionsbereich U von $X_t(\omega)$ enthält das Bild von $C_t^{\frac{1}{2}}$ für alle $(\omega,t) \in \Omega \times [0,\infty)$ (C wie in Bemerkung 2.6).

ii) Für jedes $h \in H$ ist der G-wertige Prozeß $(X \circ C^{\frac{1}{2}})(h)$ previsibel.

iii) $X \circ C^{\frac{1}{2}}$ ist ein $G\widehat{\otimes}_2 H$-wertiger Prozeß, und es ist

$$\mathrm{E}_P\left[\int_0^\infty \left\| X_t \circ C_t^{\frac{1}{2}} \right\|^2_{G\widehat{\otimes}_2 H} d\,\langle M\rangle_t\right] < \infty.$$

Die Norm auf $L^2(X,G)$ ist dann durch

$$\|X\| = \mathrm{E}_P\left[\int_0^\infty \left\|X_t \circ C_t^{\frac{1}{2}}\right\|^2_{G\widehat{\otimes}_2 H} d\langle M\rangle_t\right]^{\frac{1}{2}}$$

gegeben. Bezüglich dieser Norm ist die für elementare Prozesse definierte Abbildung

$$X \quad \mapsto \quad \int_0^\infty X_t\, dM_t$$

eine Isometrie und kann daher auf den Abschluß des Raumes der elementaren Prozesse in $L^2(X,G)$ fortgesetzt werden.

Den Raum aller solcher Integranden für ein L^2-Martingal M bezeichnen wir mit

$$\Lambda^2(H,G,M), \quad \text{bzw.} \quad \Lambda^2(M),$$

falls $G = \mathbb{R}$ ist. Den durch Lokalisieren erweiterten Raum nennen wir

$$\Lambda^2_{loc}(H,G,M).$$

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch einige Rechenregeln für das stochastische Integral zusammenstellen (vergleiche Abschnitt 14.7 in [MP80]).

Satz 2.8 *Sei M ein quadratisch integrierbares Martingal mit Werten in H und Covarianzprozeß C (Bemerkung 2.6). Weiter sei $X \in \Lambda^2(H,G,M)$ (G separabler Hilbertraum). Dann gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\left\langle\left\langle \int X\, dM \right\rangle\right\rangle_t = \int_0^t X_s \circ C_s \circ X_s^*\, d\langle\langle M\rangle\rangle_s; \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \int X\, dM \right\rangle_t &= \int_0^t \mathrm{tr}\left(X_s \circ C_s \circ X_s^*\right) d\langle M\rangle_s \\ &= \int_0^t \left\|X_s \circ C_s^{\frac{1}{2}}\right\|^2_{G\widehat{\otimes}_2 H} d\langle M\rangle_s. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ist M von der Form $M_t = M_0 + \int_0^t Y_s\, dN_s$ für $t \geq 0$, wobei N ein quadratisch integrierbares Martingal mit Werten in einem separablen Hilbertraum K und $Y \in \Lambda^2(K,H,N)$, dann gilt die folgende Assoziativitätseigenschaft *des stochastischen Integrals:*

$$\int_0^t X_s\, dM_s = \int_0^t X_s\, d\left(\int_0^s Y_u\, dN_u\right) = \int_0^t X_s \circ Y_s\, dN_s. \tag{2.3}$$

Kapitel 3

Pfadweiser Itô-Kalkül

Im allgemeinen ist stochastische Integration nicht strikt pfadweise möglich. Das heißt, der Wert eines stochastischen Integrals für ein festes Element des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraums lässt sich in der Regel nicht simultan für alle Integranden durch Riemann-Summen approximieren. Dies liegt daran, daß Integrand und Integrator hier normalerweise nicht von beschränkter Variation sind, was dazu führt, daß die lokalen Fluktuationen zu groß sind.

In Anwendungen, wie etwa der Modellierung von Aktienkursen oder Zinsstrukturen, muß man jedoch oft mit einem konkreten, beobachteten Pfad des der Modellvorstellung nach zugrundeliegenden stochastischen Prozesses arbeiten. In dieser Situation will man trotzdem mit Integralen arbeiten, zum Beispiel um die Wertentwicklung einer Investitionsstrategie zu berechnen. Für die praktische Umsetzung ist außerdem die Möglichkeit einer Approximation des Integrals durch endliche Summen notwendig. Die hier auftretenden Integralterme resultieren jedoch hauptsächlich aus der Anwendung der Itôformel. Hier ist bei stetigen Pfaden, wie Föllmer in [Föl81] im endlichdimensionalen Fall gezeigt hat, pfadweises Vorgehen durchaus möglich.

Daran anknüpfend leiten wir in diesem Kapitel eine pfadweise Version der Itôformel für stetige stochastische Prozesse mit Werten in einem Hilbertraum her. Da der Beweis ohne Stochastik auskommt, ist die Itôformel, wie sie hier präsentiert wird, eigentlich eine rein analytische Aussage über Abbildungen eines Intervalls in einen Hilbertraum, deren quadratische Variation endlich ist. Es zeigt sich, daß dieser Ansatz sogar mit schwächeren Voraussetzungen auskommt, als andere Beweise, die auf stochastischer Konvergenz beruhen, wie zum Beispiel Abschnitt 3.8 in [MP80]. Dies liegt daran, daß in unserem Beweis nur die konvexe

Hülle eines Pfades betrachtet werden muß. Deshalb benötigen wir keine (lokal) gleichmäßige Stetigkeit der zweiten Ableitung. Ein weiterer Vorteil des pfadweisen Ansatzes in diesem unendlichdimensionalen Kontext ist, daß bestimmte Versionen des Satzes von Fubini für stochastische Integrale sich aus der hier betrachteten Itôformel ableiten lassen, was zu einer neuen, pfadweisen Version dieses Satzes führt.

3.1 Ein pfadweiser Beweis der Itôformel in Hilberträumen

Sei H ein separabler Hilbertraum und $X : [0,T] \to H$ eine stetige Abbildung. Zu einer Folge von Partitionen $\tau_k = \{t_k^n, k = 1, 2, \ldots, N(n)\}$ des Intervalls $[0,T]$ mit $\sup_k \left|t_{k+1}^n - t_k^n\right| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ sei

$$V_t^n := \sum_{k:t_k^n<t} \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} \in H\widehat{\otimes}_2 H$$

und

$$v_t^n := \sum_{k:t_k^n<t} \left\|X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right\|_H^2 .$$

Annahme: Für alle $t \in [0,T]$ existiere

$$\langle\langle X\rangle\rangle_t := (H\widehat{\otimes}_2 H-) \lim_{n\to\infty} V_t^n, \tag{3.1}$$

und $\langle\langle X\rangle\rangle$ sei stetig in t.

Bemerkung 3.1 Diese Annahme ist für die Pfade von stetigen Semimartingalen mit Werten in einem separablen Hilbertraum zumindest für geeignete Partitionenfolgen erfüllt, siehe dazu zum Beispiel Abschnitt 3.2 in [MP80].

Man kann V^n und $\langle\langle X\rangle\rangle$ als Verteilungsfunktionen von $H\widehat{\otimes}_2 H$-wertigen Maßen μ_n bzw. μ auffassen. Die Konvergenz in (3.1) besagt dann, daß μ_n schwach gegen μ konvergiert. Daraus ergibt sich:

Lemma 3.2 *Für $f \in C(H, L(H\widehat{\otimes}_2 H, G))$, wobei G ein weiterer separabler Hilbertraum ist, gilt*

$$\int_0^t f(X_s)\, d\langle\langle X\rangle\rangle_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t f(X_s)\, dV_s^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k:t_k^n<t} f(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} .$$

Beweis: Die Aussage folgt daraus, daß $f\,1_{[0,t]}$ μ-fast überall stetig und beschränkt ist.

$\square$

Bemerkung 3.3 Wir können jetzt nachträglich die Existenz der $\|\cdot\|_H$-quadratischen Variation

$$\langle X\rangle_t := \lim_{n\to\infty} v_t^n$$

nachweisen, denn diese läßt sich nun als

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \langle\cdot,\cdot\rangle_H \; d\,\langle\langle X\rangle\rangle_s$$

darstellen, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ das Skalarprodukt auf H ist.

Der in unserer Version der Itôformel benutzte Differenzierbarkeitsbegriff ist der der Frechet-Differenzierbarkeit. Wir wollen noch kurz an seine Definition erinnern (siehe dazu zum Beispiel die Abschnitte VIII.1 und VIII.12 in [Die75]).

Definition 3.4 (Frechet-Differenzierbarkeit) Seien E, F zwei Banachräume. $L(E,F)$ bezeichne den Raum der stetigen linearen Abbildungen von E nach F. Sei A eine offene Teilmenge von E. Eine Abbildung $f : A \longrightarrow F$ heißt im Punkt $x_0 \in A$ *Frechet-differenzierbar* oder kurz *differenzierbar* mit *Ableitung* $f'(x_0) \in L(E,F)$, falls

$$\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} = 0$$

ist. Ist f in jedem Punkt von A differenzierbar und ist die Abbildung $f' : A \longrightarrow L(E,F)$ stetig, so heißt f *stetig (Frechet-)differenzierbar*. Entsprechend ist die zweite Ableitung f'' als Ableitung von f' eine Abbildung von A nach $L(E, L(E,F))$. Dieser Bildraum ist auf natürliche Weise isomorph zum Raum der stetigen bilinearen Abbildungen von E nach F bzw. zum Raum der stetigen linearen Abbildungen von $E \otimes E$ nach F.

Nach diesen Vorarbeiten können wir jetzt eine pfadweise Version der Itôformel für Hilberträume beweisen.

Satz 3.5 (Itôformel) *Unter der Annahme (3.1) gilt für eine zweimal stetig Frechet-differenzierbare Abbildung $F : H \to K$, wobei K ein weiterer separabler Hilbertraum ist,*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\left\langle\langle X\rangle\right\rangle_s ,$$

wobei das Itô-Integral $\int F'(X_s)\, dX_s$ *durch*

$$\int_0^t F'(X_s)\, dX_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k:t_k^n<t} F'(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)$$

definiert ist.

Beweis: Zunächst gilt

$$\delta_n := \sup_{k:t_k^n<t} \left\| X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n} \right\|_H \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.2}$$

da X gleichmäßig stetig auf $[0,T]$ ist. Die Taylor-Entwicklung erster Ordnung von F in $X_{t_k^n}$ und Addieren und wieder Subtrahieren des Terms zweiter Ordnung ergibt die Darstellung

$$\begin{aligned} F(X_{t_{k+1}^n}) - F(X_{t_k^n}) &= F'(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right) + \frac{1}{2}F''(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} \\ &\quad + \left(\int_0^1 (1-s)F''\left((1-s)\, X_{t_k^n} + s\, X_{t_{k+1}^n}\right) ds\right) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} \\ &\quad - \frac{1}{2}F''(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} \\ &= F'(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right) + \frac{1}{2}F''(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} \\ &\quad + \Delta_k^n, \end{aligned} \tag{3.3}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta_k^n &:= \left(\int_0^1 (1-s)F''\left((1-s)\, X_{t_k^n} + s\, X_{t_{k+1}^n}\right) ds\right) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} \\ &\quad - \frac{1}{2}F''(X_{t_k^n}) \left(X_{t_{k+1}^n} - X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2} \end{aligned}$$

(Satz 8.14.3 in [Die75]). Das Restglied Δ_k^n formen wir noch weiter um. Wegen

$$\int_0^1 (1-s)\, ds = \frac{1}{2}$$

ist

$$\frac{1}{2}F''(X_{t_k^n})\left(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2}=\left(\int_0^1(1-s)F''\left(X_{t_k^n}\right)\,ds\right)\left(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2}$$

Setzen wir dieses Integral oben für den letzten Term ein und fassen ihn mit dem vorletzten zusammen, so erhalten wir den Ausdruck

$$\Delta_k^n=\left(\int_0^1(1-s)\left(F''\left((1-s)\,X_{t_k^n}+s\,X_{t_{k+1}^n}\right)-F''\left(X_{t_k^n}\right)\right)\,ds\right)\left(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2}$$

In den Wert von Δ_k^n gehen die Werte von F'' längs der Strecke von $X_{t_k^n}$ nach $X_{t_{k+1}^n}$ ein. Diese Strecke liegt in der konvexen Hülle des Bildes von X und hat eine Länge von höchstens δ_n (siehe (3.2)). Wir können daher die folgende Abschätzung vornehmen:

$$\|\Delta_k^n\|_K\leq\sup_{\substack{|y-x|\leq\delta_n\\x,y\in A}}\|F''(y)-F''(x)\|\,\left\|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right\|_H^2,$$

wobei A die abgeschlossene konvexe Hülle von $X([0,T])$ ist. Als abgeschlossene konvexe Hülle einer kompakten Menge ist A selbst kompakt (siehe 12.14.13b in [Die75]), also ist F'' gleichmäßig stetig auf A, und da die δ_n gegen Null konvergieren, ist

$$\|\Delta_k^n\|_K\leq\epsilon_n\,\left\|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right\|_H^2,$$

mit $\epsilon_n\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

Damit haben wir

$$\left|\sum_{k:t_k^n<t}\Delta_k^n\right|\leq\epsilon_n\sum_{k:t_k^n<t}\left\|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right\|_H^2\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

da die Summe auf der rechten Seite aufgrund der Existenz von $\langle X\rangle$ beschränkt ist. Weiter gilt aufgrund der Stetigkeit von X:

$$\sum_{k:t_k^n<t}\left(F(X_{t_{k+1}^n})-F(X_{t_k^n})\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}F(X_t)-F(X_0)$$

und aus Lemma 3.2 folgt

$$\frac{1}{2}\sum_{k:t_k^n<t}F''(X_{t_k^n})\left(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right)^{\otimes^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\,d\left\langle\langle X\rangle\right\rangle_s.$$

Vergleicht man diese Konvergenzaussagen mit der (über k aufsummierten) Taylor-Entwicklung in (3.3), so sieht man, daß auch

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k:t_k^n<t}F'(X_{t_k^n})\left(X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right)$$

existieren muß, da alle anderen Terme konvergieren. Damit haben wir die pfadweise Existenz des Itô-Integrals gezeigt und die Itôformel bewiesen.

□

Wesentlich für den Beweis war die Tatsache, daß für die Abschätzung des Restglieds Δ_k^n nur die abgeschlossene konvexe Hülle des Bildes von $[0,T]$ unter X betrachtet werden musste und diese Menge kompakt ist. Daher brauchten wir nur die Stetigkeit von F'' zu fordern, aber keine gleichmäßige Stetigkeit, wie sie (zumindest auf beschränkten Mengen) für einen stochastischen Beweis, der die Gesamtheit aller Pfade eines stochastischen Prozesses betrachtet, nötig wäre.

Wir wollen noch den wichtigen Spezialfall, daß der Bildraum von F die Menge der reellen Zahlen ist, als Korollar formulieren.

Korollar 3.6 *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung $F : H \longrightarrow \mathbb{R}$*

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t F''(X_s)\, d\left\langle\langle X\rangle\right\rangle_s .$$

Da das Itô-Integral für Pfade von Semimartingalen mit dem üblichen stochastischen Integral übereinstimmt (vergleiche Abschnitt 1.3), ergeben sich die gewohnten Rechenregeln.

Bis jetzt haben wir das Itô-Integral nur für Integranden definiert, die Gradienten sind. Mit Hilfe der Produktregel

$$\langle X_t, Y_t\rangle_H = \langle X_0, Y_0\rangle_H + \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t X_s\, dY_s + \langle X, Y\rangle_t$$

läßt sich die Menge der zulässigen Integranden weiter vergrößern. Die Produktregel ist dabei nichts anderes als die Itôformel angewandt auf den $H \times H$-wertigen Prozeß (X, Y) und das Skalarprodukt.

Ist $\langle\langle X\rangle\rangle \ll \langle X\rangle$ mit stetiger Dichte $C : [0,T] \to H\widehat{\otimes}_2 H$, wobei $C_t = C(t)$ für alle $t \in [0,T]$ symmetrisch und positiv semidefinit ist (wie es für Pfade von stetigen, quadratisch integrierbaren Martingalen der Fall ist, siehe Bemerkung 2.6), so kann man die Voraussetzung $F \in C^2(H,G)$ in der Itôformel nocht etwas weiter abschwächen. Es genügt dann die Forderung, daß F' für jedes $t \in [0,T]$ eine Ableitung $F''(X_t)$ im Punkt X_t in der durch das Semi-Skalarprodukt $(x,y) \mapsto \langle x, C_t y\rangle_H$

definierten Topologie auf H besitzt, so daß $F''(X_t)\,C_t$ stetig in t ist. Denn dann gilt analog zu Lemma 3.2:

$$\begin{aligned}\int_0^t F''(X_s)\,d\,\langle\langle X\rangle\rangle_s &= \int_0^t F''(X_s)\,C_s\,d\,\langle X\rangle_s \\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t F''(X_s)\,C_s\,dv_s^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k:t_k^n<t} F''(X_{t_k^n})\,C_{X_{t_k^n}}\,\left\|X_{t_{k+1}^n}-X_{t_k^n}\right\|_H^2 .\end{aligned}$$

Das sichert die Konvergenz der Terme zweiter Ordnung und damit auch aller anderen im Beweis der Itôformel. Dies ist eine Abschwächung der Voraussetzungen, da die Norm von C_t immer kleiner oder gleich 1 ist. Die induzierte Topologie ist daher schwächer als die Standard-Topologie auf H.

3.2 Eine Version des Satzes von Fubini für stochastische Integrale

Als Anwendung leiten wir eine pfadweise Version des Satzes von Fubini für stochastische Integrale aus der Itôformel ab. Solche Versionen werden unter anderem bei der Modellierung von Zinsstrukturen nach Heath, Jarrow und Morton ([HJM92]) benötigt.

Korollar 3.7 (pfadweiser stochastischer Fubini) *Sei ν ein positives, endliches Maß auf einem Meßraum $(S,\mathcal{S})$ und $X:[0,T]\to L^2(\nu)$ stetig mit stetiger $\otimes$-quadratischer Variation $\langle\langle X\rangle\rangle$. $I:L^2(\nu)\to\mathbb{R}$ sei durch*

$$I(f) := \int_S f\,d\nu$$

definiert. Dann ist

$$I(X_t) = I(X_0) + \int_0^t I\,dX_s.$$

Ist X insbesondere von der Form

$$X_t = \int_0^t h_s\,dY_s,$$

wobei $h_s\in L(H,L^2(\nu))$, Y H-wertig, so gilt

$$\int_S\left(\int_0^t h_s\,dY_s\right)\,d\nu = \int_0^t\left(\int_S h_s\,d\nu\right)\,dY_s.$$

Beweis: I ist eine lineare Abbildung, und es ist

$$|I(f)| = \left| \int_S f \, d\nu \right| \leq \nu(S)^{\frac{1}{2}} \, \|f\|_{L^2(\nu)} \, ,$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, angewandt auf f und die konstante Funktion mit Wert Eins. Daher ist I stetig und als lineare Abbildung somit auch glatt. Es ist $I'(x) = I$, $I'' = 0$. Damit folgt die erste Behauptung durch Anwenden der Itôformel.

Die zweite ergibt sich hieraus, indem man die Assoziativität des stochastischen Integrals ausnützt. Daß diese in unserem speziellen Fall auch pfadweise gilt, sieht man wie folgt: Es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^t I \, d\left(\int_0^{\cdot} h_s \, dY_s\right) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k:t_k^n<t} \left(I \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} h_s \, dY_s \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k:t_k^n<t} \left(I \lim_{m\to\infty} \sum_{j:t_{k-1}^n<t_j^m<t_k^n} h_{t_j^m} \left(Y_{t_j^m} - Y_{t_{j-1}^m} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k:t_k^n<t} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{j:t_{k-1}^n<t_j^m<t_k^n} I \, h_{t_j^m} \left(Y_{t_j^m} - Y_{t_{j-1}^m} \right) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k:t_k^n<t} \left(\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} I \, h_s \, dY_s \right) \\
&= \int_0^t h_s \, dY_s,
\end{aligned}$$

aufgrund der Linearität und Stetigkeit von I. Mit diesem Resultat und dem ersten Teil des Korollars gilt daher:

$$\begin{aligned}
\int_S \left(\int_0^t h_s \, dY_s \right) d\nu &= I\left(\int_0^t h_s \, dY_s \right) \\
&= \int_0^t I \, d\left(\int_0^{\cdot} h_s \, dY_s \right) \\
&= \int_0^t I \, h_s \, dY_s \\
&= \int_0^t \left(\int_S h_s \, d\nu \right) dY_s .
\end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Gleichung gezeigt.

□

Kapitel 4

Darstellungseigenschaft und Clark-Formel

Eine wichtige Rolle in der Stochastik der Finanzmärkte spielt die Frage der Duplizierbarkeit. Ein contingent claims C heißt duplizierbar, falls es eine selbstfinanzierende Investitionsstrategie gibt, deren Wertprozeß bei Fälligkeit von C gerade mit C übereinstimmt. Mathematisch entspricht das der Darstellbarkeit von C als stochastisches Integral eines geeigneten Integranden mit dem den Finanzmarkt repräsentierenden Prozeß X. Ein Finanzmarkt, in dem jeder (hinreichend "schöne") contingent claim duplizierbar ist, heißt *vollständig*. Das soganannte "second fundamental theorem of asset pricing" postuliert, daß im Falle eines arbitrage-freien Finanzmarkts die Vollständigkeit des Marktes äquivalent zur Eindeutigkeit des (zum Referenzmaß P) äquivalenten (lokalen) Martingalmaßes ist. Während sich diese Aussage für endliche Wahrscheinlichkeitsräume mittels elementarer linearer Algebra herleiten läßt, ist das entsprechende Resultat für einen Finanzmarkt in stetiger Zeit viel tiefliegender. Eine Version für endlich viele Assets findet sich in [HP81], Theorem 3.35 und Corollary 3.36.

Delbaen gibt in Theorem 6.5 von [Del92] eine Version für beliebig, auch unendlich viele Assets, deren Pfade stetig und beschränkt sind. Seine Definition von "Vollständigkeit" ist jedoch die Dichtheit des Raumes der elementaren stochastischen Integrale in $L^1(Q)$ für ein Martingalmaß Q, also eine approximative Vollständigkeit, die ohne unendlichdimensionale stochastische Integration auskommt. Eine weitere unendlichdimensionale Version, die auch für unstetige Prozesse gilt, präsentieren Jarrow und Madan in [JM99]. Die Anforderungen an Prozesse sowie zu duplizierende Wertverläufe sind hier vom BMO-Typ.

Die in dieser Arbeit gegebene Variante steht der Version von Delbaen näher, benutzt aber einen Vollständigkeitsbegriff, der direkt mit unendlichdimensionalen stochastischen Integralen arbeitet.

Zuvor wollen wir aber ein Beispiel für ein unendlichdimensionales Finanzmarktmodell in diskreter Zeit betrachten, bei dem sich trotz Eindeutigkeit des Martingalmaßes nicht jede Auszahlung duplizieren lässt.

4.1 Ein Beispiel für ein nicht vollständiges Modell mit eindeutigem Martingalmaß

Das folgende Beispiel zeigt, daß bei einem unendlichdimensionalen Preisprozeß die Eindeutigkeit des Martingalmaßes im allgemeinen nicht die Vollständigkeit des Modells impliziert. Es gibt also Finanzmarktmodelle mit unendlich vielen Wertpapieren, bei denen trotz der Eindeutigkeit von arbitragefreien Preisen nicht jeder contingent claim durch eine zulässige Portfoliostrategie duplizierbar ist. Wir betrachten dazu ein zeitlich diskretes Modell (Zeitpunkte 0 und 1) mit abzählbar vielen Zufallsvariablen X_1^n $(n = 0, 1, \ldots)$, die den Wert der Assets im Zeitpunkt 1 beschreiben:

Sei $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathcal{F}_0$ die triviale $\sigma-$Algebra, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$ die Potenzmenge vom Ω, und P sei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω mit vollem Träger und Gewichten p_n $(n = 1, 2, \ldots)$, sowie den Eigenschaften

$$\sum_{n=1}^{\infty} n p_n < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n < \infty, \qquad . \tag{4.1}$$

Es sollen also die ersten beiden Momente von P existieren.

Wir definieren

$$\begin{aligned} C(n) &:= n \\ X_1^0 &:= 1 \\ X_1^n &:= C\, 1_{\{1,\ldots,n\}} \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Die Startwerte der X^n seien die Erwartungswerte unter P. P ist somit ein Martingalmaß für die $X^n (n = 1, 2, \ldots)$. Jedes Martingalmaß Q ist durch die Eigenschaft

$$\mathrm{E}_Q[X_1^n] = X_0^n = \mathrm{E}_P[X_1^n]\,,$$

für alle $n = 1, 2, \ldots$, charakterisiert. Daher gilt für die Gewichte q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ von Q:

$$q_1 = \mathrm{E}_Q\Big[X_1^1\Big] = \mathrm{E}_P\Big[X_1^1\Big] = p_1$$

und für $n = 2, 3, \ldots$ ist

$$\begin{aligned} q_n &= \mathrm{E}_Q\Big[1_{\{n\}}\Big] \\ &= \mathrm{E}_Q\Big[\frac{1}{n}\left(X_1^n - X_1^{n-1}\right)\Big] \\ &= \frac{1}{n}\left(\mathrm{E}_Q[X_1^n] - \mathrm{E}_Q\Big[X_1^{n-1}\Big]\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\mathrm{E}_P[X_1^n] - \mathrm{E}_P\Big[X_1^{n-1}\Big]\right) \\ &= p_n. \end{aligned}$$

Damit ist P das einzige Martingalmaß. Wesentlich für die Eindeutigkeit ist hier die Tatsache, daß der von den Zufallsvariablen $X_1^1, X_1^2, \ldots$ aufgespannte Vektorraum dicht in $L^1(P)$ liegt, somit insbesondere die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\{n\}$ durch die Erwartungswerte der $X_1^n, n = 1, 2, \ldots$, festgelegt sind.

Unser Modell ist so konstruiert, daß der oben definierte contingent claim C der monotone Limes der X_1^n, $n = 1, 2, \ldots$, ist. C lässt sich also durch Portfolios der Form „Halte eine Einheit des n-ten Assets“ beliebig gut approximieren (P-fast sicher und in $L^1(P)$), aber die zugehörigen Strategien $\xi_n = e_n$ (n-ter Einheitsvektor) konvergieren nicht gegen eine Strategie, die C dupliziert. Wir zeigen nun, daß sich der contingent claim C überhaupt nicht durch ein Portfolio darstellen lässt, ja nicht einmal eine Superreplikation mit endlichem Startkapital möglich ist. Das heißt, es existiert kein Portfolio mit endlichem Preis, dessen Wert im Zeitpunkt 1 mindestens so groß wie C ist.

Aufgrund der Bedingung (4.1) ist

$$V_0 := \mathrm{E}_P[C] < \infty.$$

Im Gegensatz zu den Aussagen der Theorie der endlichdimensionalen Finanzmärkte lässt sich C jedoch mit diesem (und auch jedem anderen endlichen) Startkapital nicht (super-)replizieren.

Wir nehmen dazu an, daß es für ein $v \geq 0$, eine Portfolio-Allokation $\xi = (\xi^0, \xi^1, \ldots)$, $\xi^n \in \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit den Eigenschaften

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n X_0^n = v, \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \, X_1^n \quad \geq \quad C \tag{4.3}$$

gibt. Aus (4.2) folgt, daß $(\xi^n \, X_0^n)_{n=1,2,\ldots}$ gegen Null konvergiert. Damit ist auch $(|\xi^n| \; X_0^n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Nullfolge. Da außerdem für $n = 1, 2, \ldots$

$$X_0^n = \sum_{k=1}^{n} k \, p_k \geq p_1 > 0$$

ist, folgt

$$\xi^n \;\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

Wir wollen zeigen, daß die Folge $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ sogar summierbar ist. Dazu benutzen wir die Konvergenz der X_0^n gegen V_0 und die Endlichkeit des zweiten Moments von P. Denn aus den Definitionen von V_0 und X_0^n folgt:

$$V_0 - X_0^n = \sum_{k=n+1}^{\infty} k \, p_k. \tag{4.4}$$

Weiter ist

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 \, p_k \;=\; \sum_{k=1}^{m} \sum_{n=1}^{k} k \, p_k \;=\; \sum_{n=1}^{m} \sum_{k=n}^{m} k \, p_k.$$

Daher folgt aus der Existenz des zweiten Moments von P (Gleichung (4.1)) und der Nicht-Negativität der Summanden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} k \, p_k \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} k \, p_k \;<\; \infty$$

und damit aus (4.4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (V_0 - X_0^n) < \infty. \tag{4.5}$$

Da die Summanden $V_0 - X_0^n$ nicht-negativ sind und $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Nullfolge ist, existiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, (V_0 - X_0^n)$ und ist endlich (Majorantenkriterium). Aus (4.2) folgt daher

$$\begin{aligned} V_0 \sum_{n=1}^{m} \xi^n \qquad &= \qquad \sum_{n=1}^{m} \xi^n \, (V_0 - X_0^n) + \sum_{n=1}^{m} \xi^n \, X_0^n \\ &\stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (V_0 - X_0^n) + v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da $V_0 > 0$ ist, haben wir gezeigt, daß $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ summierbar ist und der Grenzwert der Reihe endlich ist.

Insbesondere gilt:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \xi^n \quad \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Andererseits folgt aus

$$X_1^n(k) = 1_{[k,\infty]}(n)$$

für alle $k = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \xi^n &= \frac{1}{C(k)} \sum_{n=k}^{\infty} \xi^n \, X_1^n(k) \\ &= \frac{1}{C(k)} \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n \, X_1^n(k) \\ &\geq 1 - \frac{\xi^0}{C(k)} \end{aligned}$$

nach (4.3). Da $C(k)$ für wachsendes k gegen unendlich geht, müsste daher $\xi^0 = +\infty$ sein, was natürlich nicht möglich ist. Da als einzige Eigenschaften von v seine Nicht-Negativität und seine Endlichkeit benutzt worden sind, gibt es zu keinem endlichen Startkapital eine (Super)-Hedging-Strategie.

Der Grund für die Nicht-Existenz einer solchen Strategie liegt dabei nicht darin, daß die Menge der zulässigen Strategien zu klein gewählt worden ist. Die einzige Forderung, die wir an die Portfolio-Allokation $\xi = (\xi^0, \xi^1, \ldots)$ gestellt haben, war, daß Startpreis und Endwert des Portfolios wohldefiniert sind.

4.2 Die Darstellungseigenschaft

Wir haben im vorhergehenden Abschnitt gesehen, daß im unendlichdimensionalen Modell die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes nicht notwendig die Vollständigkeit des Modells garantiert. Um ein "second fundamental theorem of asset pricing" für die unendlichdimensionale Situation zu beweisen, müssen wir daher zusätzliche Bedingungen an die zugrundeliegenden Preisprozesse stellen. Im folgenden betrachten wir daher nur Prozesse in kontinuierlicher Zeit mit stetigen Pfaden. Da wir die Existenz mindestens eines zu P äquivalenten Maßes, unter dem der zugrundeliegende Prozeß X ein lokales Martingal ist, voraussetzen, nehmen wir o.B.d.A. an, daß das Referenzmaß P bereits ein Martingalmaß für X ist.

Sei also X ein (lokal) quadratisch integrierbares Martingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ mit Werten in einem separablen Hilbertraum H und stetigen Pfaden. Die σ-Algebra $\mathcal{F}_0$ sei P-trivial. $\mathcal{P}$ sei die Menge aller zu P äquivalenten Maße, unter denen X ein lokales Martingal ist. Es gilt nun zu zeigen, daß die Eindeutigkeit des Martingalmaßes für X (also $\mathcal{P} = \{P\}$) äquivalent dazu ist, daß sich jedes reellwertige lokale Martingal M als stochastisches Integral von X darstellen lässt, also die Form

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s$$

für alle $t \geq 0$ hat.

Unsere Herleitung dieses Resultats basiert auf den Ergebnissen von Kapitel XI in [Jac79]. Jacod betrachtet dort das sogenannte *Martingalproblem* und extremale Lösungen desselben. Wir wollen dies kurz erläutern:

Definition 4.1 (Martingalproblem) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ ein filtrierter meßbarer Raum und $\mathcal{X}$ eine Familie von reellwertigen adaptierten Prozessen auf Ω. Ein Maß $P \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ heißt *Lösung des Martingalproblems zu* $\mathcal{X}$, wenn jeder Prozess $X \in \mathcal{X}$ ein lokales Martingal unter P ist. P ist eine *extremale* Lösung, wenn es sich nicht als nicht-triviale konvexe Kombination zweier Lösungen darstellen lässt.

Wir interessieren uns hier für (lokale) Martingalmaße für den Prozeß X, der Werte im Hilbertraum H annimmt. Da aber X genau dann ein lokales Martingal unter einem Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf Ω ist, wenn alle eindimensionalen Projektionen $\langle h, X\rangle_H$ ($(\langle h, X\rangle_H)_t := \langle h, X_t\rangle_H$), mit $h \in H$, lokale Q-Martingale sind, setzen wir

$$\mathcal{X} := \{\langle h, X\rangle_H \,,\ h \in H\} \,. \tag{4.6}$$

$\mathcal{M}(\mathcal{X})$ sei die Menge aller Lösungen des Martingalproblems zu $\mathcal{X}$. Das folgende Lemma stellt den Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit eines äquivalenten Martingalmaßes für X und extremalen Lösungen des Martingalproblems zu $\mathcal{X}$ her:

Lemma 4.2 *Ist P das einzige zu P äquivalente lokale Martingalmaß für X, dann ist P eine extremale Lösung des Martingalproblems zu $\mathcal{X}$.*

Beweis: Wie oben bemerkt, ist jedes Martingalmaß für X ein Element von $\mathcal{M}(\mathcal{X})$. Ist $P \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ nicht extremal, dann gibt es Maße $P_1, P_2 \in \mathcal{M}(\mathcal{X})$ und $\alpha \in (0,1)$, so daß $P = \alpha\, P_1 + (1-\alpha)\, P_2$ ist. Die Nullmengen von P sind genau alle Mengen, die Nullmengen von P_1 und P_2 sind. Dieselben Nullmengen besitzt auch jedes der Maße $P^\beta := \beta\, P_1 + (1-\beta)\, P_2$ mit $\beta \in (0,1)$. Jedes dieser Maße ist demnach äquivalent zu P und ein lokales Martingalmaß für X. Damit ist P nicht das einzige Element von $\mathcal{P}$, und die Aussage des Lemmas ist gezeigt.

□

Damit lassen sich die Resultate von Jacod über die Darstellungseigenschaft für $\mathcal{X}$ unter Wahrscheinlichkeitsmaßen, die extremale Lösungen des Martingalproblems zu $\mathcal{X}$ sind, auf unsere Situation übertragen. Mit Hilfe eines zusätzlichen Resultats von Metivier/Pellaumail können wir nun unsere Version des "second fundamental theorem of asset pricing" beweisen. Dazu führen wir noch die im Beweis benötigte Menge

$$\mathcal{M}^2(P, \mathbb{R}) := \left\{ (M_t)_{(t\geq 0)} \mid M \text{ ist reellwertiges } P\text{-Martingal und } \sup_{t\geq 0} \mathrm{E}_P\left[M_t^2\right] < \infty \right\}$$

der in $L^2(P)$ konvergenten reellwertigen Martingale ein, die mit der Norm

$$\|M\| = \mathrm{E}_P[M_\infty]^{\frac{1}{2}} = \left(\sup_{t\geq 0} \mathrm{E}_P\left[M_t^2\right] \right)^{\frac{1}{2}}$$

versehen ein Hilbertraum ist. Außerdem setzen wir noch $I(\mathcal{X})$ als die Menge derjenigen stochastischen Prozesse $(Z_t)_{(t\geq 0)}$ der Form

$$Z_t = z_0 + \int_0^t \xi_s \, dY_s \qquad (t \geq 0),$$

mit $z_0 \in \mathbb{R}$, einem previsiblen Integranden ξ und $Y \in \mathcal{X}$, die Elemente von $\mathcal{M}^2(P, \mathbb{R})$ sind.

Satz 4.3 ("second fundamental theorem of asset pricing") *Sei X ein (lokal) quadratisch integrierbares Martingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ mit Werten in einem separablen Hilbertraum H und stetigen Pfaden. Ist P ist das einzige zu P äquivalente Martingalmaß für X, dann besitzt jedes reellwertige lokale P-Martingal M eine Darstellung*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s,$$

für alle $t \geq 0$, mit einem Integranden $\xi \in \Lambda^2_{loc}(X)$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage zunächst für Martingale M aus $\mathcal{M}^2(P, \mathbb{R})$ und üebertragen dann das Ergebnis durch Lokalisieren auf beliebige lokale Martingale. Nach Lemma 4.2 ist P eine extremale Lösung des Martingalproblems zu $\mathcal{X}$. Nach Theorem 11.2 in Verbindung mit Korollar 11.4 in Kapitel XI von [Jac79] ist der Abschluß des von $I(\mathcal{X})$ aufgespannten Vektorraums in $\mathcal{M}^2(P, \mathbb{R})$ der ganze Raum $\mathcal{M}^2(P, \mathbb{R})$ (bei Jacod als H^2 bezeichnet). Mit unserer speziellen Wahl von $\mathcal{X}$ folgt aus der Proposition in Abschnitt 14.8 von [MP80] daß jedes Element dieses Abschlusses, also hier jedes Element aus $\mathcal{M}^2(P, \mathbb{R})$ eine Darstellung der Form

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s,$$

mit einem Integranden $\xi \in \Lambda^2(X)$ besitzt. Durch Lokalisieren erhalten wir die Aussage des Satzes.

□

Den wichtigen Spezialfall

$$M_t = \mathrm{E}_P[Y \mid \mathcal{F}_t]$$

für eine P-integrierbare $\mathcal{F}_T$-meßbare ($T \geq 0$) reellwertige Zufallsvariable Y formulieren wir noch als Korollar:

Korollar 4.4 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.3 besitzt jede P-integrierbare $\mathcal{F}_T$-meßbare ($T \geq 0$) reellwertige Zufallsvariable Y eine Darstellung*

$$\mathrm{E}_P[Y \mid \mathcal{F}_t] = \mathrm{E}_P[Y] + \int_0^t \xi_s \, dX_s,$$

für alle $t \in [0, T]$, mit einem Integranden $\xi \in \Lambda^2_{loc}(X)$. Insbesondere ist

$$Y = \mathrm{E}_P[Y] + \int_0^T \xi_t \, dX_t.$$

Beweis: Da nach Annahme $\mathcal{F}_0$ P-trivial ist, gilt

$$\mathrm{E}_P[Y \mid \mathcal{F}_0] = \mathrm{E}_P[Y].$$

Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.3.

□

In die Sprache der Finanzmathematik übersetzt bedeutet dieses Korollar, daß bei Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes jeder contingent claim Y mit einer Portfoliostrategie ξ exakt duplizierbar ist, wobei ein Starteinsatz von $\mathrm{E}_P[Y]$ erforderlich ist. Damit ist das Finanzmarktmodell vollständig und $\mathrm{E}_P[Y]$ der faire Preis von Y.

4.3 Endlichdimensionale Approximationen stochastischer Integrale

Wir haben gesehen, daß für Prozesse mit stetigen Pfaden aus der Eindeutigkeit des Martingalmaßes die Vollständigkeit des Finanzmarktes folgt. Das Duplizieren (Hedging) eines contingent claims im unendlichdimensionalen Modell involviert aber im allgemeinen eine Strategie, bei der in alle und somit in unserer Situation in unendlich viele Assets investiert werden muß. Da man aber in der Praxis auch bei einem Markt mit (zumindest potentiell) unendlich vielen Wertpapieren nur in je endlich viele investieren kann, stellt sich die Frage, ob sich stochastische Integrale mit unendlichdimensionalem Integrator X durch solche annähern lassen, die nur endlich viele Koordinaten von X benutzen.

Wir beweisen daher in diesem Abschnitt die Konvergenz der Kunita-Watanabe-Zerlegung des Martingals der bedingten Erwartungen eines quadratisch integrierbaren contingent claims bezüglich endlichdimensionaler Projektionen von X gegen die Kunita-Watanabe-Zerlegung bezüglich X selbst. Die Kunita-Watanabe-Zerlegung eines quadratisch integrierbaren Martingals M stellt M als Summe aus einem stochastischen Integral mit X und einem zum Raum der stochastischen Integrale orthogonalen Prozeß dar.

Sei dazu $(e_1, e_2, \ldots)$ eine Orthonormalbasis des separablen Hilbertraumes H und X ein H-wertiges quadratisch integrierbares Martingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$. X besitze den Covarianzprozeß Q (dies entspricht dem Prozeß C in Bemerkung 2.6). Wir definieren für $h \in H$

$$pr_n(h) := (\langle e_1, h\rangle_H, \ldots, \langle e_n, h\rangle_H) \in \mathbb{R}^n.$$

pr_n ist also die Orthogonalprojektion auf die ersten n Koordinaten. Damit definieren wir

$$X_t^n := pr_n(X_t) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

X^n ist für alle n ein n-dimensionales quadratisch integrierbares Martingal. Wir fixieren einen Zeithorizont T.

$\mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P})$ sei der Raum aller quadratisch integrierbaren $\mathcal{F}_T$-meßbaren reellwertigen Zufallsvariablen, die eine Darstellung als stochastisches Integral

$$C = \int_0^T \xi^n \, dX^n$$

bezüglich X^n mit einem previsiblen Integrand ξ^n besitzen ($\mathcal{P}$ ist die previsible σ-Algebra). Aufgrund der Isometrieeigenschaft des stochastischen Integrals ist $\mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(P)$.

Bemerkung 4.5 Ist ξ ein $\mathbb{R}^n$-wertiger Integrand für X^n, so ist $\langle \xi_t, \cdot \rangle \circ pr_n$ mit X integrierbar und es gilt:

$$\int_0^T \xi_t \, dX_t^n = \int_0^T \langle \xi_t, \cdot \rangle \circ pr_n \, dX_t,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Als erstes zeigen wir, daß die bezüglich X^n darstellbaren Anteile eines Elements von $L^2(P)$ für $n \to \infty$ konvergieren.

Lemma 4.6 *Die $\mathcal{F}_T$-meßbare Zufallsvariable $C \in L^2(P)$ besitze bezüglich X^n die Kunita-Watanabe-Zerlegungen*

$$C = \mathrm{E}_P[C] + \int_0^T \xi^n \, dX^n + Y^n,$$

wobei $Y^n \in \mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P})^\perp$, dem orthogonalen Komplement von $\mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P})$ in $L^2(P)$. Dann existieren ξ^∞ und Y^∞ mit

$$\begin{array}{ccccl} \int\limits_0^T \xi^n \, dX^n & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & \int\limits_0^T \xi^\infty \, dX & & \text{in } L^2(P), \\ Y^n & \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} & Y^\infty & & \text{in } L^2(P), \end{array}$$

und $Y^\infty \in \left(\underset{n}{+} \mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P}) \right)^\perp$.

Beweis: Die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \pi^n : & L^2(P) & \to & \mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P})^\perp \\ & C & \mapsto & Y^n \end{array}$$

sind Orthogonalprojektionen auf eine absteigende Folge von abgeschlossenen Unterräumen von $L^2(P)$. Daher gilt:

$$Y^n = \pi^n C \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi^\infty C =: Y^\infty,$$

wobei π^∞ die Orthogonalprojektion auf

$$\bigcap_n \mathcal{R}^2(X^n,\mathcal{P})^\perp = \left(\underset{n}{+}\,\mathcal{R}^2(X^n,\mathcal{P})\right)^\perp$$

ist. Die Behauptung folgt aus

$$\int_0^T \xi^n\,dX^n = C - \mathrm{E}_P[C] - Y^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} C - \mathrm{E}_P[C] - Y^\infty,$$

Bemerkung 4.5 und der Isometrieeigenschaft des stochastischen Integrals.

□

Wir wollen zeigen, daß die Darstellung

$$C = \mathrm{E}_P[C] + \int_0^T \xi^\infty\,dX + Y^\infty$$

die Kunita-Watanabe-Zerlegung von C bezüglich X ist. Dazu müssen wir zeigen, daß Y^∞ in $\mathcal{R}^2(X,\mathcal{P})^\perp$ liegt. Dazu betrachten wir den Unterraum $\underset{n}{+}\,\Lambda^2(X^n)$ von $L^2(X)$ und zeigen, daß dieser dicht in $\Lambda^2(X)$ liegt und somit $\underset{n}{+}\,\mathcal{R}^2(X^n,\mathcal{P})$ dicht in $\mathcal{R}^2(X,\mathcal{P})$ ist. Das folgende Lemma ist ein erster Schritt dahin.

Lemma 4.7 *Sei*

$$L^2(P\otimes d\langle X\rangle, H) := \left\{(\xi_t)_{t\in[0,T]} \text{ previsibel, } \mid \xi_t(\omega)\in H,\ \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \|\xi_t\|^2\,d\langle X\rangle_t\right] < \infty\right\}.$$

Dann gilt: $\underset{n}{+}\,\Lambda^2(X^n)$ *liegt dicht in* $L^2(P\otimes d\langle X\rangle, H) \subset L^2(X) := L^2(X,\mathbb{R})$ *bezüglich der* $L^2(P\otimes d\langle X\rangle, H)$*- und der* $L^2(X)$*-Topologie.*

Beweis: Sei $\xi \in L^2(P\otimes d\langle X\rangle, H)$ mit Koordinatendarstellung

$$\xi = \sum_n \alpha_n\, e_n,$$

mit reellwertigen previsiblen Prozessen α_n. Dazu definieren wir Prozesse

$$\xi^{\le n} := \sum_{k=1}^n \alpha_k\, e_k \in \Lambda^2(X^n).$$

Offensichtlich gilt

$$\xi^{\le n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$$

$P \otimes d\langle X\rangle$-fast sicher, und damit konvergiert

$$\left\|\xi - \xi^{\leq n}\right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k^2$$

antiton gegen Null $P \otimes d\langle X\rangle$-fast sicher. Da

$$\left\|\xi - \xi^{\leq n}\right\|^2 \leq \|\xi\|^2 = \sum_n \alpha_n^2$$

in

$$L^1(P \otimes d\langle X\rangle, \mathbb{R}) := \left\{(\xi_t)_{t\in[0,T]} \text{ reellwertig, previsibel } \mid \mathrm{E}_P\left[\int_0^T |\xi_t| \; d\langle X\rangle_t\right] < \infty\right\}$$

liegt, folgt mit dem Satz von Lebesgue, daß $\left\|\xi - \xi^{\leq n}\right\|^2$ in $L^1(P \otimes d\langle X\rangle, \mathbb{R})$ gegen Null konvergiert und somit $\xi^{\leq n}$ gegen ξ in $L^2(P \otimes d\langle X\rangle, H)$. Das bedeutet, daß $\underset{n}{+}\, \Lambda^2(X^n)$ dicht in $L^2(P \otimes d\langle X\rangle, H)$ liegt. Da nach Bemerkung 2.6 die Norm von $Q_t^{\frac{1}{2}}$ durch 1 beschränkt ist, folgt wegen

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left[\int_0^T \left\|(\xi_t - \xi_t^{\leq n}) \circ Q_t^{\frac{1}{2}}\right\|^2 d\langle X\rangle_t\right] &\leq \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \left\|(\xi_t - \xi_t^{\leq n})\right\|^2 \left\|Q_t^{\frac{1}{2}}\right\|^2 d\langle X\rangle_t\right] \\
&\leq \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \left\|(\xi_t - \xi_t^{\leq n})\right\|^2 d\langle X\rangle_t\right]
\end{aligned}$$

auch die Dichtheit bezüglich der $L^2(X)$-Topologie.

□

Im nächsten Schritt gehen wir von $L^2(P \otimes d\langle X\rangle, H)$ zu $\Lambda^2(X)$ über:

Lemma 4.8 *Mit den Bezeichnungen von Lemma 4.7 gilt:*
$L^2(P \otimes d\langle X\rangle, H)$ liegt dicht in $\Lambda^2(X)$.

Beweis: i) Wir zeigen das Lemma zunächst unter der Annahme, daß $Q_t^{\frac{1}{2}}$ diagonal ist bezüglich $(e_1, e_2, \ldots)$. In diesem Fall hat $Q^{\frac{1}{2}}$ eine Darstellung

$$Q^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \; \langle e_n, \cdot\rangle_H \; e_n,$$

mit previsiblen, reellwertigen Prozessen λ_n.

Sei $\xi \in \Lambda^2(X)$. Da $\xi \circ Q^{\frac{1}{2}}$ $P \otimes d\langle X\rangle$-fast sicher in $H^* = \mathrm{Hom}(H, \mathbb{R}) = H$ liegt, existieren reellwertige previsible Prozesse β_n, so daß

$$\xi \circ Q^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e_n.$$

Definieren wir

$$\alpha_n := \frac{\beta_n}{\lambda_n} I_{\{\lambda_n \neq 0\}},$$

so gilt

$$\xi \circ Q^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, \alpha_n \, e_n,$$

insbesondere

$$\left\| \xi \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \, \alpha_n^2.$$

Sei nun

$$\xi^{\leq n} := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, e_k \in L^2(X^n, \mathcal{P}) \subset L^2(P \otimes d\langle X\rangle, H).$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \left\| (\xi - \xi^{\leq n}) \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \, \alpha_k \, e_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \alpha_k \, e_k \right\|^2 \\ &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k^2 \, \alpha_k^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

$P \otimes d\langle X\rangle$-fast sicher, und

$$\left\| (\xi - \xi^{\leq n}) \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq \left\| \xi \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|^2 \in L^1(P \otimes d\langle X\rangle).$$

Wir können demnach den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden und erhalten

$$\left\| (\xi - \xi^{\leq n}) \circ Q^{\frac{1}{2}} \right\|^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

in $L^1(P \otimes d\langle X\rangle)$, also

$$\xi^{\leq n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \xi$$

in $\Lambda^2(X)$.

ii) Wir führen den allgemeinen Fall auf i) zurück, indem wir Q_t (und damit $Q_t^{\frac{1}{2}}$) diagonalisieren. Nach den Ausführungen in [MP80], S. 173 ff, existiert ein Prozeß U mit Werten in der orthogonalen Gruppe $\mathcal{O}(H)$ von H, so daß

$$D_t := U_t \circ Q_t \circ U_t^*$$

von Diagonalgestalt bezüglich $(e_1, e_2, \ldots)$ ist. $U_t^*(\omega)$ ist dabei der zu $U_t(\omega)$ adjungiete Operator (identisch mit $U_t(\omega)^{-1}$). Da P-fast sicher

$$\operatorname{tr}(U_t \circ Q_t \circ U_t^*) = \operatorname{tr} Q_t = 1 \tag{4.7}$$

ist, gilt auch

$$\left\| U_t \circ Q_t^{\frac{1}{2}} \right\| = \| U_t \circ Q_t \circ U_t^* \|^{\frac{1}{2}} \leq 1$$

P-fast sicher. Damit ist insbesondere $U_t \circ Q_t^{\frac{1}{2}}$ für P-fast alle $\omega \in \Omega$ ein stetiger Operator und U liegt in $\Lambda^2(H, L(H,H), X)$. Setzen wir

$$M := \int U \, dX,$$

dann gilt für den Covarianzoperator Q^M von M:

$$Q^M = D = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \, \langle e_n, \cdot \rangle_H \, e_n, \tag{4.8}$$

mit reellwertigen, previsiblen Prozessen λ_n. Damit ist

$$(Q^M)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, \langle e_n, \cdot \rangle_H \, e_n.$$

Für $\xi \in \Lambda^2(X)$ liegt $\xi \circ U^*$ in $\Lambda^2(M)$, da

$$\int \xi \, dX = \int \xi \circ U^* \, dM.$$

Nach Teil i) des Beweises existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein Prozeß $\eta \in L^2(P \otimes d\langle M \rangle, H)$, so daß

$$\mathrm{E}_P \left[\int_0^T \left\| (\xi_t \circ U_t^* - \eta) \circ (Q_t^M)^{\frac{1}{2}} \right\|^2 d\langle M \rangle_t \right] < \epsilon. \tag{4.9}$$

Mit (4.8) lässt sich dieser Erwartungswert wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P \left[\int_0^T \left\| (\xi_t \circ U_t^* - \eta_t) \circ (Q_t^M)^{\frac{1}{2}} \right\|^2 d\langle M \rangle_t \right] \\
&= \mathrm{E}_P \left[\int_0^T \left\| (\xi_t \circ U_t^* - \eta_t) \circ U_t \circ (Q_t)^{\frac{1}{2}} \circ U_t^* \right\|^2 d\langle M \rangle_t \right] \\
&= \mathrm{E}_P \left[\int_0^T \left\| (\xi_t \circ U_t^* - \widetilde{\eta}_t \circ U_t^*) \circ U_t \circ (Q_t)^{\frac{1}{2}} \circ U_t^* \right\|^2 d\langle M \rangle_t \right],
\end{aligned}$$

mit $\widetilde{\eta} = \eta \circ U$. Da U unitär ist, ergibt weiteres Umformen:

$$\begin{aligned}
& \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \left\|(\xi_t \circ U_t^* - \widetilde{\eta}_t \circ U_t^*) \circ U_t \circ (Q_t)^{\frac{1}{2}} \circ U_t^*\right\|^2 d\langle M\rangle_t\right] \\
= \; & \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \left\|(\xi_t - \widetilde{\eta}_t) \circ (Q_t)^{\frac{1}{2}} \circ U_t^*\right\|^2 d\langle M\rangle_t\right] \\
= \; & \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \left\|(\xi_t - \widetilde{\eta}_t) \circ (Q_t)^{\frac{1}{2}}\right\|^2 d\langle M\rangle_t\right] \\
< \; & \epsilon,
\end{aligned}$$

nach (4.9).

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\widetilde{\eta}$ in $L^2(P \otimes \langle X\rangle, H)$ liegt. Da η Werte in H annimmt, ist auch $\widetilde{\eta} = \eta \circ U$ H-wertig, und es ist $\|\widetilde{\eta}\| = \|\eta\|$. Mit der Gleichung (4.7) ergibt sich daher

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left[\int_0^T \|\widetilde{\eta}_t\|^2 \, d\langle X\rangle_t\right] &= \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \|\widetilde{\eta}_t\|^2 \, \frac{1}{\mathrm{tr}(U_t \circ Q_t \circ U_t^*)} \, d\langle X\rangle_t\right] \\
&= \mathrm{E}_P\left[\int_0^T \|\widetilde{\eta}_t\|^2 \, d\langle M\rangle_t\right] \quad \text{((14.7.4) in [MP80])} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{\eta} \in L^2(P \otimes \langle X\rangle, H)$. Wir haben also gezeigt, daß es zu jedem $\xi \in \Lambda^2(X)$ ein $\widetilde{\eta} \in L^2(P \otimes \langle X\rangle, H)$ gibt, so daß

$$\mathrm{E}_P\left[\int_0^T \left\|(\xi_t - \widetilde{\eta}_t) \circ (Q_t^M)^{\frac{1}{2}}\right\|^2 d\langle M\rangle_t\right] < \epsilon.$$

Dies bedeutet aber, daß $L^2(P \otimes \langle X\rangle, H)$ dicht in $\Lambda^2(X)$ liegt.

□

Wir haben damit gezeigt, daß $\underset{n}{+}\Lambda^2(X^n)$ dicht in $\Lambda^2(X)$ liegt. Damit können wir die Konvergenz der Kunita-Watanabe-Zerlegungen bezüglich der endlich-dimensionalen Prozesse X^n gegen die Zerlegung bezüglich X beweisen:

Satz 4.9 *Sei C aus $L^2(P)$, $\mathcal{F}_T$-meßbar mit den Kunita-Watanabe-Zerlegungen*

$$\begin{aligned}
C &= \mathrm{E}_P[C] + \int_0^T \xi_t \, dX_t + Y \\
&= \mathrm{E}_P[C] + \int_0^T \xi_t^n \, dX_t^n + Y^n \quad (n = 1, 2, \ldots),
\end{aligned}$$

mit $Y \in \mathcal{R}^2(X, \mathcal{P})^\perp$ *und* $Y^n \in \mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P})^\perp$.

Dann konvergiert ξ^n *gegen* ξ *in* $\Lambda^2(X)$ *für* n *gegen unendlich, bzw.*

$$\int_0^T \xi_t^n \, dX_t^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \xi_t \, dX_t$$

in $L^2(P)$ *und damit auch* $Y^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y$ *in* $L^2(P)$.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $Y = 0$, also

$$C = \mathrm{E}_P[C] + \int_0^T \xi_t \, dX_t.$$

Nach Lemma 4.6 konvergiert Y^n gegen ein $Y^\infty \in \left(\underset{n}{+} \mathcal{R}^2(X^n, \mathcal{P}) \right)^\perp$. Da C darstellbar bezüglich X ist, besitzt auch

$$Y^\infty = C - \mathrm{E}_P[C] - \int_0^T \xi_t^\infty \, dX_t,$$

mit ξ^∞ wie in Lemma 4.6, eine Darstellung als stochastisches Integral. Sei

$$Y^\infty = \int_0^T \xi_t^{Y^\infty} \, dX_t.$$

Dann ist ξ^{Y^∞} aus $\left(\underset{n}{+} \Lambda^2(X^n) \right)^\perp$. Aus Lemma 4.7 und 4.8 folgt, daß $\underset{n}{+} \Lambda^2(X^n)$ dicht in $\Lambda^2(X)$ liegt. Daher ist ξ^{Y^∞} orthogonal zu allen Elementen von $\Lambda^2(X)$. Da aber $\xi^{Y^\infty} \in \Lambda^2(X)$, ergibt sich

$$\xi^{Y^\infty} = 0$$

$P \otimes d\langle X \rangle$-fast sicher und somit

$$Y^\infty = 0$$

P-fast sicher. Aus Lemma 4.6 folgt daher

$$\int_0^T \xi_t^n \, dX_t^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \xi_t \, dX_t$$

in $L^2(P)$.

Der allgemeine Fall ergibt sich durch Anwendung des Spezialfalls auf $C - Y$.

□

Dieser Satz besagt insbesondere, daß jeder quadratisch integrierbare contingent claim C, der im undlichdimensionalen Modell duplizierbar ist, durch endlich dimensionale Investitionsstrategien approximiert wreden kann. Wir formulieren dies als Korollar:

Korollar 4.10 *Sei C aus $L^2(P)$, $\mathcal{F}_T$-meßbar. C besitze eine Darstellung*

$$C = \mathrm{E}_P[C] + \int_0^T \xi_t \, dX_t.$$

Dann gilt:

$$C = L^2\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_P[C] + \int_0^T \xi_t^n \, dX_t^n,$$

mit ξ^n $(n = 1, 2, \ldots)$ wie in Satz 4.9.

4.4 Die Clark-Formel

Die Vollständigkeit eines durch einen stochastischen Prozeß X modellierten, arbitragefreien Finanzmarktes garantiert, daß eine (hinreichend integrierbare) $\mathcal{F}_T$-meßbare Zufallsvariable Z eine Darstellung

$$Z = \mathrm{E}_Q[Z] + \int_0^T \xi_t \, dX_t$$

als stochastisches Integral besitzt, wobei Q das (in diesem Fall eindeutige) äquivalente Martingalmaß für X ist. Dies bedeutet, daß der contingent claim Z durch eine selbstfinanzierende Investitionsstrategie ξ dupliziert (gehedget) werden kann und dazu ein Startkapital von $\mathrm{E}_Q[Z]$ nötig ist. Dabei wird aber noch keine Aussage darüber gemacht, wie die Strategie ξ konkret aussieht. Eine Teilantwort hierzu gibt die Clark-Formel, die eine Darstellung für den Integranden ξ im Fall, daß X eine eindimensionale Brownsche Bewegung ist, gibt. Eine Verallgemeinerung der Clark-Formel für die unendlichdimensionale Brownsche Bewegung (also abzählbar viele unabhängige Brownsche Bewegungen) wird von J. Blum in [Blu86] gegeben. Dort wird zunächst eine Clark-Formel für das Brownsche Blatt hergeleitet, die dann via Transformation auf die unendlichdimensionale Brownsche Bewegung übertragen wird.

In diesem Abschnitt wollen wir eine Version der Clark-Formel für eine Hilbertraum-wertige Brownsche Bewegung mit Covarianzoperator C (Definition 2.4) beweisen. Unser Ansatz beruht auf einer direkten Übertragung der Beweistechnik von Bismut ([Bis86]). Ein zentraler Punkt ist dabei eine partielle

Integrationsformel für die Brownsche Bewegung, die mit Hilfe eines Maßwechsels hergeleitet wird. Unsere Form der Clark-Formel unterscheidet sich von der endlichdimensionalen Version und von derjenigen Blums dadurch, daß der Covarianzoperator C in der im folgenden eingeführten Variante der Malliavin-Ableitung eine wesentliche Rolle spielt und auch in der Clark-Formel selbst auftaucht.

Zunächst erinnern wir noch kurz an den Begriff der *Malliavin-Differenzierbarkeit* im eindimensionalen Fall. Sei dazu $\mathcal{H}$ der Raum der absolutstetigen, in 0 verschwindenden Funktionen auf $[0,1]$ mit quadrat-integrierbarer Ableitung, also

$$\mathcal{H} = \left\{ f \in C[0,1] \,\middle|\, f(0) = 0,\ f(t) = \int_0^t \dot{f}(s)\, ds,\ \int_0^1 \dot{f}(t)^2\, dt < \infty \right\}.$$

Versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^1 \dot{f}(t)\, \dot{g}(t)\, dt$$

ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Definition 4.11 (Malliavin-Differenzierbarkeit) Eine Abbildung $F : C[0,1] \to \mathbb{R}$ heißt *Malliavin-differenzierbar* oder *$\mathcal{H}$-differenzierbar* in $x \in C[0,1]$, falls es ein $\nabla F(x) \in \mathcal{H}$ gibt, so daß für alle $h \in \mathcal{H}$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{F(x + \epsilon\, h) - F(x)}{\epsilon} = \langle \nabla F(x), h \rangle_{\mathcal{H}}$$

ist.

Im folgenden betrachten wir das kanonische Modell einer Brownschen Bewegung mit Werten in einem separablen Hilbertraum H und Covarianzoperator C, also $\Omega = C_0([0,1], H)$ der Raum der stetigen H-wertigen Funktionen f mit $f(0) = 0$, $W_t(\omega) = \omega(t)$ $(\omega \in \Omega)$, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, 0 \le s \le t)$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ und passendem P, so daß W jetzt Brownsche Bewegung mit Werten in H und Covarianzoperator C ist. Insbesondere ist $W_0 = 0$. Wir betrachten im folgenden nur den Fall, daß C invertierbar ist. Das ist keine wesentliche Einschränkung, da C ein stetiger selbstadjungierter Operator ist und H daher die orthogonale Zerlegung

$$H = \mathrm{Im}(C) \oplus \mathrm{Ker}(C)$$

in Bild und Kern von C besitzt und W P-fast sicher nur Werte in $\mathrm{Im}(C)$ annimmt.

Analog zur eindimensionalen Situation definieren wir den Hilbertraum

$$\mathcal{H}_H = \left\{ f \in C([0,1],H) \,\middle|\, f(0)=0,\ f(t)=\int_0^t \dot{f}(s)\,ds,\ \int_0^1 \left\|\dot{f}(t)\right\|_H^2 dt < \infty \right\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f,g\rangle_{\mathcal{H}_H} := \int_0^1 \left\langle \dot{f}(t), \dot{g}(t)\right\rangle_H dt.$$

Definition 4.12 ($\mathcal{H}_H$- und $\mathcal{H}_H^C$-Differenzierbarkeit) Wir nennen eine Zufallsvariable $F \in L^2(P)$ *$\mathcal{H}_H$-differenzierbar*, falls eine meßbare Abbildung

$$\nabla F : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}_H$$

mit $\mathrm{E}\left[\|\nabla F\|^2_{\mathcal{H}_H}\right] < \infty$ existiert, so daß für jeden adaptierten, produktmeßbaren und beschränkten H-wertigen Prozeß $(u_t)_{t\in[0,1]}$ und

$$U_t(\omega) := \int_0^t u_s(\omega)\,ds \in \mathcal{H}_H \quad (0 \le t \le 1)$$

gilt:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(x+\epsilon U) - F(x)}{\epsilon} = \langle \nabla F, U\rangle_{\mathcal{H}_H}$$

in $L^2(P)$. Wir setzen dann

$$D_t F(\omega) := (\nabla F(\omega))^{\cdot}(t) \in H.$$

Für den Beweis der Clark-Formel kommen wir mit einem schwächeren Differenzierbarkeitsbegriff aus, der allerdings den Operator C involviert und infolgedessen nicht nur von den Eigenschaften des Pfadraums abhängt. Wir nennen eine Zufallsvariable $F \in L^2(P)$ *$\mathcal{H}_H^C$-differenzierbar*, falls $\nabla^C F$ (Meß- und Integrierbarkeitsbedingingen wie für ∇F) existiert, so daß für alle u, U wie oben gilt:

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{F(x+\epsilon C^{\frac{1}{2}} U) - F(x)}{\epsilon} = \left\langle \nabla^C F, U\right\rangle_{\mathcal{H}_H}$$

in $L^2(P)$. Wie oben setzen wir

$$D_t^C F(\omega) := (\nabla F^C(\omega))^{\cdot}(t).$$

Der zweite Typ Differenzierbarkeit skaliert sozusagen den Raum relativ zum Ausbreitungsverhalten der Brownschen Bewegung, das durch C bestimmt wird. Die

folgende Bemerkung stellt Eigenschaften der Malliavin-Ableitung, die sich unmittelbar aus der Definition ergeben, zusammen:

Bemerkung 4.13 Mit den Bezeichnungen der Definition 4.12 ist für $\mathcal{H}_H$- bzw. $\mathcal{H}_H^C$-differenzierbares F

$$\langle \nabla F(\omega), U_\cdot(\omega)\rangle_{\mathcal{H}_H} = \langle D_\cdot F(\omega), u_\cdot(\omega)\rangle_{L^2([0,1],H,dt)} \,.$$

bzw.

$$\Big\langle \nabla^C F(\omega), U_\cdot(\omega)\Big\rangle_{\mathcal{H}_H} = \Big\langle D_\cdot^C F(\omega), u_\cdot(\omega)\Big\rangle_{L^2([0,1],H,dt)} \,.$$

Für $\mathcal{H}_H$-differenzierbares F gilt die Beziehung

$$\nabla^C F(\omega) = \nabla F(C^{\frac{1}{2}}\,\omega)$$

und somit

$$D_t^C F(\omega) = D_t F(C^{\frac{1}{2}}\,\omega),$$

wobei $C^{\frac{1}{2}}\,\omega$ im Sinne von $(C^{\frac{1}{2}}\,\omega)(t) = C^{\frac{1}{2}}(\omega(t))$ zu verstehen ist. So betrachtet bedeutet, wenn wir die Integrierbarkeitsforderung an ∇F für einen Moment ignorieren, $\mathcal{H}_H^C$-Differenzierbarkeit $\mathcal{H}_H$-Differenzierbarkeit auf dem Bild des Pfadraums unter $C^{\frac{1}{2}}$.

Der folgende Satz, eine Variante von Bismuts partieller Integrationsformel für den Wienerraum, beschreibt den Zusammenhang zwischen $\mathcal{H}_H^C$-Ableitung und stochastischer Integration mit W:

Satz 4.14 (partielle Integration) *Sei $F \in L^2(P)$ $\mathcal{H}_H^C$-differenzierbar. dann gilt für alle u, U wie oben:*

$$\mathrm{E}\Big[\Big\langle D_\cdot^C F, u\Big\rangle_{L^2([0,1],H,dt)}\Big] = \mathrm{E}\Big[\Big\langle \nabla^C F, U\Big\rangle_{\mathcal{H}_H}\Big] = \mathrm{E}\Big[F \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s\Big] \,.$$

Der Beweis dieses Satzes benutzt ein Maßwechselargument mit einem exponentiellen Dichtemartingal. Die Argumentation bereiten wir im folgenden vor: Wir assoziieren zu u den reellwertigen Prozeß

$$Z_t^\lambda(u) := \exp\Big(\lambda \int_0^t C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s - \frac{1}{2}\,\lambda^2 \int_0^t \|u_s\|_H^2\; ds\Big) \,.$$

$Z^\lambda(u)$ ist ein lokales Martingal (siehe dazu zum Beispiel [MP80], S. 176). Da u beschränkt ist, ist

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\,\Big\langle \lambda \int_0^{\cdot} C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s \Big\rangle_t\Big)\Big] &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\,\lambda^2 \int_0^t \|u_s\|_H^2\; ds\Big)\Big] \\ &\leq \exp\Big(\frac{1}{2}\,\lambda^2 \sup \|u\|_H^2\Big) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Also ist die Novikov-Bedingung erfüllt und $Z^\lambda(u)$ somit ein echtes Martingal. Durch

$$\frac{dP^\lambda(u)}{dP} := Z_1^\lambda(u)$$

wird dann ein zu P äquivalentes Maß $P^\lambda(u)$ definiert, unter dem

$$W^\lambda(u) := W - \lambda\, C^{\frac{1}{2}}\, U$$

eine Brownsche Bewegung mit Covarianzoperator C ist (genau wie bei der Girsanov-Transformation im endlichdimensionalen Fall, siehe [MP80], S.176). Daher gilt:

$$\mathrm{E}_P\Big[F(W^\lambda(u))\, Z_1^\lambda(u)\Big] = \mathrm{E}_{P^\lambda(u)}\Big[F(W^\lambda(u))\Big] = \mathrm{E}_P[F(W)]\,. \tag{4.10}$$

Das folgende Lemma untersucht die Asymptotik von $Z^\lambda(u)$, wenn λ gegen Null geht.

Lemma 4.15 *Es gilt:*

$$\frac{Z_1^\lambda(u) - 1}{\lambda} \quad \xrightarrow{\lambda \to 0} \quad \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s$$

in $L^2(P)$.

Beweis: Aus der Itô-Formel folgt, daß

$$Z_1^\lambda(u) = 1 + \lambda \int_0^1 Z_s^\lambda(u)\, C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s$$

ist und daher

$$\frac{Z_1^\lambda(u) - 1}{\lambda} - \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s = \int_0^1 (Z_s^\lambda(u) - 1)\, C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[\Big(\int_0^1 (Z_s^\lambda(u)-1)\, C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s\Big)^2\Big] &= \mathrm{E}\Big[\int_0^1 (Z_s^\lambda(u)-1)^2\ \|u_s\|_H^2\ ds\Big] \\
&\leq \|u\|_\infty^2\ \mathrm{E}\Big[\int_0^1 (Z_s^\lambda(u)-1)^2\, ds\Big] \\
&\leq \|u\|_\infty^2\ \mathrm{E}\Big[(Z_1^\lambda(u)-1)^2\Big],
\end{aligned}$$

da $((Z_t^\lambda(u)-1)^2)_{t\in[0,1]}$ ein Submartingal ist. Es reicht also zu zeigen, daß $Z_1^\lambda(u)$ für λ gegen Null in $L^2(P)$ gegen Eins konvergiert. Da für alle $p>1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[(Z_1^\lambda(u)^p)\Big] &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\, p\,(p-1)\,\lambda^2 \int_0^1 \|u_s\|_H^2\ ds\Big)\Big] \\
&\leq \exp\Big(\frac{1}{2}\, p\,(p-1)\,\lambda^2\ \|u\|_\infty\Big)
\end{aligned}$$

ist, ist die Familie $\Big(Z_1^\lambda(u)\Big)_{0<\lambda\leq 1}$ gleichmäßig quadratisch integrierbar. Somit folgt aus der P-fast sicheren Konvergenz von $Z_1^\lambda(u)$ gegen 1 die Konvergenz in $L^2(P)$.

□

Nach dieser Vorarbeit können wir jetzt die partielle Integrationsformel beweisen:

Beweis: (Satz 4.14) Die erste Gleichung ergibt sich direkt aus Bemerkung 4.13. Aus Gleichung (4.10) folgt

$$\mathrm{E}\Big[\frac{F(W^\lambda(u))\, Z_1^\lambda(u)}{\lambda}\Big] = \mathrm{E}\Big[\frac{F(W)}{\lambda}\Big]$$

und somit

$$\mathrm{E}\Big[\frac{F(W-\lambda\, C^{\frac{1}{2}}\, U)-F(W)}{\lambda}\, Z_1^\lambda(u)\Big] = -\mathrm{E}\Big[F(W)\,\frac{Z_1^\lambda(u)-1}{\lambda}\Big]. \tag{4.11}$$

Nach dem Lemma gilt für die rechte Seite dieser Gleichung

$$-\mathrm{E}\Big[F(W)\,\frac{Z_1^\lambda(u)-1}{\lambda}\Big] \quad \xrightarrow{\lambda\to 0} \quad -\mathrm{E}\Big[F(W)\int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s\Big].$$

Die linke Seite von (4.11) lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big[\frac{F(W-\lambda\, C^{\frac{1}{2}}\, U)-F(W)}{\lambda}\, Z_1^\lambda(u)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\Big(\frac{F(W-\lambda\, C^{\frac{1}{2}}\, U)-F(W)}{\lambda} + \big\langle \nabla^C F, U\big\rangle_{\mathcal{H}_H}\Big)\ Z_1^\lambda(u)\Big] - \mathrm{E}\Big[\big\langle \nabla^C F, U\big\rangle_{\mathcal{H}_H}\ Z_1^\lambda(u)\Big].
\end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite konvergiert aufgrund der L^2-Konvergenz von $Z_1^\lambda(u)$ und des Differenzenquotienten gegen Null, und da $\left\langle \nabla^C F, U \right\rangle_{\mathcal{H}_H}$ in $L^2(P)$ liegt, folgt aus der L^2-Konvergenz von $Z_1^\lambda(u)$ gegen 1

$$\mathrm{E}\Big[\left\langle \nabla^C F, U \right\rangle_{\mathcal{H}_H} Z_1^\lambda(u)\Big] \quad \xrightarrow{\lambda \to 0} \quad \mathrm{E}\Big[\left\langle \nabla^C F, U \right\rangle\Big]_{\mathcal{H}_H}.$$

Damit haben wir den Satz bewiesen.

□

Unsere Version der Clark-Formel ist eine direkte Konsequenz aus der in Satz 4.14 hergeleiteten Dualität von $\mathcal{H}_H^C$-Ableitung und stochastischem Integral.

Satz 4.16 (Clark-Formel) *Für $\mathcal{H}_H^C$-differenzierbares $F \in L^2(P)$ gilt:*

$$F = \mathrm{E}[F] + \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{E}\Big[D_t^C F \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big]\, dW_t.$$

Beweis: Sei o.B.d.A. $\mathrm{E}[F] = 0$. Ist V ein dichter Unterraum von $L^2(P)$, so folgt die Aussage des Satzes, wenn

$$\mathrm{E}[F\,G] = \mathrm{E}\Big[G \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{E}\Big[D_t^C F \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big]\, dW_t\Big]$$

für alle $G \in V$ gilt. Als V wählen wir den Raum aller Zufallsvariablen der Form

$$G = \mathrm{E}[G] + \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, u_s\, dW_s,$$

wobei u die in der Definition 4.12 geforderten Eigenschaften hat. Da die Menge der zulässigen u insbesondere die Bilder aller elementaren H-wertigen Prozesse unter $C^{\frac{1}{2}}$ enthält und W die Darstellungseigenschaft besitzt, liegt V dicht in $L^2(P)$. Für $G \in V$ folgt aus Satz 4.14

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[F\,G] &= \mathrm{E}\Big[F \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, u_t\, dW_t\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\int_0^1 \left\langle D_t^C F, u_t \right\rangle_H dt\Big] \\
&= \int_0^1 \mathrm{E}\Big[\left\langle D_t^C F, u_t \right\rangle_H\Big]\, dt,
\end{aligned}$$

mit dem Satz von Fubini. Da u adaptiert ist, können wir jetzt die bedingte Erwartung einführen und abermals Fubini anwenden. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[F\,G] &= \int_0^1 \mathrm{E}\Big[\Big\langle D_t^C F, u_t \Big\rangle_H\Big]\; dt \\
&= \int_0^1 \mathrm{E}[\langle \mathrm{E}[\,D_t F \,|\, \mathcal{F}_t]\,, u_t\rangle_H]\; dt \\
&= \mathrm{E}\Big[\int_0^1 \langle \mathrm{E}[\,D_t F \,|\, \mathcal{F}_t]\,, u_t\rangle_H\; dt\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{E}[\,D_t F \,|\, \mathcal{F}_t]\; dW_t \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, u_t\, dW_t\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[G \int_0^1 C^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{E}[\,D_t F \,|\, \mathcal{F}_t]\; dW_t\Big]\,,
\end{aligned}$$

und somit das gewünschte Resultat.

□

Somit haben wir für die H-wertige Brownsche Bewegung fast dieselben Formeln hergeleitet wie für ein abzählbares Produkt von Brownschen Bewegungen. Das Auftauchen des Covarianzoperators C in den Gleichungen spiegelt dabei die Tatsache wider, daß die Struktur der H-wertigen Brownschen Bewegung nicht vollkommen symmetrisch ist.

Kapitel 5

Martingalmaße und asymptotische Arbitrage

Das "(first) fundamental theorem of asset pricing" besagt, daß die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes für den Preisprozeß im wesentlichen äquivalent zur Arbitragefreiheit des Marktes ist. Ein Markt ist arbitragefrei, wenn es nicht möglich ist, mit einer Investitionsstrategie ohne Verlustrisiko mit positiver Wahrscheinlichkeit Gewinn zu machen. Dieses Meta-Theorem fand seine allgemeinsten Konkretisierungen für endlichdimensionale Preisprozesse in den Arbeiten [DS94] und [DS98] von Delbaen und Schachermayer. Dabei muß im Falle lokal beschränkter Preisprozesse (behandelt in [DS94]) die No-Arbitrage-Bedingung durch eine asymptotische Form ("No Free Lunch With Vanishing Risk"(NFLVR)) ersetzt werden. Will man auf die lokale Beschränktheit verzichten, so ist NFLVR nur noch äquivalent zur Existenz eines äquivalenten Sigma-Martingal-Maßes.

Ein allgemeines Resultat für den unendlichdimensionalen Fall leitet I. Klein in [Kle00] her. Sie arbeitet dabei im Rahmen eines "Large Financial Markets", ein von Kabanov und Kramkov in [KK96] entwickeltes Konzept einer Folge von Finanzmarktmodellen mit je endlich vielen Preisprozessen von Wertpapieren, zum Beispiel den jeweils n ersten aus einer abzählbaren Menge von Wertpapieren.

Wir wollen in diesem Kapitel kein Resultat von der Allgemeinheit der in den obigen Arbeiten gefundenen Ergebnisse herleiten, sondern stattdessen die Tragfähigkeit intuitiver No-Arbitrage-Begriffe in spezielleren Situationen untersuchen. Dabei betrachten wir zum einen die von Kabanov und Kramkov in [KK96] eingeführten Formen asymptotischer Arbitrage, zum anderen ein Konzept asymptotischer Arbitrage, das in enger Beziehung zu den Resultaten von Delbaen

([Del92]) über Martingalmaße für Prozesse mit stetigen und beschränkten Pfaden steht.

5.1 Asymptotische Arbitrage der ersten und zweiten Art

Kabanov und Kramkov betrachten in [KK96] einen sogenannten "Large Financial Market". Das ist eine abzählbare Folge von Finanzmarktmodellen mit jeweils endlich vielen Preisprozessen, bzw. einem endlichdimensionalen Preisprozeß. Dabei muß a priori keinerlei Beziehung zwischen den einzelnen Modellen bestehen. In diesem Kontext definieren und untersuchen sie zwei verschiedene Varianten der Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage. Wir formulieren diese für den uns interessierenden Fall eines Finanzmarktes mit unendlich vielen Assets. Hier ist der entsprechende "Large Financial Market" die mit n indizierte Folge der Teilmarktmodelle, in denen jeweils nur mit den ersten n Wertpapieren gehandelt werden kann.

Seien dazu $(X_t^1)_{0\le t\le T}, (X_t^2)_{0\le t\le T}, \ldots$ reelle, lokal beschränkte Semimartingale auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, P)$. Zum Beispiel können $X^1, X^2, \ldots$ die Koordinaten eines Hilbertraum-wertigen lokal beschränkten Semimartingals bezüglich einer Orthonormalbasis sein - ein Spezialfall, auf den wir noch zurückkommen werden. $(\mathcal{F}_t^1)_{0\le t\le T}, (\mathcal{F}_t^2)_{0\le t\le T}, \ldots$ seien Filtrierungen mit

$$\mathcal{F}_t^1 \subset \mathcal{F}_t^2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_t$$

für alle $t \ge 0$, so daß für alle n $X^1, \ldots, X^n$ $\mathcal{F}^n$-adaptiert sind. $\mathcal{F}_t$ sei die von der Vereinigung der $\mathcal{F}_t^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ erzeugte σ-Algebra. Wir nehmen an, daß für jedes n ein auf $\mathcal{F}_T^n$ zu P äquivalentes Maß Q^n existiert, unter dem

$$X^{(n)} := (X^1, \ldots, X^n)$$

ein n-dimensionales lokales Martingal ist. Eine $\mathcal{F}^n$-Strategie ξ ist ein $\mathbb{R}^n$-wertiger $\mathcal{F}^n$-previsibler Prozeß, für den $\int_0^t \xi_s \, dX_s^{(n)}$ für alle $t \in [0, T]$ wohldefiniert ist. Zu einer $\mathcal{F}^n$-Strategie ξ und einem Startkapital $x_0 \in \mathbb{R}$ sei

$$V_t(x_0, \xi) := x_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s^{(n)}$$

die Wertentwicklung des Portfolios.

Definition 5.1 (Asymptotische Arbitragemöglichkeiten) Eine Folge von $\mathcal{F}^n$-Strategien $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ und Werten $x^n \in \mathbb{R}$ ist eine *asymptotische Arbitragemöglichkeit der ersten Art*, wenn

i) $V_t(x^n, \xi^n) \geq 0$ für alle $t \in [0, T]$ und alle n;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_0(x^n, \xi^n) = 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} P[V_T(x^n, \xi^n) \geq 1] > 0$.

Eine Folge von $\mathcal{F}^n$-Strategien $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ und Werten $x^n \in \mathbb{R}$ ist eine *asymptotische Arbitragemöglichkeit der zweiten Art*, wenn

i) $V_t(x^n, \xi^n) \leq 1$ für alle $t \in [0, T]$ und alle n;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} V_0(x^n, \xi^n) > 0$, also $\lim\limits_{n\to\infty} x^n > 0$;

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} P[V_T(x^n, \xi^n) \geq \epsilon] = 0$ für alle $\epsilon > 0$.

Eine asymptotische Arbitragemöglichkeit erster Art ist demnach eine asymptotische Variante des üblichen Arbitragebegriffs: Es gibt eine Investitionsstrategie, die ohne Verlustrisiko (Punkt i), mit (asymptotisch) verschwindendem Starteinsatz (Punkt ii) eine nicht-negative Auszahlung (wieder Punkt i) erbringt, die nicht P-fast sicher konstant Null ist (Punkt iii). Die Definition der asymptotischen Arbitragemöglichkeit zweiter Art ist zunächst weniger anschaulich, da sie eher nach einer Verluststrategie aussieht. Es wird aber deutlicher, daß auch hier ein Fall von (asymptotischer) Arbitrage vorliegt, wenn wir das ganze etwas umformen.

Bemerkung 5.2 Setzen wir in der Definition der asymptotischen Arbitragemöglichkeit zweiter Art $x^\infty := \lim\limits_{n\to\infty} x^n$ (der Limes soll nach Punkt ii) existieren) und definieren

$$y^n := \frac{x^\infty - x^n}{x^\infty}, \quad \eta_t := -\frac{\xi_t}{x^\infty} \ (t \in [0, T]), \text{ sowie } \quad c := \frac{x^\infty - 1}{x^\infty},$$

so erhalten wir die äquivalente Definition:

Eine Folge von $\mathcal{F}^n$-Strategien $(\eta^n)_{n=1,2,\ldots}$ und Werten $y^n \in \mathbb{R}$ ist eine *asymptotische Arbitragemöglichkeit der zweiten Art*, wenn

i) $V_t(y^n, \eta^n) \geq c$ für ein $c \leq 0$ und alle $t \in [0, T]$;

ii) $\lim_{n\to\infty} V_0(y^n, \eta^n) = 0$, also $\lim_{n\to\infty} y^n = 0$;

iii) $\lim_{n\to\infty} P[V_T(y^n, \eta^n) \leq 1 - \epsilon] = 0$ für alle $\epsilon > 0$.

Der Unterschied zwischen den beiden Arten von asymptotischer Arbitrage besteht also darin, daß bei der ersten Art keinerlei Risiko während des gesamten Zeitraumes $[0, T]$ besteht, da der Wertverlauf nicht-negativ ist, man also auch bei vorzeitiger Portfolioauflösung höchstens den (asymptotisch verschwindenden) Starteinsatz verliert, während man bei der zweiten Art ein durch c beschränktes Risiko eingehen muß. Dafür hat man hier asymptotisch die Gewißheit, mindestens einen Betrag von 1 zu gewinnen, während man im ersten Fall nur eine positive Gewinnchance hat.

Beispielmodelle, in denen jeweils genau eine dieser Arten von asymptotischer Arbitrage möglich ist, stellen wir im folgenden Kapitel vor. Sie sind etwas umfangreicher und würden daher den Fluß diese Kapitels stören, wenn wir sie an dieser Stelle brächten.

Kabanov und Kramkov definieren die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten/zweiten Art als Nichtexistenz einer Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 5.1. Dabei wird dies nicht nur für die (in der Definition gebrauchte) Indexfolge $n = 1, 2, \ldots$ verlangt, sondern auch für jede Teilfolge davon. Dies ist in der von ihnen betrachteten Allgemeinheit nötig, da die einzelnen Modelle völlig verschieden sein können. In unserer Situation sind alle Teilmodelle des "Large Financial Market" jedoch von einem einzigen unendlichdimensionalen Modell abgeleitet, und das $n + k$-te Modell ist eine Erweiterung des $n-$ten um k Assets. Jede zulässige Portfoliostrategie im n-ten Modell ist daher auch eine zulässige Strategie für das $n+k$-te. Daher genügt es für unseren Fall, die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage für Folgen zu fordern, die über die gesamte Indexmenge definiert sind.

Definition 5.3 (Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage) Die *Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten bzw. zweiten Art* (kurz mit NAA1 bzw. NAA2 bezeichnet) ist die Nichtexistenz einer Folge von $\mathcal{F}^n$-Strategien $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ und Werten $x^n \in \mathbb{R}$, die die Bedingungen des entsprechenden Teils von Definition 5.1 erfüllen.

Kabanov und Kramkov setzen die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage in Beziehung zur Kontiguität (contiguity) von Folgen von Martingalmaßen (eins zu

jedem Teilmodell) zu den Referenzmaßen auf den jeweiligen Teilmodellen. Die Kontiguität zweier Folgen von Maßen ist wie folgt definiert:

Definition 5.4 (Contiguity) Sei $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von meßbaren Räumen. $(P_n)_{n=1,2,\ldots}$ und $(Q_n)_{n=1,2,\ldots}$ seien zwei Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$, also P_n und Q_n Wahrscheinlichkeitsmaße auf Ω_n für alle n. Dann heißt die Folge $(Q_n)_{n=1,2,\ldots}$ *contiguous* zur Folge $(P_n)_{n=1,2,\ldots}$ (geschrieben: $(Q_n) \lhd (P_n)$), falls für jede Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{F}_n$ mit $P_n[A_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ auch $Q_n[A_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt. Dies beschreibt eine Art asymptotischer Absolutstetigkeit der Q_n zu den P_n.

In Proposition 2 in [KK96] zeigen Kabanov und Kramkov für den Fall, daß in jedem Teilmarkt genau ein zum Referenzmaß P^n äquivalentes Martingalmaß Q^n existiert, die folgenden Äquivalenzen: Die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art ist äquivalent zu $(P_n) \lhd (Q_n)$ und die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der zweiten Art ist äquivalent zu $(Q_n) \lhd (P_n)$. Wir wollen hier eine teils allgemeinere, teils speziellere Situation untersuchen. Wir betrachten, wie bereits oben ausgeführt, die Situation, daß die Teilmärkte des Large Financial Markets eine aufsteigende Folge von endlichdimensionalen Teilmärkten eines unendlichdimensionalen Finanzmarktes sind. Statt die Eindeutigkeit des äquivalenten Martingalmaßes auf jedem Teilmarkt zu fordern, verlangen wir nur, daß es genau ein Maß Q gibt, daß in allen Teilmärkten ein äquivalentes Martingalmaß ist. Dies entspricht der Existenz eines eindeutigen zu P lokal äquivalenten Martingalmaßes. In dieser Situation wollen wir untersuchen, ob die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage in Beziehung steht zur Absolutstetigkeit von Q zu P oder ungekehrt.

Grundlage für unsere Resultate sind Theorem 2.1 und 2.2 aus [KS96], die wir im folgenden Satz zusammenfassen:

Satz 5.5 (Klein/Schachermayer) *Es gibt in einem Large Financial Market $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n, X^n)_{n=1,2,\ldots}$ genau dann keine Arbitragemöglichkeit der ersten Art, wenn es eine Folge von zu P^n äquivalenten Martingalmaßen Q^n gibt, so daß*

$$(P^n) \lhd (Q^n).$$

Es gibt genau dann keine Arbitragemöglichkeit der zweiten Art, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ zu P^n äquivalente Martingalmaße Q^n und ein $\delta > 0$ existieren, so daß für alle Mengen $A^n \in \mathcal{F}^n$ aus $P^n[A^n] < \delta$ folgt, daß $Q^n[A^n] < \epsilon$ ist.

Wir benötigen für die Hauptresultate dieses Abschnitts noch eine alternative Charakterisierung der Kontiguität, die durch folgendes Lemma gegeben ist:

Lemma 5.6 *Seien* $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $(P_n)_{n=1,2,\ldots}$ *und* $(Q_n)_{n=1,2,\ldots}$ *wie in Definition 5.4. Dann sind äquivalent:*

i) $(Q_n) \lhd (P_n)$;

ii) für jede Folge von gleichmäßig beschränkten nicht-negativen $\mathcal{F}_n$*-meßbaren Funktionen* g_n *folgt aus* $\mathrm{E}_{P_n}[g_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *daß auch* $\mathrm{E}_{Q_n}[g_n] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *gilt.*

Beweis: Da Indikatorfunktionen die Bedingungen an die g_n erfüllen, folgt i) aus ii). Die umgekehrte Richtung zeigen wir mit maßtheoretischer Induktion. Wir nehmen an, daß i) gilt. Dann folgt zunächst nach Definition die Aussage ii) für Indikatorfunktionen. Haben nun die g_n die Gestalt

$$g_n = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^n \, 1_{A_i^n}$$

mit $\alpha_i^n > 0$, $A_i^n \in \mathcal{F}_n$, A_i^n für festes n paarweise disjunkt, und $m \in \mathbb{N}$ fest, so folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}_{P_n}[g_n] = 0$, daß $P_n[A_i^n]$ für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ gegen Null konvergiert, also nach i) auch $Q_n[A_i^n]$ gegen Null geht und damit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}_{Q_n}[g_n] = 0$ ist, da die Anzahl der Summanden fest ist. Sei g_n jetzt eine Folge von $\mathcal{F}_n$-meßbaren nicht-negativen und nach oben gleichmäßig durch $c < \infty$ nach oben beschränkten Funktionen. Mit der Definition

$$g_n^m := \sum_{i=2}^{m} \frac{i-1}{m} \, c \, 1_{\{g_n \in (\frac{i-1}{m} c, \frac{i}{m} c]\}} \qquad (m = 2, 3, \ldots)$$

ist offenbar für alle n g_n der monotone Limes der g_n^m für m gegen unendlich. Ist nun $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}_{P_n}[g_n] = 0$, so ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}_{P_n}[g_n^m] = 0$ für alle m und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{E}_{Q_n}[g_n^m] = 0$ nach dem vorhergehenden Beweisschritt. Da

$$\sup_{\omega \in \Omega_n} (g_n(\omega) - g_n^m(\omega)) \leq \frac{c}{m}$$

ist, folgt für die Funktionen g_n

$$\mathrm{E}_{Q_n}[g_n] \leq \mathrm{E}_{Q_n}[g_n^m] + \frac{c}{m}$$

für alle n und m und somit

$$\limsup_{n\to\infty} \mathrm{E}_{Q_n}[g_n] \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_{Q_n}[g_n^m] + \frac{c}{m} = \frac{c}{m}.$$

Da dies für alle m gilt, folgt die Behauptung.

□

In der uns interessierenden Situation ist $\Omega_n = \Omega$ für alle n, und die σ-Algebren $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ sind aufsteigend und erzeugen eine globale σ-Algebra $\mathcal{F}$. Das folgende Lemma stellt die Beziehung zwischen globaler (also auf $\mathcal{F}$) Absolutstetigkeit von Maßen und der Kontiguität ihrer Einschränkungen auf $\mathcal{F}_n$ dar:

Lemma 5.7 *Ist $\Omega_n = \Omega$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und sind $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{F}$ σ-Algebren auf Ω mit $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$, so ist für Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ die Absolutstetigkeit von P zu Q äquivalent zu $\left(P_{|\mathcal{F}_n}\right) \lhd \left(Q_{|\mathcal{F}_n}\right)$.*

Beweis: Wir schreiben im folgenden kurz P^n statt $P_{|\mathcal{F}_n}$ und entsprechendes für Q. Wir zeigen als erstes, daß aus der Absolutstetigkeit die Kontiguität folgt: Wir nehmen an, daß es eine Folge von Mengen $A_n \in \mathcal{F}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} Q^n[A_n] = 0, \tag{5.1}$$

aber

$$\limsup_{n\to\infty} P^n[A_n] > \epsilon > 0. \tag{5.2}$$

ist und führen dies zum Widerspruch: Die Absolutstetigkeit von P zu Q besagt, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß für $A \in \mathcal{F}$ aus $Q[A] \leq \delta$ $P[A] \leq \epsilon$ folgt. Aus (5.1) folgt: Es gibt ein $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$, so daß $Q^n[A^n] \leq \delta$ für alle $n \geq n_0(\delta)$ ist. Dann muß aber auch $P^n[A^n] \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0(\delta)$ sein. Dies ist ein Widerspruch zu (5.2). Also folgt aus (5.1) $\lim_{n\to\infty} P^n[A^n] = 0$ und damit $(P^n) \lhd (Q^n)$.

Jetzt müssen wir noch zeigen, daß aus der Kontiguität die Absolutstetigkeit folgt. Nach Lemma 5.6 ist $(P^n) \lhd (Q^n)$ äquivalent dazu, daß für alle Folgen $(g^n)_{n=1,2,\ldots}$ von gleichmäßig beschränkten, nicht negativen $\mathcal{F}_n$-meßbaren Funktionen g^n gilt: Ist

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_{Q^n}[g^n] = 0,$$

so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_P[g^n] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_{P^n}[g^n] = 0. \tag{5.3}$$

Sei nun

$$D^n := \frac{dQ^n}{dP^n} = \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_n$$

und

$$D^\infty := \lim_{n\to\infty} D^n.$$

Dann gilt: P ist absolutstetig zu Q auf $\mathcal{F}$ genau dann, wenn P-fast sicher $D^\infty > 0$ ist. Wir setzen

$$g^n := P[D^\infty = 0 \,|\, \mathcal{F}_n]\; 1_{\{D^n<c\}}$$

für ein $c > 0$. Dabei wählen wir eine P-Version von g^n so, daß die Werte von g^n überall im Intervall $[0,1]$ liegen. Es gilt

$$P[D^\infty = 0 \,|\, \mathcal{F}_n] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1_{\{D^\infty=0\}}$$

P-fast sicher, und für alle n ist $1_{\{D^n<c\}} \leq 1$, also konvergiert g^n auf der Menge $\{D^\infty > 0\}$ P-fast sicher gegen 0. Da außerdem D^n P-fast sicher gegen D^∞ geht, gilt

$$1_{\{D^n<c\}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

P-fast sicher auf $\{D^\infty = 0\}$. Damit konvergiert g^n P-fast sicher gegen $1_{\{D^\infty=0\}}$ und auch in $L^1(P)$, da $|g^n| \leq 1$.

Betrachten wir nun das Verhalten von g^n für n gegen unendlich unter Q. Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_Q[g^n] &= \mathrm{E}_Q\Big[P[D^\infty = 0 \,|\, \mathcal{F}_n]\; 1_{\{D^n<c\}}\Big] \\ &= \mathrm{E}_P\Big[D^n\, 1_{\{D^n<c\}}\, P[D^\infty = 0 \,|\, \mathcal{F}_n]\Big] \\ &\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

da

$$D^n\, 1_{\{D^n<c\}}\, P[D^\infty = 0 \,|\, \mathcal{F}_n] \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

P-fast sicher und dieser Ausdruck durch c beschränkt ist. Damit konvergiert g^n in $L^1(Q)$ gegen 0. Aus (5.3) folgt daher, daß auch

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_P[g^n] = 0$$

ist. Da g^n, wie oben gezeigt in $L^1(P)$ gegen $1_{\{D^\infty=0\}}$ konvergiert, folgt

$$P[D^\infty = 0] = 0$$

und damit die Absolutstetigkeit von P zu Q.

□

Als ersten Teil des Hauptresultat dieses Abschnitts zeigen wir nun, daß in dem oben ausgeführten Fall, daß es nur einen Kandidaten Q für ein äquivalentes Martingalmaß gibt, aus der Absolutstetigkeit von P zu Q bzw. Q zu P jeweils die Abwesenheit einer der beiden Arten von asymptotischer Arbitrage folgt. Dies ist eine Anwendung von Satz 5.5 und Lemma 5.7.

Satz 5.8 *Seien* $(X_t^1)_{0\leq t\leq T}, (X_t^2)_{0\leq t\leq T}, \ldots$ *reellwertige, lokal beschränkte Semimartingale auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$. $(\mathcal{F}_t^1)_{0\leq t\leq T}, (\mathcal{F}_t^2)_{0\leq t\leq T}, \ldots$ *seien Filtrierungen mit*

$$\mathcal{F}_t^1 \subset \mathcal{F}_t^2 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_t$$

für alle $t \geq 0$*, so daß für alle* n $X^1, \ldots, X^n$ $\mathcal{F}^n$*-adaptiert sind.* $\mathcal{F}_t$ *sei die von der Vereinigung der* $\mathcal{F}_t^n$ $(n = 1, 1 \ldots)$ *erzeugte* σ*-Algebra und* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$. $\mathcal{P}_a^n$ *sei die Menge* $\mathcal{P}^n$ *aller zu* P *auf* $\mathcal{F}_T^n$ *absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße, unter denen* $X^1, \ldots, X^n$ *lokale Martingale sind. Entsprechend sei* $\mathcal{P}^n$ *die Menge aller zu* P *auf* $\mathcal{F}_T^n$ *äquivalenten (lokalen) Martingalmaße für* $X^1, \ldots, X^n$*. Wir nehmen an, daß genau ein Maß* Q *auf* $\mathcal{F}$ *existiert, das für alle* n *ein Element von* $\mathcal{P}^n$ *ist. Dann gilt:*

i) Aus der Absolutstetigkeit von P *zu* Q *folgt die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art (NAA1).*

ii) Aus der Absolutstetigkeit von Q *zu* P *folgt die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der zweiten Art (NAA2).*

Beweis: Zu Teil i): In dieser Situation ist nach Satz 5.5 die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art (NAA1) äquivalent dazu, daß eine Folge $\widetilde{Q}^n \in \mathcal{P}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existiert, so daß

$$(P^n) \lhd (\widetilde{Q}^n),$$

wobei $P^n := P_{|\mathcal{F}_T^n}$ ist. Nach Lemma 5.7 folgt aus der Absolutstetigkeit von P zu Q, daß $\left(P_{|\mathcal{F}_T^n}\right) \lhd \left(Q_{|\mathcal{F}_T^n}\right)$ ist und damit die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art.

Zu Teil ii): Ist Q absolutstetig zu P, so ist das ϵ/δ-Kriterium in Satz 5.5 mit $Q^n = Q_{|\mathcal{F}_T^n}$ erfüllt, da dann sogar für alle $A \in \mathcal{F}_T$ zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß aus $P[A] < \delta$ folgt, daß $Q[A] < \epsilon$ ist.

$\square$

Um auch umgekehrt zeigen zu können, daß aus NAA1 bzw. NAA2 die Absolutstetigkeit von P zu Q bzw. Q zu P folgt, benötigen wir eine zusätzliche technische Bedingung an die Mengen der äquivalenten Martingalmaße auf den einzelnen Teilmärkten. Diese müssen, zumindest für großes n kompakt in der durch den Variationsabstand definierten Topologie sein. Zur Erinnerung:

Definition 5.9 (Variationsabstand) Sei $(\Omega, \mathcal{F})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{E}$ die Menge aller endlichen Partitionen von Ω in meßbare Mengen. $\mathcal{M}_s(\Omega)$ sei der Vektorraum aller endlichen signierten Maße auf Ω Auf $\mathcal{M}_s(\Omega)$ wird durch die *totale Variation* eines Maßes μ, die durch

$$\|\mu\| := \sup_{(E_i)\in\mathcal{E}} \sum_i |\mu[E_i]| \tag{5.4}$$

gegeben ist, eine Norm definiert. Die dazu assoziierte Metrik

$$d_{\mathrm{Var}}(P, Q) := \|P - Q\|$$

bezeichnen wir als *Variationsabstand* von P und Q.

Eine im folgenden wichtige alternative Charakterisierung des Variationsabstands, wenn P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße sind, gibt das folgende Lemma:

Lemma 5.10 *Für Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ gilt*

$$d_{Var}(P, Q) = \int_\Omega \left| \frac{dP}{dR} - \frac{dQ}{dR} \right| dR$$

für jedes $R \in \mathcal{M}_1(\Omega)$ mit $P \ll R$ und $Q \ll R$ (also zum Beispiel für $R = \frac{1}{2}(P + Q)$).

Ein Beweis dieser Aussage findet sich zum Beispiel in [Pin64], S. 6-7.

Satz 5.11 *Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen in Satz 5.8. Zusätzlich sei $\mathcal{P}_a^n$ für hinreichend große n kompakt in der Variationstopologie, also*

$$\left\{ \frac{dQ^n}{dP}_{|\mathcal{F}_T^n},\ Q^n \in \mathcal{P}_a^n \right\}$$

kompakt in $L^1(P)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:

i) Die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art (NAA1) ist äquivalent zur Absolutstetigkeit von P zu Q.

ii) Die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der zweiten Art (NAA2) ist äquivalent zur Absolutstetigkeit von Q zu P.

Gilt also (NAA1) und (NAA2), so ist Q ein äquivalentes (lokales) Martingalmaß für alle X^n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Bevor wir diesen Satz beweisen, fassen wir einige beide Teilaussagen betreffende Vorbetrachtungen in einem Lemma zusammen:

Lemma 5.12 *Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 5.11. Dann gilt:*

i) Jede Folge von Maßen $\widetilde{Q}^n$, $Q^n \in \mathcal{P}_a^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konvergiert in Variation gegen Q.

ii) Für $\widetilde{Q}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wie oben gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_P\left[\left|\frac{d\widetilde{Q}^n}{dP}_{|\mathcal{F}_T^n} - \frac{dQ}{dP}_{|\mathcal{F}_T^n}\right|\right] = 0.$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}^n = \{Q\}\,.$$

Dann muß auch

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_a^n = \{Q\}$$

sein. Denn gäbe es ein $\widetilde{Q} \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_a^n$, $\widetilde{Q} \neq Q$, so wäre $\frac{1}{2}\left(Q + \widetilde{Q}\right)$ ein Element von $\mathcal{P}^n$ für alle n und damit ein Element von $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}^n$. Da die Mengen $\mathcal{P}_a^n$ für hinreichend großes n kompakt in der Variationstopologie sind und für alle n $\mathcal{P}_a^{n+1}$ eine Teilmenge von $\mathcal{P}_a^n$ ist, folgt daraus, daß jede Folge von Maßen $\widetilde{Q}^n$, $\widetilde{Q}^n \in \mathcal{P}_a^n$ in Variation gegen Q konvergiert, also Aussage i). Weiter ist $\mathrm{E}_P\left[\left|\frac{d\widetilde{Q}^n}{dP}_{|\mathcal{F}_T^n} - \frac{dQ}{dP}_{|\mathcal{F}_T^n}\right|\right]$ nach Lemma 5.10 der Variationsabstand zwischen $\widetilde{Q}^n_{|\mathcal{F}_T^n}$ und $Q_{|\mathcal{F}_T^n}$. Dieser kann nicht größer als der Variationsabstand zwischen $\widetilde{Q}^n$ und Q sein, da das Supremum

in (5.4) über weniger Partitionen genommen wird. Da $d_{\mathrm{Var}}\left(\widetilde{Q}^n, Q\right)$ gegen Null konvergiert, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}_P\left[\left|\frac{d\widetilde{Q}^n}{dP}|\mathcal{F}_T^n - \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_T^n\right|\right] = 0,$$

also Aussage ii).

□

Beweis: (von Satz 5.11) Wir müssen nur noch zeigen, daß aus NAA1 $P \ll Q$ und aus NAA2 $Q \ll P$ folgt.

Teil i): Nach Satz 5.5 folgt aus der Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art (NAA1), daß eine Folge $\widetilde{Q}^n \in \mathcal{P}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existiert, so daß

$$(P^n) \lhd (\widetilde{Q}^n),$$

wobei $P^n := P_{|\mathcal{F}_T^n}$ ist. Wir wollen zeigen, daß dann auch $(P^n) \lhd \left(Q_{|\mathcal{F}_T^n}\right)$ gilt und somit nach Lemma 5.7 Q absolutstetig zu P auf $\mathcal{F}_T$ ist. Sei dazu $A_n \in \mathcal{F}_T^n$ $(n = 1, 2, \ldots$ eine Folge meßbarer Mengen mit

$$\lim_{n\to\infty} Q^n[A_n] = 0,$$

mit $Q^n := Q_{|\mathcal{F}_T^n}$. Es ist

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{Q}^n[A_n] - Q^n[A_n]\right| &= \left|\mathrm{E}_P\left[\left(\frac{d\widetilde{Q}^n}{dP}|\mathcal{F}_T^n - \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_T^n\right) 1_{A_n}\right]\right| \\
&\leq \mathrm{E}_P\left[\left|\frac{d\widetilde{Q}^n}{dP}|\mathcal{F}_T^n - \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_T^n\right|\right] \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

nach Lemma 5.12. Damit gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{Q}^n[A_n] = 0.$$

Aus der Kontiguität von (P^n) zu $(\widetilde{Q}^n)$ folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} P^n[A_n] = 0$$

und damit

$$(P^n) \lhd (Q^n).$$

Aus Lemma 5.7 folgt damit die Absolutstetigkeit von P zu Q. Damit ist Teil i) des Satzes bewiesen.

Zu Teil ii): Wir nehmen an, daß es in unserem Modell keine asymptotische Arbitragemöglichkeit der zweiten Art gibt. Wir zeigen, daß in diesem Fall $(Q^n) \lhd (P^n)$ gilt. Sei dazu $A_n \in \mathcal{F}_T^n$ $(n = 1, 2, \ldots$ eine Folge meßbarer Mengen mit

$$\lim_{n\to\infty} P^n[A_n] = 0. \tag{5.5}$$

Wir wählen ein $\epsilon > 0$. Nach Satz 5.5 existieren ein $\delta_{\frac{\epsilon}{2}} > 0$ und Maße $\widetilde{Q}^n_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathcal{P}^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, so daß aus $P^n[A_n] < \delta_{\frac{\epsilon}{2}}$ folgt, daß $\widetilde{Q}^n_{\frac{\epsilon}{2}}[A^n] < \frac{\epsilon}{2}$ ist. Aus (5.5) folgt, daß es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $P^n[A_n] < \delta_{\frac{\epsilon}{2}}$ für alle $n \geq n_0$ ist. Daher ist

$$Q^n_{\frac{\epsilon}{2}}[A^n] < \frac{\epsilon}{2} \tag{5.6}$$

für alle $n \geq n_0$. Mit der gleichen Argumentation wie in Teil i) des Beweises folgt aus Lemma 5.12, daß

$$\lim_{n\to\infty} \left|\widetilde{Q}^n_{\frac{\epsilon}{2}}[A_n] - Q^n[A_n]\right| = 0$$

ist. Also existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n \geq m_0$

$$\left|\widetilde{Q}^n_{\frac{\epsilon}{2}}[A_n] - Q^n[A_n]\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

ist. Zusammen mit (5.6) bedeutet dies, daß

$$Q^n[A^n] < \epsilon$$

für alle $n \geq n_0 \vee m_0$ ist. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} Q^n[A^n] = 0.$$

Daher ist $(Q^n) \lhd (P^n)$ und aus Lemma 5.7 folgt die Absolutstetigkeit von Q zu P.

□

5.2 Allgemeine asymptotische Arbitrage im stetigen Fall

Wenn man keinen eindeutigen Martingalmaß-Kandidaten hat, sind die Bedingungen (NAA1) und (NAA2) nicht ausreichend, um die Existenz eines äquivalenten

Martingalmaßes zu sichern. Haben die Prozesse $X^1, X^2, \ldots$ jedoch stetige Pfade, so ergibt sich aus folgendem Resultat von Delbaen in [Del92] ein Kriterium für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes in unserem Modell:

Satz 5.13 *(Delbaen 1992) Sei V ein Vektorraum von adaptierten beschränkten Prozessen mit stetigen Pfaden. V habe folgende Eigenschaften:*

i) Konstante Prozesse liegen in V.

ii) V ist stabil unter Stoppen, das heißt für jede Stoppzeit τ gilt: Ist $X \in V$, dann ist auch $X^\tau \in V$, wobei $X_t^\tau = X_{t\wedge\tau}$ ist.

Wir definieren

$$V_T^0 := \{X_T \mid X \in V,\ X_0 = 0\}\,.$$

Dann sind äquivalent:

i) Für jede Folge $(f_n)_{n=1,1,\ldots} \subset V_T^0$ mit $\|f_n\|_\infty \leq c$ für alle n und ein $c < \infty$ gilt: Konvergiert der Negativteil f_n^- P-stochastisch gegen Null, dann geht auch der Positivteil f_n^+ P-stochastisch gegen Null ("No Free Lunch with Bounded Risk" (NFLBR)).

ii) Es existiert ein zu P äquivalentes Maß Q, so daß alle $X \in V$ Q-Martingale sind.

Wir wenden dieses Resultat jetzt auf unser Modell an. Dazu führen wir einen an unsere Situation (unendlichdimensionales Modell mit Arbitragefreiheit für endlichdimensionale Teilprozesse) adaptierten No-Arbitrage-Begriff an, den der (allgemeinen) asymptotischen Arbitrage:

Definition 5.14 (allgemeine asymptotische Arbitrage) Eine Folge von $\mathcal{F}^n$-Strategien $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ ist eine *(allgemeine) asymptotische Arbitragemöglichkeit*, wenn folgende Punkte erfüllt sind:

i) Es existiert eine Konstante $c > -\infty$, so daß

$$V_t(0, \xi^n) = \int_0^t \xi_s^n \, dX_s^{(n)} \geq c$$

für alle $0 \leq t \leq T$ ist;

ii) Die Zufallsvariablen $(V_T(0,\xi^n))_{n=1,2,\ldots}$ konvergieren P-stochastisch und es ist

$$\lim_{n\to\infty} V_T(0,\xi^n) \geq 0$$

P-fast sicher;

iii) $P\Big[\lim_{n\to\infty} V_T(0,\xi^n) > 0\Big] > 0.$

Als Spezialfall von "No Free Lunch with Bounded Risk" brauchen wir noch *"No Free Lunch with Bounded Risk" für einfache Strategien*:

Definition 5.15 (NFLBR für einfache Strategien) Eine $\mathcal{F}^n$-Strategien ξ ist eine *einfache Strategie*, wenn sie die Form

$$\xi_t = \sum_{i=0}^{m-1} 1_{]\!]\tau_i,\tau_{i+1}]\!]}(t)\,\phi_i,$$

mit $\mathcal{F}^n$-Stoppzeiten $0 \leq \tau_0 \leq \cdots \leq \tau_m$ und $\mathcal{F}^n_{\tau_i}$-meßbaren, $\mathbb{R}^n$-wertigen, beschränkten Zufallsvariablen ϕ_i, hat.

$(X^1, X^2, \ldots)$ hat die Eigenschaft *"No Free Lunch with Bounded Risk" für einfache Strategien*, falls für jede Folge $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ von einfachen $\mathcal{F}^n$-Strategien mit

$$\|V_T(0,\xi^n)\|_\infty \leq c$$

für alle n und ein $c < \infty$ gilt: Konvergiert $V_T(0,\xi^n)^-$ P-stochastisch gegen Null, dann geht auch $V_T(0,\xi^n)^+$ P-stochastisch gegen Null.

Mit diesen Begriffen können wir Kriterien für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes angeben, wenn die Prozesse $X^1, X^2, \ldots$ stetig und beschränkt sind:

Satz 5.16 *Wenn jedes der Semimartingale $X^1, X^2, \ldots$ beschränkt ist und stetige Pfade besitzt, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) Es existiert ein (gemeinsames) äquivalentes Martingalmaß Q für die Prozesse $X^1, X^2, \ldots$.

ii) $(X^1, X^2, \ldots)$ hat die Eigenschaft "No Free Lunch with Bounded Risk" für einfache Strategien.

iii) Es gibt keine asymptotische Arbitragemöglichkeit.

Beweis: Wir zeigen zuerst die Äquivalenz von i) und ii): Sei

$$\begin{aligned} V &:= \operatorname{span}\Big\{ \Big(c + \phi(X^n_{\tau_1\wedge t} - X^n_{\tau_0\wedge t})\Big)_{0\le t\le T} | c \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots, \\ &\qquad \tau_1 \ge \tau_0\ \mathcal{F}^n\text{-Stoppzeiten}, \phi\ \mathcal{F}^n_{\tau_0}\text{-meßbar, beschränkt}\Big\} \\ &= \Big\{(V_t(c,\xi))_{0\le t\le T} \mid c \in \mathbb{R},\ \xi \text{ einfache } \mathcal{F}^n\text{Strategie}, n = 1, 2, \ldots\Big\}. \end{aligned}$$

V erfüllt die Eigenschaften i) und ii) aus Satz 5.13. Daher ist nach diesem Satz Teil i) unseres Satzes äquivalent zu der Aussage (A):

Für jede Folge $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ von einfachen $\mathcal{F}^{k_n}$-Strategien ($k_n \in \{1, 2, \ldots\}$) mit

$$\|V_T(0,\xi^n)\|_\infty \le c$$

für alle n und ein $c < \infty$ gilt: Konvergiert $V_T(0,\xi^n)^-$ P-stochastisch gegen Null, dann geht auch $V_T(0,\xi^n)^+$ P-stochastisch gegen Null.

ii) ist gerade diese Aussage mit $k_n = n$ für alle n. Da wir aber in diesem Kapitel vorausgesetzt haben, daß es für je endlich viele der Prozesse $X^1, X^2, \ldots$ ein äquivalentes Martingalmaß gibt, gilt, wieder mit Satz 5.13, (A) für Folgen der obigen Art mit $\sup_n k_n < \infty$. Bei unbeschränkten k_n kann man jedoch eine in den k_n aufsteigende Teilfolge von $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ wählen und diese durch Duplizieren von Elementen zu einer Folge $\left(\widetilde{\xi}^n\right)_{n=1,2,\ldots}$ ergänzen, bei der $\widetilde{\xi}^n$ jeweils eine $\mathcal{F}^n$-Strategie ist. Da diese Folge dieselbe Asymptotik hat wie die ursprüngliche, folgt (A) aus Teil ii) dieses Satzes und damit auch Teil i). Damit ist die Äquivalenz von i) und ii) gezeigt.

Da die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage eine stärkere Eigenschaft als ii) ist, brauchen wir nur noch zeigen, daß aus i) iii) folgt. Sei dazu $(\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge von $\mathcal{F}^n$-Strategien mit

$$V_t(0,\xi^n) = \int_0^t \xi^n_s\, dX^{(n)}_s \ge c$$

für alle $0 \le t \le T$ und ein $c > -\infty$. Wir nehmen an, daß $\lim_{n\to\infty} V_t(0,\xi^n)$ existiert. Unter Q sind die Wertprozesse $(V_t(0,\xi^n))_{0\le t\le T}$ lokale Martingale und, da sie nach unten beschränkt sind, sogar Supermartingale. Daher ist

$$\mathrm{E}_Q[V_T(0,\xi^n)] \le V_0(0,\xi^n) = 0,$$

für alle n, und aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit nach unten gilt nach dem Lemma von Fatou

$$\mathrm{E}_Q\left[\lim_{n\to\infty} V_T(0,\xi^n)\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}_Q[V_T(0,\xi^n)] \leq 0.$$

Das bedeutet aber, daß aus

$$\lim_{n\to\infty} V_T(0,\xi^n) \geq 0,$$

P-fast sicher und damit Q-fast sicher, folgt, daß $\lim_{n\to\infty} V_T(0,\xi^n)$ Q- und P-fast sicher konstant Null ist. Daher kann es keine (allgemeine) asymptotische Arbitragemöglichkeit geben. Somit folgt iii) aus i).

□

Als nächstes wollen wir diesen Satz auf den Fall unbeschränkter Prozesse verallgemeinern. Dies ist möglich, wenn es eine Folge von Stoppzeiten gibt, so daß die gestoppten Prozesse jeweils beschränkt sind. Konkret:

Korollar 5.17 *Haben die Prozesse $X^1, X^2, \ldots$ stetige Pfade und ist $(T_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge von Stoppzeiten $0 \leq T_n \leq T$ mit $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$ P-fast sicher, so daß $(X^i_{t\wedge T_n})_{0\leq t\leq T}$ für alle i und alle n ein beschränkter Prozeß ist, dann sind äquivalent:*

i) Es existiert ein (gemeinsames) äquivalentes lokales Martingalmaß Q für die Prozesse $X^1, X^2, \ldots$.

ii) $(X^1, X^2, \ldots)$ hat die Eigenschaft "No Free Lunch with Bounded Risk" für einfache Strategien.

iii) Es gibt keine asymptotische Arbitragemöglichkeit.

Beweis: Wie im Beweis von Satz 5.16 gelten die Beziehungen i) $\Longrightarrow$ iii) $\Longrightarrow$ ii). Aus dem Satz folgt außerdem, daß ii) die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes Q für die (abzählbare) Familie $\left\{(X^i_{t\wedge T_n})_{0\leq t\leq T},\ i=1,2,\ldots,\ n=1,2,\ldots\right\}$ von beschränkten Prozessen impliziert. Das bedeutet aber nichts anderes, als daß $X^1, X^2, \ldots$ lokale Martingale unter Q sind.

□

In welchen Situationen ist die Voraussetzung des Korollars erfüllt? Eine hinreichende Bedingung ist es, wenn der Prozeß $X = (X^1, X^2, \ldots)$ nur Werte in einem

normierten Unterraum $(U, \|\cdot\|)$ des Folgenraums annimmt und bezüglich dieser Norm stetige Pfade hat. Denn dann kann man die Stoppzeiten T_n durch

$$T_n := \inf \{t \geq 0 : \|X_t\| \geq n\}$$

definieren. Insbesondere ist diese Bedingung erfüllt, wenn X Werte im Hilbertraum l^2 annimmt. Dies ist speziell dann der Fall, wenn $(X^1, X^2, \ldots)$ die Koordinatendarstellung eines Prozesses mit Werten in einem separablen Hilbertraum bezüglich einer Orthonormalbasis ist.

Kapitel 6

Beispiele zur asymptotischen Arbitrage

Dieses Kapitel ergänzt das vorige um Beispiele für beide Fälle von asymptotischer Arbitrage nach Kabanov/Kramkov. Wir konstruieren dazu zwei Modelle, in denen jeweils eine Arbitragemöglichkeit genau einer der beiden Arten existiert. Als stochastische Basis liegt jeweils eine unendlichdimensionale Brownsche Bewegung zugrunde. In beiden Fällen beruht die Arbitragemöglichkeit auf einer Anwendung des starken Gesetz der großen Zahlen. Die Schwierigkeit bei der Konstruktion liegt dabei nicht darin, Arbitrage der einen Art zu ermöglichen, sondern darin, Arbitragemöglichkeiten der anderen Art zu verhindern.

6.1 Arbitrage der ersten Art

Seien $(W_t^0)_{0\le t\le 1}, (W_t^1)_{0\le t\le 1}, \ldots$ abzählbar viele unabhängige eindimensionale Brownsche Bewegungen mit Start in Null auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}, P)$. Dabei sei $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}$ die von den Prozessen $W^0, W^1, \ldots$ erzeugte Filtrierung und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$. Sei weiter

$$\tau := \inf\Big\{t \in [0,1] : W_t^0 \le -1\Big\}$$

(wie üblich sei das Infimum der leeren Menge $+\infty$). τ ist also der Zeitpunkt, zu dem W^0 zum ersten Mal den Level -1 erreicht. Wir definieren unsere Preisprozesse $(X_t^n)_{0\le t\le 1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ durch

$$X_t^n = \exp\Big(W_t^n + W_{t\wedge\tau}^0 - t\wedge\tau\Big) \tag{6.1}$$

für $t \in [0,1]$. Wir können X_t^n auch wie folgt schreiben:

$$X_t^n = \exp\Big(W_t^n - \frac{1}{2}\,t\Big)\,\exp\Big(W_{t\wedge\tau}^0 - t\wedge\tau + \frac{1}{2}\,t\Big)\,.$$

X^n ist also für jedes n eine geometrische Brownsche Bewegung, multipliziert mit dem für alle n gemeinsamen Faktor

$$\begin{aligned} Y_t &:= \exp\Big(W_{t\wedge\tau}^0 - t\wedge\tau + \frac{1}{2}\,t\Big) \\ &= \exp\Big(W_{t\wedge\tau}^0 - \frac{1}{2}\,t\wedge\tau + \frac{1}{2}\,(t-\tau)\,1_{\{t\geq\tau\}}\Big)\,. \end{aligned}$$

Y ist bis τ ebenfalls eine geometrische Brownsche Bewegung und danach eine exponentiell wachsende deterministische Funktion. Sei $(\mathcal{F}_t^n)_{0\leq t\leq 1}$ die von den Prozessen $X^1,\ldots,X^n$ erzeugte und rechtsstetig gemachte Filtrierung. Wir zeigen als erstes, daß es in diesem Modell eine Arbitragemöglichkeit der ersten Art gibt, und danach, daß es für jedes n ein äquivalentes Martingalmaß auf $\mathcal{F}_1^n$ gibt.

Da die Prozesse X_t^n aus den unabhängigen, identisch verteilten Faktoren $\exp\Big(W_t^n - \frac{1}{2}\,t\Big)$ mit Erwartungswert 1 und dem gemeinsamen Faktor Y_t bestehen, liegt die Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen nahe. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_t^k &= Y_t\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \exp\Big(W_t^k - \frac{1}{2}\,t\Big)\right) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y_t, \end{aligned}$$

P-fast sicher für alle t. Da τ unabhängig von den (unabhängigen) Brownschen Bewegungen $W^1, W^2, \ldots$ ist, sind auch die Zufallsvariablen $W_{\tau\wedge 1}^1, W_{\tau\wedge 1}^2, \ldots$ unabhängig. Somit gilt P-fast sicher auch

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_{\tau\wedge 1}^k \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Y_{\tau\wedge 1}.$$

Da $W_\tau^0 = -1$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} Y_1 - Y_{\tau\wedge 1} &= \exp\Big(W_{\tau\wedge 1}^0 - \tau\wedge 1 + \frac{1}{2}\Big) - \exp\Big(W_{\tau\wedge 1}^0 - \frac{1}{2}\,(\tau\wedge 1)\Big) \\ &= \Big(e^{-\tau-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{\tau}{2}-1}\Big)\,1_{\{\tau<1\}} \\ &= e^{-\tau-1}\,\Big(e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{\tau}{2}}\Big)\,1_{\{\tau<1\}}. \end{aligned}$$

Auf der Menge $\{\tau < 1\}$ ist $Y_1 - Y_{\tau\wedge 1}$ also eine positive, monoton fallende Funktion f von τ. Diese Funktion ist zwar stets kleiner als Eins, kann aber natürlich durch

Multiplikation mit einer Konstante so verändert werden, daß sie auf einer Menge mit positivem Maß mindestens Eins ist. Wir setzen daher

$$c := \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{e^{-1} - e^{-\frac{5}{4}}}. \tag{6.2}$$

Damit ist

$$Z := c\,(Y_1 - Y_{\tau\wedge 1}) \geq 1_{\left\{\tau \leq \frac{1}{2}\right\}} \tag{6.3}$$

Wenn wir also Z durch die Werte $V_1(x^n, \xi^n)$ einer Folge von Strategien $(x^n, \xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ approximieren können, haben wir unsere asymptotische Arbitragemöglichkeit gefunden, sofern die übrigen Bedingungen der Definition erfüllt sind. Dazu weisen wir zunächst nach, daß $\tau \wedge 1$ eine $\mathcal{F}^1$-Stoppzeit und damit für jedes n eine $\mathcal{F}^n$-Stoppzeit ist. Denn es ist $\tau \leq t$ für ein $t \in [0, 1)$ genau dann, wenn

$$\lim_{h \to 0, h > 0} \frac{\langle \log(X^1) \rangle_{t+h} - \langle \log(X^1) \rangle_t}{h} = 1$$

ist, da nach τ nur noch W^1 und nicht mehr W^0 zur quadratischen Variation beiträgt. Da die Filtrierung $\mathcal{F}^1$ nach Voraussetzung rechtsstetig ist, ist somit $\tau \wedge 1$ eine $\mathcal{F}^1$-Stoppzeit. Damit ist das stochastische Intervall $]\!]\tau \wedge 1, 1]\!]$ $\mathcal{F}^n$-previsibel und wir können Z wie folgt approximieren: Es ist mit c wie in (6.2)

$$\begin{aligned} c\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_1^k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{\tau\wedge 1}^k\right) &= \frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_1^k - X_{\tau\wedge 1}^k) \\ &= \int_0^t \widetilde{\xi}_s^n \, d(X_s^1, \ldots, X_s^n) \end{aligned}$$

mit $\widetilde{\xi}^n = 1_{]\!]\tau\wedge 1, 1]\!]} \left(\frac{c}{n}, \ldots, \frac{c}{n}\right)$. Mit den oben gemachten Konvergenzaussagen erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \widetilde{\xi}_t^n \, d(X_t^1, \ldots, X_t^n) = c\,(Y_1 - Y_{\tau\wedge 1}) = Z. \tag{6.4}$$

Diese Folge von Strategien mit Starteinsatz 0 erfüllt somit nach (6.3) zwar die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} P\Big[V_1(0, \widetilde{\xi}^n) \geq 1\Big] > 0,$$

stellt aber noch keine Arbitragemöglichkeit der ersten Art dar. Denn die Bedingung, daß P-fast sicher $V_t(0, \widetilde{\xi}^n) \geq 0$ sein soll, ist verletzt, weil auf der Menge $\{\tau < 1\}$ $V_\tau(0, \widetilde{\xi}^n) = 0$ ist und der Wertprozeß ab dann der Entwicklung der Mittelwerte folgt. Aufgrund der Oszillation des Prozesses der Mittelwerte wird die Null sofort unterschritten. Wir müssen unsere Strategien daher noch etwas modifizieren. Wir schätzen daher zunächst die Wahrscheinlichkeit ab, daß $V_t(0, \widetilde{\xi}^n)$

eine gegebene Schranke unterschreitet. Da der Prozeß Y auf $]\!]\tau \wedge 1, 1]\!]$ monoton wächst, gilt auf der Menge $\{\tau < t\}$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} V_t(0, \widetilde{\xi}^n) &= \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} (X_t^k - X_\tau^k) \\ &= \frac{c}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(Y_t \exp\Big(W_t^k - \frac{1}{2}\, t \Big) - Y_\tau \exp\Big(W_\tau^k - \frac{1}{2}\, \tau \Big) \Big) \\ &\geq \frac{c}{n}\, Y_t \sum_{k=1}^{n} \Big(\exp\Big(W_t^k - \frac{1}{2}\, t \Big) - \exp\Big(W_\tau^k - \frac{1}{2}\, \tau \Big) \Big) . \end{aligned}$$

Wir interessieren uns hier nur für die Menge, auf der $V_t(0, \widetilde{\xi}^n)$ negativ ist (dort ist auch $\tau < t$, da $V_t(0, \widetilde{\xi}^n)$ bis τ gleich 0 ist). Dort können wir Y_t durch sein Supremum $e^{-\frac{1}{2}}$ abschätzen und erhalten

$$V_t(0, \widetilde{\xi}^n) \geq \frac{\widetilde{c}}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(\exp\Big(W_t^k - \frac{1}{2}\, t \Big) - \exp\Big(W_\tau^k - \frac{1}{2}\, \tau \Big) \Big)$$

mit

$$\widetilde{c} := c\, e^{-\frac{1}{2}}$$

Mit

$$M_t^n := \exp\Big(W_t^n - \frac{1}{2}\, t \Big)$$

ist damit auf $\Big\{ V_t(0, \widetilde{\xi}^n) < 0 \Big\}$

$$\begin{aligned} V_t(0, \widetilde{\xi}^n) &\geq \frac{\widetilde{c}}{n} \sum_{k=1}^{n} \Big(M_t^k - M_{\tau\wedge 1}^k \Big)\, 1_{]\!]\tau\wedge 1, 1]\!]}(t) \\ &= \frac{\widetilde{c}}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_0^t 1_{]\!]\tau\wedge 1, 1]\!]}(s)\, dM_s^k \end{aligned} \tag{6.5}$$

Die rechte Seite ist ein Martingal, ihr Quadrat daher ein Submartingal. Auf dieses Submartingal wollen wir die Maximalungleichung (siehe z.B. Theorem 3.8(i) in Kapitel 1 von [KS88]) anwenden. Dazu brauchen wir den Erwartungswert im Endzeitpunkt 1. Es ist für jedes k

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P\Big[\Big(\int_0^1 1_{]\!]\tau\wedge 1, 1]\!]}(t)\, dM_t^k \Big)^2 \Big] &= \mathrm{E}_P\Big[\int_0^1 1_{]\!]\tau\wedge 1, 1]\!]}(t)\, d\big\langle M^k \big\rangle_t \Big] \\ &\leq \mathrm{E}_P\Big[\big\langle M^k \big\rangle_1 \Big] \\ &= \mathrm{Var}_P\Big(M_1^k \Big) \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\mathrm{E}_P\Big[\Big(M_1^k\Big)^2\Big] = \mathrm{E}_P\Big[\exp\Big(W_1^k - \frac{1}{2}\Big)^2\Big] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x-1}\phi(x)\,dx = e,$$

wobei ϕ die Dichte der Standard-Normalverteilung ist. Somit gilt für die Varianz von M_1^k

$$\mathrm{Var}_P\Big(M_1^k\Big) = e - 1.$$

Damit ist wegen der Unabhängigkeit der Summanden

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left[\left(\frac{\widetilde{c}}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t 1_{]\!]\tau\wedge 1,1]\!]}(s)\,dM_s^k\right)^2\right] &= \frac{\widetilde{c}^2}{n}\mathrm{E}_P\left[\left(\int_0^t 1_{]\!]\tau\wedge 1,1]\!]}(s)\,dM_s^1\right)^2\right] \\
&\leq \frac{\widetilde{c}^2}{n}\,\mathrm{Var}_P\Big(M_1^1\Big) \\
&= \frac{\widetilde{c}^2\,(e-1)}{n}.
\end{aligned}$$

Die Maximalungleichung besagt dann, daß

$$P\left[\sup_{t\in[0,1]}\left(\frac{\widetilde{c}}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t 1_{]\!]\tau\wedge 1,1]\!]}(s)\,dM_s^k\right)^2 \geq n^{-\frac{1}{2}}\right] \leq \frac{\widetilde{c}^2\,(e-1)}{n^{\frac{1}{2}}}$$

ist. Damit ist

$$P\left[\inf_{t\in[0,1]}\left(\frac{\widetilde{c}}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^t 1_{]\!]\tau\wedge 1,1]\!]}(s)\,dM_s^k\right) \leq -n^{-\frac{1}{4}}\right] \leq \frac{\widetilde{c}^2\,(e-1)}{n^{\frac{1}{2}}}$$

und somit nach Abschätzung (6.5) auch

$$P\left[\inf_{t\in[0,1]} V_t(0,\widetilde{\xi}^n) \leq -n^{-\frac{1}{4}}\right] \leq \frac{\widetilde{c}^2\,(e-1)}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Setzen wir also

$$T_n := \inf\Big\{t\in[0,1] : V_t(0,\widetilde{\xi}^n) \leq -n^{-\frac{1}{4}}\Big\} \wedge 1,$$

so ist

$$V_{t\wedge T_n}(0,\widetilde{\xi}^n) \geq -n^{-\frac{1}{4}}$$

für alle $t\in[0,1]$ P-fast sicher, und es gilt:

$$P[T_n < 1] \leq \frac{\widetilde{c}^2\,(e-1)}{n^{\frac{1}{2}}}. \tag{6.6}$$

Setzen wir

$$\xi^n = 1_{]\!]0,T_n]\!]}\,\widetilde{\xi}^n = \frac{c}{n}\,1_{]\!]\tau\wedge 1,T_n]\!]}\,(1,\ldots,1),$$

für $n = 1, 2, \ldots$, und

$$x^n = n^{-\frac{1}{4}}$$

so ist

$$V_t(x^n,\xi^n) = n^{-\frac{1}{4}} + V_{t\wedge T_n}(0,\widetilde{\xi}^n) \geq 0$$

für alle $t \in [0,1]$ P-fast sicher. Da die x^n für n gegen unendlich gegen Null gehen und $V_1(x^n,\xi^n) = V_1(x^n,\widetilde{\xi}^n)$ auf $\{T_n = 1\}$ ist, konvergiert wegen (6.6) $V_1(x^n,\xi^n)$ stochastisch gegen den Limes der $V_1(0,\widetilde{\xi}^n)$. Es ist also nach Gleichung (6.4) und Abschätzung (6.3)

$$\lim_{n\to\infty} V_1(x^n,\xi^n) = Z \geq 1_{\{\tau\leq\frac{1}{2}\}}.$$

Damit liefert die Folge $(x^n,\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Arbitragemöglichkeit erster Art.

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß auf jeder der σ-Algebren $\mathcal{F}_1^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, unter dem jeweils die Prozesse $X^1,\ldots,X^n$ Martingale sind. Vorab weisen wir darauf hin, daß $X^1, X^2, \ldots$ unter P bereits Martingale bis zur Stoppzeit τ sind. Anwenden der Itôformel auf die Definition (6.1) ergibt die Dynamik

$$\begin{aligned}\frac{dX_t^n}{X_t^n} &= dW_t^n + dW_{t\wedge\tau}^0 - 1_{[\![0,\tau]\!]}(t)\,dt + \frac{1}{2}\,dt + \frac{1}{2}\,1_{[\![0,\tau]\!]}(t)\,dt \\ &= dW_t^n + dW_{t\wedge\tau}^0 + \frac{1}{2}\,1_{]\!]\tau,1]\!]}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Somit ist ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q^n auf $\mathcal{F}_1^n$, unter dem die Brownschen Bewegungen $W^1,\ldots,W^n$ die Dynamik

$$dW_t^k = d\widetilde{W}_t^k - \frac{1}{2}\,1_{]\!]\tau,1]\!]}(t)\,dt$$

$(k = 1,\ldots,n)$ haben, wobei die Prozesse $\widetilde{W}^1,\ldots,\widetilde{W}^n$ unabhängige Brownsche Bewegungen unter Q^n sind, ein Martingalmaß für $X^1,\ldots,X^n$, sofern die Dynamik von Y invariant unter Wechsel von P zu Q^n ist. Die Dichte von Q^n erhalten wir durch eine Girsanov-Transformation. Es ist

$$\begin{aligned}D^n &:= \frac{dQ^n}{dP}\,|\mathcal{F}_1^n \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^1 1_{]\!]\tau,1]\!]}(t)\,dW_t^k - \frac{n}{8}\int_0^1 1_{]\!]\tau,1]\!]}(t)\,dt\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(W_{\tau\wedge 1}^k - W_1^k\right) - \frac{n}{8}\,(1-\tau\wedge 1)\right).\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist $\mathcal{F}_1^n$-meßbar, da für jedes $k = 1, \ldots, n$ X^k auf $]\!]\tau, 1]\!]$ die Gestalt

$$X_t^k = \exp\Big(W_t^k + \tau - 1\Big)$$

hat, da $W_\tau^0 = -1$ ist. Da τ eine $\mathcal{F}^n$-Stoppzeit ist, ist somit $W_t^k \, 1_{]\!]\tau,1]\!]}(t)$ $\mathcal{F}_t^n$-meßbar. Nur dieser Teil von W^k geht in D^n ein. Da D^n ein Produkt von geometrischen Brownschen Bewegungen, ausgewertet in $\tau \wedge 1$ und 1 ist, ist auch die Bedingung $\mathrm{E}_P[D^n] = 1$ erfüllt. Es ist $D^n = 1$ auf $\{\tau \geq 1\}$. Auf dieser Menge sind also P und Q^n identisch. Die Dichten D^n konvergieren jedoch nicht gegen die Dichte eines zu P global absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaßes, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log(D^n) \quad &= \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(W_{\tau\wedge 1}^k - W_1^k\right) - \frac{1}{8}\left(1 - \tau \wedge 1\right) \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{8}\left(\tau \wedge 1 - 1\right) \end{aligned}$$

P-fast sicher nach dem starken Gesetz der großen Zahlen. Da $\frac{1}{8}\left(\tau \wedge 1 - 1\right)$ auf $\{\tau < 1\}$ negativ ist, konvergiert D^n dort gegen Null. Damit gilt

$$\lim_{n\to\infty} D^n = 1_{\{\tau \geq 1\}}$$

P-fast sicher. Hier geht also im Limes Masse verloren.

6.2 Arbitrage der zweiten Art

Die Modellierung des zweiten Beispiel ist eng verwandt mit der Konstruktion eines Bessel-Prozesses via Maßwechsel, wie sie in [DS95] durchgeführt wird. Wir beginnen dabei mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem die gewählten Preisprozesse bereits Martingale sind, und wechseln dann zu einem absolutstetigen Maß, unter dem es eine Arbitragemöglichkeit der zweiten Art gibt.

Wir verwenden denselben filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq 1}, P)$ und dieselbe stochastische Basis aus unabhängigen Brownschen Bewegungen wie im vorigen Beispiel, beginnen die Numerierung der Brownschen Bewegungen jedoch mit Eins statt mit Null. Somit sind unsere Basisprozesse $((W_t^1)_{0\leq t\leq 1}, (W_t^2)_{0\leq t\leq 1}, \ldots)$. Unsere Preisprozesse $X^1, X^2, \ldots$ definieren wir hier durch

$$X_t^n = \exp\Big(W_t^n - \frac{1}{2}\,t\Big) \tag{6.7}$$

für $t \in [0,1]$. Offensichtlich ist P ein Martingalmaß für alle X^n. Als nächstes konstruieren wir ein zu P absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q, welches dann das Referenzmaß unseres Modells werden soll. Dazu setzen wir für $t \in [0,1]$

$$Y_t := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} W_t^n. \tag{6.8}$$

Y ist ebenfalls ein P-Martingal mit quadratischer Variation

$$\langle Y \rangle_t = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, t = t,$$

also eine Brownsche Bewegung mit Start in Eins. Setzen wir

$$\tau := \inf \{t \in [0,1] : Y_t \leq 0\}$$

(mit $\inf \emptyset = \infty$), so ist

$$D_t := Y_{t \wedge \tau}$$

($t \in [0,1]$) ein nicht-negatives P-Martingal mit Start in 1. Da

$$P[D_1 > 0] = P[\tau > 1] > 0$$

ist, wird durch

$$\frac{dQ}{dP} := D_1$$

ein zu P absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß Q definiert. Dieses wählen wir als Referenzmaß für unser Modell. Für jedes $n = 1, 2, \ldots$ sei $(\mathcal{F}_t^n)_{0 \leq t \leq 1}$ wieder die von den Prozessen $X^1, \ldots, X^n$ erzeugte rechtsstetige Filtrierung, die hier dieselbe ist wie die von $W^1, \ldots, W^n$ erzeugte. Wir zeigen zunächst, daß für alle n das Maß P auf $\mathcal{F}_1^n$ zu Q äquivalent ist, es somit auf $\mathcal{F}_1^n$ ein zu Q äquivalentes Martingalmaß für $(X^1, X^2, \ldots, X^n)$ gibt. Damit existiert für je endlich viele der Prozesse X^n $(n = 1, 2, \ldots)$ keine Arbitragemöglichkeit. Anschließend zeigen wir, daß in diesem Modell eine asymptotische Arbitragemöglichkeit der zweiten Art existiert.

Beginnen wir also mit dem Nachweis, daß P auf $\mathcal{F}_1^n$ äquivalent zu Q ist: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_1^n} &= \mathrm{E}_P[D_1 \,|\, \mathcal{F}_1^n] \\ &= \mathrm{E}_P\Big[Y_1\, 1_{\{\tau \geq 1\}} \,\Big|\, \mathcal{F}_1^n\Big], \end{aligned}$$

da $D_1 = 0$ auf $\{\tau \leq 1\}$ und $D_1 = Y_1$ auf dem Komplement ist. Weiter ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\Big[Y_1\, 1_{\{\tau>1\}} \,\Big|\, \mathcal{F}_1^n\Big] &= 1 + \mathrm{E}_P\left[\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_1^k\, 1_{\{\tau>1\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_1^n\right] \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_1^k\, P\Big[1_{\{\tau>1\}} \,\Big|\, \mathcal{F}_1^n\Big] \qquad (6.9) \\
&\quad + \mathrm{E}_P\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_1^k\, 1_{\{\tau>1\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_1^n\right].
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\tau &= \inf\left\{t \in [0,1] : \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k \leq -1\right\} \\
&= \inf\left\{t \in [0,1] : \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k \leq -1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k\right\},
\end{aligned}$$

somit ist

$$\{\tau > 1\} = \left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k > -1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k \text{ für alle } t \in [0,1]\right\}. \qquad (6.10)$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Brownschen Bewegungen ist daher für P-fast alle $\omega \in \Omega$

$$P[\tau \geq 1 \,|\, \mathcal{F}_1^n]\,(\omega) = P\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k > -1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k(\omega) \text{ für alle } t \in [0,1]\right] > 0.$$

Aus (6.10) folgt außerdem:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k\, 1_{\{\tau>1\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_1^n\right](\omega) \\
&= \mathrm{E}_P\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k\, 1_{\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k > -1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k \text{ für alle } t\in[0,1]\right\}}\right] \\
&> \left(-1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k(\omega)\right) P\left[\sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k > -1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k(\omega) \text{ für alle } t \in [0,1]\right] \\
&= \left(-1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-\frac{k}{2}} W_t^k(\omega)\right) P[\tau \geq 1 \,|\, \mathcal{F}_1^n]\,(\omega)
\end{aligned}$$

für P-fast alle $\omega \in \Omega$. Damit haben wir gezeigt, daß beide Terme in (6.9) P-fast sicher nicht 0 sind, und der zweite Term größer als das Negative des ersten ist. Somit ist

$$\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_1^n > 0$$

P-fast sicher. Damit sind P und Q äquivalent auf $\mathcal{F}_1^n$. Da jedes der Teilmodelle $(X^1, \ldots, X^n)$ vollständig bezüglich $\mathcal{F}^n$ ist, ist P das einzige zu Q auf $\mathcal{F}_1^n$ äquivalente Martingalmaß für $X^1, \ldots, X^n$. Da Q global nur absolutstetig zu P ist, gibt es kein äquivalentes Martingalmaß auf $\mathcal{F}_1$ für alle Prozesse $X^1, X^2, \ldots$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß es in diesem Modell eine Arbitragemöglichkeit zweiter Art gibt. Es ist $P[D_1 = 0] = P[\tau \leq 1] > 0$, aber $Q[D_1 = 0] = 0$, da D_1 ja gerade die Dichte von Q zu P ist. Daher gilt für die Zufallsvariable

$$V := 1_{\{D_1 > 0\}} - \alpha\, 1_{\{D_1 \leq 0\}} = 1_{\{\tau > 1\}} - \alpha\, 1_{\{\tau \leq 1\}}$$

mit

$$\alpha := \frac{P[\tau > 1]}{P[\tau \leq 1]},$$

daß Q-fast sicher $V = 1$, aber $\mathrm{E}_P[V] = 0$ ist. Daraus leiten wir eine asymptotische Arbitragemöglichkeit wie folgt ab: Wir definieren für alle n und $t \in [0, 1]$

$$V_t^n := \mathrm{E}_P[2\,V \mid \mathcal{F}_t^n]\,.$$

Damit ist $\mathrm{E}_P[V_1^n] = 0$. Da die endlichdimensionalen Teilmodelle vollständig sind, existiert für jedes n ein $\mathcal{F}^n$-previsibler n-dimensionaler Prozeß ξ^n, so daß

$$V_t^n = V_t(0, \xi^n) = \int_0^t \xi_s^n \, d(X_s^1, \ldots, X_s^n)$$

für alle $t \in [0, 1]$ P-fast sicher und damit Q-fast sicher gilt. Da $V \geq -\alpha$ ist, ist auch

$$V_t(0, \xi^n) = \mathrm{E}_P[2\,V \mid \mathcal{F}_t^n] \geq -2\,\alpha$$

für alle $t \in [0, 1]$ P- und Q-fast sicher. Außerdem konvergiert $V_1(0, \xi^n)$ P-fast sicher und in $L^1(P)$ gegen

$$\mathrm{E}_P\left[2\,V \mid \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_1^n\right)\right] = \mathrm{E}_P[2\,V \mid \mathcal{F}_1] = 2\,V.$$

Damit konvergiert $V_1(0, \xi^n)$ insbesondere Q-stochastisch gegen $2\,V = 2$ Q-fast sicher. Daher gilt:

$$Q[|V_1(0, \xi^n) - 2| \geq 1] \stackrel{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

und insbesondere

$$Q[V_1(0,\xi^n) \geq 1] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

(deshalb haben wir noch den Faktor 2 eingeführt). Damit realisiert $(0,\xi^n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Arbitragemöglichkeit zweiter Art.

Wir haben oben gesehen, daß es auf jeder der σ-Algebren $\mathcal{F}_1^n$ jeweils genau ein zu Q äquivalentes Martingalmaß für die Prozesse $X^1,\ldots,X^n$ gibt. Diese Maße sind gerade die Einschränkungen von P auf $\mathcal{F}^n$ für jedes n. Global ist Q jedoch nur absolutstetig zu P. Wie wir in Satz 5.8 gesehen haben[1], garantiert diese Absolutstetigkeit die Abwesenheit von asymptotischer Arbitrage der ersten Art. Unser Beispiel stellt daher eine Situation dar in der es asymptotische Arbitrage der zweiten, nicht jedoch der ersten Art gibt.

[1]Dort sind die Rollen von P und Q vertauscht.

Kapitel 7

Optionale Zerlegung und Superhedging

In einem unvollständigen Finanzmarkt lässt sich nicht jeder contingent claim mit einer selbstfinanzierenden Investitionsstrategie reduplizieren. Zur Absicherung ist es natürlich hinreichend, wenn man durch die benutzte Strategie im Fälligkeitszeitpunkt des contingent claims nicht genau den Wert desselben erarbeitet hat, sondern einen Betrag, der mindestens so hoch ist. Man kann sich daher die Frage stellen, welches minimale Startkapital nötig ist, um eine Strategie zu ermöglichen, deren Wert bei Fälligkeit eines gegebenen contingent claims C diesen P-fast sicher dominiert. In endlich-dimensionalen Modellen gibt das Optional Decomposition Theorem eine Antwort auf diese Frage. Es garantiert zu einem contingent claim C für

$$V_t := \operatorname*{ess.\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C \,|\, \mathcal{F}_t]$$

eine Zerlegung

$$V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s - A_t,$$

mit einer previsiblen Strategie ξ und einem wachsenden Prozeß A, der im Unterschied zur Doob-Meyer-Zerlegung nicht notwendig previsibel, jedoch meßbar bezüglich der optionalen, also von allen càdlàg-Prozessen erzeugten, σ-Algebra ist. Insbesondere ist

$$C = V_0 + \int_0^T \xi_s \, dX_s - A_T.$$

Das bedeutet, daß sich C wenn auch nicht unbedingt replizieren, so doch zumindest durch eine previsible Strategie ξ absichern lässt (Superhedging). Der dafür

benötigte minimale Einsatz ist

$$V_0 = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C] \,.$$

Dieses Resultat wurde zuerst von El Karoui und Quenez in [EKQ95] für spezielle Prozesse (Lösungen einer stochastischen Differentialgleichung bezüglich einer Brownschen Bewegung) hergeleitet. Dies wurde von Kramkov in [Kra96] auf lokal beschränkte Semimartingale und von Föllmer und Kabanov ([FK98]) auf beliebige Semimartingale verallgemeinert.

Im unendlich-dimensionalen Modell genügt dieser Betrag V_0 im allgemeinen nicht mehr, um eine Superhedging-Strategie zu finanzieren. Wir erinnern dazu an das Beispiel in Abschnitt 4.1, in dem ein diskretes Finanzmarktmodell mit unendlich vielen Wertpapieren betrachtet wurde. In diesem Modell existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß, es ist aber trotzdem nicht vollständig, ja es konnte sogar ein konkreter contingent claim angegeben werden, für den es zu keinem endlichen Startpreis eine Superhedging-Strategie gibt. In speziellen Situationen, in denen die zugrundeliegende Filtrierung nur stetige Martingale zuläßt, gilt das Optional Decomposition Theorem aber auch im unendlichdimensionalen Kontext, wie wir in Abschnitt 7.1 zeigen.

7.1 Existenz der optionalen Zerlegung bei Brownscher Filtrierung

Wie wir gesehen haben, ist eine optionale Zerlegung im unendlich-dimensionalen Modell im allgemeinen nicht möglich. Unter speziellen Anforderungen an die zugrundeliegende Filtrierung lässt sich jedoch trotzdem eine Version des Optional Decomposition Theorems für unendlich-dimensionale Prozesse beweisen. Die Vorgehensweise beruht auf einer Idee von Jacka für die endlich-dimensionale Situation, die wiederum eng mit der in [EKQ95] benutzten Methode verwandt ist. Wir wollen nun das Modell für diesen Abschnitt aufstellen. Dabei nehmen wir wieder an, daß es mindestens ein Martingalmaß für X gibt und setzen dieses Maß als Referenzmaß.

Sei X ein (lokal) quadratisch integrierbares Martingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ mit Werten in einem separablen Hilbertraum H und stetigen Pfaden. $\mathcal{P}$ sei die Menge aller zu P äquivalenten Maße, unter denen X ein lokales Martingal ist.

Annahme: Die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ auf Ω habe jetzt zusätzlich die Eigenschaft, daß jedes $\mathcal{F}_t$-adaptierte lokale reellwertige Martingal P-fast sicher stetige Pfade hat.

Bemerkung 7.1 Die Annahme ist zum Beispiel erfüllt, falls $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ von einer stetigen Hilbertraum-wertigen Brownschen Bewegung W auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, P)$ mit Covarianzoperator C erzeugt wird.

Beweis: Nach Bemerkung 2.6 ist die Verteilung von W durch die Martingaleigenschaft und die $\otimes$-quadratische Variation eindeutig bestimmt. Da die $\otimes$-quadratische Variation invariant unter dem Wechsel zu einem äquivalenten Maß ist, muß die Verteilung von W unter einem zu P äquivalenten Martingalmaß Q für W mit der Verteilung von W unter P übereinstimmen. Da W aber die Filtrierung erzeugt, muß Q gleich P sein (zumindest auf $\mathcal{F}_\infty := \sigma\left(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{F}_t\right)$). Damit ist P das eindeutige Martingalmaß für W und W besitzt nach Satz 4.3 die Darstellungseigenschaft. Da stochastische Integralprozesse einer stetigen Brownschen Bewegung aber selber stetige Pfade besitzen, hat jedes lokale $\mathcal{F}_t$-adaptierte Martingal P-fast sicher stetige Pfade.

□

Der Beweis unserer Version des Satzes über optionale Zerlegungen beruht unter anderem auf der Tatsache, daß unter den oben gemachten Annahmen ein Prozeß $(M_t)_{t\geq 0}$ als stochastisches Integral von X dargestellt werden kann, wenn M unter allen $Q \in \mathcal{P}$ ein lokales Martingal ist. Diese Aussage beweisen wir im folgenden Lemma:

Lemma 7.2 *Unter den Modellannahmen dieses Abschnittes gilt: Ist ein reellwertiger stochastischer Prozeß $(M_t)_{t\geq 0}$ unter allen Maßen $Q \in \mathcal{P}$ ein lokales Martingal, so existiert ein previsibler Prozeß $(\xi_t)_{t\geq 0} \in \Lambda^2_{loc}(X)$, so daß*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s$$

für alle $t \geq 0$ P-fast sicher.

Beweis: Da aufgrund der Stetigkeit von X M bezüglich X darstellbar ist, wenn es bis zu jeder Stoppzeit T darstellbar ist, für die der bei T gestoppte Prozeß X

ein quadratisch integrierbares und in $L^2(P)$ konvergentes Martingal ist, können wir annehmen, daß X selbst bereits quadratisch integrierbar ist und einen Limes X_∞ in $L^2(P)$ besitzt. Da M nach der Voraussetzung des Lemmas selbst insbesondere ein lokales P-Martingal ist, können wir uns mit analoger Argumentation auf den Fall zurückziehen, daß auch M ein quadratisch integrierbares und in $L^2(P)$ konvergentes Martingal ist. Wir können sogar fordern, daß M gleichmäßig beschränkt ist, da aufgrund der Stetigkeit der Pfade die Austrittszeiten von M aus den Intervallen $[-n, n]$, $n = 1, 2, \ldots$ eine lokalisierende Folge von Stoppzeiten für M sind. O.B.d.A. sei daher $M_t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ für alle $t \geq 0$ P-fast sicher. Außerdem sei $M_0 = 0$. M besitzt eine Kunita-Watanabe-Zerlegung

$$M_t = \int_0^t \xi_s \, dX_s + N_t$$

in ein stochastisches Integral mit Integrator X und einen zum Raum der stochastischen Integrale mit X orthogonalen Anteil N_t. Insbesondere ist

$$N_\infty := \lim_{t \to \infty} N_t$$

(der Limes existiert in $L^2(P)$ aufgrund der der Konvergenz von M) orthogonal in $L^2(P)$ zum Raum aller stochastischen Integrale der Form

$$\int_0^\infty \eta_s \, dX_s \in L^2(P).$$

Um die Aussage des Lemmas zu zeigen, müssen wir nachweisen, daß $N_\infty = 0$ P-fast sicher ist. Dazu nehmen wir o.B.d.A an, daß $M_\infty = N_\infty$, M selbst also nur aus dem orthogonalen Anteil besteht. Da wir angenommen haben, daß $M_t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ für alle $t \geq 0$ ist, gilt dies auch für M_∞. Da außerdem $\mathrm{E}_P[M_\infty] = 0$ ist, wird durch

$$\frac{dQ}{dP} := 1 + M_\infty$$

ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß Q definiert. Wir zeigen jetzt, daß Q ein Martingalmaß für X ist. Sei dazu $A \in \mathcal{F}_t$ und

$$1_A = f + g$$

die Kunita-Watanabe-Zerlegung von 1_A in einen mit X darstellbaren Anteil der Form

$$f = P(A) + \int_0^\infty \eta_s^A \, dX_s$$

und orthogonalen Anteil g mit $\mathcal{F}_\infty$-meßbaren Abbildungen f und g ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_Q[1_A\, X_\infty] - \mathrm{E}_P[1_A\, X_\infty] &= \mathrm{E}_P[1_A\, X_\infty\, M_\infty] \\ &= \mathrm{E}_P[f\, X_\infty\, M_\infty] + \mathrm{E}_P[X_\infty\, g\, M_\infty] \\ &= 0, \end{aligned}$$

da $f\, X_\infty$ orthogonal zu M_∞ und X_∞ orthogonal zu $g\, M_\infty$ ist. Weil $A \in \mathcal{F}_t$ beliebig war, folgt

$$\mathrm{E}_Q[\, X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t] = \mathrm{E}_P[\, X_\infty \,|\, \mathcal{F}_t]$$

für alle $t \geq 0$. Damit ist Q auch ein Martingalmaß für X. Unter Q ist nun

$$\mathrm{E}_Q[M_\infty] = \mathrm{E}_P[M_\infty] + \mathrm{E}_P\Big[M_\infty^2\Big]\,.$$

Da M_t und damit M_∞ aber unter allen Maßen $Q \in \mathcal{P}$ denselben Erwartungswert haben sollen, muß M_∞ Q-fast sicher und damit P-fast sicher gleich Null sein. Damit ist die Behauptung des Lemmas gezeigt.

□

Ein Grund, warum die im Lemma gemachte Aussage in dem hier betrachteten Modell zutrifft, ist die Tatsache, daß die Art der Konstruktion des stochastischen Integrals, wie wir sie in Abschnitt 2.3 ausgeführt haben, sicherstellt, daß der Raum aller stochastischen Integrale, die in $L^2(P)$ liegen, ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(P)$ ist und wir deshalb eine orthogonale Zerlegung, wie oben betrachtet, vornehmen können. Das Fehlen dieser Abgeschlossenheit war genau der Grund, warum es in dem in Abschnitt 4.1 untersuchten Beispiel keine Darstellung des dort betrachteten contingent claims C gab, obwohl nur ein Martingalmaß existierte.

Da wir die optionale Zerlegung von $\mathcal{F}_t$-meßbaren $(0 \leq t < \infty)$ Zufallsvariablen herleiten wollen, fixieren wir jetzt einen Zeithorizont $T < \infty$ und nehmen an, daß $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ ist. Dem entspricht ein Stoppen von X in T. In die optionale Zerlegung gehen essentielle Suprema von bedingten Erwartungen über alle äquivalenten Martingalmaße ein. Daher müssen wir die Menge $\mathcal{P}$ genauer betrachten. Ein Maß $Q \in \mathcal{P}$ ist durch seine Dichte zu P (auf $\mathcal{F}_T$) eindeutig bestimmt. Wir betrachten daher im folgenden die Prozesse der lokalen Dichten $\left(\frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_t\right)_{0\leq t\leq T}$ und beschreiben sie als exponentielle Martingale.

Für ein lokales P-Martingal Y mit Werten in $\mathbb{R}$ und stetigen Pfaden sei

$$\mathcal{E}(Y)_t := \exp\left(Y_t - \frac{1}{2}\,\langle Y\rangle_t\right)$$

das stochastische Exponential von Y. Weiter sei $\mathcal{Y}$ die Menge aller solchen lokalen Martingale Y, so daß $(\mathcal{E}(Y)_t\, X_t)_{t\geq 0}$ ein lokales P-Martingal ist.

Bemerkung 7.3 $\mathcal{Y}$ ist die Menge aller stetigen, reellwertigen lokalen Martingale Y mit der Eigenschaft, daß $\langle \mathcal{E}(Y), X\rangle \equiv 0$ ist, da

$$d(\mathcal{E}(Y)\, X) = \mathcal{E}(Y)\, dX + X\, d\mathcal{E}(Y) + \langle \mathcal{E}(Y), X\rangle$$

das Differential eines lokalen Martingals ist und $\mathcal{E}(Y)$ und X lokale Martingale sind. Die H-wertige Covariation $\langle \mathcal{E}(Y), X\rangle$ ist dabei so zu verstehen: Für jedes $h \in H$ ist

$$\langle h, \langle \mathcal{E}(Y), X\rangle_t\rangle_H = \langle \mathcal{E}(Y), \langle h, X\rangle_H\rangle_t\,,$$

wobei auf der rechten Seite die übliche reelle Covariation steht. Hieraus ergibt sich, daß für $Y \in \mathcal{Y}$ auch $\alpha Y \in \mathcal{Y}$ ist ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Das folgende Lemma stellt eine Beziehung zwischen $\mathcal{Y}$ und der Menge $\mathcal{P}$ der äquivalenten Martingalmaße für X her:

Lemma 7.4 *Sei $\mathcal{Y}_0 = \{Y \in \mathcal{Y} \mid \mathcal{E}(Y)$ ist echtes Martingal$\}$. Dann gilt:*

i) $\{\mathcal{E}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}_0\} = \left\{ \dfrac{dQ}{dP} \;\middle|\; Q \in \mathcal{P} \right\}$.

ii) Für $\mathcal{F}_T$-meßbares nicht-negatives C mit $\sup_{Q\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C] < \infty$ ist

$$\operatorname*{ess.\,sup}_{Q\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C \mid \mathcal{F}_t] = \operatorname*{ess.\,sup}_{Y\in\mathcal{Y}} \frac{\mathrm{E}_P[C\, \mathcal{E}(Y)_T \mid \mathcal{F}_t]}{\mathcal{E}(Y)_t}.$$

Beweis: Zu Teil i): Ist $\mathcal{E}(Y)$ ein echtes Martingal, so ist es der Prozeß sukzessiver Dichten eines zu P äquivalenten Maßes Q auf $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Da $\mathcal{E}(Y)\, X$ ein lokales P-Martingal ist, ist X ein lokales Martingal unter Q. Umgekehrt ist der Dichteprozeß

$$G_t = \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_t$$

als stetiges, strikt positives Martingal das stochastische Exponential von

$$Y_t = \int_0^t \frac{1}{G_s}\, dG_s.$$

Zu Teil ii): Zunächst zeigen wir, daß $\mathcal{Y}$ stabil unter Stoppen ist, das heißt, aus $Y \in \mathcal{Y}$ folgt, daß für jede Stoppzeit τ auch der gestoppte Prozeß $Y_t^\tau := Y_{t\wedge\tau}$ in $\mathcal{Y}$ liegt. Dies gilt, wenn $\mathcal{E}(Y^\tau)\,X = \mathcal{E}(Y)^\tau\,X$ wieder ein lokales P-Martingal ist. Es genügt, den Fall zu betrachten, daß X und $\mathcal{E}(Y)\,X$ echte P-Martingale sind. Das allgemeine Resultat folgt dann durch Lokalisierung. Für eine beschränkte Stoppzeit S gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P[\mathcal{E}(Y)_S^\tau\,X_S] &= \mathrm{E}_P[\mathcal{E}(Y)_{S\wedge\tau}\,X_S] \\
&= \mathrm{E}_P[\mathcal{E}(Y)_{S\wedge\tau}\,\mathrm{E}_P[X_S\,|\,\mathcal{F}_{S\wedge\tau}]] \\
&= \mathrm{E}_P[\mathcal{E}(Y)_{S\wedge\tau}\,X_{S\wedge\tau}] \quad (X \text{ ist } P\text{-Martingal}) \\
&= \mathrm{E}_P[\mathcal{E}(Y)_0\,X_0] \quad (\mathcal{E}(Y)\,X \text{ ist } P\text{-Martingal}) \\
&= \mathrm{E}_P[\mathcal{E}(Y)_0^\tau\,X_0]\,.
\end{aligned}$$

Damit ist auch $\mathcal{E}(Y)^\tau\,X$ ein P-Martingal.

Da für $Y \in \mathcal{Y}$ $\mathcal{E}(Y)$ ein lokales P-Martingal ist, gibt es lokalisierende Stoppzeiten $T_1 \le T_2 \le \ldots$, so daß die Prozesse $\mathcal{E}(Y)^{T_n}$ positive Martingale unter P sind. Da $\mathcal{E}(Y)^{T_n}\,X$ wie eben gezeigt ein lokales P-Martingal ist, ist $\mathcal{E}(Y)_T^{T_n}$ Dichte eines äquivalenten Martingalmaßes Q_n. Für diese Maße gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ess.\,sup}_n\ \mathrm{E}_{Q_n}[C\,|\,\mathcal{F}_t] &\ge \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}_{Q_n}[C\,|\,\mathcal{F}_t] \\
&= \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}_P\left[C\,\frac{\mathcal{E}(Y)_{T\wedge T_n}}{\mathcal{E}(Y)_{t\wedge T_n}}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\
&\ge \mathrm{E}_P\left[\lim_{n\to\infty} C\,\frac{\mathcal{E}(Y)_{T\wedge T_n}}{\mathcal{E}(Y)_{t\wedge T_n}}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \quad \text{(Lemma von Fatou)} \\
&= \mathrm{E}_P\left[C\,\frac{\mathcal{E}(Y)_T}{\mathcal{E}(Y)_t}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{\mathrm{E}_P[C\,\mathcal{E}(Y)_T\,|\,\mathcal{F}_t]}{\mathcal{E}(Y)_t},
\end{aligned}$$

und da jedes $Q \in \mathcal{P}$ eine P-Dichte der Form $\mathcal{E}(Y)$ für ein $Y \in \mathcal{Y}$ besitzt, ist damit

$$\operatorname*{ess.\,sup}_{Q\in\mathcal{P}}\ \mathrm{E}_Q[C\,|\,\mathcal{F}_t] = \operatorname*{ess.\,sup}_{Y\in\mathcal{Y}}\ \frac{\mathrm{E}_P[C\,\mathcal{E}(Y)_T\,|\,\mathcal{F}_t]}{\mathcal{E}(Y)_t}.$$

□

Nach diesen Vorarbeiten können wir jetzt eine Version des Satzes über die optionale Zerlegung für Hilbertraum-wertige Prozesse beweisen.

Satz 7.5 (Optionale Zerlegung) *Sei $C \geq 0$ eine $\mathcal{F}_T$-meßbare Zufallsvariable. Unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts besitzt*

$$V_t = \operatorname*{ess.\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C \,|\, \mathcal{F}_t]$$

eine Zerlegung

$$V_t = V_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s - A_t,$$

mit einer previsiblen Strategie ξ und einem wachsenden Prozeß A.

Beweis: V ist ein Supermartingal unter allen Maßen aus $\mathcal{P}$, also insbesondere unter P. Sei

$$V_t = V_0 + M_t - A_t$$

die Doob-Meyer-Zerlegung von V unter P in ein lokales P-Martingal M und einen wachsenden, previsiblen Prozeß A, beide mit Startwert 0. Zu $Y \in \mathcal{Y}$ sei Q_n^Y das äquivalente Martingalmaß mit Dichte

$$\frac{dQ_n^Y}{dP} = \mathcal{E}(Y)_{T \wedge T_n},$$

wobei $T_1, T_2, \ldots$ die $\mathcal{E}(Y)$ lokalisierende Folge von Stoppzeiten

$$T_n = \inf \{t \geq 0 \mid \mathcal{E}(Y)_t \geq n\}$$

ist. Nach dem Theorem von Girsanov besitzt V unter Q_n^Y die Doob-Meyer-Zerlegung

$$V_t = V_0 + M_t^{Q_n^Y} - (A_t - \left\langle M, Y^{T_n} \right\rangle_t).$$

Dabei ist $M^{Q_n^Y} = M - \left\langle M, Y^{T_n} \right\rangle$ ein lokales Q_n^Y-Martingal. Die Stoppzeiten $T_1, T_2, \ldots$ lokalisieren auch $\mathcal{E}(\alpha Y)$ für alle $\alpha > 0$, da

$$\mathcal{E}(\alpha Y)_t \leq (\mathcal{E}(Y)_t)^\alpha$$

und daher

$$\mathcal{E}(\alpha Y)_{t \wedge T_n} \leq n^\alpha$$

ist. Somit ist für $\alpha > 0$ $\mathcal{E}(\alpha Y)_{T \wedge T_n}$ die P-Dichte eines Maßes $Q_n^{\alpha Y} \in \mathcal{P}$. Unter diesem Maß hat die Doob-Meyer-Zerlegung von V die Form

$$V_t = V_0 + M_t^{Q_n^{\alpha Y}} - (A_t - \alpha \left\langle M, Y^{T_n} \right\rangle_t).$$

Da V ein Supermartingal unter $Q_n^{\alpha Y}$ ist, muß

$$A_t - \alpha \left\langle M, Y^{T_n} \right\rangle_t \geq 0$$

sein. Lässt man nun α gegen $\pm\infty$ gehen, so sieht man, daß

$$\left\langle M, Y^{T_n} \right\rangle \equiv 0$$

für alle n sein muß. Damit ist auch

$$\langle M, Y \rangle \equiv 0.$$

Dies gilt für beliebiges $Y \in \mathcal{Y}$, also auch für solche, die wie im Lemma zu Maßen aus $\mathcal{P}$ assoziiert sind. Daher hat V unter allen $Q \in \mathcal{P}$ dieselbe Doob-Meyer-Zerlegung

$$V_t = V_0 + M_t - A_t.$$

Insbesondere ist M für alle $Q \in \mathcal{P}$ ein lokales Martingal. Nach Lemma 7.2 ist M daher darstellbar in der Form

$$M_t = \int_0^t \xi_s \, dX_s,$$

mit einem Integranden $\xi \in \Lambda^2_{loc}(X)$.

□

Die Anforderung, daß alle Martingale auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum stetige Pfade besitzen, ermöglichte zum einen die Darstellung der lokalen Dichten als exponentielle Martingale und sicherte zum anderen die Nicht-Negativität allgemeiner exponentieller lokaler Martingale.

7.2 Quantil-Hedgen und effizientes Hedgen

Das Theorem über die Existenz der optionalen Zerlegung gibt eine Antwort auf die Frage: Was kostet es mindestens, einen gegebenen contingent claim durch eine Investitionsstrategie abzusichern? Der resultierende (Superhedging-)Preis ist aber oft nur eine triviale obere Schranke für den Preis des claims und damit für praktische Zwecke zu hoch. Wenn ein Investor nur bereit ist, eine kleinere Summe zu investieren, muß er das Risiko in Kauf nehmen, bei Fälligkeit des contingent claims ein Portfolio zu haben, das zur Deckung des claims nicht ausreicht. Somit

stellt sich die Frage, durch welche Strategie bei gegebenem Startkapital das Verlustrisiko minimiert wird . Diese Fragestellung ist auch im vollständigen Modell sinnvoll, da auch hier der Investor nicht bereit oder in der Lage sein kann, den zur exakten Duplizierung notwendigen Betrag einzusetzen. Denn auch hier ist die perfekte Absicherung nicht unbedingt erwünscht, da man damit zwar keinerlei Risiko eingeht, aber auch keine Chance hat, Gewinn zu machen.

Um das hier aufgestellte Problem lösen zu können, muß zunächst der in obenstehender Formulierung naiv gebrauchte Begriff des Verlustrisikos in eine quantitative Form gebracht werden. Föllmer und Leukert behandeln das Problem der Risikominimierung bei vorgegebener Investitionsobergrenze in den Arbeiten [FL99] und [FL00] im endlichdimensionalen Modell, wobei das Verlustrisiko hier durch eine Größe der Form

$$\mathrm{E}\Big[l\Big((C - V_T)^+\Big)\Big]$$

gemessen wird. Dabei ist C der Wert des abzusichernden contingent claims im Fälligkeitszeitpunkt T, V_T der Wert des Absicherungsportfolios in T und l eine Funktion, die das Risikoverhalten des Investors repräsentiert. In [FL99] wird der Fall $l = 1_{(0,\infty)}$ behandelt. Das Verlustrisiko ist dann durch

$$P[C > V_T]$$

gegeben. In [FL00] werden wachsende konvexe und wachsende strikt konkave Funktionen für l untersucht. In beiden Fällen besteht die Lösung darin, einen anderen contingent claim $\widetilde{C}$ zu (super-)replizieren. Das Theorem über die Existenz der optionalen Zerlegung (endlichdimensionale Version) gibt als Preis der Superhedging-Strategie für $\widetilde{C}$

$$\sup_{Q \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_Q\Big[\widetilde{C}\Big]$$

an. Dabei ist $\mathcal{P}$ die Menge aller zu P äquivalenten Martingalmaße für den zugrundeliegenden endlichdimensionalen Preisprozeß X. Dieser Preis soll nicht höher als eine vorgegebene Schranke V_0 sein, die unterhalb des Superhedging-Preises von C liegt. Das Verlustrisiko ist dann höchstens

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\Big[l\Big((C - \widetilde{C})^+\Big)\Big] &= \mathrm{E}\Big[l\Big(C - (C \wedge \widetilde{C})\Big)\Big] \\ &= \mathrm{E}[l((1-\phi)\, C)]\,, \end{aligned}$$

mit

$$\phi := \frac{C \wedge \widetilde{C}}{C}\, 1_{\{C>0\}} + 1_{\{C=0\}}.$$

ϕ nimmt Werte im Intervall $[0,1]$ an. Da $\widetilde{C}$ in das Verlustrisiko nur in der Form $C \wedge \widetilde{C}$ eingeht und aufgrund der Monotonie des Erwartungswertes der Superhedging-Preis dieser Zufallsvariable nicht höher als der von $\widetilde{C}$ ist, kann man $\widetilde{C} \leq C$ wählen, also

$$\widetilde{C} = C \wedge \widetilde{C} = \phi\, C.$$

ϕ beschreibt dann die Größe des Anteils von C, den ich mit $\widetilde{C}$ absichern kann.[1] Ein entscheidender Schritt, um das optimale $\widetilde{C}$ zu ermitteln, ist es daher eine Funktion $\phi : \Omega \longrightarrow [0,1]$ zu finden, die unter vom vorgegebenen Anfangskapital V_0 abhängenden Nebenbedingungen den Term

$$\mathrm{E}[l((1-\phi)\, C)]$$

minimiert. Dies wird in [FL99] in Theorem 4.9 und in [FL00] in Proposition 3.1 behandelt. Im folgenden Satz fassen wir diese beiden Resultate zusammen:

Satz 7.6 *Sei $(X_t)_{0\leq t\leq T}$ ein reellwertiges Semimartingal auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$. $\mathcal{P}$ sei die Menge aller zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße, unter denen X ein lokales Martingal ist. Wir nehmen an, daß $\mathcal{P}$ nicht leer ist. Sei $l : [0,\infty) \to [0,\infty)$ entweder eine monoton wachsende konvexe Funktion mit $l(0) = 0$ oder $l = 1_{(0,\infty)}$. Sei C eine $\mathcal{F}_T$-meßbare nicht-negative Zufallsvariable mit*

$$U_0 := \sup_{Q\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C] < \infty.$$

Außerdem sei auch

$$\mathrm{E}_P[l(C)] < \infty,$$

bzw. im Fall $l = 1_{(0,\infty)}$

$$\mathrm{E}_P[C] < \infty.$$

Weiter sei

$$\mathcal{R} = \{\phi : \Omega \longrightarrow [0,1] \mid \phi \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-meßbar}\}.$$

Wir wählen einen Wert $\widetilde{V}_0$ mit $0 \leq \widetilde{V}_0 < U_0$ und definieren $\mathcal{R}_0$ als die Menge aller $\phi \in \mathcal{R}$ für die

$$\sup_{Q\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[\phi\, C] \leq \widetilde{V}_0$$

ist. Dann existiert eine Lösung $\widetilde{\phi} \in \mathcal{R}_0$ des Optimierungsproblems

$$\mathrm{E}_P\Big[l\Big((1-\widetilde{\phi})\, C\Big)\Big] = \min_{\phi\in\mathcal{R}_0} \mathrm{E}_P[l((1-\phi)\, C)].$$

[1] Damit dies überall gilt, haben wir $\phi = 1$ auf $\{C = 0\}$ gesetzt.

Wenn l strikt konvex ist, dann stimmen je zwei Lösungen P-fast sicher auf der Menge $\{C > 0\}$ überein. Ist $l = 1_{(0,\infty)}$, so ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß $\widetilde{\phi}$ eine Lösung ist, daß $\widetilde{\phi}$ die Gestalt

$$\widetilde{\phi} = 1_A \quad mit \quad A = \left\{ \frac{dP}{d\widetilde{P}} > \lambda\, C \right\}$$

für ein Maß $\widetilde{P} \in \mathcal{P}$ und eine Konstante λ hat.

In die Formulierung dieses Satzes geht der Prozeß X nur über die Menge $\mathcal{P}$ seiner äquivalenten Martingalmaße ein. Tatsächlich benötigt der Beweis für konvexe l nur die Eigenschaft, daß alle Maße in $\mathcal{P}$ äquivalent zum Referenzmaß P sind. Dort wird das Optimierungsproblem direkt über den P-fast sicheren Limes von konvexen Kombinationen einer zum Minimum strebenden Folge $(\phi_n)_{n=1,2,\ldots}$ gelöst (siehe Beweis von Proposition 3.1 in [FL00]). Der Fall $l = 1_{(0,\infty)}$ wird mit Hilfe einer Verallgemeinerung des Neyman-Pearson-Lemmas gelöst, was ebenfalls nur die Äquivalenz von Maßen aus $\mathcal{P}$ zu P erfordert. Lediglich zur Herleitung der besonderen Gestalt von $\widetilde{\phi}$ in diesem Fall wird benötigt, daß die Mischung von Maßen in $\mathcal{P}$ mit beliebigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\mathcal{P}$ wieder ein Element von $\mathcal{P}$ ist ($\mathcal{P}$ ist stabil unter Mischen). Damit lässt sich der obige Satz unabhängig von dem Semimartingal X wie folgt formulieren:

Satz 7.7 *Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sei $\mathcal{P}$ eine nichtleere Menge von zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Sei $l : [0,\infty) \to [0,\infty)$ entweder eine monoton wachsende konvexe Funktion mit $l(0) = 0$ oder $l = 1_{(0,\infty)}$. Sei C eine meßbare nicht-negative Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit*

$$U_0 := \sup_{Q \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C] < \infty.$$

Außerdem sei auch

$$\mathrm{E}_P[l(C)] < \infty,$$

bzw. im Fall $l = 1_{(0,\infty)}$

$$\mathrm{E}_P[C] < \infty.$$

$\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_0$ und $\widetilde{V}_0$ seien wie in Satz 7.6 definiert. Dann existiert eine Lösung $\widetilde{\phi} \in \mathcal{R}_0$ des Optimierungsproblems

$$\mathrm{E}_P\Big[l\Big((1-\widetilde{\phi})\, C\Big)\Big] = \min_{\phi \in \mathcal{R}_0} \mathrm{E}_P[l((1-\phi)\, C)]\,.$$

Wenn l strikt konvex ist, dann stimmen je zwei Lösungen P-fast sicher auf der Menge $\{C > 0\}$ überein. Ist $l = 1_{(0,\infty)}$, und ist $\mathcal{P}$ stabil unter Mischen, so ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß $\widetilde{\phi}$ eine Lösung ist, daß $\widetilde{\phi}$ die Gestalt

$$\widetilde{\phi} = 1_A \quad mit \quad A = \left\{ \frac{dP}{d\widetilde{P}} > \lambda\, C \right\}$$

für ein Maß $\widetilde{P} \in \mathcal{P}$ und eine Konstante λ hat.

Da die Menge der äquivalenten Martingalmaße eines Prozesses mit Werten in einem Hilbertraum die Bedingungen an $\mathcal{P}$ in diesem Satz erfüllt, können wir mit Hilfe der Ergebnisse aus den Abschnitten 4.2 und 7.1 nun die Resultate von Föllmer und Leukert auf die unendlichdimensionale Situation übertragen. Dabei untersuchen wir zunächst den Fall, daß es genau ein äquivalentes Martingalmaß gibt.

Annahme 7.8 *$(X_t)_{0\le t\le T}$ sei ein adaptierter Prozeß auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\le t\le T}, P)$ mit Werten in einem separablen Hilbertraum H und stetigen Pfaden. Wir nehmen an, daß es (auf $\mathcal{F}_T$) genau ein zu P äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß P^* gibt, unter dem X ein lokales Martingal ist.*

Wie in Kapitel 5 definieren wir zu einer Strategie $\xi \in \Lambda^2_{loc}(X)$ und einem Startkapital $x_0 \in \mathbb{R}$

$$V_t(x_0, \xi) := x_0 + \int_0^t \xi_s \, dX_s$$

als die Wertentwicklung des Portfolios zu dieser Strategie. Um Verdopplungsstrategien und ähnliches auszuschließen, betrachten wir im folgenden nur solche Strategien als zulässig, für die $V_t(x_0, \xi)$ für alle t nicht-negativ ist.

Unter der Annahme 7.8 können wir aus Satz 7.7 das folgende Resultat ableiten:

Satz 7.9 *Annahme 7.8 sei erfüllt. Sei $l : [0,\infty) \to [0,\infty)$ eine monoton wachsende konvexe Funktion mit $l(0) = 0$ und C eine $\mathcal{F}_T$-meßbare nicht-negative Zufallsvariable mit*

$$U_0 := \mathrm{E}_{P^*}[C] < \infty,$$

sowie

$$\mathrm{E}_P[l(C)] < \infty.$$

Wir fixieren ein Startkapital $\widetilde{V}_0$ mit $0 < \widetilde{V}_0 < U_0$. Dann existiert eine Lösung $(\widetilde{x}_0, \widetilde{\xi})$ des Optimierungsproblems:

Minimiere unter allen zulässigen Strategien (x_0, ξ) mit $x_0 \leq \widetilde{V}_0$ das Verlustrisiko

$$\mathrm{E}_P\Big[l\Big((C - V_T(x_0, \xi))^+\Big)\Big].$$

Beweis: Wir definieren $\widetilde{C} = \widetilde{\phi}\, C$, wobei $\widetilde{\phi}$ eine Lösung des Optimierungsproblems aus Satz 7.7 für $\mathcal{P} = \{P^*\}$ und das gewählte $\widetilde{V}_0$ ist. Damit minimiert $\widetilde{C}$ das Verlustrisiko

$$\mathrm{E}_P\Big[l\Big((C - Y)^+\Big)\Big]$$

unter allen Zufallsvariablen Y mit $0 \leq Y \leq C$ und

$$\mathrm{E}_{P^*}[Y] \leq \widetilde{V}_0.$$

Wie wir weiter oben ausgeführt haben, ist die Bedingung $Y \leq C$ keine Einschränkung. Unter der Annahme 7.8 ist nach Korollar 4.4 $\widetilde{C}$ mit einer Portfoliostrategie $\widetilde{\xi}$ in der Form

$$\widetilde{C} = \mathrm{E}_{P^*}\Big[\widetilde{C}\Big] + \int_0^T \widetilde{\xi}_t \, dX_t$$

darstellbar, wobei

$$\mathrm{E}_{P^*}\Big[\widetilde{C} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\Big] = \mathrm{E}_{P^*}\Big[\widetilde{C}\Big] + \int_0^t \widetilde{\xi}_s \, dX_s$$

für alle $t \in [0, T]$ ist. Da $\widetilde{C} \geq 0$ ist, sind auch alle bedingten Erwartungen von $\widetilde{C}$ nicht-negativ. Somit ist $\widetilde{\xi}$ eine zulässige Strategie und $\Big(\mathrm{E}_{P^*}\Big[\widetilde{C}\Big], \widetilde{\xi}\Big)$ eine Lösung des Optimierungsproblems dieses Satzes.

□

Für spezielle l kann man das optimale $\widetilde{\phi}$ in Satz 7.7 noch genauer angeben. Wir haben hier den Fall ausgewählt, daß l strikt konvex und stetig differenzierbar ist. Die in [FL00] für andere Formen von l berechneten Darstellungen von $\widetilde{\phi}$ lassen sich aber genauso auf die unendlichdimensionale Situation übertragen. Wir erhalten aus Theorem 5.1 in [FL00] die folgende Gestalt der Lösung $\widetilde{\phi}$:

Satz 7.10 *Unter den Voraussetzungen von Satz 7.9 gilt: Ist l stetig differenzierbar auf $(0, \infty)$ mit streng monoton wachsender Ableitung l', die die Bedingungen $l'(0+) = 0$ und $l'(\infty) = \infty$ erfüllt, so hat das optimale $\widetilde{\phi}$ in Satz 7.7 die Form*

$$\widetilde{\phi} = 1 - \left(\frac{I(c\rho^*)}{C} \wedge 1\right) \quad \textit{auf} \quad \{C > 0\},$$

mit

$$\rho^* := \frac{dP^*}{dP}, \qquad I := (l')^{-1}$$

und einer Konstante c, die durch die Bedingung

$$\mathrm{E}_{P^*}\left[\widetilde{\phi}\, C\right] = \widetilde{V}_0$$

gegeben ist.

Beweis: Im Beweis von Theorem 5.1 in [FL00], der wieder auf dem Lemma von Neyman-Pearson beruht, wird nur benutzt, daß die Menge $\mathcal{P}$ in Satz 7.7 einelementig ist. Daher gilt dieser Satz auch in der unendlichdimensionalen Situation bei eindeutigem Martingalmaß.

□

Mit der gleichen Argumentation läßt sich auch die Darstellung der optimalen Lösung für den Fall $l = 1_{(0,\infty)}$ auf unsere Situation übertragen. Wir können daher aus Theorem 2.22 und Abschnitt 2.3 in [FL99] ableiten:

Satz 7.11 *Unter der Annahme, daß in Satz 7.7 $\mathcal{P} = \{P^*\}$ ist, hat die optimale Lösung $\widetilde{\phi}$ die folgende Gestalt: Sei Q^* definiert durch*

$$\frac{dQ^*}{dP^*} = \frac{C}{\mathrm{E}_{P^*}[C]}$$

und

$$\alpha := \frac{\widetilde{V}_0}{\mathrm{E}_{P^*}[C]}.$$

Sei weiter

$$\widetilde{a} := \inf\left\{ a \,\middle|\, Q^*\left[\frac{dP^*}{dP} > a\, C\right] \leq \alpha \right\}$$

und

$$\widetilde{A} := \left\{ \frac{dP^*}{dP} > \widetilde{a}\, C \right\}.$$

Ist dann

$$Q^*\left[\widetilde{A}\right] = \alpha,$$

so ist

$$\widetilde{\phi} = 1_{\widetilde{A}}$$

auf $\{C > 0\}$. *Ansonsten ist*

$$\widetilde{\phi} = 1_{\widetilde{A}} + \gamma\, 1_{\left\{\frac{dP^*}{dP} = \widetilde{a}\, C\right\}}$$

auf $\{C > 0\}$, *mit*

$$\gamma = \frac{\alpha - Q^*\left[\widetilde{A}\right]}{Q^*\left[\frac{dP^*}{dP} = \widetilde{a}\, C\right]}.$$

Mit dem gleichen Argument wie im Beweis von Satz 7.9 bekommen wir die Strategie, die die Verlustwahrscheinlichkeit (also $l = 1_{(0,\infty)}$ in Satz 7.7) bei gegebenem Einsatz minimiert:

Satz 7.12 *Annahme 7.8 sei erfüllt. Sei* C *eine* $\mathcal{F}_T$*-meßbare nicht-negative Zufallsvariable mit*

$$U_0 := \mathrm{E}_{P^*}[C] < \infty,$$

sowie

$$\mathrm{E}_P[C] < \infty.$$

Wir fixieren ein Startkapital $\widetilde{V}_0$ *mit* $0 < \widetilde{V}_0 < U_0$. *Dann existiert eine Lösung* $(\widetilde{x}_0, \widetilde{\xi})$ *des Optimierungsproblems:*

Minimiere unter allen zulässigen Strategien (x_0, ξ) *mit* $x_0 \leq \widetilde{V}_0$ *die Verlustwahrscheinlichkeit*

$$P[C > V_T(x_0, \xi)]\,.$$

Es gilt

$$V_T(x_0, \xi) = \widetilde{\phi}\, C$$

mit $\widetilde{\phi}$ *wie in Satz 7.11.*

Im Fall $Q^*\left[\widetilde{A}\right] = \alpha$ besteht das optimale Vorgehen also darin den contingent claim C auf einem Quantil der Martingalmaßdichte perfekt abzusichern und auf dem Komplement überhaupt nicht.

Wir kommen jetzt zum unvollständigen Fall. Um Satz 7.5 anwenden zu können, treffen wir die folgende Annahme:

Annahme 7.13 $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ *sei ein adaptierter Prozeß auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ *mit Werten in einem separablen Hilbertraum* H *und stetigen Pfaden.* $\mathcal{P}$ *sei die Menge aller zu* P *äquivalenten*

Maße, unter denen X ein lokales Martingal ist. Wir nehmen an, daß $\mathcal{P}$ nicht leer ist. Die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ auf Ω habe die Eigenschaft, daß jedes $\mathcal{F}_t$-adaptierte lokale reellwertige Martingal P-fast sicher stetige Pfade hat.

Unter dieser Annahme besagt Satz 7.5, daß $\widetilde{\phi}\,C$, mit $\widetilde{\phi}$ wie in Satz 7.7 eine optionale Zerlegung

$$\widetilde{\phi}\,C = \widetilde{V}_0 + \int_0^T \widetilde{\xi}_t\,dX_t - A_T$$

mit

$$\widetilde{V}_0 = \sup_{Q\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_Q\Big[\widetilde{\phi}\,C\Big]$$

besitzt. Damit gilt Theorem 3.2 aus [FL00] auch in dieser Situation. Außerdem wird dort nicht auf die Form von l Bezug genommen. Somit gilt die Aussage dieses Theorems auch für den Fall $l = 1_{(0,\infty)}$. Damit erhalten wir als Resultat im unvollständigen Modell das gleiche Ergebnis wie in Theorem 3.2 in [FL00]:

Satz 7.14 *Es gelte Annahme 7.13. Sei $\widetilde{\phi}$ eine Lösung des Optimierungsproblems in Satz 7.7. Dann minimiert die zur optionalen Zerlegung von $\widetilde{\phi}\,C$ gehörende Strategie $(\widetilde{V}_0, \widetilde{\xi})$ das Verlustrisiko*

$$\mathrm{E}_P\Big[l\Big((C - V_T(x_0,\xi))^+\Big)\Big]\,.$$

unter allen zulässigen Strategien (x_0, ξ) mit $x_0 \leq \widetilde{V}_0$.

Somit haben wir gezeigt, daß auch im unendlichdimensionalen Kontext die Möglichkeit einer optimalen (im Sinne minimalen Verlustrisikos) Absicherung zu gegebenem Startkapital gegeben ist, sofern das Modell so beschaffen ist, daß es die Replikation bzw. Superreplikation beliebiger contingent claims zulässt.

Kapitel 8

Martingalmaße und lokale Spezifikationen

In Abschnitt 4.3 haben wir Zusammenhänge zwischen endlichdimensionalen Teilmodellen und dem gesamten, unendlichdimensionalen Modell untersucht. Die Teilmodelle entstanden dabei durch orthogonale Projektion des Hilbertraumwertigen Preisprozesses auf endlichdimensionale Unterräume, also durch Auswahl von endlich vielen Koordinaten bezüglich einer Orthogonalbasis des zugrundeliegenden Hilbertraumes. Dabei wird die Filtrierung der Teilmodelle von den jeweils ausgewählten Koordinatenprozessen erzeugt und somit sozusagen alle Informationen, die die restlichen Koordinaten des Prozesses beitragen, vergessen. Ein dazu komplementärer, durch die Theorie der Gibbsmaße motivierter Ansatz ist es, stattdessen alle Information über die restlichen Koordinaten als gegeben zu betrachten, sich also die bedingten Verteilungen, gegeben die von allen bis auf endlich vielen Koordinaten erzeugten σ-Algebren, anzusehen. Es kann dabei jedoch sehr leicht passieren, daß unter solchen bedingten Verteilungen die beteiligten Prozesse keine Semimartingale mehr sind. Dies illustrieren wir an einem Beispiel.

Anschließend stellen wir in Abschnitt 8.2 das von Deuschel in [Deu85] behandelte unendlichdimensionale Diffusionsmodell vor. In diesem Modell bleibt die Semimartingaleigenschaft beim Übergang zu bedingten Verteilungen erhalten. Deuschel berechnet mehrdimensionale bedingte Verteilungen nur für den Fall, daß der Martingalanteil des Prozesses eine unendlichdimensionale Brownsche Bewegung ist. Um auch allgemeinere Situationen behandeln zu können, erweitern wir das Modell in Abschnitt 8.2 durch geeignete Transformationen.

Doch nun wollen wir zunächst das angekündigte Beispiel für den Verlust der

Semimartingaleigenschaft beim Übergang zu bedingten Verteilungen angeben:

Beispiel 8.1 Sei $\Omega = C[0,1]^2$, versehen mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{F}$. $(X_t^1)_{0\le t\le 1}$ und $(X_t^2)_{0\le t\le 1}$ seien die Koordinatenprozesse, es sei also für $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ und alle $t \in [0,1]$

$$X_t^i(\omega) = \omega_i(t)$$

$(i = 1, 2)$. $(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}$ sei die von den Koordinatenprozessen erzeugte rechtsstetige Filtrierung. Weiter sei $\widetilde{P}$ das zweidimensionale Wienermaß auf Ω mit Start in 0 und P das Bildmaß von $\widetilde{P}$ unter der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} f: & \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ & (\omega_1, \omega_2) & \mapsto & (\omega_1 + \omega_2, \omega_2). \end{array}$$

Damit besitzen die Prozesse X^1 und X^2 unter P die Dynamik

$$X_t^1 = W_t^1 + W_t^2, \qquad X_t^2 = W_t^2,$$

mit unabhängigen eindimensionalen Brownschen Bewegungen W^1 und W^2.

Dann ist für $P \circ (X^2)^{-1}$-fast alle $\omega_2 \in C[0,1]$ das bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P^{\omega_2} := P\Big[\cdot \,|\, X^2 = \omega_2\Big]$$

wohldefiniert, da $\mathcal{F}$ abzählbar erzeugt ist. Da W^1 und $X^2 = W^2$ unter P unabhängig sind, ist W^1 auch unter P^{ω_2} eine Brownsche Bewegung. $W^2 = X^2$ folgt dagegen P^{ω_2}-fast sicher dem Pfad ω_2. Daher hat X^1 unter P^{ω_2} die Gestalt

$$X_t^1 = W_t^1 + \omega_2(t).$$

Da $P[\langle X^2\rangle_t = t$ für alle $t \in [0,1]] = 1$ ist, können wir ω_2 so wählen, daß $\langle \omega_2\rangle_t = t$ für alle $t \in [0,1]$ gilt und P^{ω_2} wohldefiniert ist. Unter P^{ω_2} ist X^1 dann kein Semimartingal, da es die Summe eines Martingals mit einer deterministischen Funktion, deren quadratische Variation nicht verschwindet, ist.

Auch bei Vertauschen der Rollen von X^1 und X^2 geht die Semimartingaleigenschaft verloren. Denn es ist

$$\begin{aligned} X_t^2 = W_t^2 &= \frac{1}{2}\left(W_t^2 - W_t^1\right) + \frac{1}{2}\left(W_t^1 + W_t^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(W_t^2 - W_t^1\right) + \frac{1}{2} X_t^1. \end{aligned}$$

$W^2 - W^1$ und X^1 sind orthogonale und damit unabhängige Gaußprozesse. Daher hat X^2 unter $P[\cdot \mid X^1 = \omega_1]$ die Dynamik

$$\begin{aligned} X_t^2 &= \frac{1}{2}\left(W_t^2 - W_t^1\right) + \frac{1}{2} X_t^1(\omega_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \widetilde{W}_t + \frac{1}{2}\,\omega_1(t) \end{aligned}$$

wobei

$$\widetilde{W}_t := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_t^2 - W_t^1\right)$$

eine Brownsche Bewegung unter $P[\cdot \mid X^1 = \omega_1]$ ist. Auch hier ist ein typisches ω_1 nicht von beschränkter Variation und X^2 somit kein Semimartingal unter der bedingten Verteilung.

8.1 Bedingte Verteilungen im unendlichdimensionalen Diffusionsmodell nach Deuschel

Wie Beispiel 8.1 gezeigt hat, geht die Semimartingaleigenschaft beim Übergang zu einem bedingten Wahrscheinlichkeitsmaß leicht verloren, da deterministische Anteile mit nicht verschwindender quadratischer Variation auftauchen können. Diese stammen von wechselseitigen Abhängigkeiten der Martingalanteile der beteiligten Prozesse. Daher liegt es nahe, den Fall von Semimartingalen zu untersuchen, deren Martingalanteile unabhängig sind. Wechselseitige Abhängigkeiten sind dann nur durch die Anteile von beschränkter Variation gegeben.

Ein Modell, das in diesen Rahmen passt, wird von Deuschel in [Deu85] untersucht. Die betrachteten Prozesse sind hier unendlich viele Brownsche Bewegungen mit Drift, wobei die Brownschen Bewegungen unabhängig sind. Deuschel berechnet die bedingten Dichten der Verteilungen von endlich vielen dieser Prozesse, wenn alle anderen gegeben sind, zum Wienermaß. Im folgenden fassen wir die Resultate aus den Abschnitten II.1-II.3 in [Deu85] kurz zusammen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß die Startverteilung der Prozesse auf einen Punkt konzentriert ist.

Wir beginnen mit dem zugrundeliegenden Modell: Sei I eine abzählbare Indexmenge (z. B. die Menge der natürlichen Zahlen oder ein abzählbares Gitter). Als Wahrscheinlichkeitsraum wählen wir $\Omega := C[0,1]^I$, versehen mit dem abzählbaren Produkt der Borelschen σ-Algebra auf $C[0,1]$ und der natürlichen Filtrierung

$(\mathcal{F}_t)_{0\le t\le 1}$. $(X_t)_{0\le t\le 1}$ sei der Auswertungsprozeß mit Koordinaten X^i, $i \in I$, also $X_t^i(\omega) = \omega_i(t)$ für alle $\omega = (\omega_i)_{i\in I} \in \Omega$. Q sei das Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω, unter dem $X_0 = x$ für ein gewähltes $x \in \Omega$ gilt und X die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t^i = dW_t^i + b^i(t, X_t)\, dt, \quad i \in I,$$

mit unabhängigen eindimensionalen Brownschen Bewegungen W^i, $i \in I$, erfüllt. Dabei sollen die Driften b^i, $i \in I$, den folgenden Bedingungen genügen, die nach Proposition II.1.1 in [Deu85] auch die Existenz und Eindeutigkeit von Q garantieren:

Zu jedem $i \in I$ sei $N(i)$ eine endliche Teilmenge von $I - \{i\}$ und es gebe Funktionen

$$B^i : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und für jedes $k \in N(i)$

$$B^{i,k} : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

so daß

$$b^i(t,x) = \frac{\partial}{\partial x^i} B^i(t, x^i) + \sum_{k\in N(i)} \frac{\partial}{\partial x^i} B^{i,k}(t, x^i, x^k).$$

Die Funktionen $B^i, B^{i,k}$ seien für alle i, k glatt und beschränkt mit beschränkten Ableitungen. Außerdem sei

$$K := \sup_i \left\| b^i \right\|_\infty < \infty.$$

Sei weiter

$$\overline{N}(i) := \{k \in I : i \in N(k), k \neq i\}.$$

Es gebe eine Schranke $N_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \in I$ die Mengen $N(i)$ und $\overline{N}(i)$ höchstens N_0 Elemente haben.

Als nächstes führen wir Bezeichnungen für die bedingten Verteilungen einer endlichen Zahl der X^i, gegeben die restlichen Prozesse, ein:

Sei M eine endliche Teilmenge von I und $X^M := (X^i)_{i\in M}$ und X^{I-M} entsprechend definiert. Mit $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ bezeichnen wir die bedingte Verteilung von X^M, gegeben

$$\mathcal{F}^{I-M} := \sigma\left(X_t^k,\ t \in [0,1],\ k \in I - M\right).$$

Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $Q^M(\cdot, X^{I-M})(\omega) = Q^M(\cdot, X^{I-M}(\omega))$ somit ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(C[0,1]^M, \left(\mathcal{F}_t^M\right)_{0\le t\le 1}\right)$, mit $\mathcal{F}_t^M = \sigma\left(X_s^k,\ s \in [0,t],\ k \in M\right)$.

Das Ziel ist, die Dichte von $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ zum Wienermaß auf $\left(C[0,1]^M, \left(\mathcal{F}_t^M\right)_{0\le t\le 1}\right)$ anzugeben. Dazu definieren wir noch einige Größen, die in den Term für die Dichte eingehen:

Sei

$$\overline{N}(M) := \{k \in I - M : M \cap N(k) \neq \emptyset\}$$

und

$$N(I-M) := \left\{i \in M : (I-M) \cap \overline{N}(i) \neq \emptyset\right\}.$$

Wir setzen

$$H^M := \sum_{k\in\overline{N}(M)} \sum_{i\in M\cap N(k)} B^{k,i}$$

und

$$\widetilde{b}^k := \begin{cases} b^k - \dfrac{\partial}{\partial x^k} H^M, & k \in N(I-M) \\ b^k - \dfrac{\partial}{\partial x^k} H^M, & k \in \overline{N}(M) \\ b^k, & k \in \left(N(I-M) \cup \overline{N}(M)\right)^c. \end{cases}$$

Rechnet man die Ableitungen von H^M aus, so erhält man

$$\widetilde{b}^k = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^k} B^k + \displaystyle\sum_{i\in N(k)\cap M} \dfrac{\partial}{\partial x^k} B^{k,i} + \sum_{i\in N(k)\cup(\overline{N}(k)-M)} \dfrac{\partial}{\partial x^k}(B^{k,i} - B^{i,k}), & k \in N(I-M) \\ \dfrac{\partial}{\partial x^k} B^k + \displaystyle\sum_{i\in N(k)-M} \dfrac{\partial}{\partial x^k} B^{k,i}, & k \in \overline{N}(M) \\ b^k, & k \in \left(N(I-M) \cup \overline{N}(M)\right)^c. \end{cases}$$

Weiter sei

$$g^M := \frac{\partial}{\partial t} H^M + \sum_{k\in\overline{N}(M)\cup N(I-M)} \left(\widetilde{b}^k \frac{\partial}{\partial x^k} H^M + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial (x^k)^2} H^M + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial}{\partial x^k} H^M \right|^2 \right)$$

und

$$\Psi^M(X^M, X^{I-M}) := H^M(1, X_1) - \int_0^1 g^M(s, X_s)\, ds - H^M(0, X_0). \tag{8.1}$$

Außerdem sei

$$\Phi^M(X^M, X^{I-M}) := \sum_{i\in M} \left(\int_0^1 \widetilde{b}^i(s, X_s)\, dX_s^i - \frac{1}{2} \int_0^1 \widetilde{b}^i(s, X_s)^2\, ds \right). \tag{8.2}$$

Damit können wir Deuschels Resultat über die Gestalt der bedingten Dichten formulieren. Da wir im Kontext dieser Arbeit eher an Dichten von Martingalmaßen (hier das Wienermaß) zum Referenzmaß als umgekehrt interessiert sind, geben wir hier das Inverse der Dichte bei Deuschel an. Ansonsten entspricht der folgende Satz Proposition II.3.1 in [Deu85].

Satz 8.2 *Sei P^M das Wienermaß auf $\left(C[0,1]^M, \left(\mathcal{F}_t^M\right)_{0\le t\le 1}\right)$ mit Start in X_0^M. Dann sind für alle endlichen $M \subset I$ und Q-fast alle $\omega \in \Omega$ $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ und P^M äquivalent und die Dichte von P^M zu $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ hat die Gestalt*

$$\frac{dP^M}{dQ^M(\cdot, X^{I-M})} = \frac{1}{Z^M(X^{I-M})} \exp\Big(-\Psi^M(X^M, X^{I-M}) - \Phi^M(X^M, X^{I-M})\Big), \tag{8.3}$$

mit dem Normierungsfaktor

$$Z^M(X^{I-M}) := \mathrm{E}_{Q^M(\cdot, X^{I-M})}\Big[\exp\Big(-\Psi^M(X^M, X^{I-M}) - \Phi^M(X^M, X^{I-M})\Big)\Big] \tag{8.4}$$

und den in (8.1) und (8.2) eingeführten Größen Ψ^M und Φ^M.

Da $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ äquivalent zu P^M ist, ist für alle endlichen Teilmengen M von I X^M unter $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ ein Semimartingal, und es existiert ein äquivalentes Martingalmaß, nämlich das Wienermaß P^M. Im allgemeinen ist das Ursprungsmaß Q aber nicht äquivalent zum unendlichdimensionalen Wienermaß P. So erfüllt zum Beispiel für $I = \{1, 2, \ldots\}$ das durch die Dynamik

$$X_t^i = W_t^i + t \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

definierte Maß Q alle Anforderungen (b^i ist hier konstant 1 für alle $i \in I$), es gilt jedoch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_1^i = \begin{cases} 1 & Q\text{-fast sicher} \\ 0 & P\text{-fast sicher} \end{cases}.$$

Hier sind P und Q also singulär zueinander.

Eine hinreichende Bedingung an die Driften dafür, daß P und Q äquivalent sind, ist die Novikov-Bedingung

$$\mathrm{E}_Q\left[\exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i\in I} \int_0^1 b^i(t, X_t)^2\, dt\right)\right] < \infty.$$

In diesem Fall sind die äquivalenten Martingalmaße zu den Maßen $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ gerade die entsprechenden Randverteilungen von P für die Koordinaten aus M. Das liegt daran, daß die Interaktionen der einzelnen Koordinaten sich nur auf die Driften auswirken, während die Volatilitäten konstant sind. Nur letztere sind aber für Martingalmaße relevant.

8.2 Erweiterung des Modells durch Transformation

Deuschel betrachtet in Abschnitt II.7 von [Deu85] noch ein erweitertes Modell, in dem die Dynamik von X unter Q durch

$$dX_t^i = s^i(X_t^i)\, dW_t^i + b^i(t, X_t)\, dt, \quad i \in I,$$

gegeben ist, wobei die Funktionen s^i $(i \in I)$ glatt und beschränkt mit beschränkten Ableitungen sind. Außerdem soll $\frac{1}{s^i}$ lokal quadratisch integrierbar bezüglich des Lebesguemaßes sein. Die Driften b^i sollen dabei die gleichen Bedingungen wie oben erfüllen. Für dieses Modell berechnet Deuschel die Dichten der eindimensionalen bedingten Verteilungen zum Wienermaß. Er betrachtet hier also nur den Fall, daß M einelementig ist.

Wir beschreiten im folgenden einen anderen Weg. Wir führen eine nicht konstante Volatilität ein, indem wir den Prozeß X mittels einer Funktion transformieren. Wir erweitern das Modell von Deuschel daher in diesem Abschnitt, indem wir von den Prozessen X^i zu Prozessen der Form $Y_t^i = f_i(t, X_t^i)$ für geeignete Funktionen f_i übergehen. Wir untersuchen wieder die bedingten Maße und geben Kriterien für die Existenz von zu diesen bedingten Maßen äquivalenten Martingalmaßen an. Im Falle der Existenz berechnen wir die entsprechenden Dichten.

Um die Notation etwas zu vereinfachen, sei ab jetzt o.B.d.A. $I = \{1, 2, \ldots\}$. Seien $f_n : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ einmal stetig nach der ersten Variable (Zeit) und zweimal stetig nach der zweiten Variable (Raum) differenzierbare Funktionen. Die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}_n : & [0,1] \times \mathbb{R} & \to & [0,1] \times \mathbb{R} \\ & (t, x) & \mapsto & (t, f_n(t, x)) \end{array}$$

seien injektiv mit inversen Abbildungen

$$\overline{f}_n^{-1} : \mathrm{Im}(\overline{f}_n) \to [0,1] \times \mathbb{R}.$$

Wir definieren für alle n und $t \in [0,1]$

$$Y_t^n := f_n(t, X_t^n)\,. \tag{8.5}$$

Y^n besitzt die Dynamik

$$\begin{aligned} dY_t^n &= df_n(t, X_t^n) \\ &= f_n'(t, X_t^n)\; dW_t^n + \left(f_n'(t, X_t^n)\; b_t^n(t, X_t) + \frac{\partial}{\partial t} f_n(t, X_t^n) + \frac{1}{2}\, f_n''(t, X_t^n) \right) dt. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Funktionen $\overline{f}_n$ können wir X aus dieser Darstellung eliminieren. Dazu definieren wir

$$F : [0,1] \times \mathbb{R}^I \to [0,1] \times \mathbb{R}^I$$

durch

$$F(t, x_1, x_2, \ldots) := (t,\; f_1(t, x_1),\; f_2(t, x_2),\; \ldots).$$

F besitzt als inverse Abbildung

$$F^{-1}(t, x_1, x_2, \ldots) = (t,\; pr_2(\overline{f}_1^{-1}(t, x_1)),\; pr_2(\overline{f}_2^{-1}(t, x_2)),\; \ldots), \tag{8.6}$$

wobei pr_2 die Projektion auf die zweite Koordinate ist. Damit ist

$$(t, X_t) = F^{-1}(t, Y_t). \tag{8.7}$$

Wir können die Dynamik von Y^n daher wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} dY_t^n &= f_n'\Big(\overline{f}_n^{-1}(t, Y_t^n)\Big)\; dW_t^n + f_n'\Big(\overline{f}_n^{-1}(t, Y_t^n)\Big)\; b_t^n(F^{-1}(t, Y_t))\, dt \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial t} f_n\Big(\overline{f}_n^{-1}(t, Y_t^n)\Big) + \frac{1}{2}\, f_n''\Big(\overline{f}_n^{-1}(t, Y_t^n)\Big) \right) dt. \end{aligned} \tag{8.8}$$

In Abschnitt II.7 von [Deu85] hängen die dort verwendeten Diffusionskoeffizienten s^n nicht von der Zeit ab. Um beide Ansätze zu vergleichen, betrachten wir den Fall, daß auch f_n $(n \in I)$ nicht von t abhängt. Dann ist

$$\begin{aligned} dY_t^n &= f_n'\Big(f_n^{-1}(Y_t^n)\Big)\; dW_t^n + f_n'\Big(f_n^{-1}(Y_t^n)\Big)\; b_t^n(F^{-1}(Y_t))\, dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\, f_n''\Big(f_n^{-1}(Y_t^n)\Big)\; dt. \end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $n \in I$ und $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'\Big(f_n^{-1}(x)\Big) = \frac{1}{\left(f_n^{-1}\right)'(x)}.$$

Wollen wir also vorgegebene (glatte) Diffusionskoeffizienten s^n in unserem Modell realisieren, so muß für $x \in \mathbb{R}$ gelten:

$$s^n(x) = \frac{1}{(f_n^{-1})'(x)},$$

also

$$\left(f_n^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{s^n(x)}.$$

Unter der Annahme, daß $\frac{1}{s^n}$ beschränkt ist (das entspricht der Annahme (H8) in [Deu85], S. 35), können wir beide Seiten integrieren. Setzen wir $f_n(0) = 0$, so ist

$$f_n^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{s^n(y)}\, dy =: S_n(x),$$

also muß

$$f_n(x) = S_n^{-1}(x)$$

sein. Wenn s^n glatt und beschränkt ist ((H7) in [Deu85]) und nach Annahme $\frac{1}{s^n}$ beschränkt ist, nimmt $\frac{1}{s^n}$ nur ein Vorzeichen an und ist nirgends Null. S^n ist damit streng monoton steigend oder streng monoton fallend. Daher existiert S^{-1}. In diesem Sinne lässt sich jeder Diffusionskoeffizient s^n, der (H7) und (H8) in [Deu85] erfüllt, durch eine geeignete Funktion f_n darstellen.

Wir kehren nun zum allgemeinen, zeitabhängigen Modell zurück. Da $X_t^n = pr_2\left(\overline{f}_n^{-1}(t, Y_t^n)\right)$ ist, erzeugen die Prozesse X^M und Y^M dieselben Filtrierungen $\left(\mathcal{F}_t^M\right)_{0 \le t \le 1}$ für alle $M \subset I$.

Wir geben nun ein Kriterium dafür an, daß es ein zu $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ äquivalentes Maß gibt, unter dem $Y^M = (Y^n)_{n \in M}$ ein lokales Martingal bezüglich der Filtrierung $\mathcal{F}^M$ ist, und berechnen die Dichte zu $Q^M(\cdot, X^{I-M})$.

Satz 8.3 *Sei M eine endliche Teilmenge von I. Wir setzen für $i \in M$*

$$h_i(t,x) := \frac{\frac{\partial}{\partial t} f_i(t,x) + \frac{1}{2} f_i''(t,x)}{f_i'(t,x)}. \tag{8.9}$$

Ist

$$\mathrm{E}_{P^M}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^1 \sum_{i \in M} h(t, X_t^i)^2\, dt\right)\right] < \infty,$$

so existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P^{Y,M}$, das für Q-fast alle $\omega \in \Omega$ zu $Q^M(\cdot, X^{I-M})(\omega)$ äquivalent ist, unter dem Y^M ein lokales Martingal ist. In diesem Fall ist die Dichte von $P^{Y,M}$ zu $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ durch

$$\frac{dP^{Y,M}}{dQ^M(\cdot, X^{I-M})} = \frac{D^{Y^M}}{Z^M(X^{I-M})} \exp\Big(-\Psi^M(X^M, X^{I-M}) - \Phi^M(X^M, X^{I-M})\Big) \tag{8.10}$$

gegeben, mit Ψ^M, Φ^M und $Z^M(X^{I-M})$ wie in (8.1), (8.2) und (8.4) und

$$D^{Y^M} := \exp\left(-\sum_{i\in M}\int_0^1 h_i(t, X_t^i)\, dX_t^i - \frac{1}{2}\sum_{i\in M}\int_0^1 h_i(t, X_t^i)^2\, dt\right).$$

Beweis: Der Beweis beruht auf Satz 8.2 und einem zusätzlichen Maßwechsel vom zu $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ äquivalenten Wienermaß P^M zum Martingalmaß $P^{Y,M}$.

Unter P^M ist X^M eine Brownsche Bewegung. Für jedes $i \in M$ hat Y^i daher unter P^M die Dynamik

$$dY_t^i = df_i(t, X_t^i) = f_i'(t, X_t^i)\, dX_t^i + \left(\frac{\partial}{\partial t} f_i(t, X_t^i) + \frac{1}{2} f_i''(t, X_t^i)\right) dt. \tag{8.11}$$

Da nach Satz 8.2 die bedingte Verteilung $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ äquivalent zu P^M ist, gibt es genau dann ein zu $Q^M(\cdot, X^{I-M})$ äquivalentes (lokales) Martingalmaß für Y^M, wenn es ein zu P^M äquivalentes gibt. Unter P^M hängt Y^i jeweils nur von der i-ten Koordinate der Brownschen Bewegung X^M ab. Daher sind die Prozesse Y^i, $i \in M$, unabhängig unter P^M. Wir können daher die eindimensionalen Prozesse Y^i, $i \in M$, zunächst einzeln betrachten. Aus der Darstellung (8.11) folgt, daß

$$D^{Y^i} := \exp\left(-\int_0^1 h_i(t, X_t^i)\, dX_t^i - \frac{1}{2}\int_0^1 h_i(t, X_t^i)^2\, dt\right)$$

ein Kandidat für die P^M-Dichte eines Maßes ist, unter dem Y^i ein lokales Martingal ist. Damit D^{Y^i} eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, muß

$$\mathrm{E}_{P^M}\left[D^{Y^i}\right] = 1$$

sein. Hinreichend dafür ist die Novikov-Bedingung:

$$\mathrm{E}_{P^M}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^1 h_i(t, X_t^i)^2\, dt\right)\right] < \infty.$$

Diese garantiert auch die Wohldefiniertheit von D^{Y^i}, da $(h_i(t, X_t^i))_{0\le t\le 1}$ dann auch ein zulässiger Integrand für X^i ist. Die Dichte des zu P^M äquivalenten

Martingalmaßes $P^{Y,M}$ für Y^M ist dann durch

$$\begin{aligned} D^{Y^M} &:= \frac{dP^{Y,M}}{dP^M} \\ &= \prod_{i\in M} D^{Y^i} \\ &= \exp\Big(-\sum_{i\in M}\int_0^1 h_i(t,X_t^i)\,dX_t^i - \frac{1}{2}\sum_{i\in M}\int_0^1 h_i(t,X_t^i)^2\,dt\Big) \end{aligned}$$

gegeben. Insgesamt gilt nach (8.3):

$$\frac{dP^{Y,M}}{dQ^M(\cdot,X^{I-M})} = \frac{D^{Y^M}}{Z^M(X^{I-M})}\exp\Big(-\Psi^M(X^M,X^{I-M}) - \Phi^M(X^M,X^{I-M})\Big).$$

□

Auch hier gilt wieder wie im vorigen Abschnitt, daß ein global zu Q äquivalentes Martingalmaß nicht existieren muß. Wie im Beweis von Satz 8.3 ergibt sich als Kandidat für eine Martingalmaßdichte, falls das unendlichdimensionale Wienermaß P äquivalent zu Q ist,

$$\begin{aligned} D^Y &= \exp\Big(-\sum_{i=1}^\infty\int_0^1 h_i(t,X_t^i)\,dX_t^i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty\int_0^1 h_i(t,X_t^i)^2\,dt\Big)\,\frac{dP}{dQ} \\ &= \exp\Big(-\sum_{i=1}^\infty\int_0^1 \Big(h_i(t,X_t^i)+b_i(t,X_t)\Big)\,dX_t^i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^\infty\int_0^1 \Big(h_i(t,X_t^i)+b_i(t,X_t)\Big)^2\,dt\Big). \end{aligned}$$

Hinreichend dafür, daß D^Y wirklich eine Dichte ist, ist wieder die Novikov-Bedingung

$$\mathrm{E}_{Q^M}\Big[\exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^1 \Big(h_i(t,X_t^i)+b_i(t,X_t)\Big)^2\,dt\Big)\Big] < \infty.$$

Dann wird durch

$$\frac{dP^Y}{dQ} := D^Y$$

ein zu Q äquivalentes Martingalmaß P^Y für Y definiert. Auch hier sieht man wieder, daß die Wahrscheinlichkeitsmaße $P^{Y,M}$ Projektionen des Maßes P^Y auf endlich viele Koordinaten sind. In diesem Sinne approximieren die Martingalmaße der bedingten Verteilungen ein globales Martingalmaß.

Wenn man dieses Modell als Finanzmarkt mit unendlich vielen Assets auffaßt, so entsprechen die bedingten Maße Q^M dem Wissen von Insidern, die über den Wertverlauf von Assets außerhalb von M vollständig informiert sind. Aufgrund

der speziellen Struktur des Modells, die Interaktionen nur in den Driften zuläßt, spielt dieses Zusatzwissen für die Martingalmaße $P^{Y,M}$ jedoch keine Rolle. Die Bewertung eines contingent claims C unterscheidet sich für den Insider nur dadurch von der eines Investors ohne Zusatzinformationen, daß ersterer in C die ihm bekannten Wertverläufe einsetzt. Aus Sicht des Nicht-Insiders bewertet, bzw. hedgt der Insider ein anderes Derivat $\widetilde{C}$, benutzt aber das gleiche globale Martingalmaß P^Y. Daher spielen für das Bewerten und Hedgen von contingent claims, die nur von endlich vielen Koordinaten, gegeben durch eine Indexmenge M_0, abhängen, auch nur die Informationen über diese Koordinaten eine Rolle. Dem Insider nützen Kenntnisse über die Pfade aus $I - M_0$ nichts, selbst wenn es Interaktionen zwischen diesen und den Koordinaten in M_0 gibt. In diesem Fall ist also die Bewertung von C unter den bedingten Verteilungen Q^M dieselbe wie unter Q, wenn M_0 eine Teilmenge von M ist. Ist C eine Funktion unendlich vieler Koordinaten von Y, so hängt das asymptotische Verhalten bei wachsendem M von der konkreten Struktur von C ab.

Zum Abschluß betrachten wir ein konkretes Beispiel. Hier sind die Funktionen f_n Exponentialfunktionen. Dies entspricht einem Übergang von Brownscher Bewegung zur geometrischen Brownschen Bewegung bei den Martingalanteilen. Es zeigt daher, daß für die Modellierung von Finanzmärkten typische Prozeße in unserem erweiterten Modell möglich sind.

Beispiel 8.4 Wir nehmen als Indexmenge wieder $I = \{1, 2, \ldots\}$. Sei für $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n(t, x) := \exp(\sigma_n\, x + \beta_n\, t)$$

mit reellen Koeffizienten σ_n und β_n, $\sigma_n \neq 0$. Nach (8.6) ist

$$F^{-1}(t, x_1, x_2, \ldots) = \left(t, \frac{\log(x_1) - \beta_1\, t}{\sigma_1}, \frac{\log(x_2) - \beta_2\, t}{\sigma_2}, \ldots\right).$$

Nach (8.8) ergibt sich als Dynamik für Y^n:

$$dY_t^n = \sigma_n\, Y_t^n\, dW_t^n + \sigma_n\, Y_t^n\, b_t^n(F^{-1}(t, Y_t))\, dt + \left(\frac{1}{2}\,\sigma_n^2 + \beta_n\right)\, Y_t^n\, dt.$$

Wählt man $\beta_n = -\frac{1}{2}\,\sigma_n^2$ für alle n, so reduziert sich die Dynamik auf

$$dY_t^n = \sigma_n\, Y_t^n\, dW_t^n + \sigma_n\, Y_t^n\, b_t^n(F^{-1}(t, Y_t))\, dt.$$

Die in Satz 8.3 eingeführten Funktionen h_n, $(n \in I)$ berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} h_n(t,x) &= \frac{\frac{\partial}{\partial t} f_n(t,x) + \frac{1}{2} f_n''(t,x)}{f_n'(t,x)} \\ &= \frac{\left(\beta_n + \frac{1}{2}\sigma_n^2\right) f_n(t,x)}{\sigma_n f_n(t,x)} \\ &= \frac{\beta_n}{\sigma_n} + \frac{1}{2}\sigma_n. \end{aligned}$$

Wir schreiben daher kurz

$$h_n := \frac{\beta_n}{\sigma_n} + \frac{1}{2}\sigma_n.$$

Die Dichte D^{Y^M} von $P^{Y,M}(\cdot, Y^{I-M})$ zu $P^M(\cdot, X^{I-M})$ ist damit nach Satz 8.3

$$\begin{aligned} D^{Y^M} &= \prod_{n\in M} \exp\left(h_n X_1^n - \frac{1}{2} h_n^2\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n\in M} h_n X_1^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2\right). \end{aligned}$$

Falls

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 < \infty$$

und Q äquivalent zum Wienermaß P auf $C[0,1]^I$ ist, existiert ein zu Q äquivalentes Martingalmaß P^Y für Y und seine Dichte zu Q ist durch

$$\begin{aligned} D &= \mathrm{E}_P\left[\prod_{n=1}^{\infty} \exp\left(h_n X_1^n - \frac{1}{2} h_n^2\right)\right] \frac{dP}{dQ} \\ &= \mathrm{E}_P\left[\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} h_n X_1^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2\right)\right] \frac{dP}{dQ} \end{aligned}$$

gegeben. Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n^2$ eine Konstante ist, ist die Novikov-Bedingung trivialerweise erfüllt. D ist also eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Wenn $\beta_n = -\frac{1}{2}\sigma_n^2$ für alle n ist, so ist $h_n = 0$ für alle n und Y somit bereits unter P ein lokales Martingal.

Die Erweiterung des Modells durch Transformation in diesem Abschnitt funktioniert deshalb, weil in die Funktionen f_n nur jeweils eine Koordinate von X eingeht. Dadurch werden keine zusätzlichen Kopplungen der einzelnen Koordinaten eingeführt. Lässt man hingegen die Funktionen f_n von mehr als einer Koordinate von

X abhängen, so führen die dadurch induzierten Kopplungen in der Volatilität der einzelnen Koordinaten von Y zu Situationen, wie sie in Beispiel 8.1 exemplarisch vorgestellt wurden. Hier wären also die Prozesse unter den bedingten Maßen in der Regel keine Semimartingale mehr.

Kapitel 9

Ein unendlichdimensionales Heath-Jarrow-Morton-Modell

In diesem Kapitel wollen wir ein unendlich-dimensionales Zinsstrukturmodell vorstellen, das eine Verallgemeinerung des Heath-Jarrow-Morton-Modells aus [HJM92] ist. Wir beginnen dabei mit einer kurzen Beschreibung der wesentlichen Elemente einer Modellierung der Zinsstruktur. Ein Zinsstrukturmodell beschreibt die zeitliche Entwicklung der Preise sogenannter *Zero-Coupon-Bonds*. Das sind (abstrakte) Wertpapiere, die eine sichere Auszahlung von 1 in einem zukünftigen Zeitpunkt T (Fälligkeitszeitpunkt) garantieren. Sie entsprechen damit festverzinslichen Wertpapieren, bei denen das eingesetzte Kapital zusammen mit den Zinsen am Schluß des Anlagezeitraums ausgezahlt wird. Der Preis eines solchen Bonds zur Zeit $t < T$, im folgenden mit $B_t(T)$ bezeichnet, ist also das Kapital, das ich im Zeitpunkt t investieren muß, um im Zeitpunkt T eine sichere Auszahlung von 1 zu erhalten. Der Preis $B_t(T)$ entspricht damit einer kontinuierlichen Verzinsung mit einer von t und T abhängigen Zinsrate $Y_t(T)$ (Y für "yield") via

$$Y_t(T) = -\frac{\log B_t(T)}{T-t} \qquad \text{bzw.} \qquad B_t(T) = e^{-Y_t(T)\,(T-t)}.$$

Da beobachtete Zinsraten bzw. Bondpreise in der Regel bei festem Wert von t und variablem T nur langsam fluktuieren, wird für die Modellierung oft angenommen, daß $B_t(T)$ differenzierbar oder zumindest absolutstetig in T ist. Dies führt zur Einführung der "forward rate" $f_t(T)$ durch

$$f_t(T) := -\frac{\partial \log B_t(T)}{\partial T}$$

Damit ist

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^T f_t(u)\,du\right).$$

Die forward rate $f_t(T)$ entspricht damit einem zum Zeitpunkt t festgelegten Zinssatz für eine Verzinsung im Zeitpunkt T über einen infinitesimalen Zeitraum. Speziell ist $r(t) := f_t(t)$ der Zinssatz für eine sofortige Verzinsung über einen infinitesimalen Zeitraum. Der durch

$$\beta_t := \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)$$

definierte "savings account" dient als Diskontfaktor. Man sucht daher zur Bewertung von Zinsderivaten Wahrscheinlichkeitsmaße, unter denen die mit β_t abdiskontierten Bondpreise $B_t(T)$ für jedes T lokale Martingale sind. Wie die hier verwendete Notation und die geforderte Regularität von $B_t(T)$ in T nahelegt, bietet sich hier eine Modellierung von B_t als stochastischer Prozeß in einem geeigneten Funktionenraum an.

Das Heath-Jarrow-Morton-Modell ist eine allgemeine Modellierung der Zinsstruktur mit den forward rates als Basisgrößen durch eine Familie von Prozessen, die stochastische Differentialgleichungen bezüglich einer zugrundeliegenden endlichdimensionalen Brownschen Bewegung erfüllen. Dies liefert ein sehr flexibles Modell in kontinuierlicher Zeit mit stetigen Pfaden. Wie Musiela und Sondermann in [MS93] zeigen, ist diese Darstellung äquivalent zu einer Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Zinsstruktur als stochastischen Prozeß mit Werten in einem geeigneten Funktionenraum. Die stochastische Basis ist dabei durch eine endlichdimensionale Brownsche Bewegung gegeben.

In diesem Kapitel wollen wir diesen Modellansatz dahingehend erweitern, daß als stochastische Basis eine Brownsche Bewegung mit Werten in einem separablen Hilbertraum zugrundegelegt wird. Die Modellierung orientiert sich dabei mehr am Originalmodell von Heath, Jarrow und Morton als an der Variante von Musiela und Sondermann, in der eine andere Parametrisierung (über Restlaufzeiten) verwandt wird. Das heißt, statt T verwenden sie als Funktionsparameter $T - t$. Eine Modellierung mit einer unendlich-dimensionalen Bewegung in der letztgenannten Parametrisierung findet sich in [Fil00]. Auch wenn das hier vorgestellte Modell diesem recht ähnlich ist, gibt es doch genügend Unterschiede, die eine Ausarbeitung des Modells in unserer Parametrisierung rechtfertigen. Vor allem legen wir in unserer Darstellung Wert darauf, daß bei der Ableitung der Dynamik der Bondpreise aus der Dynamik der zugrundeliegenden forward rates im wesentlichen nur die Itôformel verwendet wird.

9.1 Modellierung der Zinsstruktur

Sei W eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in einem separablen Hilbertraum $\widetilde{H}$. Die $\otimes$-quadratische Variation von W sei $\langle\langle W\rangle\rangle_t = t\,C$, für einen Operator $C \in \widetilde{H}\widehat{\otimes}_1\widetilde{H}$ (siehe Abschnitt 2.2). Sei $(e_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Orthonormalbasis von $\widetilde{H}$, die C diagonalisiert. Es gilt also

$$C\,e_n = c_n\,e_n$$

für reelle Zahlen $c_n, n = 1, 2, \ldots$. Wir fixieren einen Zeithorizont $T_0 > 0$.

Der Prozeß der *forward rates* $(f_t)_{0\leq t\leq T_0}$ nehme Werte in einem Hilbertraum K an, der die folgenden Eigenschaften besitze:

i) Die Elemente von K sind stetige Funktionen vom Intervall $[0, T_0]$ nach $\mathbb{R}$;

ii) die Elemente von K sind auch Elemente von $L^2([0, T_0], dt)$;

iii) die Auswertungsabbildungen

$$\begin{array}{rccc} \pi_t: & K & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(t) \end{array}$$

(für $t \in [0, T_0]$) sind stetige Linearformen auf K und es ist

$$\sup_{t\in[0,T_0]} \|\pi_t\| < \infty.$$

Damit sind die Werte $f_t(T)$ wohldefiniert. Tatsächlich benötigen wir nur die Werte $f_t(T)$ für $0 \leq t \leq T \leq T_0$. Ein möglicher Kandidat für K ist der weiter unten eingeführte Raum H, wie in Lemma A.1 gezeigt.

Die Dynamik des Prozesses f sei durch

$$df_t = \alpha_t\,dt + \sigma_t\,dW_t \tag{9.1}$$

gegeben, wobei α und σ previsible Prozesse sind. α ist K-wertig, und $\sigma \in \Lambda^2_{loc}\left(\widetilde{H}, K, W\right)$.

Für einen festen Fälligkeitszeitpunkt T ist der Wert eines Zero-Coupon-Bonds zur Zeit $t \leq T$ durch

$$B_t(T) = \exp\left(-\int_t^{T\vee t} f_t(s)\,ds\right) \tag{9.2}$$

gegeben. Da nach Voraussetzung f insbesondere Werte in $L^2([0,T_0],dt)$ annimmt, ist die Kurve $B_t(\cdot)$ der Bondpreise zur Zeit t ein Element des Hilbertraumes

$$H := \left\{ h : [0,T_0] \mapsto \mathbb{R},\ h \text{ absolutstetig mit } \int_0^{T_0} \dot{h}(t)^2\,dt < \infty \right\}.$$

Das Skalarprodukt auf H ist dabei durch

$$\langle g,h\rangle_H := g(0)\,h(0) + \int_0^{T_0} \dot{g}(t)\,\dot{h}(t)\,dt$$

definiert.

Wir nehmen an, daß der Prozeß f so beschaffen ist, daß

$$r(t) := f_t(t)$$

die Bedingung

$$\int_0^{T_0} r(t)^2\,dt < \infty$$

erfüllt. Dann ist auch der *savings account*

$$\beta_t := \exp\left(\int_0^t r(s)\,ds\right)$$

wohldefiniert. Damit sind die abdiskontierten Bondpreise $Z_t(T)$ durch

$$Z_t(T) := \frac{B_t(T)}{\beta(t)} = \exp\left(-\int_t^T (f_t(s)+f_s(s))\,ds\right)$$

für $0 \le t < T \le T_0$ gegeben. Wir setzen $Z_t(T) = Z_t(t) = \beta_t^{-1}$ für $T < t \le T_0$, nehmen also an, daß bei Fälligkeit des Bondes der Ertrag in den "savings account" investiert wird.

$(Z_t)_{t\in[0,T_0]}$ ist ein stochastischer Prozeß mit Werten in H. Wir wollen als nächstes seine Dynamik aus der von f herleiten. Dazu schreiben wir die Gleichung (9.2) in Operatorschreibweise um. Mit den Operatoren

$$I_t : K \longrightarrow H$$

$$I_t h := \left(T \mapsto \int_t^{T\vee t} h(s)\,ds\right),$$

für $t \in [0,T_0]$, und

$$E : H \longrightarrow H$$

$$E(h) := e^h$$

ist

$$B_t = E(-I_t f_t). \tag{9.3}$$

Im Anhang zeigen wir in Lemma A.3, daß I_t eine stetige lineare Abbildung von K nach Hist, die differenzierbar in t ist (vergleiche dazu auch Korollar 3.7), und E eine glatte Abbildung auf H ist und berechnen die Ableitungen. Wir können daher die Itôformel auf (9.3) anwenden und erhalten mit

$$\begin{array}{rccc} M_f: & H & \longrightarrow & H \\ & g & \mapsto & f\,g \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rccc} M: & H\widehat{\otimes}_2 H & \longrightarrow & H \\ & f\otimes g & \mapsto & f\,g \end{array}$$

$$\begin{aligned} dB_t &= D(E\circ(-I_t))\,f_t\,df_t + \frac{1}{2}\,D^2(E\circ(-I_t))\,f_t\,d\langle\langle f\rangle\rangle_t + \frac{\partial}{\partial t}(E\circ(-I_t))\,f_t\,dt \\ &= -M_{B_t} I_t\,df_t + \frac{1}{2}\,M_{B_t} M\,(I_t\otimes I_t)\,d\langle\langle f\rangle\rangle_t + M_{r_t} B_t\,dt \\ &= -M_{B_t} I_t\,\sigma_t\,dW_t + \left(M_{B_t}\left(-I_t\,\alpha_t + \frac{1}{2}(I_t\,\sigma_t)^{\otimes^2}(C)\right) + r_t B_t\right)dt. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Itôs Produktregel für den abdiskontierten Prozeß Z:

$$\begin{aligned} dZ_t &= d(\beta_t^{-1}\,B_t) \\ &= \beta_t^{-1}\,dB_t + B_t\,d\beta_t^{-1} \\ &= \beta_t^{-1}\,dB_t - r_t\,\beta_t^{-1}\,B_t\,dt \\ &= -M_{Z_t} I_t\,\sigma_t\,dW_t + M_{Z_t}\left(-I_t\,\alpha_t + \tfrac{1}{2}(I_t\,\sigma_t)^{\otimes^2}(C)\right)\,dt. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Wir haben damit die Dynamik von B und Z nur durch Anwenden der Itôformel aus der Dynamik von f abgeleitet. Die in [HJM92] angewandte stochastische Version des Satzes von Fubini ist hier, wie schon in Korollar 3.7 nur ein Spezialfall der Itôformel (für den Operator I_t).

Drückt man für einen festen Fälligkeitszeitpunkt T diese Gleichung im Koordinatensystem $(e_n)_{n=1,2,\ldots}$ aus, so erhält man mit

$$W_t^n := \frac{\langle e_n, W_t\rangle_{\widetilde{H}}}{\sqrt{c_n}}$$

und

$$\sigma_t^n := \langle e_n, \sigma_t \rangle_{\widetilde{H}}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} dZ_t &= -Z_t(T) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_t^T \sigma_t^n(s)\, ds \right) \sqrt{c_n}\, dW_t^n \\ &\quad + Z_t(T) \left(-\int_t^T \alpha_t(s)\, ds + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_t^T \sigma_t^n(s)\, ds \right)^2 c_n \right) dt, \end{aligned}$$

was im endlichdimensionalen Fall mit $c_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zu

$$\begin{aligned} dZ_t &= -Z_t(T) \sum_{i=1}^{n} \left(\int_t^T \sigma_t^i(s)\, ds \right) dW_t^i \\ &\quad + Z_t(T) \left(-\int_t^T \alpha_t(s)\, ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_t^T \sigma_t^i(s)\, ds \right)^2 \right) dt \end{aligned}$$

wird und damit der in [HJM92] gegebenen entspricht.

9.2 Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes

In diesem Abschnitt leiten wir notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz eines zu P äquivalenten Maßes Q her, unter dem der Prozeß der abdiskontierten Bondpreise Z ein lokales Martingal ist.

Da die Brownsche Bewegung W die Darstellungseigenschaft bezüglich der von ihr erzeugten Filtrierung besitzt, hat die Dichte eines zu P äquivalenten Maßes Q auf $\mathcal{F}_t$ die Gestalt

$$\frac{dQ}{dP}_{|\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \phi_s\, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \phi_s \circ C^{\frac{1}{2}} \right\|_{\widetilde{H}}^2 ds \right),$$

mit einem Prozeß $\phi \in \Lambda_{loc}^2(W)$, was insbesondere bedeutet, daß

$$\widetilde{\phi} := \phi_t \circ C^{\frac{1}{2}}$$

für P-fast alle $\omega \in \Omega$ eine stetige Linearform auf $\widetilde{H}$ ist, also einem Element von $\widetilde{H}$ entspricht. Unter Q hat W die Doob-Meyer-Zerlegung

$$dW_t = d\widetilde{W}_t + \widetilde{\phi}_t\, dt,$$

wobei $\widetilde{W}$ eine $\widetilde{H}$-wertige Brownsche Bewegung unter Q mit demselben Covarianzoperator C ist. Aus der Darstellung (9.4) können wir somit als notwendige Bedingung dafür, daß Z ein lokales Q-Martingal ist,

$$I_t\,\sigma_t\,\widetilde{\phi}_t = -I_t\,\alpha_t + \frac{1}{2}(I_t\,\sigma_t)^{\otimes^2}(C),$$

für $t \in [0, T_0]$, ablesen. Dies ist genau dann erfüllt, wenn

$$\alpha_t = -\sigma_t\,\widetilde{\phi}_t + \sigma_t \otimes (I_t\,\sigma_t)(C) \tag{9.5}$$

auf $[t, T_0]$ gilt, da für $h \in K$ und $s \in [0, t]$ $(I_t h)(s) = 0$ ist. Ist W eine n-dimensionale Brownsche Bewegung, so entspricht C der n-dimensionale Einheitsmatrix und (9.5) wird zu

$$\begin{aligned}\alpha_t(T) &= -\sum_{i=1}^{n} \sigma_t^i(T)\,\phi_t(T) + \sum_{i=1}^{n} \sigma_t^i(T) \int_t^T \sigma_t^i(s)\,ds \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \sigma_t^i(T) \left(\phi_t(T) - \int_t^T \sigma_t^i(s)\,ds\right).\end{aligned}$$

Dies ist gerade Gleichung (18) in [HJM92].

Die Existenz eines Prozesses ϕ, der Gleichung (9.5) erfüllt, ist notwendig für die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes Q. Der Kandidat für den Prozeß der progressiven Dichten $\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t}$ ist dann

$$G_t = \exp\left(\int_0^t \phi_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \left\|\widetilde{\phi}_s\right\|_{\widetilde{H}}^2\,ds\right).$$

G ist immer ein lokales Martingal. Für die Existenz von Q ist hinreichend, daß G ein echtes Martingal ist, was äquivalent dazu ist, daß $\mathrm{E}_P[G_{T_0}] = 1$ ist. Eine hinreichende Bedingung dafür ist zum Beispiel durch die Novikov-Bedingung

$$\mathrm{E}_P\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{T_0} \left\|\widetilde{\phi}_s\right\|_{\widetilde{H}}^2\,ds\right)\right] < \infty$$

gegeben. Wir fassen die gewonnenen Resultate in einem Satz zusammen.

Satz 9.1 (Existenz eines Martingalmaßes im HJM-Modell) *Seien die forward rates f und Bondpreise B wie in (9.1) und (9.2) gegeben. Dann sind äquivalent:*

i) Es existiert ein zu P äquivalentes Maß Q unter dem der Prozeß der abdiskontierten Bondpreise $(Z_t)_{t\in[0,T_0]}$ ein lokales Martingal ist.

ii) Es existiert ein Element ϕ in $\Lambda^2_{loc}\left(\widetilde{H}, \mathbb{R}, W\right)$, das die Gleichung

$$\alpha_t = -\sigma_t\,\widetilde{\phi}_t + \sigma_t \otimes (I_t\,\sigma_t)(C)$$

mit $\widetilde{\phi} = \phi \circ C^{\frac{1}{2}}$ erfüllt, und es ist

$$\mathrm{E}_P\left[\exp\left(\int_0^{T_0} \phi_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \left\|\widetilde{\phi}_s\right\|^2_{\widetilde{H}}\,ds\right)\right] = 1.$$

Die Dichte eines äquivalenten Martingalmaßes ist dann durch

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(\int_0^{T_0} \phi_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \left\|\widetilde{\phi}_s\right\|^2_{\widetilde{H}}\,ds\right)$$

gegeben.

Kapitel 10

Der Potential-Ansatz für Zinsstrukturmodelle nach Rogers

In Kapitel 9 haben wir ein Zinsstrukturmodell konstruiert, dessen Basisgrößen die forward rates $f_t(T)$ sind. Davon ausgehend haben wir dann die Dynamik der (abdiskontierten) Bondpreise ermittelt und Bedingungen aufgestellt, die die Dichte eines äquivalenten Martingalmaßes erfüllen muß. Mit dieser Vorgehensweise erhält man ein Modell, für das jede bestehende Zinsstrukturkurve als Startwert dienen kann, da diese einfach in den Startwert f_0 des Modells, der ja selbst eine (relativ frei wählbare) Funktion ist, übertragen werden kann. Andererseits muß man aber auch viele Modellparameter spezifizieren. Alternativ kann man sich fragen, welche Größen man mindestens benötigt, um ein Zinsstrukturmodell aufzustellen, in dem die Bewertung von Derivaten möglich ist, ohne daß man bereits vor der Konkretisierung des Modells den Anspruch auf Allgemeinheit aufgibt. Dazu muß man sich ansehen, wie der Preis eines contingent claims S mit Fälligkeitszeitpunkt T bestimmt wird. Der Preis ist der Erwartungswert des abdiskontierten contingent claims unter einem (eindeutigen) äquivalenten Martingalmaß Q. Ist also β_t der Diskontfaktor zur Zeit t, so ist der Preis $V_t(S)$ im Zeitpunkt $t < T$ durch

$$V_t(S) = \mathrm{E}_Q\left[\frac{\beta_t}{\beta_T}\, S \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

gegeben. Setzen wir

$$D_t := \frac{dQ}{dP}|\mathcal{F}_t,$$

so können wir $V_t(S)$ auch in der Form

$$V_t(S) = \mathrm{E}_P\left[\frac{\beta_t\, D_T}{\beta_T\, D_t}\, S \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathrm{E}_P\left[\frac{\zeta_T}{\zeta_t}\, S \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right],$$

mit

$$\zeta_t := \frac{D_t}{\beta_t},$$

schreiben. Alles, was wir zur Bewertung von Derivaten brauchen, ist also der Prozeß ζ, in [Rog97] "state-price density" genannt. Der Wert des Zero-Coupon-Bonds mit Fälligkeit T zur Zeit t ist dann durch den Spezialfall $S \equiv 1$ gegeben:

$$B_t(T) = \mathrm{E}_P\left[\frac{\zeta_T}{\zeta_t} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \frac{\mathrm{E}_P[\zeta_T \,|\, \mathcal{F}_t]}{\zeta_t}.$$

Da Dichte und Diskontfaktor im Zeitpunkt 0 jeweils gleich 1 sind, ist auch $\zeta_0 = 1$. Ist β ein Prozeß mit nicht fallenden Pfaden, was nicht-negativen Zinsen entspricht, so ist ζ als Produkt eines Martingals mit einem nicht wachsenden Prozeß ein Supermartingal unter P. Es stellt sich nun die Frage, wie man Kandidaten für ζ konstruieren kann, die es ermöglichen, die Preise von Zero-Coupon-Bonds nicht nur formal als bedingte Erwartung wie oben anzugeben, sondern explizit auszurechnen, was ein erster Schritt ist, um auch den Wert von Derivaten zu bestimmen.

Eine Konstruktionsmethode für ζ wird von Rogers in [Rog97] vorgestellt. Dort wird als stochastische Basis ein Markovprozeß gewählt. Der Prozeß ζ wird dann mittels der Resolvente des Markovprozesses konstruiert. Wir erläutern dieses Verfahren im nächsten Abschnitt und erstellen damit im Anschluß zwei konkrete Modelle, bei denen der zugrundeliegende Markovprozeß eine unendlichdimensionale Brownsche Bewegung ist.

10.1 Das Konstruktionsverfahren

In diesem Abschnitt stellen wir das Verfahren zur Konstruktion von Zinsstrukturmodellen nach Rogers (siehe [Rog97]) vor. Wir betrachten dazu einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ und auf diesem Raum einen zeitlich homogenen Markovprozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{X}$.

Definition 10.1 (Resolvente) Die *Resolvente* R_α ($\alpha > 0$) eines zeitlich homogenen Markovprozesses $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{X}$ ist gegeben durch

$$(R_\alpha f)(x) = \mathrm{E}_x\Big[\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, f(X_t)\, dt\Big]$$

für jeden Startpunkt $x \in \mathcal{X}$ und beschränktes meßbares $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$.

Näheres dazu und auch zur folgenden Heuristik findet man in Kapitel III von [RW87]. Im allgemeinen kann man die Resolvente nicht in geschlossener Form angeben. Es gilt jedoch heuristisch die Beziehung

$$R_\alpha = (\alpha - G)^{-1}, \tag{10.1}$$

wobei G der (infinitesimale) Generator von X ist. Heuristisch ist diese Beziehung deshalb, weil die Definitionsbereiche von R_α und $(\alpha - G)^{-1}$ nicht übereinstimmen. Dies stellt aber für die folgende Konstruktion kein Problem dar.

Wir konstruieren nun den Prozeß $(\zeta_t)_{t\geq 0}$ wie folgt: Wir wählen ein $\alpha > 0$ und eine meßbare Funktion $g : \mathcal{X} \to [0, \infty)$, für die $R_\alpha g$ auf ganz $\mathcal{X}$ endlich ist. Dann setzen wir

$$\zeta_t = \frac{e^{-\alpha t}\, R_\alpha g(X_t)}{R_\alpha g(X_0)} \tag{10.2}$$

Offenbar ist $\zeta_0 = 1$, und in Abschnitt 2 von [Rog97] wird nachgewiesen, daß ζ ein Supermartingal ist. Damit ist ζ eine mögliche state-price density und legt damit ein Zinsstrukturmodell fest, in dem die Preise von Zero-Coupon-Bonds durch

$$B_t(T) = \frac{\mathrm{E}_P[\zeta_T \,|\, \mathcal{F}_t]}{\zeta_t} \tag{10.3}$$

festgelegt sind. Wie oben erwähnt, ist aber die Resolvente in Gleichung (10.2) im allgemeinen nicht explizit berechenbar. Wir gehen daher einen durch (10.1) motivierten Umweg. Statt g direkt zu spezifizieren, wählen wir eine meßbare Funktion $f : \mathcal{X} \to [0, \infty)$, die im Definitionsbereich von G liegt, und definieren dann g durch

$$g = (\alpha - G) f. \tag{10.4}$$

Damit ist dann $R_\alpha g = f$, und wenn g nicht-negativ ist, können wir ζ wie in (10.2) definieren. Damit erhalten wir

$$\zeta_t = \frac{e^{-\alpha t}\, R_\alpha g(X_t)}{R_\alpha g(X_0)} = \frac{e^{-\alpha t}\, f(X_t)}{f(X_0)}. \tag{10.5}$$

Rogers zeigt in Abschnitt 2 von [Rog97] mit Hilfe der multiplikativen Zerlegung des Supermartingals ζ in ein Martingal und einen Prozeß mit nicht wachsenden Pfaden, daß der Diskontfaktor β die Gestalt

$$\beta_t = \exp\left(\int_0^t r_s \, ds\right)$$

hat, wobei die spot rate r durch

$$r_t = \frac{g(X_t)}{R_\alpha g(X_t)} = \frac{g(X_t)}{f(X_t)} \tag{10.6}$$

gegeben ist (Gleichung (2.7) in [Rog97]). r_t ist somit für jede Wahl von f explizit angebbar. Für allgemeines f können wir jedoch keine geschlossene Form für die Bondpreise angeben. Hier ergibt das Einsetzen von (10.5) in (10.3):

$$B_t(T) = \frac{\mathrm{E}_P[\zeta_T \,|\, \mathcal{F}_t]}{\zeta_t} = e^{-\alpha(T-t)} \, \frac{\mathrm{E}_P[f(X_T) \,|\, \mathcal{F}_t]}{f(X_t)}. \tag{10.7}$$

Der hier noch auszurechnende bedingte Erwartungswert hat als Argument eine Funktion des zugrundeliegenden Markovprozesses, was bereits eine deutliche Vereinfachung im Vergleich zur allgemeinen Form mit beliebigem Supermartingal ζ darstellt. Daher sind für konkretes f die Bondpreise oft explizit angebbar, wie wir auch bei den nun folgenden Beispielen sehen werden.

10.2 Beispiel 1: Quadratisches Funktional

In diesem, wie auch dem folgenden, Beispiel wählen wir als zugrundeliegenden Markovprozeß X eine Brownsche Bewegung mit Werten im Raum der quadratisch summierbaren Folgen ℓ^2. Sei also $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Brownsche Bewegung auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in ℓ^2 und Covarianzoperator $C \in \ell^2 \widehat{\otimes}_1 \ell^2$ (siehe Definition 2.4). Wir bezeichnen die Koordinaten von X mit X^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Wir nehmen an, daß C positiv definit ist (vergleiche dazu Bemerkung 2.5) und bezüglich der Standardbasis $(e_1, e_2, \ldots)$ von ℓ^2 Diagonalgestalt hat, also C die Form

$$C\, e_n = \lambda_n \, e_n,$$

mit $\lambda_n > 0$, besitzt. Das bedeutet insbesondere, daß die Prozesse $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} X^n{}_t\right)_{t\geq 0}$ unabhängige reellwertige Brownsche Bewegungen sind. Daher hat X den (infinitesimalen) Generator

$$G = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}, \tag{10.8}$$

wobei $\dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ die zweite partielle Ableitung nach der n-ten Koordinate bezeichnet.

Wir müssen nun eine Funktion $f : \ell^2 \to [0, \infty)$ wählen, um ein Zinsstrukturmodell nach dem im vorigen Abschnitt vorgestellten Rezept zu konstruieren. Wir setzen

$$f(x) := \langle x, Ax \rangle_{\ell^2} + \gamma,$$

mit einem stetigen, positiv definiten linearen Operator A auf ℓ^2 und $\gamma > 0$. Damit entspricht unser Beispiel einer Verallgemeinerung von Beispiel 3.3 in [Rog97]. Offenbar ist $f(x) \geq \gamma$ für alle $x \in \ell^2$, also ist f insbesondere nicht-negativ. Um nun die Funktion g wie in Gleichung (10.4) zu bestimmen, müssen wir die zweiten partiellen Ableitungen von f bestimmen. Da f eine quadratische Form ist, ist die zweite Ableitung konstant mit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = 2 \langle e_n, Ae_n \rangle_{\ell^2}$$

für alle n. Damit berechnet sich g zu

$$\begin{aligned}
g(x) &= ((\alpha - G)\, f)(x) \\
&= \alpha\, f(x) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) \\
&= \alpha\, f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, \langle e_n, Ae_n \rangle_{\ell^2} \\
&= \alpha\, f(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, ACe_n \rangle_{\ell^2} \\
&= \alpha \langle x, Ax \rangle_{\ell^2} + \alpha\, \gamma - \operatorname{tr}(AC),
\end{aligned}$$

aufgrund der Diagonalgestalt von C. Die Spur von AC ist endlich, da

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, ACe_n \rangle_{\ell^2} \leq \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$$

ist, da $C \in \ell^2 \widehat{\otimes}_1 \ell^2$ ist. Somit ist g wohldefiniert und nicht-negativ, wenn $\operatorname{tr}(AC) \leq \alpha\, \gamma$ ist. Wir können jetzt die einzelnen Elemente unseres Zinsstrukturmodells explizit als Funktionen von X angeben.

Als erstes ergibt sich nach Gleichung (10.5) als state-price density

$$\zeta_t = \frac{e^{-\alpha t} f(X_t)}{f(X_0)} = e^{-\alpha t} \frac{\langle X_t, AX_t \rangle_{\ell^2} + \gamma}{\langle X_0, AX_0 \rangle_{\ell^2} + \gamma}.$$

Für die spot rate r erhalten wir nach Gleichung (10.6):

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{g(X_t)}{f(X_t)} \\ &= \frac{\alpha \langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + \alpha\,\gamma - \operatorname{tr}(AC)}{\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + \gamma} \\ &= \alpha - \frac{\operatorname{tr}(AC)}{\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + \gamma}. \end{aligned}$$

Da $\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} \geq 0$ ist, liegt r immer im Intervall $\left[\alpha - \frac{\operatorname{tr}(AC)}{\gamma},\ \alpha\right)$, ist also für $\alpha > \frac{\operatorname{tr}(AC)}{\gamma}$ strikt positiv und beschränkt.

Als nächstes berechnen wir die Preise von Zero-Coupon-Bonds. Es ist nach Gleichung (10.7)

$$\begin{aligned} B_t(T) &= e^{-\alpha(T-t)}\,\frac{\mathrm{E}_P[\,f(X_T)\,|\,\mathcal{F}_t]}{f(X_t)} \\ &= e^{-\alpha(T-t)}\,\frac{\mathrm{E}_P[\,\langle X_T, AX_T\rangle_{\ell^2}\,|\,\mathcal{F}_t] + \gamma}{\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + \gamma}. \end{aligned}$$

Für die bedingte Erwartung gilt, da das Inkrement $X_T - X_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$ und zentriertist:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P[\,\langle X_T, AX_T\rangle_{\ell^2}\,|\,\mathcal{F}_t] &= \mathrm{E}_P[\,\langle X_t + X_T - X_t, A(X_t + X_T - X_t)\rangle_{\ell^2}\,|\,\mathcal{F}_t] \\ &= \langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + \langle X_t, \mathrm{E}_P[A(X_T - X_t)]\rangle_{\ell^2} + \langle \mathrm{E}_P[X_T - X_t]\,, AX_t\rangle_{\ell^2} \\ &\quad + \mathrm{E}_P[\langle X_T - X_t, A(X_T - X_t)\rangle_{\ell^2}] \\ &= \langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + (T-t)\ \operatorname{tr}(AC). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$B_t(T) = e^{-\alpha(T-t)}\,\frac{\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + (T-t)\ \operatorname{tr}(AC) + \gamma}{\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + \gamma}.$$

Die forward rates $f_t(T)$ sind dann durch

$$\begin{aligned} f_t(T) &= -\frac{\partial}{\partial T}\log B_t(T) = -\frac{\frac{\partial}{\partial T}B_t(T)}{B_t(T)} \\ &= \alpha - \frac{\operatorname{tr}(AC)}{\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2} + (T-t)\ \operatorname{tr}(AC) + \gamma} \end{aligned}$$

gegeben. Wie für die short rate gilt auch für die forward rates

$$f_t(T) \in \left[\alpha - \frac{\operatorname{tr}(AC)}{\gamma},\ \alpha\right)$$

für alle $t \leq T$. Als Bestätigung dafür, daß unsere Berechnungen richtig waren, erhalten wir, wenn wir in der Darstellung von $f_t(T)$ $t = T$ setzen, wieder die bereits früher berechnete Form von r_t.

Unser Modell hat einen Schönheitsfehler: Die Brownsche Bewegung X geht in sämtliche Formeln nur über den eindimensionalen Prozeß $\langle X_t, AX_t\rangle_{\ell^2}$ $(t \geq 0)$ ein. Daher ist unser Modell, trotz seiner unendlichdimensionalen stochastischen Basis, nur ein Ein-Faktor-Modell, angetrieben von einem quadratisch-gaußschen Prozeß. Trotzdem ist dieses Modell ein möglicher Ausgangspunkt für Erweiterungen. Zum einen kann man weitere Faktoren in das Modell einführen, indem man additiv zusätzliche quadratische Terme mit von A verschiedenen Operatoren in f einführt. Zum anderen kann man weitere Modelle mit abgeänderten A und γ auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum betrachten und so ein Modell mit vielen parallelen Währungen untersuchen. Im nächsten Abschnitt konstruieren wir jedoch ein Modell, das die stochastische Basis X komplett nutzt.

10.3 Zweites Beispiel: Summe exponentieller Funktionale

Wir betrachten wieder die ℓ^2-wertige Brownsche Bewegung X wie im vorhergehenden Abschnitt.

Um ein Modell zu bekommen, das den Prozeß X wirklich als unendlichdimensionalen Prozeß involviert, betrachten wir als zweiten Ansatz für f die Gestalt

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n\, e^{\gamma_n x_n} \tag{10.9}$$

mit Koeffizienten $\beta_n > 0$ und γ_n, für die die Bedingungen

$$\sup_n |\gamma_n| < \infty, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$$

erfüllt seien. Da für $x \in \ell^2$ insbesondere $x_n \to 0$ für $n \to \infty$ gilt, sind die Terme $e^{\gamma_n x_n}$ beschränkt. Damit konvergiert die Reihe, da die Koeffizienten β_n

summierbar sind, und f ist wohldefiniert. Da jede Koordinate von x in f nur in jeweils einen Summanden eingeht und die Summanden glatte Funktionen sind, ist f eine zweimal partiell differenzierbare Funktion auf ℓ^2 mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \beta_n \, \gamma_n \, e^{\gamma_n \, x_n}$$

und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = \beta_n \, \gamma_n^2 \, e^{\gamma_n \, x_n}.$$

Damit erhalten wir für g nach Gleichung (10.4) und (10.8):

$$g(x) = ((\alpha - G)\, f)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\alpha - \frac{1}{2}\, \lambda_n \, \gamma_n^2\right) e^{\gamma_n \, x_n}.$$

Wählt man also

$$\alpha \geq \sup_n \frac{1}{2}\, \lambda_n \, \gamma_n^2, \tag{10.10}$$

so ist g eine nicht-negative Funktion.

Mit dieser Wahl von f und g ergibt sich nach Gleichung (10.5) als state-price density

$$\zeta_t = \frac{e^{-\alpha t}\, f(X_t)}{f(X_0)} = e^{-\alpha t}\, \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n \, X_t^n}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n \, X_0^n}}.$$

Für die spot rate r erhalten wir dann

$$\begin{aligned} r_t &= \frac{g(X_t)}{f(X_t)} \\ &= \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\alpha - \frac{1}{2}\, \lambda_n \, \gamma_n^2\right) e^{\gamma_n \, X_t^n}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n \, X_t^n}} \\ &= \alpha - \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \, \lambda_n \, \gamma_n^2 \, e^{\gamma_n \, X_t^n}}{2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n \, X_t^n}}, \end{aligned}$$

wobei X_t^n die n-te Koordinate von X_t ist. Wie im vorigen Beispiel ist α wieder die (nicht erreichte) Obergrenze von r, und unter der Bedingung (10.10) ist die spot rate nicht negativ.

Wir können auch wieder die Preise von Zero-Coupon-Bonds explizit ausrechnen. Es ist nach Gleichung (10.7)

$$\begin{aligned} B_t(T) &= e^{-\alpha(T-t)} \frac{\mathrm{E}_P[\, f(X_T) \,|\, \mathcal{F}_t]}{f(X_t)} \\ &= e^{-\alpha(T-t)} \frac{\mathrm{E}_P\left[\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n X_T^n} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]}{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n X_t^n}} \\ &= e^{-\alpha(T-t)} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, \mathrm{E}_P\left[e^{\gamma_n X_T^n} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]}{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n X_t^n}}, \end{aligned}$$

denn die einzelnen Summanden sind positiv. Wir können daher den Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo Levi) anwenden. Als nächstes nutzen wir wieder aus, daß das Inkrement $X_T - X_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$ ist. Damit können wir die bedingte Erwartung wie folgt weiter umformen:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P\left[e^{\gamma_n X_T^n} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] &= \mathrm{E}_P\left[e^{\gamma_n (X_t^n + X_T^n - X_t^n)} \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\gamma_n X_t^n} \mathrm{E}_P\left[e^{\gamma_n (X_T^n - X_t^n)} \right] \\ &= e^{\gamma_n X_t^n} \, e^{\frac{1}{2}\lambda_n \gamma_n^2 (T-t)} \\ &= e^{\gamma_n X_t^n + \frac{1}{2}\lambda_n \gamma_n^2 (T-t)}, \end{aligned}$$

da $X_T - X_t$ nach Definition 2.4 normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz $\lambda_n \, (T-t)$ ist. Setzen wir dieses Ergebnis in die Formel für den Bondpreis ein, so erhalten wir

$$B_t(T) = e^{-\alpha(T-t)} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n X_t^n + \frac{1}{2}\lambda_n \gamma_n^2 (T-t)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n X_t^n}}.$$

Wie man sieht, werden im Zähler dieser Darstellung von $B_t(T)$ zum Mischen der log-normalverteilten Zufallsvariablen $e^{\gamma_n X_t^n}$ für jede Restlaufzeit $T-t$ verschiedene Gewichte $\beta_n \, e^{\frac{1}{2}\lambda_n \gamma_n^2 (T-t)}$ verwendet. Daher läßt sich die Zinsstruktur hier

nicht wie im vorhergehenden Beispiel durch endlich viele eindimensionale stochastische Prozesse darstellen. In diesem Sinne haben wir es hier mit einem wirklich unendlichdimensionalen Modell zu tun.

Aus den Bondpreisen können wir leicht die forward rates ableiten. Es ist

$$\begin{aligned} f_t(T) &= -\frac{\frac{\partial}{\partial T} B_t(T)}{B_t(T)} \\ &= \alpha - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \lambda_n \, \beta_n \, \gamma_n^2 \, e^{\gamma_n \, X_t^n + \frac{1}{2} \lambda_n \gamma_n^2 \, (T-t)}}{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n \, X_t^n + \frac{1}{2} \lambda_n \gamma_n^2 \, (T-t)}} \\ &= \alpha - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \, \beta_n \, \gamma_n^2 \, e^{\gamma_n \, X_t^n + \frac{1}{2} \lambda_n \gamma_n^2 \, (T-t)}}{2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \, e^{\gamma_n \, X_t^n + \frac{1}{2} \lambda_n \gamma_n^2 \, (T-t)}}. \end{aligned}$$

Auch hier erhält man im Spezialfall $T = t$ wieder die Formel für die spot rate r_t.

Kapitel 11

Ausblick

Zum Abschluß dieser Arbeit wollen wir noch einige Fragestellungen, die an die Ergebnisse dieser Arbeit anknüpfen, vorstellen und auf mögliche Erweiterungen hinweisen. Wir gehen dabei in der Reihenfolge vor, in der die entsprechenden Themen und Resultate in dieser Arbeit vorkommen.

In Kapitel 3 haben wir eine pfadweise Version der Itôformel für stetige Pfade in separablen Hilberträumen präsentiert. Dabei haben wir vorausgesetzt, daß die Funktion F, die auf den zugrundeliegenden Pfad X angewandt wird, zweimal stetig differenzierbar ist. In [FPS95] stellen Föllmer, Protter und Shiryaev eine Erweiterung der eindimensionalen Itôformel für die Brownsche Bewegung vor, bei der F nur einmal differenzierbar mit lokal quadratisch integrierbarer Ableitung f sein muß. Der Kernpunkt ist dabei die Existenz der quadratischen Covariation

$$[f(X), X]_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \in D_n,\, t_i < t} \Big(f(X_{t_{i+1}}) - f(X_{t_i})\Big)\Big(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\Big),$$

wobei $(D_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine asymptotisch dichte Folge von Partitionen des Einheitsintervalls ist. Die Itôformel hat dann die Gestalt

$$F(X_t) = F(X_o) + \int_0^t f(X_s)\, ds + \frac{1}{2}\, [f(X), X]_t\,.$$

Der Limes in der Definition der quadratischen Covariation bezeichnet hier stochastische Konvergenz. es handelt sich also nicht um eine pfadweise Version. Dieses Resultat wird von Föllmer und Protter in [FP00] für eine d-dimensionale Brownsche Bewegung verallgemeinert. Es liegt daher nahe, zu untersuchen, ob sich dieses Ergebnis auch auf den unendlichdimensionalen Fall verallgemeinern lässt.

In Abschnitt 4.4 haben wir die Clark-Formel für eine Brownsche Bewegung mit Werten in einem separablen Hilbertraum bewiesen. Hier gibt es für den endlichdimensionalen Fall eine Erweiterung auf Diffusionen von Haussmann ([Hau78]). Eine Version der Haussmann-Formel für eine unendlichdimensionale Bewegung bzw. das Brownsche Blatt findet sich in [Blu86]. In [Oco84] leitet Ocone eine Verallgemeinerung sowohl der Clark-Formel als auch der Haussmann-Formel her. Dabei erweitert er mit Hilfe von Methoden des Malliavin-Kalküls den Anwendungsbereich beider Formeln von H-differenzierbaren Funktionalen (s. Definition 4.11) auf Funktionale, bei denen die H-Differenzierbarkeit nur noch in einem schwachen Sinn gegeben ist. Es stellt sich daher die Frage, wieweit sich die Anforderungen an das Funktional F auch im unendlichdimensionalen Fall abschwächen lassen.

Bei der in Abschnitt 7.1 hergeleiteten Version des Optional Decomposition Theorems für Semimartingale mit Werten in einem separablen Hilbertraum (Satz 7.5) benötigten wir die Bedingung an die zugrundeliegende Filtrierung, daß alle an diese Filtrierung adaptierte Martingale stetige Pfade besitzen. Wie das Beispiel in Abschnitt 4.1 zeigt, gibt es bei unendlichdimensionalen Semimartingalen im allgemeinen keine optionale Zerlegung. Es bleibt daher zu untersuchen, was die allgemeinste Klasse von Prozessen und/oder Filtrierungen ist, für die sich ein Optional Decomposition Theorem beweisen lässt. In dem erwähnten Beispiel gibt es zwar keine Superhedging-Strategie, aber eine Folge von Strategien deren Werte gegen den Wert des contingent claims konvergieren. Nur die Strategien selbst konvergieren nicht. Man könnte daher untersuchen, ob es zumindest immer eine Folge von Strategien (der Form wie sie beim Optional Decomposition Theorem benutzt werden, also mit Abzug von Geld aus dem Portfolio) gibt, deren Wertprozesse gegen den Wertverlauf

$$V_t = \operatorname*{ess.\,sup}_{Q \in \mathcal{P}} \mathrm{E}_Q[C \mid \mathcal{F}_t]$$

konvergieren. Dies wäre eine asymptotische Form des Optional Decomposition Theorem.

Eine Erweiterung des Optional Decomposition Theorems im unendlichdimensionalen Fall auf allgemeinere Situationen ist auch für die Behandlung von Risikomaßen und effizientem Hedging (Abschnitt 7.2) relevant, da die optimale Strategie hier die Superhedging-Strategie einer Modifikation des betrachteten contingent claims ist. Sie existiert also genau dann, wenn eine optionale Zerlegung des contingent claims existiert. Hier könnte man auch noch eine größere Klasse von Risikomaßen untersuchen, etwa allgemeine konvexe Risikomaße wie sie von Föllmer

und Schied in [FS02a] und Kapitel 4 von [FS02b] behandelt werden. Diese haben im allgemeinen eine Darstellung der Form

$$\rho(X) = \sup_{Q \ll P} (\mathrm{E}_Q[-X] - \alpha(Q))$$

mit einer "penalty function" α. Sofern die Lösung des Problems "Minimiere für einen contingent claim C das Risiko $\rho(V_T(x, \xi) - C)$ unter der Nebenbedingung $x \leq x_0$" auch hier wie in Abschnitt 7.2 durch eine Superhedging-Strategie gegebn ist, lassen sich endlichdimensionale Resultate direkt auf den unendlichdimensionalen Fall übertragen.

Bei Modellierungen der Zinsstruktur mit einer unendlichdimensionalen stochastischen Basis ist es meistens nicht möglich den Wert von Derivaten und Hedging-Strategien explizit auszurechnen. Zumindest für Derivate, deren Wert eine stückweise lineare Funktion der Basiswerte ist, ist das in Modellen möglich, bei denen die forward rates unter dem Martingalmaß eine gaußsche Verteilung besitzen. Auch in Modellen die nach dem Ansatz von Rodgers konstruiert sind (siehe Kapitel 10), in denen die Bondpreise eine explizite Darstellung besitzen, sind die Preise von Derivaten im unendlichdimensionalen Modell meist nicht mehr explizit herzuleiten. Dies liegt unter anderem daran, daß Levelmengen wie etwa $\{B_t(T) \geq c\}$ hier eine sehr komplexe Struktur haben. Es bleibt damit das Problem, ein nicht-gaußsches Zinsstrukturmodell zu konstruieren, daß zum einen eine undendlichdimensionale stochastische Basis besitzt und nicht auf endlich viele Faktoren reduzierbar ist, zum anderen aber die explizite Bewertung von Derivaten zuläßt.

Anhang A

Eigenschaften des in Kapitel 9 verwendeten Hilbertraums H

In diesem Anhang sind einige analytische Aussagen über Funktionale auf dem in Kapitel 9 betrachteten Raum

$$H := \left\{ f : [0, T_0] \mapsto \mathbb{R},\ f \text{ absolutstetig mit } \int_0^{T_0} \dot{f}(t)^2 \, dt < \infty \right\},$$

mit Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_H := f(0)\, g(0) + \int_0^{T_0} \dot{f}(t)\, \dot{g}(t)\, dt,$$

zusammengestellt. Zunächst bestimmen wir die Operatornormen der Auswertungsabbildungen, die wir für spätere Abschätzungen benötigen.

Lemma A.1 *Die Auswertungsabbildungen*

$$\begin{array}{rccc} \pi_t : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & f(t) \end{array}$$

(für $t \in [0, T_0]$) sind stetige Linearformen auf H mit Operatornorm

$$\|\pi_t\| = \sqrt{1 + t}.$$

Beweis: Für $f \in H$ ist

$$\begin{aligned} f(t) &= f(0) + \int_0^t \dot{f}(s)\, ds \\ &= f(0) \cdot 1 + \int_0^{T_0} \dot{f}(s)\, 1_{[0,t]}(s)\, ds \\ &= \langle f, h_t \rangle_H, \end{aligned}$$

mit

$$h_t(s) := 1 + s \wedge t.$$

Daher ist π_t eine stetige Linearform auf H mit

$$\|\pi_t\| = \|h_t\|_H = \left(1 + \int_0^{T_0} 1_{[0,t]}(s)^2 \, ds\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+t}.$$

□

Wir vergleichen jetzt die Norm auf H mit der Supremumsnorm und leiten daraus eine Abschätzung für die Operatornormen von Multiplikationsoperatoren ab.

Lemma A.2 *i) Die Supremumsnorm ist schwächer als die Hilbertraumnorm auf H. Genauer gilt für $f \in H$*

$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{1+T_0} \, \|f\|_H \, .$$

ii) Es gilt

$$\|f\, g\|_H \leq \sqrt{5+4\,T} \, \|f\|_H \, \|g\|_H$$

Für $f \in H$ ist daher der Multiplikationsoperator

$$\begin{array}{rccc} M_f : & H & \longrightarrow & H \\ & g & \mapsto & f\, g \end{array}$$

eine stetige lineare Abbildung auf H mit

$$\|M_f\| \leq a_0 \, \|f\|_H \, ,$$

mit

$$a_0 := \sqrt{5+4\,T_0}.$$

Beweis: Der erste Teil des Lemmas folgt aus

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,T_0]} |\pi_t(f)| \leq \sup_{t\in[0,T_0]} \|\pi_t\| \, \|f\|_H = \sup_{t\in[0,T_0]} \sqrt{1+t} \, \|f\|_H = \sqrt{1+T_0} \, \|f\|_H \, ,$$

mit Lemma A.1. Um den zweiten Teil zu beweisen, betrachten wir zu $f, g \in H$ die Norm des Produktes. Es ist

$$\begin{aligned}
\|f\,g\|_H^2 &= f(0)^2\,g(0)^2 + \int_0^{T_0} ((f\,g)'(t))^2\;dt \\
&= f(0)^2\,g(0)^2 + \int_0^{T_0} \Big((\dot{f}g + f\dot{g})(t)\Big)^2\;dt \\
&\leq f(0)^2\,g(0)^2 + 2\left(\int_0^{T_0} (\dot{f}(t)\,g(t))^2\,dt + \int_0^{T_0} (f(t)\,\dot{g}(t))^2\,dt\right) \\
&\leq f(0)^2\,g(0)^2 + 2\left(\|g\|_\infty^2 \int_0^{T_0} \dot{f}(t)^2\,dt + \|f\|_\infty^2 \int_0^{T_0} \dot{g}(t)^2\,dt\right) \\
&\leq f(0)^2\,g(0)^2 + 4(1+T_0)\;\|g\|_H^2\;\|f\|_H^2\,,
\end{aligned}$$

nach i). Hiermit und mit Lemma A.1 können wir die Norm wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|f\,g\|_H^2 &\leq (\|\pi_0\|^4 + 4(1+T_0))\;\|f\|_H^2\;\|g\|_H^2 \\
&= (5+4T)\;\|f\|_H^2\;\|g\|_H^2\,.
\end{aligned}$$

Daran lässt sich ablesen, daß

$$\|M_f\| \leq \sqrt{5+4\,T_0}\;\|f\|_H$$

ist. Insbesondere ist M_f stetig.

□

Als nächstes zeigen wir die Fréchét-Differenzierbarkeit der in Kapitel 9 bei der Konstruktion des Zinsstrukturmodells auftretenden Abbildungen

$$I_t : K \longrightarrow H$$

(K wie in Abschnitt 9.1)

$$I_t f := \left(T \mapsto \int_t^{T\vee t} f(s)\,ds\right),$$

für $t \in [0, T_0]$, sowie

$$E : H \longrightarrow H$$

$$E(f) := e^f.$$

Lemma A.3 *I_t ist für alle $t \in [0, T_0]$ eine stetige (und damit glatte) lineare Abbildung von K nach H und außerdem ist*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} I_t f\right) = -f(t).$$

E ist ebenfalls glatt und für $f \in H$ ist

$$DE(f) = M_{E(f)}$$

und

$$D^2E(f) = M_{E(f)}\, M,$$

wobei M die (bilineare) Multiplikationsabbildung auf H ist. Für $g_1, g_2 \in H$ ist also

$$D^2E(f)(g_1, g_2) = e^f\, g_1\, g_2.$$

D^2E ist außerdem gleichmäßig stetig auf beschränkten Gebieten.

Beweis: Die Stetigkeit von I_t folgt aus der Bedingung, daß auf K

$$\sup_{t \in [0,T_0]} \|\pi_t\| < \infty$$

ist. Denn dann gilt:

$$\begin{aligned} \|I_t\, f\|_H &= \int_t^{T_0} f(s)^2\, ds \\ &\leq (T_0 - t) \sup_{s \in [t,T_0]} f(s)^2 \\ &\leq (T_0 - t) \sup_{s \in [t,T_0]} \|\pi_s\|\ \|f\|_K\,. \end{aligned}$$

Die Aussage über die Zeitableitung von I_t ergibt sich sofort aus der Definition von I_t und der Stetigkeit der Funktionen in K, da dann

$$\lim_{h \to 0} \frac{(I_{t+h} f)\,(T) - (I_t f)\,(T)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{t+h}^{T} f(s)\, ds - \int_t^T f(s)\, ds \right) = -f(s)$$

ist.

Um die Ableitungen von E zu bestimmen, betrachten wir die Reihendarstellung

$$E(f) = e^f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}.$$

Sie konvergiert natürlich punktweise, aber auch in der Norm, denn aus Lemma A.2, Teil ii) folgt durch Induktion über n:

$$\|f^n\|_H \leq a_0^{n-1} \, \|f\|_H^n \, .$$

Daher gilt

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{f^k}{k!} \right\|_H \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_0^{k-1} \, \|f\|_H^k}{k!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{A.1}$$

Für $f, h \in H$, $h \neq 0$ ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \frac{\left\| E(f+h) - E(f) - M_{E(f)}\, h \right\|_H}{\|h\|_H} &= \frac{\left\| e^f \left(e^h - 1 - h \right) \right\|_H}{\|h\|_H} \\ &\leq a_0 \, \frac{\left\| e^f \right\|_H}{\|h\|_H} \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \right\|_H \\ &\leq a_0 \left\| e^f \right\|_H \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(a_0 \, \|h\|_H\right)^{n-1}}{n!}, \end{aligned}$$

was für $\|h\|_H \to 0$ gegen Null konvergiert. Damit ist $M_{E(f)}$ die Ableitung von E in f. Analog ergibt sich die zweite Ableitung. Für $n = 0$ liefert die Ungleichung (A.1) die Abschätzung

$$\left\| e^f \right\|_H \leq \frac{1}{a_0} \exp(a_0 \, \|f\|_H) \, .$$

Damit ist nach Lemma A.2

$$\|M_{e^f}\| \leq \exp(a_0 \, \|f\|_H)$$

und analog ergibt sich

$$\|M_{e^f - 1}\| \leq \exp(a_0 \, \|f\|_H)$$

Für die Norm der zweiten Ableitung ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \left\| D^2 E(f+h) - D^2 E(f) \right\| &= \|M_{e^f} \, M_{e^h - 1} \, M\| \\ &\leq \|M_{e^f}\| \, \|M_{e^h - 1}\| \, \|M\| \\ &\leq \exp(a_0 \, \|f\|_H) \exp(a_0 \, \|h\|_H) \, \|M\| \end{aligned}$$

Da f in diese Abschätzung nur über seine Norm eingeht, ist $D^2 E$ gleichmäßig stetig auf beschränkten Mengen.

□

Literaturverzeichnis

[BDMKR97] T. Björk, G. Di Masi, Y. Kabanov, and W. Runggaldier. Towards a general theory of bond markets. *Finance and Stochastics*, 1:141–174, 1997.

[Bis86] J.-M. Bismut. Martingales, the malliavin calculus and hypoellipticity under general hörmander's conditions. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie und verw. Gebiete*, 56:S. 469–505, 1986.

[Blu86] J. Blum. *Clark-Haussmann Formulas For The Brownian Sheet.* PhD thesis, ETH Zürich, 1986.

[Del92] F. Delbaen. Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded. *Mathematical Finance*, 2:107–130, 1992.

[Deu85] J. D. Deuschel. *Lissage de diffusion à dimension infinie et leurs propriétés en tout que mesure de Gibbs.* PhD thesis, ETH Zürich, 1985.

[Die75] J. Dieudonné. *Grundzüge der modernen Analysis*, volume 2. Vieweg, 1975.

[DS94] F. Delbaen and W. Schachermayer. A general version of the fundamental theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300:463–520, 1994.

[DS95] F. Delbaen and W. Schachermayer. Arbitrage possibilities in bessel processes and their relations to local martingales. *Probability Theory and Related Fields*, 102:357–366, 1995.

[DS98] F. Delbaen and W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Mathematische Annalen*, 312:215–250, 1998.

[EJ97] E. Eberlein and J. Jacod. On the range of option prices. *Finance and Stochastics*, 1:131–140, 1997.

[EKQ95] N. El Karoui and M. C. Quenez. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. *SIAM J. Control and Optimization*, 33(1):29–66, 1995.

[Fil00] D. Filipović. *Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models*. PhD thesis, ETH Zürich, 2000. Veröffentlicht als Springer LNM 1760 (2001).

[FK98] H. Föllmer and Y. Kabanov. Optional decomposition and lagrange multipliers. *Finance and Stochastics*, 2:69–81, 1998.

[FL99] H. Föllmer and P. Leukert. Quantile hedging. *Finance and Stochastics*, 3:251–273, 1999.

[FL00] H. Föllmer and P. Leukert. Efficient hedging: Cost versus shortfall risk. *Finance and Stochastics*, 4:117–146, 2000.

[Föl81] H. Föllmer. Calcul d'itô sans probabilités. In *Séminaire de Probabilités XV*, number 850 in Lecture Notes in Mathematics, pages 144–150. Springer, 1981.

[FP00] H. Föllmer and P. Protter. On itô's formula for multidimensional brownian motion. *Probability Theory and Related Fields*, 116:1–20, 2000.

[FPS95] H. Föllmer, P. Protter, and A. N. Shiryaev. Quadratic covariation and an extension of itô's formula. *Bernoulli*, 1(1/2):149–169, 1995.

[FS02a] H. Föllmer and A. Schied. Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics*, 6:429–447, 2002.

[FS02b] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. Number 27 in Studies in Mathematics. de Gruyter, 2002.

[Hau78] U. Haussmann. Functionals of itô processes as stochastic integrals. *SIAM J. Control and Optimization*, 16:252–269, 1978.

[HJM92] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1):77–105, 1992.

[HK79] J. M. Harrison and D. M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20:381–408, 1979.

[HP81] J. M. Harrison and S. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochast. Processes Appl.*, 11:215–260, 1981.

[Jac79] J. Jacod. *Calcul Stochastique et Problémes de Martingales*. Number 714 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1979.

[JM99] R. Jarrow and D. Madan. Hedging contingent claims on semimartingales. *Finance and Stochastics*, 3:111–134, 1999.

[JS87] J. Jacod and A. N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Number 288 in Grundlehren der math. Wissenschaften. Springer, 1987.

[Ken94] D. P. Kennedy. The term structure of interest rates as a gaussian random field. *Mathematical Finance*, 4:247–258, 1994.

[Ken97] D. P. Kennedy. Charakterizing gaussian models of the term structure of interest rates. *Mathematical Finance*, 7:107–118, 1997.

[KK96] Y. Kabanov and D. Kramkov. Large financial markets: asymptotic arbitrage and contiguity. *Theory of Probability and its Applications*, 41:222–228, 1996.

[KK98] Y. Kabanov and D. Kramkov. Asymptotic arbitrage in large financial markets. *Finance and Stochastics*, 2:143–172, 1998.

[Kle00] I. Klein. A fundamental theorem of asset pricing for large financial markets. *Mathematical Finance*, 10:443–458, 2000.

[Kra96] D. O. Kramkov. Optional decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. *Probability Theory and Related Fields*, 105:459–479, 1996.

[KS88] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, 1988.

[KS96] I. Klein and W. Schachermayer. Asymptotic arbitrage in non-complete large financial markets. *Theory of Probability and its Applications*, 41:927–934, 1996.

[MP80] M. Metivier and J. Pellaumail. *Stochastic Integration*. Academic Press, 1980.

[MS93] M. Musiela and D. Sondermann. Different dynamical specifications of the term structure of interest rates. *Discussion Paper No. B-260, Universität Bonn*, 1993.

[Oco84] D. Ocone. Malliavin's calculus and stochastic integral representations of functionals of diffusion processes. *Stochastics*, 17:161–185, 1984.

[Pin64] M. S. Pinsker. *Information and Information Stability of Random Variables and Processes*. Holden-Day, INC., 1964.

[Rog97] L. C. G. Rogers. The potential approach to the term structure of interest rates and foreign exchange rates. *Mathematical Finance*, 7(2):157–176, 1997.

[RW87] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*, volume 1. John Wiley and Sons, 1987.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name:	Thomas Schöckel
Geburtsdatum:	28.05.1966 in Köln
Familienstand:	ledig

Schulbildung

1972 - 1976	Kath. Grundschule Köln-Deutz
1976 - 1985	Städt. Hölderlingymnasium Köln-Mülheim
1985	Abitur

Studium

1987 - 1994	Studium der Mathematik als Diplomstudiengang mit Nebenfach Informatik an der Universität Bonn Diplomarbeit im Vertiefungsgebiet „Stochastische Analysis“ über das Thema „Entropieminimierende Maße bei Vorgabe eines Flusses von Erwartungswerten“
18.10.1994	Diplom in Mathematik mit der Gesamtnote „Ausgezeichnet“

Tätigkeiten

10/1989 - 07/1992	Tutor am Mathematischen Institut der Universität Bonn
08/1992 - 07/1994	Studentische Hilfskraft am Institut für angewandte Mathematik in der Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik der Universität Bonn
01/1995 - 03/1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für angewandte Mathematik in der Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik der Universität Bonn
04/1995 - 03/2001	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik, Bereich Stochastik der Humboldt-Universität zu Berlin

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig ohne fremde Hilfe verfaßt und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Thomas Schöckel
15. Oktober 2003