

# Konsistente und konsequente dynamische Risikomaße und das Problem der Aktualisierung

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades  
doctor rerum naturalium  
(Dr. rer. nat.)  
im Fach Mathematik

eingereicht an der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II  
Humboldt-Universität zu Berlin

von  
Frau Dipl.-Math. Sina Tutsch  
geboren am 15. November 1977 in Berlin

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:  
Prof. Dr. Christoph Marksches

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:  
Prof. Dr. Wolfgang Coy

Gutachter:

1. Prof. Dr. Hans Föllmer
2. Prof. Dr. Alexander Schied
3. Prof. Dr. Frank Riedel

eingereicht am: 6. Juli 2006  
Tag der mündlichen Prüfung: 6. November 2006

## Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Dissertation wollen wir einen Beitrag zur Theorie der konvexen Risikomaße und ihrer Dynamik leisten.

Im Kapitel 1 beschäftigen wir uns zunächst mit unbedingten konvexen Risikomaßen. Wir erläutern die Eigenschaften dieser Funktionale und geben einen Überblick über die Möglichkeiten ihrer Darstellung. Anschließend diskutieren wir das Problem ihrer Fortsetzbarkeit.

Im Kapitel 2 erklären wir, wie sich die Darstellungssätze auf bedingte konvexe Risikomaße übertragen lassen, und untersuchen, unter welchen Voraussetzungen eine reguläre bedingte Darstellung existiert. Auf polnischen Räumen beweisen wir die Existenz auf den Klassen der halbstetigen Funktionen. Für das bedingte Average Value at Risk zeigen wir, dass durch eine zugehörige Familie von unbedingten AVaR-Risikomaßen eine reguläre bedingte Darstellung sogar auf der Klasse aller beschränkten Auszahlungsprofile gegeben ist.

Im Kapitel 3 untersuchen wir die intertemporale Struktur von dynamischen konvexen Risikomaßen. Zunächst analysieren wir verschiedene Formen der Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz, welche einem zeitlich rückwärts gerichteten Ansatz der Risikobewertung entsprechen und in der Regel zur Konstruktion von dynamischen konvexen Risikomaßen zu einer vorgegebenen Filtration verwendet werden. Als Alternative formulieren wir einen vorwärts gerichteten Ansatz, bei dem jedes bedingte konvexe Risikomaß als eine Konsequenz aus der vorherigen Risikobewertung und der eingehenden Information konstruiert wird.

Dann diskutieren wir Aktualisierungsvorschriften für konvexe Risikomaße. Wir überprüfen, inwieweit die vorgestellten Bedingungen der zeitlichen Konsistenz in ihrer starken und schwachen Form oder die Bedingung der Konsequenz als Aktualisierungskriterium geeignet sind. In diesem Zusammenhang diskutieren wir abschließend auch das Problem der Unsicherheitsreduzierung nach dem Erhalt von Zusatzinformation.

### **Schlagwörter:**

Dynamische konvexe Risikomaße, Konsistenz, Konsequenz, Aktualisierung

## Abstract

This thesis is a contribution to the theory convex risk measures and their dynamics.

In chapter 1 we consider unconditional convex risk measures. At first, we explain the properties of these functionals and present different possibilities of their representation. Then we discuss the extension problem for convex risk measures.

In chapter 2 we study conditional convex risk measures and their representations. We also analyze under which conditions these functionals admit a regular conditional representation. On polish spaces we prove existence on the classes of semicontinuous functions. For the conditional Average Value at Risk, we show that a regular conditional representation is given by a corresponding family of unconditional AVaR risk measures on the class of all bounded payoff functions.

In Chapter 3 we investigate the intertemporal structure of dynamic convex risk measures. We begin by considering different conditions of acceptance and rejection consistency which correspond to a backward approach of dynamic risk evaluation and which are used for the construction of dynamic convex risk measures with respect to some given filtration. We also introduce an alternative forward approach where each conditional convex risk measure is constructed as a consequence of the initial risk evaluation and the incoming information.

Then we discuss update rules for convex risk measures. We analyze whether the conditions of strong and weak consistency and the condition of consecutivity are appropriate update criteria. In this context, we finally discuss how uncertainty may be reduced after receiving some additional information.

### **Keywords:**

Dynamic convex risk measures, Consistency, Consecutivity, Updating

# Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	ii
Abstract	iii
Einleitung	1
<b>1 Konvexe Risikomaße</b>	<b>9</b>
1.1 Konvexe Risikomaße und ihre Darstellung . . . . .	10
1.1.1 Darstellung bezüglich der Akzeptanzmenge . . . . .	10
1.1.2 Robuste Darstellungen . . . . .	15
1.1.3 Konvexe Risikomaße auf $L^\infty$ . . . . .	19
1.2 Fortsetzbarkeit konvexer Risikomaße . . . . .	24
1.2.1 Methoden der Fortsetzung . . . . .	24
1.2.2 Regularität . . . . .	31
1.2.3 Fortsetzung unter topologischen Voraussetzungen . . . . .	39
<b>2 Bedingte konvexe Risikomaße</b>	<b>49</b>
2.1 Bedingte konvexe Risikomaße und ihre Darstellung . . . . .	50
2.1.1 Darstellung bezüglich der Akzeptanzmenge . . . . .	50
2.1.2 Robuste Darstellungen . . . . .	54
2.2 Reguläre bedingte Darstellungen . . . . .	57
2.2.1 Definition . . . . .	57

2.2.2	Existenz von regulären bedingten Darstellungen . . . .	64
2.2.3	Average Value at Risk . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Dynamische konvexe Risikomaße</b>	<b>80</b>
3.1	Dynamische Risikomaße und ihre intertemporale Struktur . .	82
3.1.1	Definition . . . . .	82
3.1.2	Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz . . . . .	83
3.1.3	Konsequenz . . . . .	92
3.1.4	Robustes Shortfall-Risikomaß . . . . .	96
3.2	Aktualisierung von konvexen Risikomaßen . . . . .	103
3.2.1	Aktualisierungsvorschriften . . . . .	103
3.2.2	Starke Zeitkonsistenz als Aktualisierungskriterium . . .	107
3.2.3	Schwache Akzeptanzkonsistenz als Aktualisierungskri- terium . . . . .	117
3.2.4	Konsequenz als Aktualisierungskriterium . . . . .	121
3.2.5	Reduzierung der Modellunsicherheit . . . . .	125
3.2.6	Reduzierung der Modellunsicherheit für das entropi- sche Risikomaß . . . . .	141
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>155</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>159</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>162</b>
	<b>Selbständigkeitserklärung</b>	<b>163</b>

# Einleitung

Jede Finanzanlage birgt ein gewisses Verhältnis zwischen Chance und Risiko. Je höher die mögliche Rendite einer Anlage ist, desto höher ist in der Regel auch ihr Verlustrisiko. Letzteres gilt es zu bewerten und insbesondere zu bemessen. Banken und Versicherungsinstitute haben bestimmte Auflagen zur Bildung von Kapitalrücklagen oder Sicherheitsreserven, die eventuelle Verluste ihrer Finanzanlagen kompensieren sollen. Als Maß für das Verlustrisiko einer Finanzanlage kann deshalb die Mindesthöhe einer solchen Rückstellung betrachtet werden, die aus der Sicht der zuständigen Aufsichtsbehörde erforderlich ist. Basierend auf dieser Idee entstand in der Finanzmathematik die Theorie der kohärenten und konvexen Risikomaße. Artzner, Delbaen, Eber & Heath [1] erarbeiteten einen axiomatischen Ansatz zur kohärenten Risikobewertung. Föllmer & Schied [18], [19] sowie Frittelli & Rosazza Gianin [22] entwickelten diesen Ansatz weiter, indem sie die Struktur von konvexen Risikomaßen untersuchten.

Eine Finanzanlage wird dabei durch ihr zugehöriges Auszahlungsprofil beschrieben, also durch eine Zufallsvariable  $X$  auf einem messbaren Raum  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Ein konvexes Risikomaß  $\rho$  auf einer Klasse von solchen Auszahlungsprofilen ist definiert als ein reellwertiges, monotonen und konvexes Funktional, das die Eigenschaft der Translationsinvarianz besitzt. Unter geeigneten Zusatzbedingungen erlaubt  $\rho$  eine robuste Darstellung der Form

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)\}.$$

Bei der Risikobewertung betrachtet man demnach eine ganze Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf dem Raum der zukünftigen Szenarien. Das Risiko einer Finanzanlage wird gemäß der robusten Darstellung als der größte erwartete Verlust berechnet, der innerhalb dieser Klasse auftreten kann, abzüglich eines vom jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaß abhängigen Strafterms. Die Penalty-Funktion  $\alpha$  ermöglicht einen differenzierten Vergleich der probabilistischen Modelle. Im ersten Teil von Kapitel 1 setzen wir uns mit den

Eigenschaften von konvexen Risikomaßen auseinander und geben einen umfassenden Überblick über die Möglichkeiten ihrer Darstellung.

In diesem ersten axiomatischen Ansatz zur Risikobewertung wird die Rolle der zur Verfügung stehenden Information nicht berücksichtigt. Deshalb begann man in der finanzmathematischen Literatur, bedingte und dynamische konvexe Risikomaße zu untersuchen. Zu nennen sind hier u. a. die Arbeiten von Artzner, Delbaen, Eber, Heath & Ku [2], [3] und Riedel [31] für den kohärenten Fall sowie Detlefsen & Scandolo [13], Klöppel & Schweizer [26], Föllmer & Penner [17], Weber [40] und Cheridito, Delbaen & Kupper [7] für den allgemeinen konvexen Fall. Das Verlustrisiko einer Finanzanlage  $X$  bewertet man nun zu verschiedenen Zeitpunkten  $t$  in Abhängigkeit von der verfügbaren Information, welche durch eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  repräsentiert wird. Das Risiko  $\rho_t(X)$  ist durch eine  $\mathcal{F}_t$ -messbare Zufallsvariable gegeben. Wie sich die Darstellungssätze für konvexe Risikomaße auf die bedingte Situation übertragen lassen, erklären wir im ersten Teil von Kapitel 2. So erhält man insbesondere unter geeigneten Voraussetzungen für das jeweilige bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_t$  eine robuste Darstellung der Form

$$\rho_t(X) = \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_t} \{ \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_t) - \alpha_t(Q) \}.$$

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation untersuchen wir Beziehungen zwischen unbedingten und bedingten Risikomaßen und analysieren die Rolle der zur Verfügung stehenden Information bei der dynamischen Risikobewertung. Die vier Problemstellungen aus der Theorie der kohärenten und konvexen Risikomaße, mit denen wir uns beschäftigen, wollen wir im Folgenden kurz erläutern.

### **Fortsetzbarkeit von konvexen Risikomaßen**

Im zweiten Teil von Kapitel 1 diskutieren wir das Problem der Fortsetzbarkeit von konvexen Risikomaßen, das sowohl aus ökonomischer als auch aus mathematischer Sicht interessant ist. Wir beantworten damit insbesondere die Frage, wie das Verlustrisiko einer Finanzanlage, deren Auszahlungsprofil nicht im Definitionsbereich eines konvexen Risikomaßes  $\rho$  liegt, in Vereinbarung mit den durch  $\rho$  vorgegebenen Akzeptanzkriterien bewertet werden kann. Gleichzeitig dient diese Diskussion als Vorbereitung für die Untersuchungen zur Existenz einer regulären bedingten Darstellung von bedingten konvexen Risikomaßen, was der zweite Schwerpunkt unserer Arbeit ist.

Wir stellen zwei allgemeine Methoden der Fortsetzung vor. Ein von oben oder

unten stetiges Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  kann durch monotone Approximation auf die Klasse  $\mathcal{X}_\sigma$  bzw.  $\mathcal{X}^\sigma$  fortgesetzt werden, welche alle Auszahlungsprofile enthält, die als Grenzwert einer monoton fallenden bzw. wachsenden Folge in  $\mathcal{X}$  darstellbar sind. Weiter reicht die Methode der inneren oder äußeren Approximation, welche eine Fortsetzung auf der Klasse  $\mathcal{X}^*$  aller Auszahlungsprofile erzeugt. Wir überprüfen in beiden Fällen, ob Eigenschaften wie Konvexität oder Stetigkeit durch die Bildung der Fortsetzung erhalten bleiben.

Im Allgemeinen ist es selbst unter zusätzlichen Stetigkeitsannahmen nicht möglich, ein konvexes Risikomaß eindeutig fortzusetzen. Aus diesem Grund untersuchen wir Regularitätseigenschaften, mit deren Hilfe spezielle Fortsetzungen charakterisiert werden können. Regularität von innen oder außen ist eine aus der Maß- und Integrationstheorie bekannte Forderung, vgl. z. B. Bauer [5] oder König [27], und sie ist eng verwandt mit der Eigenschaft der Kapazitabilität, welche von Choquet [8] zuerst für Mengenfunktionen und später für funktionale Kapazitäten untersucht wurde. In der Diskussion von konvexen Risikomaßen wurden Regularitätseigenschaften unter topologischen Voraussetzungen erstmals von Krätschmer [28] verwendet, um diejenigen konvexen Risikomaße zu beschreiben, die auf der Klasse  $\mathcal{B}$  aller beschränkten Auszahlungsprofile eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$  erlauben.

Seine Ergebnisse sowie Charakterisierungen von konvexen Risikomaßen auf den beschränkten und stetigen Funktionen von Föllmer & Schied [21] benutzen wir, um die Frage zu beantworten, unter welchen Bedingungen ein konvexes und stetiges Risikomaß  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$  in regulärer und stetiger Weise auf die Klasse  $\mathcal{B}$  fortgesetzt werden kann. Durch äußere oder innere Approximation kann  $\rho$  zunächst zu einem konvexen Risikomaß auf den Mengen  $\mathcal{L}_b$  und  $\mathcal{U}_b$  der beschränkten unter- bzw. oberhalbstetigen Funktionen fortgesetzt werden derart, dass  $\rho^*|_{\mathcal{L}_b}$  stetig von unten und  $\rho_*|_{\mathcal{U}_b}$  stetig von oben ist. Danach wechselt man die Approximationsrichtung und setzt das jeweilige Funktional nach  $\mathcal{B}$  fort. Unter geeigneten Voraussetzungen erhält man so die konvexen Risikomaße

$$(\rho^*|_{\mathcal{L}_b})_* \quad \text{und} \quad (\rho_*|_{\mathcal{U}_b})^*,$$

wobei  $(\rho^*|_{\mathcal{L}_b})_*$  stetig von oben und von innen  $\mathcal{L}_b$ -regulär ist und  $(\rho_*|_{\mathcal{U}_b})^*$  stetig von unten und von außen  $\mathcal{U}_b$ -regulär. Falls die Voraussetzungen für die Bildung beider Fortsetzungen erfüllt sind, dann stimmen diese sogar überein.

## Reguläre bedingte Darstellungen von bedingten Risikomaßen

Im zweiten Teil von Kapitel 2 befassen wir uns mit der Frage nach der Existenz einer regulären bedingten Darstellung von bedingten konvexen Risikomaßen  $\rho_0 : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$ . Die Zufallsvariable  $\rho_0(X)$ , die einer Finanzanlage  $X$  durch ein  $\mathcal{F}_0$ -bedingtes konvexes Risikomaß zugeordnet wird, kann bis auf eine  $P$ -Nullmenge als die Mindesthöhe einer erforderlichen Kapitalrücklage für  $X$  in Abhängigkeit von der zum Bewertungszeitpunkt verfügbaren Information  $\mathcal{F}_0$  angesehen werden. Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen  $\rho_0$  eine solche Interpretation auch punktweise erlaubt, d. h. für jedes eintretende Szenario. Unter einer regulären bedingten Darstellung verstehen wir eine Familie  $\{\rho_\omega\}$  von unbedingten konvexen Risikomaßen auf einer geeigneten Klasse  $\mathcal{Y} \subset L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  von Auszahlungsprofilen, so dass die Abbildung  $\omega \mapsto \rho_\omega(X)$  für jedes  $X \in \mathcal{Y}$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$  ist und

$$\rho_0(X)(\omega) = \rho_\omega(X) \quad P\text{-fast sicher.}$$

Im linearen Fall, bei dem  $\rho_0(X)$  für alle Auszahlungsprofile durch die bedingte Erwartung  $\mathbb{E}_P(-X|\mathcal{F}_0)$  definiert ist, existiert auf polnischen Räumen eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit  $(\omega, A) \mapsto P_\omega(A)$ . Das bedeutet, dass durch  $P_\omega$  für jedes Szenario ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  gegeben ist und dass die Abbildung  $\omega \mapsto P_\omega(A)$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  eine Version der bedingten Erwartung  $\mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A|\mathcal{F}_0)$  ist. Durch maßtheoretische Induktion zeigt man, dass die Familie  $\{\rho_\omega\}$  der unbedingten linearen Risikomaße mit  $\rho_\omega(X) = \mathbb{E}_{P_\omega}(-X)$  auf der Klasse  $\mathcal{B}$  aller beschränkten Auszahlungsprofile eine reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0$  liefert.

Für den konvexen Fall beweisen wir die Existenz einer regulären bedingten Darstellung für  $\rho_0$  auf polnischen Räumen zunächst auf den Mengen der ober- bzw. unterhalbstetigen Funktionen. Falls der zugrunde liegende Raum  $\Omega$  der zukünftigen Szenarien kompakt ist, dann folgt dies sofort aus der Separabilität der Menge aller stetigen Funktionen und der Lipschitz-Stetigkeit von bedingten konvexen Risikomaßen bezüglich der Supremumsnorm. Um die Existenz auf nicht-kompakten Räumen zu zeigen, nehmen wir zusätzlich an, dass  $\rho_0$  stetig von unten ist und sich auf einfachen Auszahlungsprofilen der Form  $-K\mathbb{I}_A$  positiv subhomogen bzw. subadditiv verhält. Im Beweis verwenden wir auch die Resultate aus Kapitel 1 zur Fortsetzbarkeit von konvexen Risikomaßen. Im Allgemeinen kann man jedoch selbst unter diesen zusätzlichen Voraussetzungen nicht davon ausgehen, dass  $\rho_0$  eine reguläre bedingte Darstellung auf der gesamten Klasse  $\mathcal{B}$  erlaubt.

Anschließend betrachten wir eine spezielle Klasse von bedingten kohären-

ten Risikomaßen, die starke Zusatzeigenschaften sowie eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{B}$  besitzen. Es handelt sich um bedingte komonotone und verteilungsinvariante Risikomaße, die durch das Choquet-Integral bezüglich einer konvexen Verzerrung der regulären bedingten Wahrscheinlichkeit des Referenzmaßes induziert werden. Das heißt, es gibt eine Familie  $\{f_\omega\}$  von konvexen Verzerrungsfunktionen derart, dass für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{B}$  gilt:

$$\rho_0(X)(\omega) = -\mathbb{E}_{f_\omega \circ P_\omega}(X) \quad P\text{-fast sicher.}$$

Ein Beispiel für ein solches bedingtes kohärentes Risikomaß ist das bedingte Average Value at Risk. Wir zeigen, dass es in Abhängigkeit des eintretenden Szenarios als ein unbedingtes Average Value at Risk in Bezug auf das jeweilige Referenzmaß  $P_\omega$  angesehen werden kann. Dazu beweisen wir, dass es mit dem Choquet-Integral bezüglich einer einfachen konvexen Verzerrung der regulären bedingten Wahrscheinlichkeit übereinstimmt.

### Konsistenz und Konsequenz von dynamischen Risikomaßen

In der Literatur zu dynamischen konvexen Risikomaßen wird derzeit diskutiert, welche Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zeitpunkten bei der Bewertung des Risikos zu fordern sind und welche Relationen sich daraus für die Akzeptanzmengen oder die darstellenden Penalty-Funktionen ableiten lassen. Dies ist der dritte Schwerpunkt unserer Arbeit. Grundsätzlich kann das Problem aus zwei verschiedenen Perspektiven betrachtet werden.

Bei der Konstruktion eines dynamischen konvexen Risikomaßes  $\{\rho_t\}$  zu einer vorgegebenen Informationsstruktur  $\{\mathcal{F}_t\}$  verwendet man Bedingungen der zeitlichen Konsistenz, wonach zu jedem Bewertungszeitpunkt gewisse Maßgaben des bedingten konvexen Risikomaßes  $\rho_{t+1}$  in Bezug auf die Akzeptanz oder Ablehnung von Risiken bereits durch das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_t$  berücksichtigt werden sollen. Dies entspricht einem zeitlich rückwärts gerichteten Ansatz der Risikobewertung.

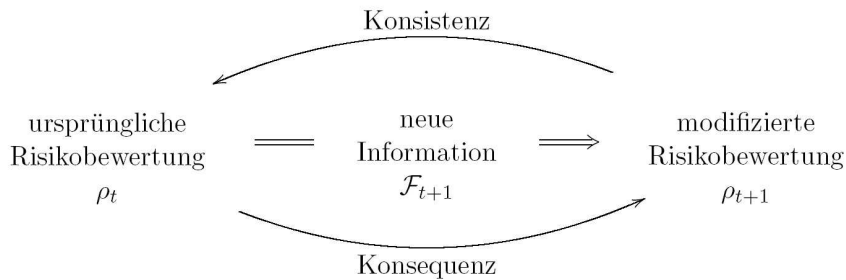
Die starke Form der Zeitkonsistenz, die von Artzner, Delbaen, Eber, Heath & Ku [2], [3] und Riedel [31] im kohärenten Fall und von Detlefsen & Scandolo [13], Klöppel & Schweizer [26], Föllmer & Penner [17] und Cheridito, Delbaen & Kupper [7] im konvexen Fall untersucht wurde, ist äquivalent zur Gültigkeit einer Rekursionsgleichung, nämlich dass  $\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$  für alle Auszahlungsprofile.

Weber [40] betrachtet auch schwächere Konsistenzbedingungen für dynami-

sche konvexe Risikomaße. Dabei unterscheidet er zwei Formen und benutzt jeweils eine Bedingung, um Beziehungen in Bezug auf die Akzeptanz bzw. Ablehnung von Risiken zwischen den einzelnen Bewertungszeitpunkten zu beschreiben. Die schwache Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz sind notwendige Bedingungen für die starke Zeitkonsistenz und äquivalent zur Gültigkeit der Ungleichungen  $\rho_t(X + \rho_{t+1}(X)) \leq 0$  bzw.  $\rho_t(X + \rho_{t+1}(X)) \geq 0$ . Roorda & Schumacher [33] untersuchen diese Konsistenzbedingungen im kohärenten Fall.

Falls hingegen die Filtration im Voraus nicht genau festgelegt ist oder falls sie im Laufe der Zeit erweitert wird, dann muss ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_t$  nach dem Erhalt von zusätzlicher Information  $\mathcal{F}_{t+1}$  nach geeigneten Kriterien modifiziert bzw. aktualisiert werden. Das bedeutet, dass das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_{t+1}$  so gewählt werden muss, dass die Bewertung des Verlustrisikos der Finanzanlagen sowohl mit den ursprünglichen Bewertungsmaßgaben durch  $\rho_t$  als auch mit der eingehenden Information vereinbar ist. Dieses Aktualisierungsproblem verlangt einen zeitlich vorwärts gerichteten Ansatz der Risikobewertung. Dieser Aspekt wurde in der Literatur über dynamische konvexe Risikomaße bisher noch nicht systematisch berücksichtigt.

Wir untersuchen die intertemporale Struktur von dynamischen konvexen Risikomaßen in diskreter Zeit im ersten Teil von Kapitel 3. Zuerst analysieren wir verschiedene zeitlich rückwärts gerichtete Formen der Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz bezüglich einer gewissen Testklasse, welche den Grad der Konsistenz bestimmt. Die starken und schwachen Konsistenzbedingungen der oben genannten Autoren entsprechen den beiden extremen Testklassen, die alle bzw. nur die konstanten Auszahlungsprofile enthalten. Als Alternative formulieren wir danach einen zeitlich vorwärts gerichteten Ansatz, bei dem zu jedem Zeitpunkt das jeweilige bedingte konvexe Risikomaß als eine Konsequenz aus der ursprünglichen Risikobewertung und der eingehenden Information konstruiert wird.



Im linearen Fall der bedingten Erwartung stimmen der rückwärts und der vorwärts gerichtete Ansatz stets überein. Im allgemeinen konvexen Fall unterscheiden sie sich, was wir anhand der robusten Shortfall-Risikomaße veranschaulichen. Wir zeigen für diese Beispielklasse, wie sich Veränderungen in Bezug auf Risikoaversion oder Unsicherheit gegenüber dem zugrunde liegenden probabilistischen Modell im Laufe der Zeit im Sinne einer konsistenten oder konsequenten dynamischen Risikobewertung interpretieren lassen.

### Aktualisierung von konvexen Risikomaßen

Das Aktualisierungsproblem, das als Motivation für die Formulierung eines zeitlich vorwärts gerichteten Ansatzes der dynamischen Risikobewertung diente, ist der vierte Schwerpunkt unserer Arbeit und wird im zweiten Teil von Kapitel 3 diskutiert. Wir betrachten die Situation, bei der wir das Verlustrisiko von Finanzanlagen zunächst mit Hilfe eines unbedingten konvexen Risikomaßes  $\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  bewerten und dann eine beliebige Zusatzinformation  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  erhalten. Wir untersuchen Aktualisierungsvorschriften

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \mapsto \rho_{\mathcal{F}_0} \in \mathcal{R}_0,$$

also Abbildungen, die in Abhängigkeit vom ursprünglich verwendeten Risikomaß  $\rho$  jeder in  $\mathcal{F}$  enthaltenen  $\sigma$ -Algebra ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_{\mathcal{F}_0} : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$  zuordnen. Die Frage lautet, nach welchen Kriterien wir unsere Risikobewertung aktualisieren sollen, so dass das zugehörige bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_{\mathcal{F}_0}$  sowohl mit den bisherigen Bewertungsmaßgaben als auch mit der nun zur Verfügung stehenden Information vereinbar ist. Wir überprüfen, inwieweit die vorgestellten Bedingungen der starken Zeitkonsistenz, der schwachen Akzeptanzkonsistenz oder der Konsequenz als Aktualisierungskriterien gewählt werden können.

Die starke Zeitkonsistenz ist im Allgemeinen nicht als Aktualisierungskriterium geeignet. Unter gewissen Stetigkeits- und Monotoniebedingungen zeigen wir, dass ein konvexes Risikomaß  $\rho$ , das bei jeder Zusatzinformation  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  so aktualisiert werden kann, dass  $\rho$  und  $\rho_{\mathcal{F}_0}$  stark zeitkonsistent sind, nur von seinen Werten auf einfachen Auszahlungsprofilen der Form  $x\mathbb{I}_A$  abhängt. Im kohärenten Fall beweisen wir, dass die Existenz einer stark zeitkonsistenten Aktualisierungsvorschrift sogar die Linearität von  $\rho$  impliziert. Dieses Resultat war bisher nur im Spezialfall der Choquet-Integrale bekannt, die im Kontext der Nutzentheorie auftreten, vgl. Yoo [41].

Im Gegensatz dazu lässt sich ein konvexes Risikomaß nach den beiden anderen Kriterien sehr wohl aktualisieren. Sind  $\rho$  und  $\rho_{\mathcal{F}_0}$  schwach akzeptanz-

konsistent, dann bedeutet dies unter Umständen jedoch eine Verschärfung der Bewertungskriterien. Das ist nicht der Fall, wenn  $\rho_{\mathcal{F}_0}$  als eine Konsequenz aus  $\rho$  und  $\mathcal{F}_0$  konstruiert wird. Da diese Aktualisierungskriterien ein zugehöriges bedingtes konvexes Risikomaß für gewöhnlich nicht eindeutig charakterisieren, untersuchen wir für beide Fälle die Existenz einer Aktualisierungsvorschrift, die unter dem jeweiligen Kriterium die schwächsten bzw. die strengsten Akzeptanzbedingungen verwendet.

Bei einer konsequenten Aktualisierung eines konvexen Risikomaßes  $\rho$  kann man nach dem Erhalt von zusätzlicher Information jedes einzelne probabilistische Modell, das bei der ursprünglichen Risikobewertung berücksichtigt wurde, daraufhin überprüfen, ob es auch in Zukunft noch berücksichtigt werden soll. Unter Umständen kann Unsicherheit so reduziert werden. Wir stellen in einem einfachen Rahmen eine Aktualisierungsmethode vor, nach der solche Entscheidungen getroffen werden können. Es werden nur solche Modelle beibehalten, unter denen die Wahrscheinlichkeit des eintretenden Ereignisses gewissen Restriktionen genügt. Die Idee für diese Methode haben wir aus der Theorie der nicht-additiven Mengenfunktionen übernommen, wo man das Problem der Aktualisierung schon seit längerer Zeit diskutiert, vgl. u. a. die Arbeiten von Dempster [10] und Shafer [36], Walley [37], Fagin & Halpern [16], Gilboa & Schmeidler [23] oder Denneberg [11].

Abschließend beschäftigen wir uns mit der Aktualisierung im entropischen Fall. Das entropische Risikomaß erlaubt eine stark zeitkonsistente Aktualisierungsvorschrift. Dennoch kann man sich nach dem Erhalt einer gewissen Zusatzinformation dafür entscheiden, die Menge der zu berücksichtigenden probabilistischen Modelle zu verkleinern. Wegen der speziellen Struktur der minimalen Penalty-Funktion steht dieses Problem der Unsicherheitsreduzierung für jedes Auszahlungsprofil  $X$  in direktem Zusammenhang mit einem Entropie-Minimierungsproblem vom Typ:

$$\text{Minimiere } H_0(Q|Q_X) \quad \text{über } Q \in \mathcal{Q} !$$

Dabei bezeichnet  $Q_X$  das Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte  $dQ_X/dP = e^{-X} \cdot \text{const}$ . Wir diskutieren das Problem in der unbedingten Situation und konzentrieren uns besonders auf den Fall, bei dem  $\mathcal{Q}$  durch den Kern einer konvexen Verzerrung des Referenzmaßes  $P$  gegeben ist. Unter Verwendung von Existenzaussagen von Liese & Vajda [30] und Charakterisierungen von Goll & Rüschemdorf [24] zeigen wir, dass unter diesen Bedingungen für eine einfache Zufallsvariable der eindeutige Minimierer der relativen Entropie immer von der Form  $Q_{g(X)}$  ist mit Dichte  $dQ_{g(X)}/dP = e^{-g(X)} \cdot \text{const}$  und einer streng monoton wachsenden und Lipschitz-stetigen Funktion  $g$ .

# Kapitel 1

## Konvexe Risikomaße

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit monetären, kohärenten und konvexen Risikomaßen in einem statischen und unbedingten Modell. Die axiomatische Formulierung dieses Ansatzes zur Bewertung des Verlustrisikos von Finanzanlagen geht auf Artzner, Delbaen, Eber & Heath [1] für den kohärenten Fall sowie auf Föllmer & Schied [20] und Frittelli & Rosazza Gianin [22] für den allgemeinen konvexen Fall zurück.

Der erste Teil dient als Einführung in die Theorie der konvexen Risikomaße und soll helfen, Bedingungen und Annahmen in den folgenden beiden Kapiteln zu bedingten und dynamischen konvexen Risikomaßen besser zu verstehen. Wir diskutieren die Eigenschaften von konvexen Risikomaßen und ihre Darstellung. Bei der Präsentation der Ergebnisse orientieren wir uns am Buch von Föllmer & Schied [21]. Im Abschnitt 1.1.1 erklären wir zunächst in einem allgemeinen Rahmen den Zusammenhang zwischen konvexen Risikomaßen und ihren Akzeptanz- und Ablehnungsmengen. In den Abschnitten 1.1.2 und 1.1.3 geben wir einen umfassenden Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten der so genannten robusten Darstellung von konvexen Risikomaßen auf dem linearen Raum aller messbaren und beschränkten Funktionen mittels einer Penalty-Funktion, wobei im Abschnitt 1.1.3 die Existenz eines Referenzmaßes auf dem Raum der möglichen Szenarien vorausgesetzt wird.

Im zweiten Teil befassen wir uns mit dem Problem der Fortsetzbarkeit von monetären Risikomaßen, das sowohl aus ökonomischer als auch aus mathematischer Sicht interessant ist. Wir beantworten damit die Frage, wie das Verlustrisiko einer Finanzanlage, das nicht im Definitionsbereich eines monetären Risikomaßes  $\rho$  liegt, in Vereinbarung mit den durch  $\rho$  vorgegebenen Akzeptanzkriterien bewertet werden kann. Wir untersuchen auf Ebene der

Funktionale, ob typische Eigenschaften wie Konvexität oder Stetigkeit durch die Bildung einer Fortsetzung erhalten bleiben und ob solche Eigenschaften geeignet sind, um eine Fortsetzung eindeutig zu charakterisieren. Die gewonnenen Resultate wenden wir außerdem im Kapitel 2 bei der Diskussion von regulären bedingten Darstellungen für bedingte konvexe Risikomaße an.

Im Abschnitt 1.2.1 stellen wir allgemeine Methoden der Fortsetzung vor und prüfen, unter welchen Bedingungen die Eindeutigkeit einer Fortsetzung garantiert werden kann. Solche Bedingungen sind jedoch häufig zu stark, deshalb untersuchen wir im Abschnitt 1.2.2 Eigenschaften der Regularität, mit deren Hilfe spezielle Fortsetzungen eines konvexen Risikomaßes charakterisiert werden können. Regularität von innen oder außen ist eine aus der Maß- und Integrationstheorie bekannte Forderung, vgl. z. B. Bauer [5] oder König [27]. In der Diskussion von konvexen Risikomaßen werden diese Eigenschaften erstmals von Krätschmer [28] verwendet. Im Abschnitt 1.2.3. betrachten wir unter topologischen Voraussetzungen reguläre Fortsetzungen von konvexen Risikomaßen, die auf der Klasse aller beschränkten und stetigen Auszahlungsprofile definiert sind.

## 1.1 Konvexe Risikomaße und ihre Darstellung

### 1.1.1 Darstellung bezüglich der Akzeptanzmenge

Es sei  $\Omega$  eine beliebige Menge von zukünftigen Szenarien. Ein *Auszahlungsprofil* ist eine Abbildung  $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , wobei  $\bar{\mathbb{R}}$  die um die beiden Elemente  $-\infty$  und  $+\infty$  erweiterte reelle Zahlenachse bezeichnet. Der Wert  $X(\omega)$  soll als die diskontierte Nettoauszahlung einer Finanzanlage am Ende einer Handelsperiode bei Eintreten des Szenarios  $\omega \in \Omega$  interpretiert werden. Dabei seien auch unendliche Gewinne  $X(\omega) = +\infty$  oder unendliche Verluste  $X(\omega) = -\infty$  zugelassen. Wir fixieren eine Klasse  $\mathcal{X}$  von Auszahlungsprofilen und bewerten das Verlustrisiko eines jeden Auszahlungsprofils mit Hilfe eines so genannten monetären Risikomaßes. Dabei nehmen wir an, dass der Raum  $\mathcal{X}$  alle reellwertigen konstanten Auszahlungsprofile enthält und stabil bezüglich der Addition von Konstanten ist. Das bedeutet, dass  $\mathbb{R} \subset \mathcal{X} = \mathcal{X} + \mathbb{R}$ .

### Monetäre Risikomaße

**Definition 1.1.1.** Eine Abbildung  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt monetäres Risikomaß, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- *Monotonie:*  $\rho(X) \geq \rho(Y)$  für alle  $X, Y \in \mathcal{X}$  mit  $X \leq Y$ ,
- *Translations- oder Cashinvarianz:*  $\rho(X+m) = \rho(X) - m$  für alle  $X \in \mathcal{X}$  und  $m \in \mathbb{R}$ ,
- *Normiertheit:*  $\rho(0) = 0$ .

Der Wert  $\rho(X)$ , der einem Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}$  durch ein monetäres Risikomaß  $\rho$  zugeordnet wird, soll, wie es in der Literatur üblich ist, als Mindestbetrag einer nötigen Rücklage für  $X$  interpretiert werden. Nimmt ein Investor eine Finanzanlage mit dem Auszahlungsprofil  $X$  in sein Portfolio auf, so können dadurch gewisse Zahlungsverpflichtungen entstehen. Diese Risiken muss er gemäß den Forderungen einer Aufsichtsbehörde durch eine zusätzliche risikofreie Anlage der Höhe  $\rho(X)$  kompensieren.

Eine Ausnahme bei dieser Interpretation bilden solche Auszahlungsprofile  $X$ , deren Risiko mit  $\pm\infty$  bemessen wird. Unter unendlich hohem Risiko  $\rho(X) = +\infty$  könnte man vielleicht verstehen, dass das Auszahlungsprofil „vollkommen inakzeptabel“ ist, also dass keine noch so hohe Rücklage das Risiko von  $X$  reduzieren könnte. Eine plausible Erklärung für den Fall  $\rho(X) = -\infty$  ist hingegen schwieriger. Dennoch wollen wir an dieser Stelle unsere Betrachtungen nicht beschränken.

### Konvexität und Kohärenz

Um das Risiko seines Portfolios zu verringern, investiert ein Portfoliomanager in möglichst unterschiedliche Finanzanlagen. In der Theorie der Risikomaße wird dieses Diversifikationsprinzip durch die Forderung der Konvexität umgesetzt. Prüfen wir zunächst, unter welchen Bedingungen konvexe Kombinationen auf Ebene der Auszahlungsprofile und auf Ebene der Funktionswerte wohldefiniert sind.

**Bemerkung 1.1.2.** Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß.

- (i) Ist  $\mathcal{X}$  eine Menge nach oben beschränkter Auszahlungsprofile, d. h., zu jedem  $X \in \mathcal{X}$  existiert eine Konstante  $m \in \mathbb{R}$ , so dass  $X(\omega) \leq m$

für alle  $\omega \in \Omega$ , dann erhalten wir aus den Eigenschaften von  $\rho$ , dass  $\rho(X) \geq \rho(m) = -m$ . Somit ist der Wertebereich von  $\rho$  auf  $\mathcal{X}$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Falls  $\mathcal{X}$  hingegen eine Menge von Auszahlungsprofilen ist, die nach unten beschränkt sind, so bildet  $\rho$  in  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  ab. Wenn beide Voraussetzungen gelten, dann ist das monetäre Risikomaß reellwertig.

(ii) Falls  $\mathcal{X}$  sogar ein linearer Raum von beschränkten Funktionen ist, dann folgt aus Monotonie und Translationsinvarianz, dass ein monetäres Risikomaß  $\rho$  Lipschitz-stetig bezüglich der Supremumsnorm ist, vgl. [21], Lemma 4.3. Für alle Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{X}$  gilt:

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty.$$

Nehmen wir an, dass  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach oben beschränkter Auszahlungsprofile bzw. eine konvexe Menge nach unten beschränkter Auszahlungsprofile ist. Nach obiger Bemerkung ist unter diesen Voraussetzungen die folgende Definition sinnvoll.

**Definition 1.1.3.** Ein monetäres Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt konvexes Risikomaß, falls es die Eigenschaft der

- *Konvexität:*  $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$  für alle  $\lambda \in [0, 1]$

besitzt. Falls  $\mathcal{X}$  sogar ein konvexer Kegel ist, dann nennt man ein konvexes Risikomaß  $\rho$  mit der zusätzlichen Eigenschaft der

- *Positiven Homogenität:*  $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$  für alle  $\lambda \geq 0$

ein kohärentes Risikomaß.

### Akzeptanzmengen

Jedem monetären Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  kann seine *Akzeptanzmenge* zugeordnet werden. Diese enthält alle akzeptablen Positionen, also diejenigen Auszahlungsprofile, die keine Rücklagenbildung erforderlich machen:

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \leq 0\}.$$

Die folgenden beiden Sätze zeigen, dass eine eindeutige Korrespondenz zwischen monetären Risikomaßen und ihren Akzeptanzmengen besteht. In

[21], Propositionen 4.6 und 4.7, findet man die Beweise für den Fall, dass  $\mathcal{X}$  ein linearer Raum von beschränkten Auszahlungsprofilen ist. In der leicht verallgemeinerten Situation dieses Abschnitts ist die Argumentation ganz analog und sei deshalb dem Leser überlassen.

**Satz 1.1.4.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß.*

- (i) *Die zugehörige Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_\rho$  ist nicht leer und solide, d. h., für alle  $X \in \mathcal{A}_\rho$  und  $Y \in \mathcal{X}$  mit  $Y \geq X$  gilt  $Y \in \mathcal{A}_\rho$ . Außerdem ist  $0 = \inf \mathcal{A}_\rho \cap \mathbb{R}$ .*
- (ii) *Das monetäre Risikomaß  $\rho$  erlaubt für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$  die Darstellung*

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}_\rho\}, \quad (1.1)$$

wobei  $\inf \emptyset := +\infty$ .

- (iii) *Falls  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach oben beschränkter Auszahlungsprofile bzw. eine konvexe Menge nach unten beschränkter Auszahlungsprofile ist, so ist das monetäre Risikomaß  $\rho$  genau dann konvex, wenn seine Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_\rho$  konvex ist. Falls  $\mathcal{X}$  zusätzlich ein Kegel ist, so ist  $\rho$  genau dann kohärent, wenn  $\mathcal{A}_\rho$  ein konvexer Kegel ist.*

Die Darstellung eines monetären Risikomaßes  $\rho$  bezüglich seiner Akzeptanzmenge wie in (1.1) unterstützt die Interpretation von  $\rho(X)$  als Mindesthöhe einer erforderlichen Kapitalrücklage für das Auszahlungsprofil  $X$ .

**Satz 1.1.5.** *Es sei umgekehrt  $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  eine Menge von akzeptablen Auszahlungsprofilen, welche solide ist und die Bedingung  $0 = \inf \mathcal{A} \cap \mathbb{R}$  erfüllt. Definiert man*

$$\rho_{\mathcal{A}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wobei  $\inf \emptyset := +\infty$ , dann gilt:

- (i) *Die Abbildung  $\rho_{\mathcal{A}} : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ist ein monetäres Risikomaß.*
- (ii)  *$\mathcal{A}$  ist eine Teilmenge der zugehörigen Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}}}$ .*
- (iii) *Falls sowohl  $\mathcal{X}$  als auch  $\mathcal{A}$  konvexe Mengen nach oben bzw. nach unten beschränkter Auszahlungsprofile sind, so ist  $\rho_{\mathcal{A}}$  ein konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{X}$ . Wenn  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{A}$  sogar konvexe Kegel sind, dann ist  $\rho_{\mathcal{A}}$  ein kohärentes Risikomaß.*

### Konjugation und Ablehnungsmengen

Betrachten wir nun die zu einem monetären Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  gehörige *Ablehnungsmenge*

$$\mathcal{N}_\rho := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho(X) \geq 0\}.$$

Die Bezeichnung ist im Sinne der ökonomischen Interpretation ein wenig irreführend. Die Menge  $\mathcal{N}_\rho$  enthält nicht nur diejenigen Auszahlungsprofile  $X$ , die tatsächlich eine Rücklagenbildung erforderlich machen und deshalb aus der Perspektive einer Aufsichtsbehörde abzulehnen sind, sondern auch solche mit  $\rho(X) = 0$ . Wie die folgende Bemerkung zeigt, kann die Ablehnungsmenge von  $\rho$  bis auf das Vorzeichen als Akzeptanzmenge eines dualen monetären Funktionals angesehen werden.

**Bemerkung 1.1.6.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein monetäres Risikomaß. Wir setzen nun  $\bar{\mathcal{X}} := -\mathcal{X}$  und definieren ein konjugiertes Funktional durch*

$$\bar{\rho}(X) := -\rho(-X) \quad \forall X \in \bar{\mathcal{X}}.$$

*Die Abbildung  $\bar{\rho} : \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$  ist ebenfalls ein monetäres Risikomaß. Es gilt:*

- (i) *Das konjugierte Funktional zu  $\bar{\rho}$  ist durch  $\rho$  gegeben, d. h., dass  $\bar{\bar{\rho}} = \rho$ .*
- (ii) *Für die zugehörigen Akzeptanz- und Ablehnungsmengen gilt  $\mathcal{A}_\rho = -\mathcal{N}_{\bar{\rho}}$  und  $\mathcal{N}_\rho = -\mathcal{A}_{\bar{\rho}}$ .*
- (iii) *Falls  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach oben beschränkter Auszahlungsprofile ist, dann ist  $\bar{\mathcal{X}}$  eine konvexe Menge nach unten beschränkter Auszahlungsprofile. Ist  $\mathcal{X}$  ein linearer Raum, so gilt  $\mathcal{X} = \bar{\mathcal{X}}$ . Außerdem ist  $\rho$  genau dann ein konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{X}$ , wenn  $\bar{\rho}$  ein konkaves Risikomaß auf  $\bar{\mathcal{X}}$  ist. Aufgrund dieser Eigenschaft ist es sinnvoller,  $\bar{\rho}(-\cdot) = -\rho$  als monetäres Nutzenfunktional auf  $\mathcal{X}$  zu interpretieren.*

Indem wir die Sätze 1.1.4 und 1.1.5 auf das konjugierte Funktional  $\bar{\rho}$  anwenden, können wir Zusammenhänge zwischen dem monetären Risikomaß  $\rho$  und seiner Ablehnungsmenge  $\mathcal{N}_\rho$  erklären. So erlaubt  $\rho$  beispielsweise für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$  die Darstellung

$$\rho(X) = \sup\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{N}_\rho\},$$

und die Konvexität der Ablehnungsmenge wäre gleichbedeutend mit der Konkavität von  $\rho$ . Die Ablehnungsmenge  $\mathcal{N}_\rho$  ist für die allgemeine Diskussion von konvexen Risikomaßen weniger geeignet als die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_\rho$ . Wir werden sie jedoch gelegentlich zur Beschreibung von zusätzlichen Eigenschaften heranziehen. In Zukunft werden wir dort, wo Verwechslungen ausgeschlossen sind, die Bezeichnungen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{N}$  verwenden.

### 1.1.2 Robuste Darstellungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten der Darstellung von konvexen Risikomaßen als ein Supremum von linearen Funktionalen. Es sei  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum. Wir wählen den linearen Raum  $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F})$  der beschränkten und messbaren Zufallsvariablen als Klasse aller zu bewertenden Auszahlungsprofile. Versehen mit der Supremumsnorm ist  $\mathcal{B}$  ein Banachraum.  $\mathcal{M}_{1f} := \mathcal{M}_{1f}(\Omega, \mathcal{F})$  bezeichne die Menge der monotonen und endlich-additiven Mengenfunktionen  $Q$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , welche auf  $Q(\emptyset) = 0$  und  $Q(\Omega) = 1$  normiert sind.

#### Robuste Darstellung auf $\mathcal{M}_{1f}$

Wir sagen, ein konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine *robuste Darstellung* auf  $\mathcal{M}_{1f}$ , falls eine so genannte *Penalty-Funktion*  $\alpha : \mathcal{M}_{1f} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  existiert mit

$$\inf_{Q \in \mathcal{M}_{1f}} \alpha(Q) = 0, \quad (1.2)$$

so dass für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{B}$  gilt:

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_{1f}\}. \quad (1.3)$$

Jedes Funktional auf  $\mathcal{B}$ , das mit Hilfe einer Penalty-Funktion wie in (1.2) und (1.3) über einen robusten Ansatz definiert wird, ist ein konvexes Risikomaß. Umgekehrt besagt das folgende Theorem, vgl. Theorem 4.15 in [21], dass tatsächlich jedes konvexe Risikomaß auf  $\mathcal{B}$  eine solche robuste Darstellung besitzt. Die Penalty-Funktion ist im Allgemeinen nicht eindeutig.

**Theorem 1.1.7.** *Jedes konvexe Risikomaß  $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  erlaubt eine robuste Darstellung der Form*

$$\rho(X) = \max\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_{1f}\} \quad \forall X \in \mathcal{B}, \quad (1.4)$$

wobei die Penalty-Funktion für alle  $Q \in \mathcal{M}_{1f}$  gegeben ist durch

$$\alpha_{\min}(Q) := \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_Q(-X). \quad (1.5)$$

Ist  $\rho$  ein kohärentes Risikomaß, dann nimmt die Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}$  nur die Werte 0 und  $+\infty$  an, d. h., es gilt mit  $\mathcal{Q}_{\max} := \{Q \in \mathcal{M}_{1f} \mid \alpha_{\min}(Q) = 0\}$

$$\rho(X) = \max_{Q \in \mathcal{Q}_{\max}} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

Falls  $\alpha$  eine weitere Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_{1f}$  ist, die eine robuste Darstellung von  $\rho$  wie in (1.2) und (1.3) ermöglicht, dann gilt  $\alpha_{\min}(Q) \leq \alpha(Q)$  für alle  $Q \in \mathcal{M}_{1f}$ .

**Robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_1$** 

Von besonderem Interesse sind konvexe Risikomaße, die eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf der Menge  $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$  aller  $\sigma$ -additiven Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  erlauben. Die Existenz einer solchen Darstellung ist eng verbunden mit gewissen Stetigkeitseigenschaften.

Nehmen wir für einen Moment an, dass  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß auf einer beliebigen Klasse von Auszahlungsprofilen ist. Falls für jede monoton wachsende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$  gilt:

$$X := \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in \mathcal{X} \quad \Rightarrow \quad \rho(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n), \quad (1.6)$$

so nennen wir  $\rho$  *stetig von unten* auf  $\mathcal{X}$ . Ist die Bedingung (1.6) hingegen für alle monoton fallenden Folgen in  $\mathcal{X}$  erfüllt, so heißt  $\rho$  *stetig von oben* auf  $\mathcal{X}$ . Für ein konvexes Risikomaß ist die Stetigkeit von unten eine wesentlich stärkere Eigenschaft als die Stetigkeit von oben, vorausgesetzt, dass es auf einem linearen Raum von beschränkten Auszahlungsprofilen definiert ist.

**Lemma 1.1.8.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß auf einem linearen Raum von beschränkten Auszahlungsprofilen. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $\rho$  ist stetig von unten und stetig von oben auf  $\mathcal{X}$ .
- (b)  $\rho$  ist stetig von unten in 0.

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass (b) eine hinreichende Bedingung für (a) ist. Betrachten wir dazu eine monoton wachsende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$  so, dass  $X_n \nearrow X \in \mathcal{X}$ . Da  $\rho$  monoton und konvex ist, erhalten wir für alle  $\lambda \in (0, 1)$

$$\rho(X) \leq \rho(X_n) \leq \lambda \rho\left(\frac{X_n - X}{\lambda}\right) + (1 - \lambda)\rho\left(\frac{X}{1 - \lambda}\right).$$

Nach Voraussetzung konvergiert der erste Summand auf der rechten Seite der Ungleichung für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0, d. h., es ist

$$\rho(X) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n) \leq (1 - \lambda)\rho\left(\frac{X}{1 - \lambda}\right).$$

Für  $\lambda \rightarrow 0$  konvergiert die rechte Seite wegen der Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der Supremumsnorm gegen  $\rho(X)$ , also ist  $\rho$  stetig von unten auf  $\mathcal{X}$ .

Der Nachweis der Stetigkeit von oben ist ähnlich. Wir betrachten nun eine monoton fallende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$  mit  $X_n \searrow X \in \mathcal{X}$ . Für alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt

$$\rho(X_n) \leq \rho(X) \leq \lambda \rho\left(\frac{X - X_n}{\lambda}\right) + (1 - \lambda) \rho\left(\frac{X_n}{1 - \lambda}\right),$$

und der erste Summand auf der rechten Seite der Ungleichung konvergiert nach Voraussetzung für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $\rho$  bezüglich der Supremumsnorm finden wir außerdem eine Konstante  $0 < K < \infty$  derart, dass

$$\rho\left(\frac{X_n}{1 - \lambda}\right) \leq \rho(X_n) + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \cdot K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n) \leq \rho(X) \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \lambda) \rho\left(\frac{X_n}{1 - \lambda}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n).$$

Somit ist  $\rho$  auch stetig von oben auf  $\mathcal{X}$ . □

Wir kehren nun zurück zur eigentlichen Diskussion dieses Abschnitts und betrachten wieder den linearen Raum  $\mathcal{B}$  der beschränkten und messbaren Funktionen als Klasse der zu bewertenden Auszahlungsprofile.

**Theorem 1.1.9.** *Es sei  $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $\rho$  ist stetig von unten auf  $\mathcal{B}$ .
- (b) In der robusten Darstellung (1.4) erfüllt die in (1.5) definierte minimale Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}$  die Bedingung:

$$\alpha_{\min}(Q) < \infty \quad \Rightarrow \quad Q \in \mathcal{M}_1.$$

Falls das konvexe Risikomaß  $\rho$  stetig von unten ist, dann ist jedes endlich-additive Maß, das effektiv zur Bildung des Maximums in der robusten Darstellung (1.4) beiträgt, ein  $\sigma$ -additives Wahrscheinlichkeitsmaß. Diese Richtung des Beweises findet man in [21]. In Proposition 4.21 und Lemma 4.22 wird dort gezeigt, dass für ein konvexes Risikomaß  $\rho$ , das stetig von unten ist, die Niveaumengen  $\Lambda_c := \{\alpha_{\min} \leq c\}$  der zugehörigen minimalen Penalty-Funktion für alle Konstanten  $c > 0$  gleichmäßig  $\sigma$ -additiv sind. Die

Notwendigkeit der Stetigkeit von unten für eine solche robuste Darstellung von  $\rho$  wird in [28] bewiesen, vgl. Proposition 3.

Auf geeigneten topologischen Zustandsräumen folgt aus der Stetigkeit eines konvexen Risikomaßes von unten sogar die Existenz eines Referenzmaßes  $P \in \mathcal{M}_1$ , so dass jedes endlich-additive Maß  $Q \in \mathcal{M}_{1f}$  mit  $\alpha_{\min}(Q) < \infty$  ein bezüglich  $P$  absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Man vergleiche dazu das Theorem 1.1.16.

Eine zweite Möglichkeit der robusten Darstellung durch Wahrscheinlichkeitsmaße besteht darin, die in (1.5) definierte minimale Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}$  in ihrem Definitionsbereich von  $\mathcal{M}_{1f}$  auf  $\mathcal{M}_1$  zu beschränken. Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \quad \forall X \in \mathcal{B}, \quad (1.7)$$

d. h., wann bleibt die robuste Darstellung von  $\rho$  erhalten? Wie die folgende Bemerkung zeigt, ist die Stetigkeit von oben eine notwendige Bedingung.

**Bemerkung 1.1.10.** *Besitzt ein konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  eine robuste Darstellung wie in (1.7), dann ist es stetig von oben, vgl. Lemma 4.20 in [21]. Für eine monoton fallende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{B}$  mit  $X := \lim X_n \in \mathcal{B}$  gilt nämlich nach dem Satz von der monotonen Konvergenz:*

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \sup\{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_Q(-X_n) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup\{\mathbb{E}_Q(-X_n) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n) \leq \rho(X). \end{aligned}$$

Konvexe Risikomaße können verwendet werden, um Unsicherheit gegenüber dem zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  zu modellieren. Eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_1$  wie z. B. in (1.7) macht dies deutlich. Wir gehen davon aus, dass wir die tatsächliche Verteilung eines Auszahlungsprofils  $X$  nicht kennen. Deshalb bewerten wir das Verlustrisiko von  $X$  genau dann als akzeptabel, wenn für jedes probabilistische Modell  $Q \in \mathcal{M}_1$  der mittlere Verlust von  $X$  unter  $Q$  nicht größer als ein Level  $\alpha(Q)$  ist. Die zugehörige Penalty-Funktion  $\alpha$  spiegelt dabei unsere Einschätzung von der „Korrektheit“ des jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaßes wider.

In diesem allgemeinen Rahmen beenden wir die Diskussion der robusten Darstellung. Unter topologischen Voraussetzungen wird in [28] eine weitere notwendige Bedingung bewiesen, die jedes konvexe Risikomaß erfüllen muss, das bezüglich einer Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$  darstellbar ist. Es wird gezeigt, dass

aus der Existenz einer solchen robusten Darstellung die Regularität von innen bezüglich der unterhalbstetigen Funktionen folgt, vgl. Satz 1.2.26. Mit dieser Eigenschaft befassen wir uns ausführlich im zweiten Teil des Kapitels.

### 1.1.3 Konvexe Risikomaße auf $L^\infty$

In diesem Abschnitt fixieren wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , das als Referenzmaß dienen soll. Das heißt, es legt fest, welche Ereignisse als Nullmengen angesehen werden können. Wir betrachten konvexe Risikomaße  $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die folgende zusätzliche Eigenschaft besitzen:

$$X = Y \quad P\text{-f. s.} \quad \Rightarrow \quad \rho(X) = \rho(Y). \quad (1.8)$$

In diesem Fall ist  $\rho$  also auch als ein konvexes Risikomaß auf dem Raum  $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  aller messbaren und  $P$ -fast sicher beschränkten Zufallsvariablen wohldefiniert.

#### Robuste Darstellung auf $\mathcal{M}_1(P)$

**Bemerkung 1.1.11.** *Es sei  $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß mit einer robusten Darstellung wie in (1.4). Wir betrachten ein endlich-additives Maß  $Q \in \mathcal{M}_{1,f}$  und nehmen an, dass es ein Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  gibt mit  $P(A) = 0$  und  $Q(A) > 0$ . Wegen (1.8) gilt  $\rho(-n\mathbb{I}_A) = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und damit*

$$\alpha_{\min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_Q(-X) \geq nQ(A).$$

*Das heißt, sobald  $\alpha_{\min}(Q) < \infty$  ist, muss für alle  $A \in \mathcal{F}$  gelten:*

$$P(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(A) = 0.$$

*Jedoch folgt aus der obigen Bedingung noch nicht, dass  $Q$  auch  $\sigma$ -stetig ist.*

Nach Bemerkung 1.1.10 wissen wir, dass die Eigenschaft der Stetigkeit von oben eine notwendige Bedingung für eine robuste Darstellung durch Wahrscheinlichkeitsmaße wie in (1.7) ist. Unter der Annahme, dass es ein Referenzmaß  $P$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  gibt, so dass (1.8) erfüllt ist, folgt auch die umgekehrte Implikation. Die Bemerkung 1.1.11 besagt weiter, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß bei der Bildung des Supremums in der robusten Darstellung nur dann berücksichtigt werden muss, wenn es absolutstetig bezüglich  $P$  ist. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{M}_1(P)$  die Menge aller absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q \ll P$ . Für den Beweis der folgenden äquivalenten Charakterisierungen verweisen wir auf [21], Theorem 4.31.

**Theorem 1.1.12.** *Es sei  $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a)  $\rho$  besitzt eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1(P)$ .

(b)  $\rho$  erlaubt die robuste Darstellung

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1(P)\} \quad \forall X \in L^\infty. \quad (1.9)$$

Dabei sei die minimale Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}$  für alle absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q \in \mathcal{M}_1(P)$  wie in (1.5) definiert.

(c)  $\rho$  ist stetig von oben.

(d)  $\rho$  besitzt die „Fatou-Eigenschaft“: Für jede beschränkte Folge  $\{X_n\}$  in  $L^\infty$ , die  $P$ -fast sicher gegen  $X \in L^\infty$  konvergiert, gilt

$$\rho(X) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n).$$

(e)  $\rho$  ist unterhalbstetig bezüglich der Schwach\*-Topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$ .

(f) Die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}$  von  $\rho$  ist schwach\* abgeschlossen in  $L^\infty$ .

### Robuste Darstellung auf $\mathcal{M}_e(P)$

Nun erklären wir, unter welchen Bedingungen ein konvexes und von oben stetiges Risikomaß eine robuste Darstellung besitzt, bei der die minimale Penalty-Funktion auf die Menge  $\mathcal{M}_e(P)$  aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q \sim P$  eingeschränkt wird. Eine solche Darstellung fordern wir in Kapitel 3 bei der Diskussion zur Aktualisierung von konvexen Risikomaßen. Die folgende Charakterisierung ergibt sich aus Lemma 3.5 bei [17].

**Lemma 1.1.13.** *Es sei  $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes und von oben stetiges Risikomaß, und  $\alpha_{\min}$  sei definiert wie in (1.5). Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a)  $\rho$  besitzt eine robuste Darstellung durch die auf  $\mathcal{M}_e(P)$  eingeschränkte minimale Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}$ , d. h., es gilt:

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \sim P\} \quad \forall X \in L^\infty. \quad (1.10)$$

(b) In der robusten Darstellung (1.9) gibt es ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  mit  $\alpha_{\min}(Q) < \infty$ .

Außerdem wird in Lemma 3.4 in [17] bewiesen, dass eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_e(P)$  existiert, falls das konvexe Risikomaß stetig von oben und sensitiv im Sinne von (1.11) ist.

**Satz 1.1.14.** *Es sei  $\rho : L^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes und von oben stetiges Risikomaß. Falls  $\rho$  für alle  $A \in \mathcal{F}$  die Bedingung erfüllt:*

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(-\varepsilon \mathbb{I}_A) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (1.11)$$

dann existiert zu jedem  $\delta > 0$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  mit  $\alpha_{\min}(Q) < \delta$ . Insbesondere erlaubt ein solches Risikomaß eine robuste Darstellung (1.10).

**Bemerkung 1.1.15.** *Aus einer robusten Darstellung von  $\rho$  auf  $\mathcal{M}_e(P)$  wie in (1.10) folgt wegen der Normiertheit sofort, dass*

$$\inf_{Q \sim P} \alpha_{\min}(Q) = 0.$$

Falls es ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß gibt, das durch die minimale Penalty-Funktion nicht bestraft wird, d. h.,

$$\exists \quad Q^* \sim P \quad \text{mit} \quad \alpha_{\min}(Q^*) = 0, \quad (1.12)$$

so gilt  $\rho(-\varepsilon \mathbb{I}_A) \geq \varepsilon Q^*(A) > 0$  für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  mit  $P(A) > 0$  und alle  $\varepsilon > 0$ . Das bedeutet, dass  $\rho$  dann auch die Bedingung (1.11) erfüllt.

Das folgende Beispiel zeigt, dass eine robuste Darstellung eines konvexen Risikomaßes  $\rho$  durch äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße wie in (1.10) im Allgemeinen nicht die Sensitivitätsbedingung (1.11) impliziert.

**Beispiel:** Es sei  $Q^* \in \mathcal{M}_1(P)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das nicht äquivalent zu  $P$  ist. Für jedes  $\varepsilon \in (0, 1]$  setzen wir  $Q^\varepsilon := \varepsilon P + (1 - \varepsilon)Q^* \sim P$  und definieren eine Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1(P)$  durch

$$\alpha(Q) := \begin{cases} \varepsilon, & \text{falls } Q = Q^\varepsilon \text{ für ein } \varepsilon \in (0, 1], \\ +\infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Theorem 1.1.12 und Lemma 1.1.13 besitzt das durch  $\alpha$  induzierte konvexe Risikomaß  $\rho$  eine robuste Darstellung (1.10) bezüglich der minimalen

Penalty-Funktion  $\alpha_{\min} \leq \alpha$ . Für alle Auszahlungsprofile  $X \in L^\infty$  gilt:

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1(P)\} \\ &= \max\{\mathbb{E}_P(-X) - 1; \mathbb{E}_{Q^*}(-X)\} \\ &= \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \sim P\}. \end{aligned}$$

Da das Referenzmaß  $P$  nicht absolutstetig bezüglich  $Q^*$  ist, gibt es ein Ereignis  $A \in \mathcal{F}$ , so dass  $Q^*(A) = 0$  und  $P(A) > 0$ . Betrachten wir nun das Auszahlungsprofil  $X^* = -\mathbb{I}_A$ , so ist dieses unter  $\rho$  akzeptabel, denn

$$\rho(X^*) = \max\{P(A) - 1; 0\} = 0.$$

Somit ist die Bedingung (1.11) nicht erfüllt. Ebenso wenig gilt die Bedingung (1.12), denn für jedes äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  haben wir

$$\alpha_{\min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_Q(-X) \geq \mathbb{E}_Q(-X^*) = Q(A) > 0.$$

◇

### Existenz eines Referenzmaßes

Abschließend wollen wir zeigen, dass die Existenz eines Referenzmaßes unter den Voraussetzungen eines *topologischen Zustandsraums* und der Stetigkeit des konvexen Risikomaßes von unten keine zusätzliche Forderung darstellt. In ähnlicher Form gibt es ein solches Resultat bereits in der Theorie der nicht-additiven Mengenfunktionen: Zu jeder konvexen Kapazität  $c$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , die stetig von unten ist, existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , so dass jedes Wahrscheinlichkeitsmaß im Kern  $\mathcal{Q}(c)$  dieser Kapazität absolutstetig bezüglich  $P$  ist.

Wir nehmen an, dass  $\Omega$  ein separabler, metrischer Raum ist, und  $\mathcal{F}$  sei gegeben durch die zugehörige  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen. Wie oben bezeichne  $\mathcal{B}$  den linearen Raum aller beschränkten und messbaren Funktionen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

**Theorem 1.1.16.** *Es sei  $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß und stetig von unten. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P \in \mathcal{M}_1$ , so dass die Bedingung (1.8) erfüllt ist, d. h., dass  $\rho$  als ein konvexes Risikomaß auf  $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  angesehen werden kann.*

**Beweis:** Ein konvexes Risikomaß  $\rho$  auf  $\mathcal{B}$  ist nach Theorem 1.1.9 genau dann stetig von unten, wenn die minimale Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}$  auf  $\mathcal{M}_1$  die folgende Bedingung erfüllt:

$$\alpha_{\min}(Q) < \infty \quad \Rightarrow \quad Q \in \mathcal{M}_1.$$

Wir zeigen, dass unter den gegebenen topologischen Voraussetzungen ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P \in \mathcal{M}_1$  konstruiert werden kann, so dass tatsächlich gilt:

$$\alpha_{\min}(Q) < \infty \quad \Rightarrow \quad Q \in \mathcal{M}_1(P). \quad (1.13)$$

Aus der robusten Darstellung von  $\rho$  folgt dann für alle Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{B}$  mit  $X = Y$   $P$ -fast sicher, dass

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \max\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1(P)\} \\ &= \max\{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1(P)\} \\ &= \rho(Y). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Niveaumengen der minimalen Penalty-Funktion, die für alle  $n \in \mathbb{N}$  definiert seien als

$$\Lambda_n := \{Q \in \mathcal{M}_1 \mid \alpha_{\min}(Q) \leq n\}.$$

Diese Mengen sind beschränkt bezüglich der Totalvariation und auf jedem Niveau gleichmäßig  $\sigma$ -additiv, d. h., für jede absteigende Folge von Ereignissen  $\{A_m\} \subset \mathcal{F}$  mit  $\cap A_m = \emptyset$  gilt:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{\Lambda_n} Q(A_m) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ist nämlich  $\varepsilon > 0$  fixiert, dann wählen wir in Abhängigkeit des entsprechenden Niveaus eine Konstante  $K \geq 1$ , so dass  $n/K \leq \varepsilon/2$ . Mit dieser erhalten wir

$$\begin{aligned} \sup_{\Lambda_n} Q(A_m) - \frac{\varepsilon}{2} &\leq \sup_{\Lambda_n} \left\{ Q(A_m) - \frac{n}{K} \right\} \\ &\leq \sup_{\Lambda_n} \left\{ Q(A_m) - \frac{\alpha_{\min}(Q)}{K} \right\} \\ &\leq \sup_{\mathcal{M}_1} \left\{ Q(A_m) - \frac{\alpha_{\min}(Q)}{K} \right\} \\ &= \frac{\rho(-K\mathbb{I}_{A_m})}{K}. \end{aligned}$$

Da  $\rho$  stetig von unten ist, gibt es einen Index  $m_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $m \geq m_0$

$$\sup_{\Lambda_n} Q(A_m) \leq \frac{\rho(-K\mathbb{I}_{A_m})}{K} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Nach Theorem IV.9.1 von [15] ist jede Niveaumenge  $\Lambda_n$  schwach folgenkompakt im Raum der  $\sigma$ -additiven Maße. Nach Theorem IV.9.2 existiert für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_n \in \mathcal{M}_1$ , so dass jedes Element  $Q \in \Lambda_n$  absolutstetig bezüglich  $P_n$  ist. Definieren wir nun

$$P(A) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(A)}{2^n} \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

so liefert dies das gewünschte Referenzmaß  $P \in \mathcal{M}_1$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} P(A) = 0 & \Leftrightarrow P_n(A) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow Q(A) = 0 \quad \forall Q \in \mathcal{M}_1 \text{ mit } \alpha_{\min}(Q) < \infty. \end{aligned}$$

□

## 1.2 Fortsetzbarkeit konvexer Risikomaße

### 1.2.1 Methoden der Fortsetzung

In diesem Abschnitt stellen wir in einem allgemeinen Rahmen zwei Methoden vor, durch die ein vorgegebenes monetäres Risikomaß auf eine größere Klasse von Auszahlungsprofilen fortgesetzt werden kann. Dazu betrachten wir eine beliebige Menge  $\Omega$  von zukünftigen Szenarien und eine Klasse  $\mathcal{X}$  von Auszahlungsprofilen  $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Letztere sei so gewählt, dass  $\mathbb{R} \subset \mathcal{X} = \mathcal{X} + \mathbb{R}$ . Das bedeutet, dass  $\mathcal{X}$  alle konstanten reellwertigen Auszahlungsprofile enthält und stabil bezüglich der Addition von Konstanten ist. Monetäre Risikomaße  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  seien wie im ersten Teil dieses Kapitels als monotone, translationsinvariante und normierte Abbildungen definiert.

#### Fortsetzung durch monotone Approximation

Zunächst untersuchen wir die Methode der Fortsetzung durch monotone Approximation. Wir nehmen an, dass die Menge  $\mathcal{X}$  eine Verbandsstruktur

besitzt, d. h., dass für zwei Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{X}$  auch das punktweise gebildete Minimum  $X \wedge Y$  und das punktweise gebildete Maximum  $X \vee Y$  zu  $\mathcal{X}$  gehören. Mit  $\mathcal{X}_\sigma$  bezeichnen wir die Menge aller Auszahlungsprofile  $X$ , für die eine monoton fallende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$  existiert, so dass  $X(\omega) = \lim X_n(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Analog definieren wir  $\mathcal{X}^\sigma$  als die Menge derjenigen Auszahlungsprofile, die als Grenzwert einer monoton wachsenden Folge in  $\mathcal{X}$  darstellbar sind. Diese Klassen von Auszahlungsprofilen können ebenfalls für die Diskussion von monetären oder konvexen Risikomaßen verwendet werden, wie die folgende Bemerkung zeigt.

**Bemerkung 1.2.1.** *Es sei  $\mathcal{X}$  eine Klasse von Auszahlungsprofilen wie oben.*

- (i) *Für  $\mathcal{X}_\sigma$  gilt die Bedingung  $\mathbb{R} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}_\sigma = \mathcal{X}_\sigma + \mathbb{R}$ , und die Verbandsstruktur überträgt sich von  $\mathcal{X}$  auf  $\mathcal{X}_\sigma$ . Außerdem ist jede Grenzfunktion  $X$  einer monoton fallenden Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}_\sigma$  in  $\mathcal{X}_\sigma$  enthalten, d. h., es ist  $(\mathcal{X}_\sigma)_\sigma = \mathcal{X}_\sigma$ . Falls  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge von Auszahlungsprofilen ist, die nach oben beschränkt sind, dann ist auch  $\mathcal{X}_\sigma$  konvex und jedes zu  $\mathcal{X}_\sigma$  gehörige Auszahlungsprofil nach oben beschränkt.*

*Beweis von  $(\mathcal{X}_\sigma)_\sigma = \mathcal{X}_\sigma$ : Zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir eine monoton fallende Folge  $\{Y_m^n\} \subset \mathcal{X}$  derart, dass  $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m^n = X_n$ . Definieren wir nun die monoton fallende Folge  $Z_m := \min(Y_m^1, \dots, Y_m^n)$ , so gilt  $X \leq \lim Z_m \leq X_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d. h., dass  $X$  als Grenzfunktion der Folge  $\{Z_m\} \subset \mathcal{X}$  darstellbar ist.*

- (ii) *Genauso erfüllt  $\mathcal{X}^\sigma$  die Bedingung  $\mathbb{R} \subset \mathcal{X} \subset \mathcal{X}^\sigma = \mathcal{X}^\sigma + \mathbb{R}$ . Die Menge bildet einen Verband und enthält jede Grenzfunktion einer monoton wachsenden Folge in  $\mathcal{X}^\sigma$ , d. h., es ist  $(\mathcal{X}^\sigma)^\sigma = \mathcal{X}^\sigma$ . Falls  $\mathcal{X}$  konvex ist und jedes zu  $\mathcal{X}$  gehörige Auszahlungsprofil nach unten beschränkt, dann ist  $\mathcal{X}^\sigma$  eine konvexe Menge nach unten beschränkter Auszahlungsprofile.*

Die Methode der Fortsetzung durch monotone Approximation ist für konvexe Risikomaße geeignet, die stetig von oben oder stetig von unten sind.

**Satz 1.2.2.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß.*

- (i) *Falls  $\rho$  stetig von oben ist, dann gibt es genau ein monetäres Risikomaß  $\rho_\sigma : \mathcal{X}_\sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , das stetig von oben ist und eine Fortsetzung von  $\rho$ , d. h.,  $\rho_\sigma|_{\mathcal{X}} = \rho$ . Ist  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach oben beschränkter Auszahlungsprofile und  $\rho$  konvex, so ist  $\rho_\sigma$  konvex auf  $\mathcal{X}_\sigma$ .*
- (ii) *Falls  $\rho$  stetig von unten ist, so gibt es genau ein monetäres Risikomaß  $\rho^\sigma : \mathcal{X}^\sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , das stetig von unten ist und eine Fortsetzung von  $\rho$ ,*

d. h.,  $\rho^\sigma|_{\mathcal{X}} = \rho$ . Ist  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach unten beschränkter Auszahlungsprofile und  $\rho$  konvex, dann ist  $\rho^\sigma$  konvex auf  $\mathcal{X}^\sigma$ .

**Beweis:** Wir zeigen die Aussage (i), der Beweis von (ii) ist analog. Dazu betrachten wir zunächst zwei Folgen  $\{X_n\}, \{Y_n\} \subset \mathcal{X}$ , so dass beide punktweise und monoton fallend gegen ein Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}_\sigma$  konvergieren. Die zugehörigen Folgen  $\{\rho(X_n)\}$  und  $\{\rho(Y_n)\}$  sind monoton wachsend in  $\bar{\mathbb{R}}$ . Falls  $\lim \rho(X_n) = \lim \rho(Y_n)$ , dann ist das Funktional  $\rho_\sigma : \mathcal{X}_\sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit

$$\rho_\sigma(X) := \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n) \quad \forall X \in \mathcal{X}_\sigma,$$

wohldefiniert, wobei  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$  eine beliebige approximierende Folge für  $X \in \mathcal{X}_\sigma$  ist. Offenbar ist  $\rho_\sigma$  die einzige mögliche Fortsetzung von  $\rho$  unter der vorgegebenen Stetigkeitsbedingung.

Wir fixieren  $m \in \mathbb{N}$  und setzen  $Z_n := X_m \vee Y_n \in \mathcal{X}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge  $\{Z_n\}$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  punktweise und monoton fallend gegen  $X_m$ . Wegen Monotonie und Stetigkeit von  $\rho$  auf  $\mathcal{X}$  haben wir

$$\rho(X_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Z_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Y_n)$$

und somit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(X_m) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Y_n).$$

Wir wiederholen die obigen Überlegungen, wobei wir die Rollen von  $X_m$  und  $Y_n$  vertauschen, und erhalten daraus die Eindeutigkeit des Grenzwerts.

Die Eigenschaften Monotonie, Translationsinvarianz und Normiertheit von  $\rho$  übertragen sich auf  $\rho_\sigma$ , d. h., dass dieses Funktional tatsächlich ein monetäres Risikomaß auf  $\mathcal{X}_\sigma$  ist. Falls  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach oben beschränkter Auszahlungsprofile ist und  $\rho$  ein konvexes Risikomaß, so bleibt auch die Konvexität nach dem Grenzübergang erhalten.

Kommen wir zum Nachweis der Stetigkeit von oben. Es sei  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}_\sigma$  eine Folge, die monoton fallend gegen ein Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}_\sigma$  konvergiert. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  wählen wir eine monoton fallende Folge  $\{Y_m^n\} \subset \mathcal{X}$  mit  $\lim_{m \rightarrow \infty} Y_m^n = X_n$  und definieren

$$Z_n := \min(Y_n^1, \dots, Y_n^n) \in \mathcal{X} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nach Konstruktion ist die Folge  $\{Z_n\}$  ebenfalls monoton fallend und konvergiert punktweise gegen  $X$ , d. h., dass  $\rho_\sigma(X) = \lim \rho(Z_n)$ . Außerdem gilt  $Z_n \geq X_n \geq X$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aus der Monotonie von  $\rho_\sigma$  folgt die Behauptung, denn  $\rho_\sigma(X) \geq \rho_\sigma(X_n) \geq \rho_\sigma(Z_n) = \rho(Z_n)$ .  $\square$

**Bemerkung 1.2.3.** *Es seien  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß, das stetig von oben ist, und  $\rho_\sigma$  seine von oben stetige Fortsetzung auf  $\mathcal{X}_\sigma$ . Für die zugehörigen Akzeptanzmengen gilt die Beziehung  $\mathcal{A}_{\rho_\sigma} = (\mathcal{A}_\rho)_\sigma$ . Falls  $\rho$  hingegen stetig von unten ist und  $\rho^\sigma$  seine von unten stetige Fortsetzung auf  $\mathcal{X}^\sigma$ , dann gilt diese Beziehung für die zugehörigen Ablehnungsmengen, d. h., dass  $\mathcal{N}_{\rho^\sigma} = (\mathcal{N}_\rho)^\sigma$ .*

### Fortsetzung durch äußere und innere Approximation

Eine weiterreichende Methode ist die der Fortsetzung durch äußere oder innere Approximation. Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß. Mit  $\mathcal{X}^*$  bezeichnen wir die Klasse aller Auszahlungsprofile  $X : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ , und wir definieren für jedes  $X \in \mathcal{X}^*$

$$\rho^*(X) := \inf\{\rho(Y) \mid Y \in \mathcal{X} \text{ mit } Y \leq X\} \quad (1.14)$$

sowie

$$\rho_*(X) := \sup\{\rho(Y) \mid Y \in \mathcal{X} \text{ mit } Y \geq X\}. \quad (1.15)$$

Dabei verwenden wir die Konventionen  $\inf \emptyset := +\infty$  und  $\sup \emptyset := -\infty$ . Wegen der Monotonie von monetären Risikomaßen setzen beide Abbildungen  $\rho$  fort, das bedeutet, dass  $\rho^*|_{\mathcal{X}} = \rho_*|_{\mathcal{X}} = \rho$ . Im folgenden Satz zeigen wir, dass durch (1.14) und (1.15) tatsächlich zwei monetäre Risikomaße auf  $\mathcal{X}^*$  definiert werden.

Aus ökonomischer Sicht erscheint der Ansatz von  $\rho^*$ , also das Verlustrisiko eines Auszahlungsprofils  $X \in \mathcal{X}^* \setminus \mathcal{X}$  von außen durch riskantere Auszahlungsprofile abzuschätzen, besser zur Risikobewertung geeignet zu sein. Falls keine zusätzlichen Eigenschaften für  $\mathcal{X}$  und  $\rho$  angenommen werden, ist dieser Ansatz dem anderen auch aus mathematischer Sicht vorzuziehen, weil sich die Konvexität von  $\rho$  stets auf  $\rho^*$  jedoch im Allgemeinen nicht auf  $\rho_*$  überträgt.

**Satz 1.2.4.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß.*

- (i) *Beide Fortsetzungen  $\rho^*, \rho_* : \mathcal{X}^* \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sind monetäre Risikomaße. Für jedes monetäre Risikomaß  $\hat{\rho} : \mathcal{X}^* \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit  $\hat{\rho}|_{\mathcal{X}} = \rho$  gilt  $\rho_* \leq \hat{\rho} \leq \rho^*$ .*
- (ii) *Falls  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach oben (unten) beschränkter Auszahlungsprofile ist und  $\rho$  konvex, dann ist  $\rho^*$  ein konvexes Risikomaß auf der Menge aller nach oben (unten) beschränkten Auszahlungsprofile.*

**Beweis:** Wir zeigen die Aussagen in Teil (i) nur für  $\rho^*$ . Für  $\rho_*$  ist der Beweis analog bzw. folgt durch Konjugation, vgl. dazu auch die Bemerkung 1.2.6. Die Abbildung  $\rho^*$  ist monoton, denn für zwei Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{X}^*$  mit  $X \leq Y$  gilt

$$\{Z \in \mathcal{X} \mid X \geq Z\} \subset \{Z \in \mathcal{X} \mid Y \geq Z\},$$

also ist nach Definition  $\rho^*(X) \geq \rho^*(Y)$ . Die Translationsinvarianz von  $\rho^*$  folgt sofort aus der Beziehung

$$\{Z \in \mathcal{X} \mid X + m \geq Z\} = \{Z \in \mathcal{X} \mid X \geq Z\} + m \quad \forall m \in \mathbb{R}.$$

Außerdem haben wir  $\rho^*(0) = \rho(0) = 0$ , d. h., dass  $\rho^*$  ein monetäres Risikomaß ist. Ist  $\hat{\rho}$  ein weiteres monetäres Risikomaß auf  $\mathcal{X}^*$  mit  $\hat{\rho}|_{\mathcal{X}} = \rho$ , dann wird es durch  $\rho^*$  dominiert, denn für jedes  $X \in \mathcal{X}^*$  gilt entweder  $\rho^*(X) = +\infty$  oder

$$\rho^*(X) = \inf\{\hat{\rho}(Y) \mid X \geq Y \in \mathcal{X}\} \geq \hat{\rho}(X).$$

Teil (ii) des Satzes beweisen wir für den Fall, dass  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge nach oben beschränkter Auszahlungsprofile ist. Der andere Fall sei wieder dem Leser überlassen. Die Klasse aller nach oben beschränkten Auszahlungsprofile ist konvex und insbesondere für die Diskussion von Konvexität eines monetären Risikomaßes geeignet. Die Fortsetzung  $\rho^*$  nimmt auf dieser Klasse nur Werte in  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  an.

Wir wählen nach oben beschränkte Auszahlungsprofile  $X$  und  $Y$  und müssen zeigen, dass für alle  $\lambda \in (0, 1)$  gilt:  $\rho^*(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho^*(X) + (1-\lambda)\rho^*(Y)$ . Diese Ungleichung ist trivial, falls  $\rho^*(X) = +\infty$  oder  $\rho^*(Y) = +\infty$ . Deshalb nehmen wir an, dass beide Werte endlich sind, und fixieren eine Konstante  $\varepsilon > 0$ . Für alle  $Z^X, Z^Y \in \mathcal{X}$  mit  $X \geq Z^X, Y \geq Z^Y$  und  $\rho(Z^X) \leq \rho^*(X) + \varepsilon, \rho(Z^Y) \leq \rho^*(Y) + \varepsilon$ , erhalten wir aufgrund der Konvexität von  $\rho$ , dass

$$\begin{aligned} \rho^*(\lambda X + (1-\lambda)Y) &\leq \rho(\lambda Z^X + (1-\lambda)Z^Y) \\ &\leq \lambda\rho(Z^X) + (1-\lambda)\rho(Z^Y) \\ &\leq \lambda\rho^*(X) + (1-\lambda)\rho^*(Y) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig klein gewählt werden kann, impliziert dies die Konvexität von  $\rho^*$ .  $\square$

**Definition 1.2.5.** Die in (1.14) und (1.15) definierten monetären Risikomaße  $\rho^*$  und  $\rho_*$  auf  $\mathcal{X}^*$  heißen äußere bzw. innere Fortsetzung von  $\rho$ .

**Bemerkung 1.2.6.** Wir betrachten ein monetäres Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  und das zugehörige konjugierte Funktional  $\bar{\rho} : \hat{\mathcal{X}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  auf der Klasse  $\hat{\mathcal{X}} := -\mathcal{X}$ , das wie in Bemerkung 1.1.6 definiert sei. Dann haben wir

$$\overline{(\rho^*)} = (\bar{\rho})_* \quad \text{sowie} \quad \overline{(\rho_*)} = (\bar{\rho})^*.$$

**Bemerkung 1.2.7.** Die Akzeptanzmengen der äußeren und inneren Fortsetzung von  $\rho$  sind gegeben durch  $\mathcal{A}_{\rho^*} = \{X \in \mathcal{X}^* \mid \exists \{Y_n\} \subset \mathcal{X}, Y_n \leq X \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Y_n) \leq 0\}$  bzw.  $\mathcal{A}_{\rho_*} = \{X \in \mathcal{X}^* \mid \forall Y \in \mathcal{X} : X \leq Y \Rightarrow Y \in \mathcal{A}_\rho\}$ . Für die Ablehnungsmengen gelten die Beziehungen  $\mathcal{N}_{\rho^*} = \{X \in \mathcal{X}^* \mid \forall Y \in \mathcal{X} : Y \leq X \Rightarrow Y \in \mathcal{N}_\rho\}$  und  $\mathcal{N}_{\rho_*} = \{X \in \mathcal{X}^* \mid \exists \{Y_n\} \subset \mathcal{X}, X \leq Y_n \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Y_n) \geq 0\}$ .

**Bemerkung 1.2.8.** Es seien  $\mathcal{X} \subset \hat{\mathcal{X}}$  zwei Klassen, die alle reellen konstanten Auszahlungsprofile enthalten und stabil bezüglich der Addition von Konstanten sind. Sind  $\rho$  und  $\hat{\rho}$  monetäre Risikomaße auf  $\mathcal{X}$  bzw.  $\hat{\mathcal{X}}$  derart, dass  $\hat{\rho}|_{\mathcal{X}} = \rho$ , dann gelten auf  $\mathcal{X}^*$  die Abschätzungen  $\rho_* \leq \hat{\rho}_* \leq \hat{\rho}^* \leq \rho^*$ .

**Beispiel:** Betrachten wir den trivialen Fall  $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ . Auf dieser Menge ist das lineare Funktional  $\rho = -\text{id}$  das einzige monetäre Risikomaß. Die äußere Fortsetzung von  $\rho$  ist das Worst-Case-Risikomaß

$$\rho^*(X) = \rho^{\text{worst}}(X) = - \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Die innere Fortsetzung ist gegeben durch das entsprechende „Best-Case-Risikomaß“

$$\rho_*(X) = \rho^{\text{best}}(X) = - \sup_{\omega \in \Omega} X(\omega).$$

Bekanntermaßen sind  $\rho^{\text{worst}}$  und  $\rho^{\text{best}}$  Schranken für jedes monetäre Risikomaß.  $\diamond$

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts nehmen wir wieder an, dass die Klasse  $\mathcal{X}$  bezüglich der beiden Operatoren Minimum und Maximum einen Verband bildet.  $\mathcal{X}_\sigma$  und  $\mathcal{X}^\sigma$  seien wie oben als Klassen derjenigen Auszahlungsprofile definiert, die als Limiten von monoton fallenden bzw. monoton wachsenden Folgen in  $\mathcal{X}$  darstellbar sind.

**Korollar 1.2.9.** Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß. Falls  $\rho$  stetig von oben ist, dann ist seine innere Fortsetzung  $\rho_*$  stetig von oben auf  $\mathcal{X}_\sigma$ , d. h., dass  $\rho_*|_{\mathcal{X}_\sigma} = \rho_\sigma$ . Falls  $\rho$  stetig von unten ist, dann ist seine äußere Fortsetzung  $\rho^*$  stetig von unten auf  $\mathcal{X}^\sigma$ , d. h., dass  $\rho^*|_{\mathcal{X}^\sigma} = \rho^\sigma$ .

**Beweis:** Wir zeigen die Behauptung für die äußere Fortsetzung. Nach Bemerkung 1.2.8 gilt  $\rho^\sigma = (\rho^\sigma)^\star \leq \rho^\star$  auf  $\mathcal{X}^\sigma$ . Andererseits haben wir für jede monoton wachsende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$ , die punktweise gegen ein Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}^\sigma$  konvergiert, dass

$$\rho^\star(X) \leq \inf\{\rho(X_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(X_n) = \rho^\sigma(X).$$

Die Aussage für die innere Fortsetzung folgt durch Konjugation.  $\square$

Gibt es Bedingungen, unter denen die Stetigkeit der inneren oder der äußeren Fortsetzung in einem gewissen Sinne auf der Klasse aller Auszahlungsprofile garantiert werden kann? Im folgenden Satz fordern wir, dass  $\mathcal{X}$  bezüglich Minimum und Maximum die Struktur eines  $\sigma$ -Verbands besitzt, d. h., dass  $\mathcal{X}$  ein Verband ist derart, dass für jede abzählbare Familie  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$  die Auszahlungsprofile  $\inf X_n$  und  $\sup X_n$  ebenfalls in  $\mathcal{X}$  enthalten sind. Natürlich stellt diese Annahme eine starke Einschränkung dar. Die linearen Räume, die üblicherweise für die Diskussion von konvexen Risikomaßen verwendet werden, haben eine solche Struktur nicht. Im nächsten Abschnitt zeigen wir, wie zu einer vorgegebenen Klasse von Auszahlungsprofilen mit Hilfe des Suslinoperators ein zugehöriger  $\sigma$ -Verband konstruiert werden kann.

**Satz 1.2.10.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß und  $\mathcal{X}$  besitze die Struktur eines  $\sigma$ -Verbands. Falls  $\rho$  stetig von oben ist, dann ist die äußere Fortsetzung  $\rho^\star$  stetig von oben auf  $\mathcal{X}^\star$ . Falls  $\rho$  hingegen stetig von unten ist, dann ist die innere Fortsetzung  $\rho_\star$  stetig von unten auf  $\mathcal{X}^\star$ .*

**Beweis:** Wir weisen die Stetigkeit von oben für die äußere Fortsetzung nach. Der andere Fall folgt durch Konjugation. Es sei  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}^\star$  eine monoton fallende Folge von Auszahlungsprofilen, die punktweise gegen  $X \in \mathcal{X}^\star$  konvergiert. Die Monotonie liefert

$$\rho^\star(X_n) \leq \rho^\star(X_{n+1}) \leq \rho^\star(X),$$

und wir müssen zeigen, dass  $\lim \rho^\star(X_n) = \rho^\star(X)$ . Wenn  $\rho^\star(X_n) = +\infty$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  oder wenn  $\rho^\star(X) = -\infty$ , dann ist die Behauptung trivial.

Es sei nun  $\rho^\star(X_n) = -\infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zu einem beliebigen Level  $m \in \mathbb{N}$  wählen wir Auszahlungsprofile  $Y_n \leq X_n$  in  $\mathcal{X}$ , so dass  $\rho(Y_n) \leq -m$ . Da  $\mathcal{X}$  ein  $\sigma$ -Verband ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\{Y_n\}$  eine monoton fallende Folge von Auszahlungsprofilen ist. Wenn dies nicht der Fall ist, betrachten wir stattdessen die Auszahlungsprofile

$$Y'_n := \inf_{k \geq n} Y_k \in \mathcal{X}$$

Wir setzen  $Y = \inf Y_n \leq \inf X_n = X$ . Wegen der  $\sigma$ -Verbandsstruktur ist  $Y \in \mathcal{X}$ . Aus der Stetigkeit von  $\rho$  folgt

$$\rho^*(X) \leq \rho(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Y_n) \leq -m.$$

Da die Abschätzung für alle natürlichen Zahlen gilt, haben wir  $\rho^*(X) = -\infty$ .

Falls  $\rho^*(X_n) \in \mathbb{R}$  für alle  $n \geq n_0$ , dann wählen wir wieder eine monoton fallende Folge  $\{Y_n\} \subset \mathcal{X}$ , so dass  $Y_n \leq X_n$  und  $\rho^*(X_n) \leq \rho(Y_n) \leq \rho^*(X_n) + \varepsilon$  für alle  $n \geq n_0$ . Dabei sei die Konstante  $\varepsilon > 0$  fixiert aber beliebig klein. Auch hier definieren wir  $Y := \lim Y_n \in \mathcal{X}$ . Es gilt  $Y \leq X$  und

$$\rho^*(X) \leq \rho(Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(Y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*(X_n) + \varepsilon.$$

□

**Beispiel:** Wir fixieren einen Level  $c \in [0, +\infty]$  und definieren  $\mathcal{X}^c$  als die Klasse aller Auszahlungsprofile  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mit einem beschränkten Wertebereich der Form

$$\sup_{\omega \in \Omega} X(\omega) - \inf_{\omega \in \Omega} X(\omega) \leq c,$$

wobei wir  $\mathcal{X}^c$  auch die Abbildungen mit konstantem Wert  $+\infty$  oder  $-\infty$  zuordnen. Durch die Wahl von  $c = 0$  bzw.  $c = +\infty$  erhalten wir so z. B. die Räume  $\bar{\mathbb{R}}$  und  $\mathcal{X}^*$ . Alle Klassen  $\mathcal{X}^c$  bilden einen  $\sigma$ -Verband. Ebenso können diese Beispielklassen unter Messbarkeitsbedingungen definiert werden.  $\diamond$

## 1.2.2 Regularität

Im Allgemeinen ist eine Fortsetzung eines konvexen Risikomaßes selbst unter zusätzlichen Stetigkeitsbedingungen nicht eindeutig. Deshalb diskutieren wir in diesem Abschnitt Regularitätseigenschaften, die verwendet werden können, um spezielle Fortsetzungen zu charakterisieren. Es sei  $\mathcal{X}$  eine beliebige Klasse von Auszahlungsprofilen, die wie üblich der Bedingung  $\mathbb{R} \subset \mathcal{X} = \mathcal{X} + \mathbb{R}$  genügen soll. Wir betrachten ein monetäres Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  sowie eine weitere Klasse  $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ , die ebenfalls die konstanten Auszahlungsprofile enthält und stabil bezüglich der Addition reeller Konstanten sein soll. Nach Satz 1.2.4 liefert die Fortsetzungsmethode durch innere und äußere Approximation Abschätzungen für  $\rho$  auf  $\mathcal{X}$ . Es gilt

$$(\rho|_{\mathcal{H}})_* \leq \rho \leq (\rho|_{\mathcal{H}})^*,$$

und dies motiviert die folgende Definition.

**Definition 1.2.11.** Das monetäre Risikomaß  $\rho$  heißt von innen  $\mathcal{H}$ -regulär in  $X \in \mathcal{X}$ , falls  $(\rho|_{\mathcal{H}})_*(X) = \rho(X)$ . Es heißt von außen  $\mathcal{H}$ -regulär in  $X \in \mathcal{X}$ , falls  $\rho(X) = (\rho|_{\mathcal{H}})^*(X)$ .

**Bemerkung 1.2.12.** Es seien  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß und  $\bar{\rho}$  das konjugierte Funktional auf  $\bar{\mathcal{X}} := -\mathcal{X}$ , definiert wie in Bemerkung 1.1.6. Wir wissen, dass auch die zugehörigen inneren und äußeren Fortsetzungen konjugiert zueinander sind. Es gelten die Beziehungen  $(\rho_*) = (\bar{\rho})^*$  und  $(\rho^*) = (\bar{\rho})_*$ . Das bedeutet, dass  $\rho$  in  $X \in \mathcal{X}$  genau dann  $\mathcal{H}$ -regulär von innen (außen) ist, wenn  $\bar{\rho}$  in  $-X \in \bar{\mathcal{X}}$  von außen (innen)  $\bar{\mathcal{H}}$ -regulär ist, wobei  $\bar{\mathcal{H}} := -\mathcal{H}$ .

Die Eigenschaft der Regularität von monetären Risikomaßen ist eng mit der Eigenschaft der Kapazitabilität verbunden, welche von Choquet für Mengenfunktionen untersucht wurde. Seine Ideen können jedoch auch auf Abbildungen auf Funktionen verallgemeinert werden, deshalb werden wir zunächst die Resultate seines Artikels „Forme abstraite du théorème de capacabilité“, [8], in einer Version für *funktionale Kapazitäten* darstellen. Anschließend übertragen wir sie auf monetäre Risikomaße.

### Das Kapazitabilitätstheorem

Wir betrachten Klassen  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{X}$  von Auszahlungsprofilen mit  $\mathbb{R} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ . Außerdem nehmen wir an, dass beide einen Verband bezüglich der Operatoren Minimum und Maximum bilden. Es gelte für jede abzählbare Familie  $\{H_n\} \in \mathcal{H}$  und alle  $n_0 \in \mathbb{N}$ :

$$\max_{n \leq n_0} H_n \in \mathcal{H} \quad \text{sowie} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} H_n \in \mathcal{H}.$$

**Definition 1.2.13.** Eine Abbildung  $I : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  heißt  $\mathcal{H}$ -Kapazität, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- $I(X) \leq I(Y)$  für alle  $X, Y \in \mathcal{X}$  mit  $X \leq Y$ ,
- $I(m) < +\infty$  für alle  $m \in \mathbb{R}$ ,
- $I$  ist stetig von unten auf  $\mathcal{X}$  und stetig von oben auf  $\mathcal{H}$ .

Ein Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}$  heißt kapazitabel bezüglich einer  $\mathcal{H}$ -Kapazität  $I$ , wenn

$$I(X) = \sup\{I(H) \mid X \geq H \in \mathcal{H}\}.$$

Das Kapazabilitätstheorem besagt, dass für eine  $\mathcal{H}$ -Kapazität die zugehörigen  $\mathcal{H}$ -Borelfunktionen und sogar die  $\mathcal{H}$ -Suslinfunktionen kapazitabel sind. Klären wir also zuerst, was unter diesen beiden Funktionentypen zu verstehen ist. Die Klasse  $\mathcal{BOR}(\mathcal{H})$  aller  $\mathcal{H}$ -Borelfunktionen ist definiert als der kleinste  $\sigma$ -Verband von Auszahlungsprofilen, der die Menge  $\mathcal{H}$  umfasst. Im Allgemeinen kann  $\mathcal{BOR}(\mathcal{H})$  nicht ohne weiteres charakterisiert oder konstruiert werden, jedoch ist diese Klasse in der Klasse aller  $\mathcal{H}$ -Suslinfunktionen enthalten, welche folgendermaßen definiert sind.

Mit  $\mathcal{S}_f$  bezeichnen wir die Menge aller endlichen natürlichen Folgen  $s = \{s_1, \dots, s_n\}$  mit  $s_i \in \mathbb{N}$  für alle  $i \leq n \in \mathbb{N}$ . Weiter sei  $\mathcal{S}$  die Menge aller natürlichen Folgen  $\sigma = \{\sigma_i\} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . Nun betrachten wir zwei Relationen. Wir schreiben  $s \prec \bar{s}$  oder auch  $s \prec \sigma$ , wobei  $s, \bar{s} \in \mathcal{S}_f$  und  $\sigma \in \mathcal{S}$ , wenn die ersten  $n = |s|$  Eintragungen von  $\bar{s}$  bzw. von  $\sigma$  durch  $s$  gegeben sind. Dabei bezeichne  $|\cdot|$  die Länge einer endlichen Sequenz. Wir schreiben  $s \leq \bar{s}$ , wenn für alle  $i \leq n = |s| = |\bar{s}|$  gilt  $s_i \leq \bar{s}_i$ . In diesem Sinne ist auch  $\sigma \leq \bar{\sigma}$  gemeint. Schließlich verwenden wir für eine natürliche Folge  $\sigma \in \mathcal{S}$  die Notation  $\sigma|n \in \mathcal{S}_f$ , wenn die Anfangssequenz  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$  der Länge  $n$  gemeint ist.

Unter einem  $\mathcal{H}$ -System  $\Delta : \mathcal{S}_f \rightarrow \mathcal{H}$  verstehen wir eine Abbildung  $s \mapsto H_s$ , die im folgenden Sinne monoton ist:

$$s \prec \bar{s} \quad \Rightarrow \quad H_s \geq H_{\bar{s}}.$$

Jedes  $\mathcal{H}$ -System  $\Delta$  kann auf die Menge  $\mathcal{S}$  der natürlichen Folgen erweitert werden. Wir setzen für alle  $\sigma \in \mathcal{S}$

$$H_\sigma := \inf_{n \in \mathbb{N}} H_{\sigma|n}$$

und definieren

$$H(\Delta) := \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} H_\sigma. \quad (1.16)$$

Ein so konstruiertes Auszahlungsprofil  $H(\Delta)$  nennen wir eine  $\mathcal{H}$ -Suslinfunktion. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{SUS}(\mathcal{H})$  die Klasse aller auf diese Weise erzeugten Funktionen.

**Lemma 1.2.14.** *Für die Klasse aller  $\mathcal{H}$ -Suslinfunktionen gilt die Bedingung  $\mathcal{SUS}(\mathcal{SUS}(\mathcal{H})) = \mathcal{SUS}(\mathcal{H})$ . Insbesondere ist  $\mathcal{SUS}(\mathcal{H})$  ein  $\sigma$ -Verband, d. h., dass  $\mathcal{BOR}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{SUS}(\mathcal{H})$ .*

Einen Beweis dieser Aussagen für Suslinmengen findet man in [32], Theorem 2.3.1. Für Suslinfunktionen in unserem Setting ist der Beweis analog. Man

tauscht lediglich die Operatoren und benutzt  $\vee$  statt  $\cup$  und  $\wedge$  statt  $\cap$ . Der Vollständigkeit halber zeigen wir nun noch ein Distributivgesetz, das wir unten im Beweis des Kapazitabilitätstheorems verwenden werden.

**Lemma 1.2.15.** *Es sei  $s \in \mathcal{S}_f \mapsto H_s \in \mathcal{H}$  ein  $\mathcal{H}$ -System. Es gilt:*

$$\sup_{\sigma \leq \bar{\sigma}} H_\sigma = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\sigma \leq \bar{\sigma}} H_{\sigma|n} \quad \forall \bar{\sigma} \in \mathcal{S}.$$

**Beweis:** Für jede natürliche Folge  $\sigma \leq \bar{\sigma}$  gilt offenbar

$$H_\sigma = \inf_{n \in \mathbb{N}} H_{\sigma|n} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\sigma' \leq \bar{\sigma}} H_{\sigma'|n},$$

und auf der linken Seite können wir zum Supremum übergehen, ohne dass dadurch die Ungleichung verletzt wird.

Die andere Richtung beweisen wir für ein beliebiges aber fixiertes Szenario  $\omega \in \Omega$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  enthält die Familie  $\{H_{\sigma|n} | \sigma \leq \bar{\sigma}\}$  nur endlich viele Elemente. Somit gibt es jeweils eine Folge  $\sigma^n \leq \bar{\sigma}$  mit

$$H_{\sigma^n|n}(\omega) = \max_{\sigma \leq \bar{\sigma}} H_{\sigma|n}(\omega).$$

Wir werden eine Teilfolge  $\{n_k\}$  und ein  $\sigma^* \leq \bar{\sigma}$  konstruieren mit  $\sigma^{n_k}|m = \sigma^*|m$  für alle  $k \geq m$ . Aus der Monotonie eines  $\mathcal{H}$ -System folgt dann

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} H_{\sigma^n|n}(\omega) = \inf_{k \geq m} H_{\sigma^{n_k}|n_k}(\omega) \leq \inf_{k \geq m} H_{\sigma^{n_k}|m}(\omega) = H_{\sigma^*|m}(\omega),$$

und damit ist

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\sigma \leq \bar{\sigma}} H_{\sigma|n}(\omega) \leq H_{\sigma^*}(\omega).$$

Wir nehmen an, dass für den Index  $m \in \mathbb{N}$  bereits eine Teilfolge  $\{n_k^m\}_k \subset \mathbb{N}$  und ein  $m$ -Tupel  $\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*\} \leq \bar{\sigma}|m$  konstruiert wurden, so dass

$$\sigma^{n_k^m}|m = \{\sigma_1^*, \dots, \sigma_m^*\}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Es gibt dann eine weitere Teilfolge  $\{n_k^{m+1}\} \subset \{n_k^m\}$  und eine natürliche Zahl  $\sigma_{m+1}^* \leq \bar{\sigma}_{m+1} < \infty$  mit

$$\sigma_{m+1}^{n_k^{m+1}} = \sigma_{m+1}^* \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen  $\sigma_{m+1}^*$  als nächsten Eintrag von  $\sigma^*$  und fahren so fort.  $\square$

Das Kapazabilitätstheorem besagt, dass für eine  $\mathcal{H}$ -Kapazität auf der Klasse  $\mathcal{X}^*$  aller Auszahlungsprofile jede  $\mathcal{H}$ -Suslinfunktion kapazitabel ist. Da wir funktionale Kapazitäten auch auf Teilklassen von  $\mathcal{X}^*$  betrachten, gilt die Aussage in der folgenden Version des Kapazabilitätstheorems nur unter der Zusatzbedingung (1.17).

**Theorem 1.2.16.** *Gegeben sei eine  $\mathcal{H}$ -Kapazität  $I : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . Eine  $\mathcal{H}$ -Suslinfunktion*

$$X = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} H_\sigma \in \mathcal{X}$$

*ist kapazitabel bezüglich  $I$ , wenn für das zugehörige erzeugende  $\mathcal{H}$ -System  $s \in \mathcal{S}_f \mapsto H_s \in \mathcal{H}$  gilt:*

$$\sup_{s < \sigma} H_\sigma \in \mathcal{X} \quad \forall s \in \mathcal{S}_f. \quad (1.17)$$

**Beweis:** Es sei  $X \in \mathcal{X}$  eine  $\mathcal{H}$ -Suslinfunktion, darstellbar wie oben durch ein  $\mathcal{H}$ -System  $s \in \mathcal{S}_f \mapsto H_s \in \mathcal{H}$ , welches der Bedingung (1.17) genügt. Wir nehmen zunächst an, dass  $X$  nach oben durch eine Konstante  $K > 0$  beschränkt ist. Das zugehörige  $\mathcal{H}$ -System kann dann so gewählt werden, dass es ebenfalls durch  $K$  beschränkt ist. Wegen der Monotonie von  $I$  haben wir  $I(X) < +\infty$ . Wir müssen zeigen, dass es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $H \in \mathcal{H}$  gibt mit  $H \leq X$  und  $I(H) \geq I(X) - \varepsilon$ .

Für eine endliche Folge  $s \in \mathcal{S}_f$  führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$X_s := \sup_{s < \sigma} \inf_{n \in \mathbb{N}} H_{\sigma|n} \in \mathcal{X}$$

und

$$Y_s := \max_{\bar{s} \leq s} X_{\bar{s}} \in \mathcal{X}.$$

Es sei  $\varepsilon > 0$  beliebig klein und fixiert. Wir konstruieren eine natürliche Folge  $\sigma^* \in \mathcal{S}$  derart, dass für die zugehörigen Anfangssequenzen gilt, dass die Folge  $\{Y_{\sigma^*|n}\}$  monoton fallend in  $n \in \mathbb{N}$  ist, nach oben durch  $X$  beschränkt und mit

$$I(Y_{\sigma^*|n}) > I(X) - \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir setzen  $Y_{\sigma^*|0} := X$ . Sind die ersten  $n \in \mathbb{N}$  Folgenglieder von  $\sigma^*$  bereits konstruiert, dann betrachten wir

$$Y_{(\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*, m)} = \max_{k \leq m} \max_{s \leq \sigma^*|n} X_{(s,k)},$$

wobei  $(s, k) \in \mathcal{S}_f$  die endliche Folge der Länge  $|s|+1$  bezeichnet, deren Anfang durch  $s$  gegeben ist und die  $k$  als letzten Eintrag besitzt. Die Folge von

Funktionen ist monoton wachsend und konvergiert für  $m \rightarrow \infty$  punktweise gegen  $Y_{\{\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*\}}$ . Wegen der Stetigkeit von unten auf  $\mathcal{X}$  gibt es einen Index  $\sigma_{n+1}^* \in \mathbb{N}$ , so dass

$$I(Y_{\sigma^*|n+1}) > I(Y_{\sigma^*|n}) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Das bedeutet, dass

$$I(Y_{\sigma^*|n+1}) = I(X) + \sum_{k=1}^{n+1} (I(Y_{\sigma^*|k}) - I(Y_{\sigma^*|k-1})) > I(X) - \varepsilon.$$

Wir fahren so fort und erhalten die gewünschte Folge  $\sigma^* \in \mathcal{S}$ .

Für eine endliche natürliche Folge  $s \in \mathcal{S}_f$  definieren wir nun

$$Z_s := \max_{\bar{s} \leq s} H_{\bar{s}} \in \mathcal{H}.$$

Wegen der Monotonie eines  $\mathcal{H}$ -Systems gilt

$$X_s \leq \sup_{s \prec \sigma} \min_{n \leq |s|} H_{\sigma|n} = \sup_{s \prec \sigma} H_{\sigma||s|} = H_s \leq Z_s$$

und

$$Y_s \leq \max_{\bar{s} \leq s} Z_{\bar{s}} = Z_s.$$

Die Monotonie von  $I$  liefert  $I(Z_{\sigma^*|n}) > I(X) - \varepsilon$ . Außerdem haben wir

$$Z_{\sigma^*|n+1} \leq \max_{s \leq \sigma^*|n+1} H_{s|n} = Z_{\sigma^*|n}.$$

Da  $\mathcal{H}$  stabil ist bezüglich der Bildung des Infimums über eine abzählbare Familie, ist auch die Grenzfunktion  $H := \inf_{n \in \mathbb{N}} Z_{\sigma^*|n}$  in der Menge  $\mathcal{H}$  enthalten. Aufgrund der Stetigkeit von oben auf  $\mathcal{H}$  gilt  $I(H) \geq I(X) - \varepsilon$ , d. h., dass nur noch  $H \leq X$  zu zeigen bleibt. Dies folgt sofort aus Lemma 1.2.15, denn

$$H = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\sigma \leq \sigma^*} H_{\sigma|n} = \sup_{\sigma \leq \sigma^*} H_{\sigma} \leq X.$$

Ist  $X \in \mathbf{SUS}(\mathcal{H})$  nach oben unbeschränkt, so ist  $X = \lim_{K \rightarrow \infty} X \wedge K$ . Aus der Stetigkeit von unten auf  $\mathcal{X}$  folgt  $I(X) = \lim_{K \rightarrow \infty} I(X \wedge K)$ . Gilt  $I(X) < +\infty$ , dann finden wir für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Konstante  $K > 0$  und ein geeignetes  $H \in \mathcal{H}$  mit  $H \leq X \wedge K$  und

$$I(H) > I(X \wedge K) - \frac{\varepsilon}{2} > I(X) - \varepsilon.$$

Der Fall  $I(X) = +\infty$  ist analog. Also ist  $X$  kapazitabel bezüglich  $I$ .  $\square$

### Monetäre Risikomaße als funktionale Kapazitäten

Befassen wir uns wieder mit dem Problem der Regularität von monetären Risikomaßen. Wie zu Beginn dieses Abschnitts seien  $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$  zwei Klassen von Auszahlungsprofilen, die die konstanten reellwertigen Auszahlungsprofile enthalten und stabil bezüglich der Addition von Konstanten sind. Des Weiteren nehmen wir an, dass beide einen Verband bezüglich der Operatoren Minimum und Maximum bilden.

Ein monetäres Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  erzeugt durch  $I(X) := -\rho(X)$  und  $\bar{I}(X) := \rho(-X)$ ,  $X \in \mathcal{X}$ , zwei monotone Abbildungen, die unter geeigneten Voraussetzungen im Sinne von Definition 1.2.13 als funktionale Kapazitäten bezüglich  $\mathcal{H}$  bzw.  $\bar{\mathcal{H}} := -\mathcal{H}$  aufgefasst werden können.

**Korollar 1.2.17.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß, das stetig von unten auf  $\mathcal{X}$  und stetig von oben auf  $\mathcal{H}$  ist. Gilt für jede abzählbare Familie  $\{H_n\} \subset \mathcal{H}$ , dass*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} H_n \in \mathcal{H},$$

*und ist  $X \in \mathcal{X}$  eine wie (1.16) definierte  $\mathcal{H}$ -Suslinsfunktion, so dass das erzeugende  $\mathcal{H}$ -System die Bedingung (1.17) erfüllt, dann ist  $\rho$  von außen  $\mathcal{H}$ -regulär in  $X$ .*

**Beweis:** Unter den gegebenen Voraussetzungen des Korollars ist die Abbildung  $I : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  mit

$$I(X) := -\rho(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

eine  $\mathcal{H}$ -Kapazität. Nach dem Kapazitäbilitätstheorem 1.2.16 gilt

$$I(X) = \sup\{I(H) \mid X \geq H \in \mathcal{H}\}$$

und somit

$$\rho(X) = \inf\{\rho(H) \mid X \geq H \in \mathcal{H}\} = (\rho|_{\mathcal{H}})^*(X).$$

□

Nach Bemerkung 1.2.12 ist die Eigenschaft der inneren  $\mathcal{H}$ -Regularität eines monetären Risikomaßes  $\rho$  auf der Klasse  $\mathcal{X}$  gleichbedeutend mit äußerer  $\bar{\mathcal{H}}$ -Regularität des konjugierten Risikomaßes  $\bar{\rho}$  auf  $\bar{\mathcal{X}} := -\mathcal{X}$ , wobei  $\bar{\mathcal{H}} := -\mathcal{H}$ . Daraus erhalten wir das folgende Resultat.

**Korollar 1.2.18.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß, das stetig von oben auf  $\mathcal{X}$  und stetig von unten auf  $\mathcal{H}$  ist. Gilt für jede abzählbare Familie*

$\{H_n\} \subset \mathcal{H}$ , dass

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} H_n \in \mathcal{H},$$

und ist  $X \in \mathcal{X}$  derart, dass  $-X$  eine wie in (1.16) definierte  $\bar{\mathcal{H}}$ -Suslinfunktion ist und das erzeugende  $\bar{\mathcal{H}}$ -System die Bedingung (1.17) erfüllt, dann ist  $\rho$  von innen  $\mathcal{H}$ -regulär in  $X$ .

### Regularität und Eindeutigkeit einer Fortsetzung

Bevor wir die Diskussion zur Regularität in diesem allgemeinen Rahmen beenden, befassen wir uns kurz mit dem Problem der Eindeutigkeit einer Fortsetzung. Es sei  $\mathcal{X}$  eine geeignete Klasse von Auszahlungsprofilen und  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß. Da  $\rho$  auf verschiedene Arten fortgesetzt werden kann, ist es natürlich von Interesse, auf welcher Klasse eine Fortsetzung eindeutig ist. Die Methode der inneren und äußeren Approximation liefert eine untere bzw. eine obere Schranke. Demnach ist eine Fortsetzung von  $\rho$  genau dann eindeutig in  $X \in \mathcal{X}^*$ , wenn

$$\rho_*(X) = \rho^*(X).$$

In einem solchen Auszahlungsprofil  $X$  ist die äußere Fortsetzung  $\rho^*$  von innen  $\mathcal{X}$ -regulär und die innere Fortsetzung  $\rho_*$  von außen  $\mathcal{X}$ -regulär. Unter der starken Bedingung aus Satz 1.2.10, dass die Klasse  $\mathcal{X}$  bezüglich der Operatoren Minimum und Maximum einen  $\sigma$ -Verband bildet, können wir die Ergebnisse der beiden vorherigen Korollare kombinieren.

**Korollar 1.2.19.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  ein monetäres Risikomaß auf einer Klasse  $\mathcal{X}$  von Auszahlungsprofilen, die die Struktur eines  $\sigma$ -Verbands besitzt. Falls  $\rho$  stetig von oben und stetig von unten auf  $\mathcal{X}$  ist, so existiert eine eindeutige Fortsetzung von  $\rho$  auf der Menge*

$$SUS(\mathcal{X}) \cap (-SUS(-\mathcal{X}))$$

aller Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}^*$ , die darstellbar sind in der Form

$$X = \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} X_\sigma = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} Y_\sigma$$

mit  $X_\sigma, Y_\sigma \in \mathcal{X}$  für alle natürlichen Folgen  $\sigma \in \mathcal{S}$ .

**Beweis:** Nach Satz 1.2.10 ist die innere Fortsetzung  $\rho_*$  stetig von unten auf der Klasse aller Auszahlungsprofile, und die äußere Fortsetzung  $\rho^*$  stetig von oben. Nach Korollar 1.2.17 ist jedes  $X \in \mathcal{SUS}(\mathcal{X})$  von außen  $\mathcal{X}$ -regulär bezüglich  $\rho_*$ . Nach Korollar 1.2.18 ist jedes  $X \in (-\mathcal{SUS}(-\mathcal{X}))$  von innen  $\mathcal{X}$ -regulär bezüglich  $\rho^*$ .  $\square$

### 1.2.3 Fortsetzung unter topologischen Voraussetzungen

Wir führen nun die Diskussion der Fortsetzbarkeit von konvexen Risikomaßen unter der Bedingung fort, dass die zugrunde liegende Menge der zukünftigen Szenarien durch einen topologischen Raum gegeben ist. Genauer gesagt, nehmen wir an, dass  $\Omega$  ein separabler, metrisierbarer und lokal kompakter Raum ist. Mit  $\mathcal{F}$  bezeichnen wir die zugehörige  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen.

Unser Ziel ist es, geeignete Kriterien zu finden, unter denen ein konvexes Risikomaß auf dem linearen Raum  $\mathcal{C}_b := \mathcal{C}_b(\Omega)$  der beschränkten und stetigen Auszahlungsprofile unter gewissen Stetigkeitsbedingungen eindeutig auf den linearen Raum  $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F})$  aller beschränkten und messbaren Auszahlungsprofile fortgesetzt werden kann. Solche Kriterien formulieren wir unter der Voraussetzung von Regularitätseigenschaften bezüglich der konvexen Mengen  $\mathcal{U}_b := \mathcal{U}_b(\Omega)$  und  $\mathcal{L}_b := \mathcal{L}_b(\Omega)$  aller beschränkten oberhalb- bzw. unterhalbstetigen reellen Funktionen.

Während unseren Untersuchungen orientieren wir uns an der entsprechenden Diskussion zur Fortsetzung von funktionalen Kapazitäten auf topologischen Räumen. Man vergleiche dazu [9]. Wir erinnern daran, dass unter geeigneten Stetigkeitsbedingungen jedes monetäre Risikomaß auf zwei verschiedene Weisen als eine funktionale Kapazität aufgefasst werden kann.

Außerdem verwenden wir Charakterisierungen von konvexen Risikomaßen von [28], notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer robusten Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion auf der Menge  $\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$  aller Wahrscheinlichkeitsmaße. In unserer Notation lassen sich diese als Regularitäts- und Stetigkeitseigenschaften formulieren. Man vergleiche dazu den Satz 1.2.26.

**Bemerkung 1.2.20.** *Auf einem separablen, metrisierbaren und lokal kompakten Raum  $\Omega$  ist jede beschränkte oberhalbstetige Funktion als Limes einer*

monoton fallenden Folge von stetigen Funktionen darstellbar, d. h., es gilt

$$\mathcal{U}_b \subset \mathcal{C}_\sigma.$$

Eine Funktion  $X$  ist genau dann oberhalbstetig, wenn  $-X$  unterhalbstetig ist. Das bedeutet, dass jede beschränkte unterhalbstetige Funktion als Limes einer monoton wachsenden Folge von stetigen Funktionen darstellbar ist, d. h., dass

$$\mathcal{L}_b = -\mathcal{U}_b \subset -\mathcal{C}_\sigma = \mathcal{C}^\sigma.$$

Beweise dieser Charakterisierungen von Ober- und Unterhalbstetigkeit findet man z. B. in [14], Satz 12.7.8.

### Konvexe Risikomaße auf $\mathcal{C}_b$

Betrachten wir ein konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$ . Der folgende Satz von [21] besagt, dass  $\rho$  eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf der Menge  $\mathcal{M}_1$  aller  $\sigma$ -additiven Wahrscheinlichkeitsmaße besitzt, falls es stetig von unten ist. Da die Klasse der beschränkten und stetigen Funktionen einen linearen Raum bildet, genügt es nach Lemma 1.1.8 zu fordern, dass  $\rho$  stetig von unten in 0 ist, und in diesem Fall ist das konvexe Risikomaß auch stetig von oben auf  $\mathcal{C}_b$ .

**Satz 1.2.21.** *Es sei  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß. Falls  $\rho$  stetig von unten ist, dann erlaubt es eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1$ , d. h., dass*

$$\rho(X) = \max\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \quad \forall X \in \mathcal{C}_b. \quad (1.18)$$

**Beweis:** Wir können  $\rho$  beliebig zu einem konvexen Risikomaß  $\rho^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  fortsetzen, beispielsweise mit Hilfe der Methode durch äußeren Approximation. Nach Theorem 1.1.7 erlaubt  $\rho^*$  eine robuste Darstellung bezüglich seiner minimalen Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}^*$  auf  $\mathcal{M}_{1f}$ . Außerdem erfüllt es alle Voraussetzungen der Proposition 4.25 in [21]. Demzufolge erlaubt  $\rho^*|_{\mathcal{C}_b} = \rho$  auf  $\mathcal{C}_b$  eine robuste Darstellung (1.18) durch die Penalty-Funktion mit

$$\alpha(Q) := \inf\{\alpha_{\min}^*(Q') \mid Q' \in \mathcal{M}_{1f} \text{ mit } \mathbb{E}_Q(\cdot) = \mathbb{E}_{Q'}(\cdot) \text{ auf } \mathcal{C}_b\} \quad \forall Q \in \mathcal{M}_1.$$

□

**Bemerkung 1.2.22.** Falls  $\Omega$  ein kompakter metrischer Raum ist, dann ist jede stetige Funktion auch beschränkt, d. h., es ist  $\mathcal{C}_b = \mathcal{C}$ . Außerdem ist jedes monetäre Risikomaß auf diesem Raum stetig von unten und stetig von oben. Konvergiert nämlich eine monoton wachsende oder monoton fallende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{C}$  punktweise gegen eine stetige Funktion  $X \in \mathcal{C}$ , dann erfolgt die Konvergenz nach dem Lemma von Dini sogar gleichmäßig. Die Lipschitz-Stetigkeit von  $\rho$  bezüglich der Supremumsnorm liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\rho(X_n) - \rho(X)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - X\|_\infty = 0.$$

Insbesondere besitzt jedes konvexe Risikomaß auf  $\mathcal{C}$  eine robuste Darstellung (1.18).

Im Folgenden analysieren und vergleichen wir zwei mögliche Fortsetzungen eines konvexen Risikomaßes  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$ , die von innen  $\mathcal{L}_b$ -regulär bzw. von außen  $\mathcal{U}_b$ -regulär sind. Kurz zusammengefasst handelt es sich dabei um die Funktionale

$$(\rho^*|_{\mathcal{L}_b})_\star \quad \text{und} \quad (\rho_\star|_{\mathcal{U}_b})^\star. \quad (1.19)$$

Links setzen wir  $\rho$  zuerst durch äußere Approximation von  $\mathcal{C}_b$  nach  $\mathcal{L}_b$  fort und anschließend durch innere Approximation von  $\mathcal{L}_b$  nach  $\mathcal{B}$ . Rechts ist die Vorgehensweise umgekehrt. Wir setzen  $\rho$  durch innere Approximation von  $\mathcal{C}_b$  nach  $\mathcal{U}_b$  fort und dann durch äußere Approximation von  $\mathcal{U}_b$  nach  $\mathcal{B}$ . Wir zeigen, dass beide Methoden in gewissem Sinne kanonische Fortsetzungen von  $\rho$  erzeugen, da Stetigkeitseigenschaften und auch eine robuste Darstellung unter geeigneten Voraussetzungen erhalten bleiben.

Zunächst betrachten wir jeden Approximationsschritt separat. Wir wissen bereits aus der allgemeinen Diskussion, dass bei der Fortsetzungsmethode durch innere Approximation zusätzliche Bedingungen angenommen werden müssen, die die Konvexität des erzeugten monetären Risikomaßes garantieren. Bei einer Fortsetzung durch äußere Approximation wird die Konvexität stets übertragen, jedoch kann unter Umständen eine robuste Darstellung verloren gehen.

### Fortsetzung nach $\mathcal{L}_b$ durch $\mathcal{C}_b$ -äußere Approximation

**Satz 1.2.23.** Es sei  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß.

(i) Die durch

$$\rho_{\mathcal{L}_b}(X) := \inf\{\rho(Y) \mid X \geq Y \in \mathcal{C}_b\} \quad \forall X \in \mathcal{L}_b,$$

definierte Fortsetzung  $\rho_{\mathcal{L}_b} : \mathcal{L}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein konvexes Risikomaß.

- (ii) Falls  $\rho$  stetig von unten ist, dann ist auch  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  stetig von unten, und mit dieser Eigenschaft ist die Fortsetzung von  $\rho$  auf  $\mathcal{L}_b$  eindeutig.
- (iii) Das konvexe Risikomaß  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  besitzt genau dann eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1$ , d. h.,

$$\rho_{\mathcal{L}_b}(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \quad \forall X \in \mathcal{L}_b, \quad (1.20)$$

wenn  $\rho$  bezüglich  $\alpha$  wie in (1.18) robust darstellbar ist, so dass für alle  $X \in \mathcal{L}_b$  gilt:

$$\sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \inf_{X \geq Y \in \mathcal{C}_b} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} = \inf_{X \geq Y \in \mathcal{C}_b} \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} \quad (1.21)$$

In diesem Fall ist  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  stetig von oben auf  $\mathcal{L}_b$ .

**Beweis:** Die Aussage (i) folgt direkt aus Satz 1.2.4, da  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  als äußere Fortsetzung von  $\rho$  definiert ist. Nach Bemerkung 1.2.20 ist  $\mathcal{L}_b$  enthalten in der Menge  $(\mathcal{C}_b)^\sigma$ , welche alle Limiten von monoton wachsenden Folgen in  $\mathcal{C}_b$  umfasst. Nach Korollar 1.2.9 stimmt die durch äußere Approximation erzeugte Fortsetzung auf dieser Menge mit der durch monotone Approximation erzeugten Fortsetzung überein. Das bedeutet, dass  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  stetig von unten ist und mit dieser Eigenschaft auch eindeutig auf  $\mathcal{L}_b$ .

Das konvexe Risikomaß  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  besitzt genau dann eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1$ , wenn für alle  $X \in \mathcal{L}_b$  einerseits

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \inf_{X \geq Y \in \mathcal{C}_b} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \inf_{X \geq Y \in \mathcal{C}_b} \rho(Y) \\ &= \inf_{X \geq Y \in \mathcal{C}_b} \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} \end{aligned}$$

gilt. Das bedeutet, dass die Penalty-Funktion  $\alpha$  die Bedingung (1.21) erfüllen muss. Dabei haben wir für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{M}_1$  die folgende Regularitätseigenschaft des Erwartungswertes verwendet:

$$\mathbb{E}_Q(-X) = \inf_{X \geq Y \in \mathcal{C}_b} \mathbb{E}_Q(-Y) \quad \forall X \in \mathcal{L}_b.$$

Diese gilt nach Korollar 1.2.9. □

**Fortsetzung nach  $\mathcal{U}_b$  durch  $\mathcal{C}_b$ -innere Approximation**

**Satz 1.2.24.** *Es sei  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß.*

(i) *Die durch*

$$\rho_{\mathcal{U}_b}(X) := \sup\{\rho(Y) \mid X \leq Y \in \mathcal{C}_b\} \quad \forall X \in \mathcal{U}_b,$$

*definierte Fortsetzung  $\rho_{\mathcal{U}_b} : \mathcal{U}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein monetäres Risikomaß.*

(ii) *Falls  $\rho$  stetig von oben ist, dann ist  $\rho_{\mathcal{U}_b}$  ein konvexes Risikomaß und stetig von oben. Außerdem ist die Fortsetzung mit dieser Stetigkeitseigenschaft eindeutig auf  $\mathcal{U}_b$*

(iii) *Erlaubt  $\rho$  eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_1$  wie in (1.18) bezüglich einer Penalty-Funktion  $\alpha$ , dann ist  $\rho_{\mathcal{U}_b}$  ebenfalls bezüglich  $\alpha$  robust darstellbar, d. h.,*

$$\rho_{\mathcal{U}_b}(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \quad \forall X \in \mathcal{U}_b.$$

**Beweis:** Nach Satz 1.2.4 ist die durch innere Approximation definierte Fortsetzung ein monetäres Risikomaß auf  $\mathcal{U}_b$ . Falls  $\rho$  stetig von oben ist, dann stimmen nach Korollar 1.2.9 und wegen  $\mathcal{U}_b \subset (\mathcal{C}_b)_\sigma$  die innere Fortsetzung und das durch monotone Approximation erzeugte konvexe Risikomaß überein. Das bedeutet, dass  $\rho_{\mathcal{U}_b}$  ebenfalls konvex ist und die einzige von oben stetige Fortsetzung von  $\rho$  auf  $\mathcal{U}_b$ .

Nun nehmen wir an, dass eine Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1$  existiert, die eine robuste Darstellung für  $\rho$  wie in (1.18) liefert. Für alle  $X \in \mathcal{U}_b$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{U}_b}(X) &= \sup_{X \leq Y \in \mathcal{C}_b} \rho(Y) \\ &= \sup_{X \leq Y \in \mathcal{C}_b} \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \sup_{X \leq Y \in \mathcal{C}_b} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)\}, \end{aligned}$$

denn für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{M}_1$  gilt nach Korollar 1.2.9

$$\mathbb{E}_Q(-X) = \sup_{X \leq Y \in \mathcal{C}_b} \mathbb{E}_Q(-Y) \quad \forall X \in \mathcal{U}_b.$$

□

**Fortsetzung nach  $\mathcal{B}$  durch  $\mathcal{L}_b$ -innere Approximation**

**Satz 1.2.25.** *Es sei  $\rho_{\mathcal{L}_b} : \mathcal{L}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß.*

(i) *Die durch*

$$\rho_{\mathcal{B}}(X) := \sup\{\rho_{\mathcal{L}_b}(Y) \mid X \leq Y \in \mathcal{L}_b\} \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

*definierte Fortsetzung  $\rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein monetäres Risikomaß.*

(ii) *Falls  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  eine robuste Darstellung (1.20) bezüglich einer Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1$  besitzt, dann ist  $\rho_{\mathcal{B}}$  ein konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{B}$ . In diesem Fall erlaubt auch  $\rho_{\mathcal{B}}$  eine robuste Darstellung bezüglich  $\alpha$ , d. h.,*

$$\rho_{\mathcal{B}}(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

*und es ist das einzige konvexe Risikomaß auf  $\mathcal{B}$ , das  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  auf  $\mathcal{B}$  fortsetzt und eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$  besitzt.*

(iii) *Falls  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  stetig von unten ist auf  $\mathcal{L}_b$ , dann ist die Konvexität von  $\rho_{\mathcal{B}}$  äquivalent zur Existenz einer Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1$ , die  $\rho_{\mathcal{L}_b}|_{\mathcal{L}_b}$  robust darstellt und die Bedingung (1.21) erfüllt.*

**Beweis:** Die Aussage (i) folgt wieder aus Satz 1.2.4. Wir zeigen Teil (ii) und nehmen an, dass  $\rho_{\mathcal{L}_b}$  eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion  $\alpha$  auf  $\mathcal{M}_1$  besitzt. Dann gilt für alle  $X \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{B}}(X) &= \sup_{X \leq Y \in \mathcal{L}_b} \rho_{\mathcal{L}_b}(Y) \\ &= \sup_{X \leq Y \in \mathcal{L}_b} \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \sup_{X \leq Y \in \mathcal{L}_b} \{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha(Q)\} \\ &= \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q)\}, \end{aligned}$$

denn für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{M}_1$  haben wir

$$\mathbb{E}_Q(-X) = \sup_{X \leq Y \in \mathcal{L}_b} \mathbb{E}_Q(-Y) \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

Diese Gleichheit erhält man zunächst für einfache Funktionen, da

$$Q(B) = \inf\{Q(A) \mid B \subset A, A \in \mathcal{F} \text{ offen}\} \quad \forall B \in \mathcal{F},$$

und weil die Indikatorfunktion einer offenen Menge unterhalbstetig ist. Die Darstellung überträgt man dann für beliebige beschränkte und messbare Funktionen durch Approximation von oben durch einfache Funktionen mit Hilfe der Stetigkeit des Erwartungswertes.

Nach Satz 1.2.26 (i) ist jedes konvexe Risikomaß auf  $\mathcal{B}$ , das eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$  erlaubt, von innen regulär bezüglich  $\mathcal{L}_b$ . Dies impliziert die Eindeutigkeit der Fortsetzung.

Die Behauptung (iii) folgt aus Satz 1.2.26 (ii). Ein konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{B}$ , das von innen  $\mathcal{L}_b$ -regulär ist und auf  $\mathcal{L}_b$  stetig von unten, besitzt eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$ . Diese leistet das Gewünschte. Die umgekehrte Richtung hatten wir bereits bewiesen.  $\square$

Die Ergebnisse des folgenden Satzes von [28], vgl. dort Proposition 3.4 und Theorem 3.5, haben wir im Beweis oben verwendet, um die Eindeutigkeit der Fortsetzung zu zeigen.

**Satz 1.2.26.** *Es sei  $\rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß. Dann gilt:*

- (i) *Falls  $\rho_{\mathcal{B}}$  eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$  besitzt, dann ist  $\rho_{\mathcal{B}}$  von innen  $\mathcal{L}_b$ -regulär, d. h., dass  $\rho_{\mathcal{B}} = (\rho_{\mathcal{B}}|_{\mathcal{L}_b})_{\star}$ .*
- (ii) *Falls  $\rho_{\mathcal{B}}$  von innen  $\mathcal{L}_b$ -regulär ist und stetig von unten auf  $\mathcal{L}_b$ , so besitzt  $\rho_{\mathcal{B}}$  eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$ .*

### Fortsetzung nach $\mathcal{B}$ durch $\mathcal{U}_b$ -äußere Approximation

**Satz 1.2.27.** *Es sei  $\rho_{\mathcal{U}_b} : \mathcal{U}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß.*

- (i) *Die durch*

$$\rho_{\mathcal{B}}(X) := \inf\{\rho_{\mathcal{U}_b}(Y) \mid X \geq Y \in \mathcal{U}_b\} \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

*definierte Fortsetzung  $\rho_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ist ein konvexes Risikomaß.*

- (ii) *Zusätzlich gelte für alle Konstanten  $K \geq 1$  und jede absteigende Folge  $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$  von offenen Mengen mit  $\bigcap A_n = \emptyset$ , dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathcal{U}_b}(-K\mathbb{I}_{A_n}) = 0. \tag{1.22}$$

*Dann ist das konvexe Risikomaß  $\rho_{\mathcal{B}}$  stetig von unten auf  $\mathcal{B}$ . Außerdem ist es das einzige konvexe Risikomaß, das  $\rho_{\mathcal{U}_b}$  auf  $\mathcal{B}$  fortsetzt und stetig von unten ist.*

**Beweis:** Der erste Teil des Satzes folgt direkt aus Satz 1.2.4, da durch die Methode der äußere Approximation ein Risikomaß erzeugt wird und die Konvexität des ursprünglichen Risikomaßes erhalten bleibt. Das konvexe Risikomaß  $\rho_{\mathcal{B}}$  ist genau dann stetig von unten, wenn es von unten stetig in 0 ist. Unter den topologischen Voraussetzungen dieses Abschnitts ist Stetigkeit von unten sogar äquivalent zur obigen Bedingung (1.22), vgl. [28], Theorem 3.2.

Ein konvexes Risikomaß, das stetig von unten ist, besitzt nach Theorem 1.1.9 eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1$ . Außerdem ist es nach Satz 1.2.26 (i)  $\mathcal{L}_b$ -regulär von innen. Nach Satz 1.2.25 (ii) ist  $\rho_{\mathcal{B}}$  eindeutig.  $\square$

### Vergleich beider Fortsetzungsmethoden

Wir fassen nun die Ergebnisse der obigen Sätze zusammen, um die beiden in (1.19) beschriebenen Fortsetzungsmethoden unter Regularitätsbedingungen zu vergleichen.

**Korollar 1.2.28.** *Es sei  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß und stetig von unten.*

- (i) *Die Fortsetzung  $(\rho^*|_{\mathcal{L}_b})_\star$  ist genau dann ein konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{B}$ , stetig von unten auf  $\mathcal{L}_b$  und stetig von oben auf  $\mathcal{B}$ , wenn  $\rho$  eine robuste Darstellung bezüglich einer Penalty-Funktion  $\alpha$  erlaubt, die der Bedingung (1.21) genügt. In diesem Fall gilt:*

$$(\rho^*|_{\mathcal{L}_b})_\star(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \in \mathcal{M}_1\} \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

*und die Fortsetzung  $(\rho^*|_{\mathcal{L}_b})_\star$  ist eindeutig im Sinne von Satz 1.2.25 (ii).*

- (ii) *Die Fortsetzung  $(\rho_\star|_{\mathcal{U}_b})^\star$  ist genau dann ein konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{B}$  und stetig von unten, wenn  $\rho_\star|_{\mathcal{U}_b}$  die Bedingung (1.22) erfüllt. Insbesondere ist diese Fortsetzung von innen  $\mathcal{L}_b$ -regulär und stetig von unten auf  $\mathcal{L}_b$ , d. h., dass*

$$(\rho_\star|_{\mathcal{U}_b})^\star = (\rho^*|_{\mathcal{L}_b})_\star.$$

**Reguläre Fortsetzungen von  $\mathcal{C}_b$  nach  $L^\infty$** 

Die Diskussion der Fortsetzbarkeit von  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$  kann vereinfacht werden, wenn wir annehmen, dass es ein Referenzmaß  $P \in \mathcal{M}_1$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  gibt, so dass das konvexe Risikomaß für alle stetigen Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{C}_b$  die Bedingung erfüllt:

$$X = Y \quad P\text{-f. s.} \quad \Rightarrow \quad \rho(X) = \rho(Y). \quad (1.23)$$

Unter diesen Voraussetzungen bietet sich eine Fortsetzung von der Klasse  $\mathcal{C}_b$  auf den linearen Raum  $L^\infty := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  der messbaren und  $P$ -fast sicher beschränkten Zufallsvariablen an. Das heißt, wir behalten das Referenzmaß bei. Dadurch können wir die Regularitätseigenschaften des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  bezüglich der Mengen aller ober- bzw. unterhalbstetigen Funktionen ausnutzen, welche das folgende Lemma beschreibt.

**Lemma 1.2.29.** *Es sei  $X \in L^\infty$  ein beliebiges Auszahlungsprofil.*

- (i) *Es gibt eine monoton fallende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{L}_b$  von unterhalbstetigen Funktionen, so dass  $X = \lim X_n$   $P$ -fast sicher.*
- (ii) *Es gibt eine monoton wachsende Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{U}_b$  von oberhalbstetigen Funktionen, so dass  $X = \lim X_n$   $P$ -fast sicher.*

**Beweis:** Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  ist regulär im folgenden Sinne. Für jede Borelmenge  $B \in \mathcal{F}$  gilt

$$\begin{aligned} P(B) &= \sup\{P(A) \mid A \subset B, A \in \mathcal{F} \text{ abgeschlossen}\} \\ &= \inf\{P(A) \mid B \subset A, A \in \mathcal{F} \text{ offen}\}. \end{aligned}$$

Die Indikatorfunktion  $\mathbb{I}_A$  eines Ereignisses  $A \in \mathcal{F}$  ist genau dann oberhalbstetig, wenn  $A$  abgeschlossen ist. Umgekehrt ist  $\mathbb{I}_A$  genau dann unterhalbstetig, wenn  $A$  offen ist. Das bedeutet, dass jede Treppenfunktion im  $P$ -fast sicheren Sinne von oben durch eine fallende Folge von unterhalbstetigen Funktionen sowie von unten durch eine wachsende Folge von oberhalbstetigen Funktionen approximiert werden kann. Für allgemeine Auszahlungsprofile erhalten wir die Aussagen durch Approximation von oben und unten durch einfache Funktionen.  $\square$

Alle bisher untersuchten Fortsetzungsmethoden besitzen eine Variante in Bezug auf eine  $P$ -fast sichere Approximation, und die Resultate der Sätze 1.2.2

und 1.2.4 sowie des Korollars 1.2.9 gelten in entsprechender Weise. Es sei dem interessierten Leser überlassen, die Beweise zu übertragen. Nach Lemma 1.2.29 kann jede  $P$ -fast sichere Approximation von innen durch unterhalbstetige Funktionen als eine monoton fallende und  $P$ -fast sicher punktweise Approximation aufgefasst werden. Ebenso kann eine  $P$ -fast sichere Approximation von außen durch oberhalbstetige Funktion als eine monoton wachsende und  $P$ -fast sicher punktweise Approximation angesehen werden. Damit erhalten wir folgendes Resultat.

**Korollar 1.2.30.** *Es sei  $\rho : \mathcal{C}_b \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß, das stetig von unten ist und der Bedingung (1.23) genügt.*

(i) *Die durch*

$$(\rho^{*,P}|_{\mathcal{L}_b})_{*,P}(X) := \sup_{X \leq Y \in \mathcal{L}_b P\text{-f. s.}} \inf_{Y \geq Z \in \mathcal{C}_b P\text{-f. s.}} \rho(Z) \quad \forall X \in L^\infty$$

*definierte Fortsetzung von  $\rho$  ist ein monetäres Risikomaß auf  $L^\infty$  und stetig von unten auf  $\mathcal{L}_b$ .  $(\rho^{*,P}|_{\mathcal{L}_b})_{*,P}$  ist genau dann ein konvexes Risikomaß und stetig von oben auf  $L^\infty$ , wenn  $\rho^{*,P}|_{\mathcal{L}_b}$  auf  $\mathcal{L}_b$  stetig von oben ist. In diesem Fall besitzt  $(\rho^{*,P}|_{\mathcal{L}_b})_{*,P}$  eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_1(P)$ .*

(ii) *Die durch*

$$(\rho_{*,P}|_{\mathcal{U}_b})^{*,P}(X) := \inf_{X \geq Y \in \mathcal{U}_b P\text{-f. s.}} \sup_{Y \leq Z \in \mathcal{C}_b P\text{-f. s.}} \rho(Z) \quad \forall X \in L^\infty$$

*definierte Fortsetzung von  $\rho$  ist ein konvexes Risikomaß auf  $L^\infty$  und stetig von oben auf  $\mathcal{U}_b$ .  $(\rho_{*,P}|_{\mathcal{U}_b})^{*,P}$  ist genau dann stetig von unten auf  $L^\infty$ , wenn  $\rho_{*,P}|_{\mathcal{U}_b}$  die Stetigkeitsbedingung (1.22) erfüllt. In diesem Fall gilt*

$$(\rho_{*,P}|_{\mathcal{U}_b})^{*,P} = (\rho^{*,P}|_{\mathcal{L}_b})_{*,P}.$$

# Kapitel 2

## Bedingte konvexe Risikomaße

Der Übergang zu einem statischen und bedingten Modell stellt die nächste konzeptionelle Erweiterung der Theorie der konvexen Risikomaße dar. Die Bewertung des Verlustrisikos von Finanzanlagen erfolgt nun auch in Abhängigkeit von der zum Bewertungszeitpunkt zur Verfügung stehenden Information. Jedem Auszahlungsprofil wird eine Zufallsvariable zugeordnet, die wie zuvor als Höhe einer aus Sicht der zuständigen Aufsichtsbehörde erforderlichen Rücklage interpretiert werden soll. Erste Untersuchungen zur Darstellung von bedingten konvexen Risikomaßen führten Detlefsen & Scandolo [13] durch.

Das Kapitel 2 ist wie folgt gegliedert. Im ersten Teil diskutieren wir die Eigenschaften von bedingten konvexen Risikomaßen und die verschiedenen Möglichkeiten ihrer Darstellung. Wir gehen dabei analog zur unbedingten Situation vor. Im Abschnitt 2.1.1 erklären wir den Zusammenhang zwischen bedingten konvexen Risikomaßen und ihren Akzeptanzmengen. Im Abschnitt 2.1.2 erläutern wir, unter welchen Voraussetzungen ein bedingtes konvexes Risikomaß eine robuste Darstellung mittels einer Penalty-Funktion besitzt.

Im zweiten Teil untersuchen wir reguläre bedingte Darstellungen von bedingten konvexen Risikomaßen. Dies sind szenarioabhängige Familien von unbedingten konvexen Risikomaßen auf geeigneten Klassen von Auszahlungsprofilen, die eine punktweise Interpretation eines bedingten konvexen Risikomaßes als Mindesthöhe einer erforderlichen Kapitalrücklage ermöglichen. Im Abschnitt 2.2.1 definieren wir solche Darstellungen und motivieren sie anhand einiger Beispiele. Im Abschnitt 2.2.2 beweisen wir die Existenz von regulären bedingten Darstellungen auf polnischen Räumen für die Klassen der ober- bzw. unterhalbstetigen Funktionen. Auf der Klasse aller beschränkten

und messbaren Auszahlungsprofile können wir die Existenz nur für Spezialfälle nachweisen. So zeigen wir im Abschnitt 2.2.3, dass bedingte kohärente Risikomaße, die durch das Choquet-Integral bezüglich einer konvexen Verzerrung der zugrunde liegenden regulären bedingten Wahrscheinlichkeit des Referenzmaßes induziert werden, eine reguläre bedingte Darstellung erlauben. Ein Beispiel dafür ist das bedingte Average Value at Risk, welches in Abhängigkeit des eintretenden Szenarios als ein unbedingtes Average Value at Risk angesehen werden kann.

## 2.1 Bedingte konvexe Risikomaße und ihre Darstellung

### 2.1.1 Darstellung bezüglich der Akzeptanzmenge

Die Diskussion der Eigenschaften von bedingten konvexen Risikomaßen und der Möglichkeiten ihrer Darstellung führen wir nicht unter den allgemeinen Bedingungen des ersten Kapitels, sondern wir beschränken uns auf den in der Literatur üblichen Rahmen. Es sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  gegeben, wobei  $\Omega$  eine Menge von zukünftigen Szenarien ist und  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra von Ereignissen, die am Ende einer Handelsperiode beobachtbar sind. Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  dient hierbei als ein Referenzmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  zur Festlegung von Nullmengen. Sämtliche Ungleichungen und Gleichungen von Zufallsvariablen sind in diesem Abschnitt im  $P$ -fast sicheren Sinne gemeint.

Als Klasse der zu bewertenden Auszahlungsprofile wählen wir den linearen Raum  $\mathcal{X} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  der  $\mathcal{F}$ -messbaren und  $P$ -fast sicher beschränkten Zufallsvariablen. Das Risiko eines Auszahlungsprofils  $X \in \mathcal{X}$  soll wie im unbedingten Fall durch ein monotonen, translationsinvarianten, normiertes und konvexes Funktional  $\rho_0$  bewertet werden, mit der Interpretation von  $\rho_0(X)$  als Höhe einer erforderlichen Rücklage für  $X$ . Diesmal nehmen wir jedoch an, dass uns zum Bewertungszeitpunkt eine gewisse Information zur Verfügung steht. Deren Struktur sei dargestellt durch eine Teil- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ . Wir bezeichnen mit  $\mathcal{X}_0 := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$  die Klasse aller  $\mathcal{F}_0$ -messbaren und  $P$ -fast sicher beschränkten Zufallsvariablen und definieren bedingte konvexe bzw. kohärente Risikomaße wie in [13].

### Eigenschaften

**Definition 2.1.1.** Eine Abbildung  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  heißt bedingtes konvexes Risikomaß, falls sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

- *Monotonie:*  $\rho_0(X) \geq \rho_0(Y)$  für alle  $X, Y \in \mathcal{X}$  mit  $X \leq Y$ ,
- *Bedingte Translationsinvarianz:*  $\rho_0(X + X_0) = \rho_0(X) - X_0$  für alle  $X \in \mathcal{X}$  und  $X_0 \in \mathcal{X}_0$ ,
- *Normiertheit:*  $\rho_0(0) = 0$ ,
- *Bedingte Konvexität:*  $\rho_0(\Lambda X + (1 - \Lambda)Y) \leq \Lambda \rho_0(X) + (1 - \Lambda)\rho_0(Y)$  für alle  $X, Y \in \mathcal{X}$  und  $\Lambda \in \mathcal{X}_0$  mit  $0 \leq \Lambda \leq 1$ .

Erfüllt ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0$  zusätzlich die Bedingung:

- *Bedingte positive Homogenität:*  $\rho_0(\Lambda X) = \Lambda \rho_0(X)$  für alle  $X \in \mathcal{X}$  und  $0 \leq \Lambda \in \mathcal{X}_0$ ,

so nennt man es ein bedingtes kohärentes Risikomaß.

**Beispiel:** Falls die zum Bewertungszeitpunkt verfügbare Information *trivial* ist, d. h.  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , so stimmt die Definition eines bedingten konvexen Risikomaßes  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der früheren Definition eines konvexen Risikomaßes auf  $\mathcal{X}$  überein, vgl. Abschnitt 1.1.3.

Ist die Information hingegen *vollständig*, d. h.  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ , dann implizieren die beiden Eigenschaften Normiertheit und bedingte Translationsinvarianz die Eindeutigkeit eines bedingten konvexen Risikomaßes  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ . Dieses ist gegeben durch  $\rho_0 = -\text{id}$ .  $\diamond$

Wie in der unbedingten Situation unterscheiden wir verschiedene Arten von Stetigkeit.

**Bemerkung 2.1.2.** Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß.

- (i) Aus den Eigenschaften Monotonie und bedingte Translationsinvarianz folgt, dass  $\rho_0$  Lipschitz-stetig bezüglich der Supremumsnorm ist, vgl. auch [13], Bemerkung 2.4. Für zwei Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{X}$  gilt:

$$\|\rho_0(X) - \rho_0(Y)\|_\infty \leq \|X - Y\|_\infty.$$

Demnach stellt es keine Beschränkung der Allgemeinheit dar, dass bedingte konvexe Risikomaße als Abbildungen mit Werten in  $\mathcal{X}_0$  statt in  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  definiert sind.

- (ii)  $\rho_0$  heißt stetig von unten (stetig von oben) in einem Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}$ , falls für jede monoton wachsende (monoton fallende) Folge  $\{X_n\} \subset \mathcal{X}$  gilt:

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \quad P\text{-f. s.} \quad \Rightarrow \quad \rho_0(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_0(X_n) \quad P\text{-f. s.}$$

Das Lemma 1.1.8 gilt auch in bedingter Form:  $\rho_0$  ist genau dann stetig von unten und stetig von oben auf  $\mathcal{X}$ , wenn es stetig von unten in 0 ist. Der Beweis ist analog.

In der folgenden Bemerkung erklären wir, unter welchen Voraussetzungen sich die drei Eigenschaften der bedingten Translationsinvarianz, der bedingten Konvexität und der bedingten positiven Homogenität aus den Eigenschaften in unbedingter Form ableiten lassen.

**Bemerkung 2.1.3.** *Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  eine monotone und normierte Abbildung.*

- (i) *Falls  $\rho_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß ist, dann erhalten wir aus der Normiertheit und der bedingten Konvexität von  $\rho_0$  für jedes  $X \in \mathcal{X}$  und für ein beliebiges Ereignis  $A_0 \in \mathcal{F}_0$  die Ungleichungen*

$$\rho_0(X \mathbb{I}_{A_0}) \leq \mathbb{I}_{A_0} \rho_0(X) = \mathbb{I}_{A_0} \rho_0(\mathbb{I}_{A_0} \mathbb{I}_{A_0} X + \mathbb{I}_{A_0^c} X) \leq \mathbb{I}_{A_0} \rho_0(\mathbb{I}_{A_0} X)$$

und

$$0 = \rho_0(\mathbb{I}_{A_0^c} \mathbb{I}_{A_0} X) \leq \mathbb{I}_{A_0^c} \rho_0(\mathbb{I}_{A_0} X).$$

Daraus folgt, dass

$$\rho_0(\mathbb{I}_{A_0} X) = \mathbb{I}_{A_0} \rho_0(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}, A_0 \in \mathcal{F}_0. \quad (2.1)$$

Natürlich implizieren die Eigenschaften bedingte Translationsinvarianz, bedingte Konvexität und bedingte positive Homogenität die entsprechenden Eigenschaften in unbedingter Form für Konstanten.

- (ii) *Unter der Annahme, dass  $\rho_0$  stetig von oben oder stetig von unten ist, gilt auch der Umkehrschluss: Falls  $\rho_0$  translationsinvariant und konvex für Konstanten ist und die Bedingung (2.1) erfüllt, dann handelt es sich bei dieser Abbildung um ein bedingtes konvexes Risikomaß. Wenn  $\rho_0$*

zusätzlich positiv homogen ist, dann ist es auch bedingt positiv homogen, also ein bedingtes kohärentes Risikomaß. Man beweist die Eigenschaften in ihrer bedingten Form zunächst für einfache Funktionen und überträgt sie danach mit Hilfe der Stetigkeit von oben auf beliebige  $\mathcal{F}_0$ -messbare Funktionen.

### Akzeptanz- und Ablehnungsmengen

Auch zwischen bedingten konvexen Risikomaßen  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  und ihren Akzeptanzmengen

$$\mathcal{A}_{\rho_0} := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho_0(X) \leq 0\}$$

besteht eine eindeutige Korrespondenz. Die Beweise zu den folgenden beiden Sätzen findet man in [13], Proposition 2.5. Für eine detaillierte Einführung und Charakterisierung des dort verwendeten Begriffs des essentiellen Supremums einer Familie von Zufallsvariablen verweisen wir auf [21], Anhang A.5.

**Satz 2.1.4.** *Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß.*

- (i) *Die zugehörige Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_{\rho_0}$  ist nicht leer, bedingt konvex und solide, d. h., dass  $Y \in \mathcal{A}_{\rho_0}$ , wenn  $Y \geq X$  und  $X \in \mathcal{A}_{\rho_0}$ . Außerdem ist  $0 = \text{ess inf } \mathcal{A}_{\rho_0} \cap \mathcal{X}_0$ .*
- (ii) *Falls  $\rho_0$  ein bedingtes kohärentes Risikomaß ist, dann ist seine Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_{\rho_0}$  zusätzlich bedingt positiv homogen.*
- (iii) *Für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$  gilt die Darstellung*

$$\rho_0(X) = \text{ess inf } \{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid X + X_0 \in \mathcal{A}_{\rho_0}\}.$$

Umgekehrt lässt sich aus einer geeigneten Klasse von akzeptablen Auszahlungsprofilen ein bedingtes konvexes Risikomaß konstruieren.

**Satz 2.1.5.** *Es sei  $\emptyset \neq \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{X}$  eine Menge von Auszahlungsprofilen, die solide und bedingt konvex ist und derart, dass  $0 = \text{ess inf } \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{X}_0$ . Definiert man*

$$\rho_{\mathcal{A}_0}(X) = \text{ess inf } \{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid X + X_0 \in \mathcal{A}_0\} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

dann gilt:

- (i) *Die Abbildung  $\rho_{\mathcal{A}_0} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ist ein bedingtes konvexes Risikomaß.*

- (ii)  $\mathcal{A}_0$  ist eine Teilmenge der zugehörigen Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_{\rho_{\mathcal{A}_0}}$
- (iii) Falls  $\mathcal{A}_0$  zusätzlich bedingt positiv homogen ist, dann ist  $\rho_0$  ein bedingtes kohärentes Risikomaß.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden wir dort, wo Verwechslungen ausgeschlossen sind, die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_{\rho_0}$  eines bedingten konvexen Risikomaßes  $\rho_0$  mit  $\mathcal{A}_0$  bezeichnen. Wie in der unbedingten Situation definieren wir auch hier eine zugehörige *Ablehnungsmenge*

$$\mathcal{N}_0 := \mathcal{N}_{\rho_0} := \{X \in \mathcal{X} \mid \rho_0(X) \geq 0\}.$$

Wir wollen jedoch darauf verzichten, auf die Eigenschaften dieser Menge einzugehen. Wir verweisen auf den entsprechenden Abschnitt in Kapitel 1 und überlassen es dem interessierten Leser, die dort durch Konjugation erhaltenen Resultate zu übertragen. Die Ablehnungsmenge werden wir im Kapitel 3 über dynamische konvexe Risikomaße neben der Akzeptanzmenge verwenden, um eine zeitlich „konsistente und konsequente“ Risikobewertung zu beschreiben.

### 2.1.2 Robuste Darstellungen

In diesem Abschnitt geben wir einen Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten der robusten Darstellung von bedingten konvexen Risikomaßen als ein essentielles Supremum von bedingten linearen Funktionalen.

#### Robuste Darstellung auf $\mathcal{M}_1(P)$

In einer robusten Darstellung für bedingte konvexe Risikomaße verwendet man bedingte Erwartungen statt Erwartungswerte und eine Penalty-Funktion, die jedem Wahrscheinlichkeitsmaß eine  $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable zuordnet. Für ein Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}$  und ein absolutstetiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \ll P$  kann es verschiedene Versionen der bedingten Erwartung  $\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0)$  geben. Diese stimmen stets  $Q$ -fast sicher überein, jedoch gilt diese Gleichheit nicht notwendigerweise auch im  $P$ -fast sicheren Sinne. Auf der Menge  $\{\mathbb{E}_P(dQ/dP|\mathcal{F}_0) = 0\} \in \mathcal{F}_0$  ist die bedingte Erwartung  $\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0)$  nicht eindeutig, deshalb definiert man bedingte Penalty-Funktionen auf der Menge aller absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße, für die das Ereignis eine Nullmenge unter dem Referenzmaß ist. Wir bezeichnen diese mit

$$\mathcal{P}_0 := \{Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid Q|_{\mathcal{F}_0} \sim P|_{\mathcal{F}_0}\}.$$

Wir sagen, dass ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0$  eine *robuste Darstellung* auf  $\mathcal{P}_0$  besitzt, falls eine *Penalty-Funktion*  $\alpha_0$  existiert, die jedem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{P}_0$  eine  $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable  $\alpha_0(Q)$  mit Werten in  $[0, +\infty]$  zuordnet, so dass

$$\operatorname{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{P}_0} \alpha_0(Q) = 0 \quad (2.2)$$

und

$$\rho_0(X) = \operatorname{ess\,sup} \{ \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) - \alpha_0(Q) \mid Q \in \mathcal{P}_0 \} \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (2.3)$$

Gelegentlich interessiert auch eine robuste Darstellung bezüglich der Teilmenge von  $\mathcal{P}_0$  derjenigen Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0$  mit dem Referenzmaß identisch sind, also bezüglich

$$\mathcal{Q}_0 := \{ Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid Q|_{\mathcal{F}_0} = P|_{\mathcal{F}_0} \} \subset \mathcal{P}_0.$$

Das folgende Theorem zeigt jedoch, dass für eine solche Darstellung keine zusätzlichen Eigenschaften des bedingten konvexen Risikomaßes voraussetzen sind. Wie im unbedingten Fall ist die Existenz einer robusten Darstellung gleichbedeutend mit der Forderung, dass  $\rho_0$  für monoton fallende Folgen von Auszahlungsprofilen stetig ist.

**Theorem 2.1.6.** *Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $\rho_0$  besitzt eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{P}_0$  wie in (2.2) und (2.3).
- (b)  $\rho_0$  erlaubt eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{P}_0$  bezüglich der Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}^0$ , die definiert ist durch

$$\alpha_{\min}^0(Q) := \operatorname{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_0} \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) \quad \forall Q \in \mathcal{P}_0. \quad (2.4)$$

- (c)  $\rho_0$  ist stetig von oben.
- (d)  $\rho_0$  besitzt eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{Q}_0$ .
- (e)  $\rho_0$  erlaubt eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{Q}_0$  bezüglich der in (2.4) definierten Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}^0$ , d. h., dass

$$\rho_0(X) = \operatorname{ess\,sup} \{ \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) - \alpha_{\min}^0(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}_0 \} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Falls die obigen Bedingungen erfüllt sind, dann wird die Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}^0$  von jeder anderen Penalty-Funktion  $\alpha_0$  dominiert, d. h., dass für alle  $Q \in \mathcal{P}_0$  gilt  $\alpha_{\min}^0(Q) \leq \alpha_0(Q)$ .

In [13], Theorem 3.2, wird der Nachweis dafür erbracht, dass die Existenz einer robusten Darstellung auf  $\mathcal{Q}_0$  äquivalent zur Stetigkeit von oben ist. In [17] wird das Theorem um die äquivalente Bedingung der Existenz einer robusten Darstellung auf  $\mathcal{P}_0$  ergänzt, vgl. dort Theorem 2.3.

**Bemerkung 2.1.7.** Falls  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes kohärentes Risikomaß mit einer robusten Darstellung ist, so gilt für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$

$$\rho_0(X) = \text{ess sup} \{ \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) \mid Q \in \mathcal{Q}_0, \alpha_{\min}^0(Q) = 0 \text{ Q-f. s.} \},$$

vgl. [17], Korollar 2.5.

### Robuste Darstellung auf $\mathcal{M}_e(P)$

Wir wollen kurz zusammenfassen, unter welchen zusätzlichen Bedingungen eine robuste Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf der Menge  $\mathcal{M}_e(P)$  aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße möglich ist. Es gilt die aus der unbedingten Situation bereits bekannte Charakterisierung, vgl. [17], Lemma 3.5.

**Lemma 2.1.8.** Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß, das stetig von oben ist. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a)  $\rho_0$  besitzt eine robuste Darstellung durch die auf  $\mathcal{M}_e(P)$  eingeschränkte und wie in (2.4) definierte minimale Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}^0$ , d. h., dass

$$\rho_0(X) = \text{ess sup} \{ \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) - \alpha_{\min}^0(Q) \mid Q \sim P \} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

- (b) In der robusten Darstellung von  $\rho_0$  bezüglich der minimalen Penalty-Funktion  $\alpha_{\min}^0$  auf  $\mathcal{P}_0$  gibt es ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  mit  $\alpha_{\min}^0(Q) < \infty$ .

Damit erhält man die folgenden Resultate zur Existenz einer robusten Darstellung durch eine Penalty-Funktion auf den äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Für den Beweis der Aussage (i) verweisen wir auf [17], Lemma 3.4, und für den von Aussage (ii) auf [26], Theorem 3.13.

**Satz 2.1.9.** *Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß und stetig von oben.*

(i) *Falls  $\rho_0$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  die Bedingung erfüllt:*

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(\rho_0(-\varepsilon \mathbb{I}_A) > 0) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

*dann existiert zu jedem  $\delta > 0$  ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  mit  $\alpha_{\min}^0(Q) < \delta$ . Insbesondere besitzt  $\rho_0$  eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_e(P)$ .*

(ii) *Falls die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0$  alle  $P$ -Nullmengen enthält, dann besitzt  $\rho_0$  auch ohne Zusatzbedingungen eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_e(P)$ .*

## 2.2 Reguläre bedingte Darstellungen

### 2.2.1 Definition

Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß und  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  eine konvexe Klasse von Auszahlungsprofilen, die der Bedingung  $\mathbb{R} \subset \mathcal{Y} = \mathcal{Y} + \mathbb{R}$  genügt, d. h., dass  $\mathcal{Y}$  alle konstanten Auszahlungsprofile enthält und stabil bezüglich der Addition von Konstanten ist. In diesem Abschnitt ist die Betrachtung von Nullmengen von Bedeutung, deshalb werden wir im Folgenden stets explizit angeben, ob eine Gleichung oder Ungleichung von Zufallsvariablen im fast sicheren Sinne zu verstehen ist.

**Definition 2.2.1.** *Eine Familie von konvexen Risikomaßen  $\rho_\omega : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\omega \in \Omega$ , heißt reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0$  auf  $\mathcal{Y}$ , falls für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{Y}$  gilt:*

- *Die Abbildung  $\omega \in \Omega \mapsto \rho_\omega(X)$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$ ,*
- *$\rho_0(X)(\omega) = \rho_\omega(X)$   $P$ -fast sicher.*

Wenn ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0$  eine reguläre bedingte Darstellung besitzt, dann können wir für jedes Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{Y}$  den Wert  $\rho_\omega(X)$  als Höhe einer bei Eintreten des Szenarios  $\omega \in \Omega$  erforderlichen Rücklage auffassen. Das bedeutet, dass  $\rho_0$  auf der Klasse  $\mathcal{Y}$  eine punktweise Interpretation als konvexes Risikomaß erlaubt.

### Einige Beispiele

**Beispiel:** Betrachten wir den *atomaren* Fall, bei dem die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0$  durch eine abzählbare Partition von  $\Omega$  erzeugt wird, d. h., dass es paarweise disjunkte Ereignisse  $B_i \in \mathcal{F}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , gibt derart, dass  $\mathcal{F}_0 = \sigma(B_i, i \in \mathbb{N})$ . Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $P(B_i) > 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß und  $X \in \mathcal{X}$  ein beliebiges Auszahlungsprofil.  $\rho_0(X)$  ist eine  $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable, das bedeutet, dass sie  $P$ -fast sicher konstant auf jedem Atom der  $\sigma$ -Algebra ist. Wir definieren

$$\rho_i(X) := \rho_0(X)(\omega_i) \quad \text{für ein } \omega_i \in B_i,$$

wobei das entsprechende Szenario so gewählt sei, dass  $\rho_i(X)\mathbb{1}_{B_i} = \rho_0(X)\mathbb{1}_{B_i}$   $P$ -fast sicher. Die Abbildungen  $\rho_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  sind konvexe Risikomaße. Falls  $\rho_0$  stetig von oben bzw. stetig von unten ist, dann gelten die gleichen Eigenschaften auch für die Familie  $\{\rho_i\}$ . Insbesondere erhalten wir aus einer robusten Darstellung für  $\rho_0$  eine robuste Darstellung für jedes  $\rho_i$ . Es ist

$$\rho_0(X) = \text{ess sup} \{ \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) - \alpha_0(Q) \mid Q \in \mathcal{P}_0 \} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

und mit einem geeignet gewählten Szenario  $\omega_i \in B_i$  haben wir

$$\rho_i(X) = \rho_0(X)(\omega_i) = \sup \{ \mathbb{E}_{Q(\cdot|B_i)}(-X) - \alpha_0(\omega_i) \mid Q \in \mathcal{P}_0 \} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Setzen wir schließlich  $\rho_\omega := \rho_i$  für alle  $\omega \in B_i$  und  $i \in \mathbb{N}$ , dann sind die Abbildungen  $\omega \mapsto \rho_\omega(X)$  mit  $X \in \mathcal{X}$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$  und es gilt die Darstellung  $\rho_\omega(X) = \rho_0(X)(\omega)$   $P$ -fast sicher. Demzufolge besitzt  $\rho_0$  eine reguläre bedingte Darstellung auf der Klasse  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ .  $\diamond$

**Beispiel:** Jedes bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  besitzt eine *triviale* reguläre bedingte Darstellung auf der Klasse  $\mathcal{Y} = \mathcal{B}_0$  aller  $\mathcal{F}_0$ -messbaren und beschränkten reellen Funktionen. Setzen wir nämlich für alle  $\omega \in \Omega$

$$\rho_\omega(X) := -X(\omega) \quad \forall X \in \mathcal{Y},$$

dann erfüllt die Familie der konvexen bzw. linearen Risikomaße  $\{\rho_\omega\}$  die Forderungen der Definition 2.2.1.  $\diamond$

**Beispiel:** Wir betrachten ein bedingtes *lineares* Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$ , das durch ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  erzeugt wird, d. h.,

$$\rho_0(X) := \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Wir nehmen an, dass es auf  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit bezüglich  $\mathcal{F}_0$  gibt. Das bedeutet, es existiert eine Abbildung

$$(\omega, A) \in \Omega \times \mathcal{F} \mapsto Q_\omega(A) \in [0, 1],$$

so dass für jedes Szenario  $\omega \in \Omega$  durch  $A \mapsto Q_\omega(A)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  gegeben ist und dass für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  die Zufallsvariable  $\omega \mapsto Q_\omega(A)$  eine Version der bedingten Erwartung von  $\mathbb{I}_A$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  unter  $Q$  ist.

Es sei  $\mathcal{Y} = \mathcal{B}$ , also der lineare Raum aller messbaren und beschränkten reellen Funktionen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Natürlich ist für jedes Szenario  $\omega \in \Omega$  die Abbildung

$$\rho_\omega(X) := \mathbb{E}_{Q_\omega}(-X) \quad \forall X \in \mathcal{Y}$$

ein lineares Risikomaß auf  $\mathcal{Y}$ . Außerdem zeigt man durch maßtheoretische Induktion, dass für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{Y}$  die Abbildung  $\omega \mapsto \rho_\omega(X)$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$  ist und

$$\rho_0(X)(\omega) = \rho_\omega(X) \quad P\text{-f. s.}$$

Demnach besitzt  $\rho_0$  eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{Y}$ . ◇

**Beispiel:** Nun betrachten wir ein bedingtes *entropisches* Risikomaß, definiert als

$$\rho_0(X) := \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_Q(e^{-\beta X} | \mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Dabei ist  $Q \sim P$  ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß und  $\beta > 0$  ein konstanter Parameter. Wie oben nehmen wir an, dass es auf  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit  $(\omega, A) \mapsto Q_\omega(A)$  gibt, und wieder setzen wir  $\mathcal{Y} = \mathcal{B}$ .

Die Familie der entropischen Risikomaße

$$\rho_\omega(X) := \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_{Q_\omega}(e^{-\beta X}) \quad \forall X \in \mathcal{Y}$$

mit Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_\omega$  und Parameter  $\beta > 0$  liefert eine reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0$  auf  $\mathcal{Y}$ , denn für alle  $X \in \mathcal{Y}$  ist die Zufallsvariable  $\omega \mapsto \mathbb{E}_{Q_\omega}(e^{-\beta X})$  eine Version der bedingten Erwartung  $\mathbb{E}_Q(e^{-\beta X} | \mathcal{F}_0)$ . Also ist auch die Abbildung  $\omega \mapsto \rho_\omega(X)$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$  und es gilt die Darstellung  $\rho_0(X)(\omega) = \rho_\omega(X)$   $P$ -fast sicher.

Den allgemeinen Fall, bei dem der Parameter  $\beta$  in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Information  $\mathcal{F}_0$  gewählt wird, untersuchen wir in der

Bemerkung 2.2.3. Auch hier überträgt sich eine reguläre bedingte Darstellung von  $Q$  auf das zugehörige bedingte entropische Risikomaß.  $\diamond$

### Erhalt der regulären bedingten Darstellung

Um diesen ersten Abschnitt zur regulären bedingten Darstellung von bedingten konvexen Risikomaßen abzuschließen, wollen wir untersuchen, welche Verknüpfungsmöglichkeiten eine solche Darstellung erhalten. Wir betrachten die Bildung von bedingten konvexen Kombinationen, Streckung, Robustifizierung, Komposition und Faltung.

**Bemerkung 2.2.2.** *Es sei  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  eine fixierte Klasse von Auszahlungsprofilen wie oben. Die Menge aller bedingten konvexen Risikomaße, die auf  $\mathcal{Y}$  eine reguläre bedingte Darstellung erlauben, ist bedingt konvex. Das heißt, wenn  $\rho_0^1$  und  $\rho_0^2$  zwei  $\mathcal{F}_0$ -bedingte konvexe Risikomaße auf  $\mathcal{X}$  mit einer regulären bedingten Darstellung auf  $\mathcal{Y}$  sind und  $0 \leq \Lambda \leq 1$  eine  $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable, dann erlaubt auch das bedingte konvexe Risikomaß mit*

$$\rho_0(X) := \Lambda \rho_0^1(X) + (1 - \Lambda) \rho_0^2(X) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{Y}$ . Sind nämlich  $\{\rho_\omega^1\}$  und  $\{\rho_\omega^2\}$  zwei reguläre bedingte Darstellungen für  $\rho_0^1$  bzw.  $\rho_0^2$  auf  $\mathcal{Y}$ , dann definieren wir eine neue Familie von konvexen Risikomaßen auf  $\mathcal{Y}$  und setzen

$$\rho_\omega(X) := \Lambda(\omega) \rho_\omega^1(X) + (1 - \Lambda(\omega)) \rho_\omega^2(X) \quad \forall X \in \mathcal{Y}.$$

Die Abbildung  $\omega \mapsto \rho_\omega(X)$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$ . Außerdem gilt  $P$ -fast sicher

$$\begin{aligned} \rho_0(X)(\omega) &= \Lambda(\omega) \rho_0^1(X)(\omega) + (1 - \Lambda(\omega)) \rho_0^2(X)(\omega) \\ &= \Lambda(\omega) \rho_\omega^1(X) + (1 - \Lambda(\omega)) \rho_\omega^2(X) \\ &= \rho_\omega(X). \end{aligned}$$

**Bemerkung 2.2.3.** *Es sei  $\rho_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß, das eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  auf einer Klasse  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  besitzt. Zusätzlich nehmen wir an, dass mit jedem  $X \in \mathcal{Y}$  auch die Auszahlungsprofile  $\lambda X$  mit  $\lambda \geq 0$  in  $\mathcal{Y}$  enthalten sind.*

Betrachten wir zunächst das durch Streckung mit einem konstanten Parameter  $\lambda > 0$  erzeugte bedingte konvexe Risikomaß

$$\rho_0^\lambda(X) := \lambda \rho_0 \left( \frac{X}{\lambda} \right) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

$\rho_0^\lambda$  besitzt eine reguläre bedingte Darstellung von auf  $\mathcal{Y}$ . Diese ist gegeben durch die Familie der konvexen Risikomaßen mit

$$\rho_\omega^\lambda(X) := \lambda \rho_\omega \left( \frac{X}{\lambda} \right) \quad \forall X \in \mathcal{Y}.$$

Nun sei  $0 < m \leq \Lambda \leq M < \infty$  eine  $\mathcal{F}_0$ -messbare und beschränkte Zufallsvariable, und  $\mathcal{Y}$  sei bedingt positiv homogen. Diesmal erlaubt das durch Streckung mit  $\Lambda$  erzeugte bedingte konvexe Risikomaß

$$\rho_0^\Lambda(X) := \Lambda \rho_0 \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

nur unter einer Zusatzbedingung eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{Y}$ . Hier definieren wir für alle  $\omega \in \Omega$

$$\rho_\omega^{\Lambda(\omega)}(X) := \Lambda(\omega) \rho_\omega \left( \frac{X}{\Lambda(\omega)} \right) \quad \forall X \in \mathcal{Y}.$$

Auch für diese Familie von konvexen Risikomaßen sind die Abbildungen  $\omega \mapsto \rho_\omega^{\Lambda(\omega)}(X)$  mit  $X \in \mathcal{Y}$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$ . Wegen

$$\rho_0^\Lambda(X)(\omega) = \Lambda(\omega) \rho_0 \left( \frac{X}{\Lambda} \right) (\omega) = \Lambda(\omega) \rho_\omega \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \quad P\text{-f. s.},$$

ist  $\{\rho_\omega^{\Lambda(\omega)}\}$  genau dann eine reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0^\Lambda$ , wenn

$$\rho_\omega \left( \frac{X}{\Lambda} \right) = \rho_\omega \left( \frac{X}{\Lambda(\omega)} \right) \quad P\text{-f. s.} \quad (2.5)$$

Die Bedingung (2.5) ist in jedem der folgenden Fälle erfüllt:

- (i)  $\Lambda$  ist eine einfache Funktion, d. h., dass es paarweise disjunkte Ereignisse  $A_i \in \mathcal{F}_0$ ,  $i \leq n$ , und  $\lambda_i > 0$  gibt, so dass  $\Lambda = \sum \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}$ . Dann gilt nämlich  $P$ -fast überall

$$\begin{aligned} \rho_\omega \left( \frac{X}{\Lambda} \right) &= \rho_0 \left( \sum_{i=1}^n \frac{X \mathbb{I}_{A_i}}{\lambda_i} \right) (\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_0 \left( \frac{X}{\lambda_i} \right) (\omega) \mathbb{I}_{A_i}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n \rho_\omega \left( \frac{X}{\lambda_i} \right) \mathbb{I}_{A_i}(\omega). \end{aligned}$$

- (ii) Die konvexen Risikomaße  $\{\rho_\omega\}$  sind stetig von oben auf  $\mathcal{Y}$ . Die Bedingung (2.5) folgt dann aus Teil (i), indem wir  $\Lambda$  von unten durch einfache  $\mathcal{F}_0$ -messbare Funktionen approximieren.
- (iii) Angenommen, auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  existiert bezüglich  $\mathcal{F}_0$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit  $(\omega, A) \mapsto P_\omega(A)$ . Nach Lemma 2.2.4 nimmt  $\Lambda$  für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$   $P_\omega$ -fast sicher den Wert  $\Lambda(\omega)$  an. (2.5) folgt, wenn für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  und für alle Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{Y}$  gilt:

$$X = Y \quad P_\omega\text{-f. s.} \quad \Rightarrow \quad \rho_\omega(X) = \rho_\omega(Y).$$

Der Vollständigkeit halber beweisen wir noch die in der obigen Bemerkung 2.2.3 (iii) verwendete Behauptung.

**Lemma 2.2.4.** *Es sei  $\Lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte und  $\mathcal{F}_0$ -messbare Zufallsvariable. Falls es auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit  $(\omega, A) \mapsto P_\omega(A)$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  gibt, dann ist  $\Lambda$   $P_\omega$ -fast sicher konstant für  $P$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ , d. h., dass eine  $P$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{F}_0$  existiert, so dass*

$$\Lambda \equiv \mathbb{E}_{P_\omega}(\Lambda) = \Lambda(\omega) \quad P_\omega\text{-f. s. für alle } \omega \in N^c.$$

**Beweis:** Wir nehmen zunächst an, dass  $\Lambda$  eine Treppenfunktion ist, also seien  $A_i \in \mathcal{F}_0$ ,  $i \leq n$ , endlich viele paarweise disjunkte Ereignisse und  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \leq n$ , so dass

$$\Lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}.$$

Da jede Abbildung  $\omega \mapsto P_\omega(A_i)$  eine Version der bedingten Erwartung

$$P(A_i | \mathcal{F}_0) = \mathbb{I}_{A_i} \quad P\text{-f. s.}$$

ist, haben wir  $P_\omega(A_i) = 1$  für  $P$ -fast jedes  $\omega \in A_i$  und für  $i \leq n$ . Für  $\omega \in A_i$  nimmt  $\Lambda$  demzufolge  $P_\omega$ -fast überall den konstanten Wert  $\lambda_i = \mathbb{E}_{P_\omega}(\Lambda)$  an.

Nun sei  $\Lambda$  eine beliebige  $\mathcal{F}_0$ -messbare und beschränkte Zufallsvariable. Es gibt eine monoton fallende Folge  $\{\Lambda_n\}$  von einfachen  $\mathcal{F}_0$ -messbaren Funktionen, so dass  $\lim \Lambda_n(\omega) = \Lambda(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Wir wissen bereits, dass es  $P$ -Nullmengen  $N_n \in \mathcal{F}_0$  gibt, so dass für alle  $\omega \in N_n^c$  gilt, dass  $\Lambda_n \equiv \Lambda_n(\omega) = \mathbb{E}_{P_\omega}(\Lambda_n)$   $P_\omega$ -fast sicher. Setzen wir  $N := \cup N_n \in \mathcal{F}_0$ , dann erhalten wir nach dem Satz von der monotonen Konvergenz für alle  $\omega \in N^c$

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{P_\omega}(\Lambda_n) = \mathbb{E}_{P_\omega}(\Lambda) \quad P_\omega\text{-f. s.}$$

Da  $P(N) = 0$ , folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 2.2.5.** *Durch Robustifizierung kann die reguläre bedingte Darstellung verloren gehen. Falls  $\{\rho_0^i\}_{\mathcal{I}}$  eine Familie von bedingten konvexen Risikomaßen ist, die eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega^i\}$  erlauben, so besitzt das bedingte konvexe Risikomaß mit*

$$\rho_0(X) := \operatorname{ess\,sup}_{i \in \mathcal{I}} \rho_0^i(X) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

*im Allgemeinen keine reguläre bedingte Darstellung mehr. Ausnahmen bilden die beiden Fälle einer endlichen Indexfamilie oder einer atomaren Informationsstruktur.*

**Bemerkung 2.2.6.** *Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß, das eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  auf  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  erlaubt. Wir vergrößern die Klasse der Auszahlungsprofile und betrachten einen Raum  $\tilde{\mathcal{X}} := L^\infty(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ , wobei  $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$  und  $\tilde{P}|_{\mathcal{F}} = P$  gelten soll. Weiter seien  $\tilde{\rho} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$  ein bedingtes konvexes Risikomaß und  $\tilde{\rho}_0 : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_0$  das durch Komposition erzeugte bedingte konvexe Risikomaß mit*

$$\tilde{\rho}_0(X) := \rho_0(-\tilde{\rho}(X)) \quad \forall X \in \tilde{\mathcal{X}}.$$

*Falls  $\tilde{\rho}$  eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\tilde{\rho}_\omega\}$  auf einer Klasse  $\tilde{\mathcal{Y}} \subset \tilde{\mathcal{X}}$  besitzt derart, dass*

$$-\tilde{\rho}(X) \in \mathcal{Y} \quad \forall X \in \tilde{\mathcal{Y}},$$

*dann wird für jedes  $\omega \in \Omega$  durch*

$$\tilde{\rho}_\omega^0(X) := \rho_\omega(-\tilde{\rho}(X)) \quad \forall X \in \tilde{\mathcal{Y}}$$

*ein konvexes Risikomaß auf  $\tilde{\mathcal{Y}}$  definiert. Für alle  $X \in \tilde{\mathcal{Y}}$  ist die Abbildung  $\omega \mapsto \tilde{\rho}_\omega^0(X)$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$ , und es gilt die Darstellung:*

$$\tilde{\rho}_0(X) = \rho_0(-\tilde{\rho}(X)) = \rho_0(-\tilde{\rho}(X)) = \rho_\omega(-\tilde{\rho}(X)) = \tilde{\rho}_\omega^0(X) \quad \tilde{P}\text{-f. s.}$$

*Somit ist  $\{\tilde{\rho}_\omega^0\}$  eine reguläre bedingte Darstellung für  $\tilde{\rho}_0$  auf  $\tilde{\mathcal{Y}}$ .*

**Bemerkung 2.2.7.** *Falls  $\rho_0^1$  und  $\rho_0^2$  zwei bedingte konvexe Risikomaße sind, dann ist die Faltung der beiden definiert als*

$$\rho_0^1 \square \rho_0^2(X) := \operatorname{ess\,sup}_{Y \in \mathcal{X}} \{\rho_0^1(X - Y) + \rho_0^2(Y)\} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

*Vorausgesetzt, dass  $\rho_0^1 \square \rho_0^2(0) \in \mathcal{X}_0$ , so wird durch*

$$\rho_0(X) := \rho_0^1 \square \rho_0^2(X) - \rho_0^1 \square \rho_0^2(0) \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

*ein bedingtes konvexes Risikomaß erzeugt, vgl. [4] und [26]. Bei dieser Verknüpfung wird jedoch eine reguläre bedingte Darstellung im Allgemeinen nicht übertragen.*

### 2.2.2 Existenz von regulären bedingten Darstellungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Existenz einer regulären bedingten Darstellung für bedingte konvexe Risikomaße unter der Voraussetzung, dass die zugrunde liegende Menge der zukünftigen Szenarien durch einen *polnischen Raum* gegeben ist. Das heißt,  $\Omega$  ist ein topologischer Raum, vollständig metrisierbar und separabel.  $\mathcal{F}$  sei gegeben durch die zugehörige  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen. Wie gewohnt, verwenden wir die Bezeichnungen  $\mathcal{C}_b := \mathcal{C}_b(\Omega)$ ,  $\mathcal{U}_b := \mathcal{U}_b(\Omega)$  und  $\mathcal{L}_b := \mathcal{L}_b(\Omega)$  für die Klassen der beschränkten stetigen, ober- bzw. unterhalbstetigen Funktionen auf  $\Omega$ .

Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  sei beliebig und fixiert. Wir diskutieren Kriterien, unter denen ein bedingtes konvexes Risikomaß eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{U}_b$  oder  $\mathcal{L}_b$  besitzt. Eine reguläre bedingte Darstellung auf der Klasse  $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F})$  aller beschränkten und messbaren Funktionen können wir hingegen nur für Spezialfälle nachweisen, z. B. bedingte lineare und entropische Risikomaße oder das bedingte Average Value at Risk. Man vergleiche dazu den Abschnitt 2.2.3.

**Bemerkung 2.2.8.** *Auf polnischen Räumen besitzt jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit  $(\omega, A) \mapsto Q_\omega(A)$ , vgl. z. B. [5], Satz 44.3.*

**Lemma 2.2.9.** *Es sei  $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{B}$  ein abzählbarer Verband bezüglich Minimum und Maximum, so dass die Bedingungen  $Q \subset \mathcal{S} = Q\mathcal{S} + Q\mathcal{S}$  erfüllt sind. Dann besitzt jedes bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{Y} = \bar{\mathcal{S}}$ , wobei  $\bar{\mathcal{S}}$  den Abschluss von  $\mathcal{S}$  bezüglich der Supremumsnorm bezeichnet.*

**Beweis:** Wir verzichten auf den Nachweis, dass die oben definierte Menge  $\mathcal{Y}$  eine für die Diskussion von regulären bedingten Darstellungen geeignete Klasse von Auszahlungsprofilen ist.  $\mathcal{Y}$  ist ein linearer Teilraum von  $\mathcal{B}$ . Außerdem gilt  $\mathbb{R} \subset \mathcal{Y} = \bar{\mathcal{Y}}$ .

Wir betrachten die Einschränkung von  $\rho_0$  auf  $\mathcal{S}$  und setzen

$$\rho_\omega(X) := \rho(X)(\omega) \quad \forall X \in \mathcal{S}, \omega \in \Omega.$$

Da  $\mathcal{S}$  abzählbar ist, gibt es eine  $P$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{F}_0$ , so dass für jedes  $\omega \in N^c$  die Abbildung  $\rho_\omega : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  normiert, monoton fallend,  $\mathbb{Q}$ -translationsinvariant und  $\mathbb{Q}$ -konvex ist. Für  $\omega \in N$  definieren wir  $\rho_\omega(X) := \mathbb{E}_{P_\omega}(-X)$ , wobei  $(\omega, A) \mapsto P_\omega(A)$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit

auf  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  ist. Dann gelten die oben genannten Eigenschaften für alle Szenarien.

Aus Monotonie und  $\mathbb{Q}$ -Translationsinvarianz erhalten wir gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit, d. h., dass

$$|\rho_\omega(X) - \rho_\omega(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty \quad \forall \omega \in \Omega,$$

vgl. dazu auch [21], Lemma 4.3. Also existiert für alle  $\omega \in \Omega$  eine eindeutige Lipschitz-stetige Fortsetzung von  $\rho_\omega$  auf  $\mathcal{Y}$ , die wir ebenfalls mit  $\rho_\omega$  bezeichnen wollen.

Nun sei  $X \in \mathcal{Y}$  und  $\{X_n\} \subset \mathcal{S}$  eine beliebige approximierende Folge mit  $\lim \|X - X_n\|_\infty = 0$ . Die Abbildung

$$\omega \mapsto \rho_\omega(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\omega(X_n)$$

ist als Grenzwert einer Folge von  $\mathcal{F}_0$ -messbaren Abbildungen ebenfalls  $\mathcal{F}_0$ -messbar. Außerdem folgt aus der Lipschitz-Stetigkeit, dass

$$\rho_0(X)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_0(X_n)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\omega(X_n) = \rho_\omega(X) \quad P\text{-f. s.}$$

Demnach ist  $\{\rho_\omega\}$  genau dann eine reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0$  auf  $\mathcal{Y}$ , wenn alle Abbildungen  $\rho_\omega : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  konvexe Risikomaße sind.

Natürlich ist jedes  $\rho_\omega$  normiert, translationsinvariant und konvex. Sind zwei Auszahlungsprofile  $X, Y \in \mathcal{Y}$  gegeben mit  $X \leq Y$ , dann gilt die Monotonie, falls aus  $0 \leq Z \in \mathcal{Y}$  folgt, dass  $\rho_\omega(Z) \leq 0$  ist. Wegen Konvexität und Lipschitz-Stetigkeit haben wir nämlich

$$\begin{aligned} \rho_\omega(Y) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \varepsilon \rho_\omega \left( \frac{Y - X}{\varepsilon} \right) + (1 - \varepsilon) \rho_\omega \left( \frac{X}{1 - \varepsilon} \right) \right) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon) \rho_\omega \left( \frac{X}{1 - \varepsilon} \right) = \rho_\omega(X). \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist jedoch stets erfüllt, denn falls  $\{Z_n\} \subset \mathcal{S}$  eine approximierende Folge für  $Z \geq 0$  ist, dann können wir ohne Einschränkung annehmen, dass auch alle  $Z_n \geq 0$  sind. Sonst betrachten wir stattdessen  $\{Z_n \vee 0\} \subset \mathcal{S}$ , weil  $\|Z - Z_n \vee 0\|_\infty \leq \|Z - Z_n\|_\infty$ . Damit haben wir

$$\rho_\omega(Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\omega(Z_n) \leq 0,$$

und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma 2.2.10.** *Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß und  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{B}$  eine konvexe Menge mit  $\mathbb{R} \subset \mathcal{Y} = \mathcal{Y} + \mathbb{R}$  und einer Verbandsstruktur bezüglich Minimum und Maximum. Außerdem sei  $\{\rho_\omega\}$  eine reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0$  auf  $\mathcal{Y}$ .*

- (i) *Falls  $\rho_0$  und alle konvexen Risikomaße  $\rho_\omega$  stetig von oben sind, dann erlaubt  $\rho_0$  eine reguläre bedingte Darstellung  $\{(\rho_\omega)_\sigma\}$  auf  $\mathcal{Y}_\sigma \cap \mathcal{B}$ , so dass jedes konvexe Risikomaß  $(\rho_\omega)_\sigma$  stetig von oben ist.*
- (ii) *Falls  $\rho_0$  und alle konvexen Risikomaße  $\rho_\omega$  stetig von unten sind, dann erlaubt  $\rho_0$  eine reguläre bedingte Darstellung  $\{(\rho_\omega)^\sigma\}$  auf  $\mathcal{Y}^\sigma \cap \mathcal{B}$ , so dass jedes konvexe Risikomaß  $(\rho_\omega)^\sigma$  stetig von unten ist.*

**Beweis:** Wir zeigen Teil (i), der Beweis von (ii) ist analog. Angenommen, die konvexen Risikomaße sind stetig von oben. Nach Satz 1.2.2 liefert die Methode der Fortsetzung durch monotone Approximation konvexe und von oben stetige Risikomaße  $(\rho_\omega)_\sigma : \mathcal{Y}_\sigma \cap \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sei nun  $X \in \mathcal{Y}_\sigma \cap \mathcal{B}$  ein Auszahlungsprofil und  $\{X_n\} \subset \mathcal{Y}$  eine beliebige monoton fallende Folge, die  $X$  von oben approximiert, d. h., dass für alle  $\omega \in \Omega$  gilt  $X(\omega) = \lim X_n(\omega)$ . Weder die  $\mathcal{F}_0$ -Messbarkeit der Abbildung

$$\omega \mapsto (\rho_\omega)_\sigma(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\omega(X_n)$$

noch die Darstellung

$$\rho_0(X)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_0(X_n)(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\omega(X_n) = (\rho_\omega)_\sigma(X) \quad P\text{-f. s.}$$

wird aufgrund der Stetigkeit durch den Grenzübergang beeinträchtigt. Demzufolge ist  $\{(\rho_\omega)_\sigma\}$  eine reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0$  auf  $\mathcal{Y}_\sigma \cap \mathcal{B}$ .  $\square$

**Korollar 2.2.11.** *Falls  $\Omega$  kompakt und  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß ist, dann gilt:*

- (i)  *$\rho_0$  besitzt eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  auf der Klasse  $\mathcal{C}$  aller stetigen Funktionen derart, dass jedes konvexe Risikomaß  $\rho_\omega$  stetig von oben und stetig von unten ist.*
- (ii) *Die reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  aus (i) kann zu einer regulären bedingten Darstellung  $\{(\rho_\omega)_\sigma\}$  auf  $\mathcal{U}_b$  fortgesetzt werden, so dass jedes konvexe Risikomaß  $(\rho_\omega)_\sigma$  stetig von oben ist.*

(iii) Die reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  aus (i) kann zu einer regulären bedingten Darstellung  $\{(\rho_\omega)^\sigma\}$  auf  $\mathcal{L}_b$  fortgesetzt werden, so dass jedes konvexe Risikomaß  $(\rho_\omega)^\sigma$  stetig von unten ist.

**Beweis:** Auf einem kompakten metrischen Raum ist die Klasse  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_b$  aller stetigen Funktionen ein Banachraum bezüglich der Supremumsnorm, und sie besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge  $\mathcal{S}$ . Wir können die Menge  $\mathcal{S}$  ohne Einschränkung so wählen, dass sie den Bedingungen aus Lemma 2.2.9 genügt. Daraus folgt die Existenz einer regulären bedingten Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  für  $\rho_0$  auf  $\mathcal{C}$ .

Da nach dem Lemma von Dini jede monoton wachsende Folge in  $\mathcal{C}$ , die punktweise gegen eine stetige Funktion konvergiert, auch gleichmäßig konvergiert, folgt die Stetigkeit von oben und von unten für jedes konvexe Risikomaß  $\rho_\omega$  aus der Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der Supremumsnorm. Mit Lemma 2.2.10 ergeben sich die Aussagen in (ii) und (iii) sofort aus Teil (i).  $\square$

Falls der Zustandsraum nicht kompakt ist, benutzen wir die folgende technische Zusatzbedingung, um die Existenz einer regulären Darstellung auf den Klassen  $\mathcal{U}_b$  und  $\mathcal{L}_b$  zu beweisen. Wir fordern entweder, dass das bedingte konvexe Risikomaß auf einfachen Funktionen der Form  $-K\mathbb{I}_A$  in einem gewissen Sinne positiv subhomogen ist, oder alternativ dazu, dass es sich auf dieser Klasse subadditiv verhält.

**Annahme 2.2.12.** Das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  genügt einer der beiden folgenden Bedingungen:

- Zu jedem  $K \in \mathbb{N}$  existiert eine Konstante  $c_K \geq 1$ , so dass

$$\rho_0(-nK\mathbb{I}_A) \leq n \cdot c_K \rho_0(-K\mathbb{I}_A) \quad P\text{-f. s. } \forall A \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}.$$

- Für alle  $K \in \mathbb{N}$  ist

$$\rho_0(-K\mathbb{I}_{A \cup B}) \leq \rho_0(-K\mathbb{I}_A) + \rho_0(-K\mathbb{I}_B) \quad P\text{-f. s. } \forall A, B \in \mathcal{F}.$$

**Theorem 2.2.13.** Es sei  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß, das stetig von unten ist. Falls die Annahme 2.2.12 erfüllt ist, dann gilt:

- (i)  $\rho_0$  besitzt eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  auf  $\mathcal{U}_b$ , so dass für alle  $\omega \in \Omega$  das konvexe Risikomaß  $\rho_\omega$  stetig von oben ist.
- (ii)  $\rho_0$  besitzt eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  auf  $\mathcal{L}_b$ , so dass für alle  $\omega \in \Omega$  das konvexe Risikomaß  $\rho_\omega$  stetig von unten ist.

**Beweis:** Da  $\Omega$  ein polnischer Raum ist, können wir eine abzählbare Algebra  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  auswählen, die ein Erzeuger von  $\mathcal{F}$  ist und eine Basis der Topologie enthält, vgl. dazu auch [5], Beweis von Satz 44.3. Wegen der starken Regularität von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  finden wir zu jedem Ereignis  $A_i \in \mathcal{G}$  eine ansteigende Folge  $\{K_{ij}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset A_i$  von kompakten Teilmengen, so dass

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} P(K_{ij}) = P(A_i).$$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{F}$  die von  $\mathcal{G}$  und den Ereignissen  $\{K_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$  erzeugte Algebra.  $\mathcal{G}'$  ist ebenfalls abzählbar. Nun setzen wir

$$\mathcal{S} := \left\{ \sum_{k=1}^n q_k \mathbb{I}_{A_k} \mid n \in \mathbb{N}, q_k \in \mathbb{Q}, A_k \in \mathcal{G}' \right\}.$$

$\mathcal{S}$  ist eine abzählbare Teilmenge von  $\mathcal{B}$ , die die Bedingungen von Lemma 2.2.9 erfüllt. Somit erlaubt  $\rho_0$  eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  auf dem Abschluss  $\bar{\mathcal{S}}$  von  $\mathcal{S}$  bezüglich der Supremumsnorm.

Wegen der Abzählbarkeit von  $\mathcal{S}$  können wir ohne Einschränkung die reguläre bedingte Darstellung von  $\rho_0$  auf  $\bar{\mathcal{S}}$  so wählen, dass sie einer der beiden folgenden Bedingungen genügt:

- Zu jedem  $K \in \mathbb{N}$  gibt es ein  $c_K \geq 1$ , so dass

$$\rho_\omega(-nK\mathbb{I}_A) \leq n \cdot c_K \rho_\omega(-K\mathbb{I}_A) \quad \forall \omega \in \Omega, A \in \mathcal{G}', n \in \mathbb{N}.$$

- Für alle  $K \in \mathbb{N}$  ist

$$\rho_\omega(-K\mathbb{I}_{A \cup B}) \leq \rho_\omega(-K\mathbb{I}_A) + \rho_\omega(-K\mathbb{I}_B) \quad \forall \omega \in \Omega, A, B \in \mathcal{G}'.$$

Wir betrachten ein Ereignis  $A_i \in \mathcal{G}$  und seine zugehörige Folge  $\{K_{ij}\}$  von kompakten Teilmengen. Da  $\rho_0$  stetig von unten ist, folgt für alle  $K \in \mathbb{N}$  wegen der  $P$ -fast sicheren Konvergenz von  $\{-K\mathbb{I}_{A_i \setminus K_{ij}}\}_j$  gegen 0, dass

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho_0(-K\mathbb{I}_{A_i \setminus K_{ij}})(\omega) = \lim_{j \rightarrow \infty} \rho_\omega(-K\mathbb{I}_{A_i \setminus K_{ij}}) \quad P\text{-f. s.}$$

Die Algebra  $\mathcal{G}$  ist abzählbar, also gibt es eine Menge  $N \in \mathcal{F}_0$  mit  $P(N) = 0$ , so dass für alle  $K \in \mathbb{N}$ , für jedes Ereignis  $A_i \in \mathcal{G}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , mit zugehöriger Folge  $\{K_{ij}\}$  sowie für alle  $\omega \in N^c$  gilt:

$$\inf_{j \in \mathbb{N}} \rho_\omega(-K\mathbb{I}_{A_i \setminus K_{ij}}) = 0. \quad (2.6)$$

Auf der Nullmenge  $N$  modifizieren wir die reguläre bedingte Darstellung, so dass (2.6) für alle Szenarien erfüllt ist, z. B. durch  $\rho_\omega(X) = \mathbb{E}_{P_\omega}(-X)$ .

Im nächsten Schritt schränken wir die reguläre bedingte Darstellung auf den linearen Raum  $\mathcal{Y} \subset \bar{\mathcal{S}}$  aller einfachen Funktionen der Form

$$X = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{I}_{A_k}$$

ein, wobei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_k \in \mathbb{R}$  und  $A_k \in \mathcal{G}$  seien für alle  $k \leq n$ . Wir werden zeigen, dass jedes konvexe Risikomaß  $\rho_\omega : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig von unten und stetig von oben ist. Nach Lemma 1.1.8 genügt es dabei, die Stetigkeit von unten in 0 nachzuweisen.

Sei  $X \in \mathcal{Y}$  ein nicht-positives Auszahlungsprofil. Es existiert eine Konstante  $K \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $\varepsilon > 0$  gilt

$$0 \geq X \geq -K \mathbb{I}_{\{X < -\varepsilon\}} - \varepsilon.$$

Aus Monotonie und Translationsinvarianz folgt für alle  $\omega \in \Omega$

$$0 \leq \rho_\omega(X) \leq \rho_\omega(-K \mathbb{I}_{\{X < -\varepsilon\}}) + \varepsilon.$$

Demnach sind die konvexen Risikomaße  $\rho_\omega$  genau dann stetig von unten und stetig von oben, wenn für jede absteigende Folge von Ereignissen  $\{A_n\} \subset \mathcal{G}$  mit  $\cap A_n = \emptyset$  und  $K \in \mathbb{N}$  gilt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\omega(-K \mathbb{I}_{A_n}) = 0.$$

Seien also  $\{A_n\} \subset \mathcal{G}$  und  $K \in \mathbb{N}$  wie oben. Wegen Bedingung (2.6) gibt es kompakte Teilmenge  $K_n \subset A_n$ ,  $K_n \in \mathcal{G}'$ , so dass für die konvexen Risikomaße  $\rho_\omega$  – hier wieder als Abbildungen auf der Menge  $\bar{\mathcal{S}}$  definiert – gilt:

$$\rho_\omega(-K \mathbb{I}_{A_n \setminus K_n}) \leq \frac{\delta}{c_K \cdot 2^n}$$

im ersten Fall bzw.

$$\rho_\omega(-K \mathbb{I}_{A_n \setminus K_n}) \leq \frac{\delta}{2^n}$$

im zweiten Fall, wobei die Konstante  $\delta > 0$  beliebig klein gewählt sei. Der Durchschnitt der kompakten Mengen ist leer, und es gibt einen Index  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\cap_{n=1}^{n_0} K_n = \emptyset$ . Wir haben dann

$$A_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \setminus K_n.$$

Monotonie und Konvexität liefern im ersten Fall

$$\rho_\omega(-K\mathbb{I}_{A_{n_0}}) \leq \rho_\omega(-K\mathbb{I}_{\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \setminus K_n}) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\rho_\omega(-n_0 K\mathbb{I}_{A_n \setminus K_n})}{n_0} \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\delta}{2^n} \leq \delta$$

bzw. im zweiten Fall

$$\rho_\omega(-K\mathbb{I}_{A_{n_0}}) \leq \rho_\omega(-K\mathbb{I}_{\bigcup_{n=1}^{n_0} A_n \setminus K_n}) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \rho_\omega(-K\mathbb{I}_{A_n \setminus K_n}) \leq \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\delta}{2^n} \leq \delta,$$

d. h., dass  $\{\rho_\omega\}$  auf  $\mathcal{Y}$  eine Familie von konvexen Risikomaßen ist, die sowohl stetig von oben als auch stetig von unten sind.

Es bleibt zu zeigen, dass die reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  von  $\mathcal{Y}$  nach  $\mathcal{U}_b$  oder  $\mathcal{L}_b$  fortgesetzt werden kann. Dazu wenden wir wieder das Lemma 2.2.10 an. Die Algebra  $\mathcal{G}$  enthält eine Basis der Topologie, d. h., dass jede offene Menge in  $\mathcal{F}$  als eine abzählbare Vereinigung offener Mengen in  $\mathcal{G}$  und jede abgeschlossene Menge als ein abzählbarer Durchschnitt von abgeschlossenen Mengen in  $\mathcal{G}$  darstellbar ist. Das bedeutet, dass jede unterhalbstetige Indikatorfunktion  $\mathbb{I}_A$  – mit  $A \in \mathcal{F}$  offen – in  $\mathcal{Y}^\sigma$  enthalten ist und jede oberhalbstetige Indikatorfunktion  $\mathbb{I}_A$  – mit  $A \in \mathcal{F}$  abgeschlossen – in  $\mathcal{Y}^\sigma$ . Durch maßtheoretische Induktion zeigt man, dass

$$\mathcal{L}_b \subset \mathcal{Y}^\sigma \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_b \subset \mathcal{Y}^\sigma.$$

Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 2.2.14.** *Die Frage bleibt offen, unter welchen Bedingungen eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  eines bedingten konvexen Risikomaßes  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  von  $\mathcal{U}_b$  bzw. von  $\mathcal{L}_b$  auf die Klasse  $\mathcal{B}$  aller beschränkten und messbaren Funktionen ausgedehnt werden kann. Wir wissen, dass unter zusätzlichen Stetigkeitsannahmen eindeutige Fortsetzungen von konvexen Risikomaßen existieren, vgl. dazu die Sätze 1.2.25 und 1.2.27. Nehmen wir beispielsweise an, dass  $\rho_0$  stetig von unten ist und eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{U}_b$  erlaubt derart, dass jedes konvexe Risikomaß  $\rho_\omega$  stetig von oben und sogar stetig von unten ist. Für alle  $\omega \in \Omega$  wird dann durch äußere Approximation*

$$\rho_\omega^*(X) := \inf\{\rho_\omega(Y) \mid X \geq Y, Y \in \mathcal{U}_b\} \quad \forall X \in \mathcal{B}$$

ein konvexes Risikomaß  $\rho_\omega^* : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, das stetig von unten ist und eine Fortsetzung von  $\rho_\omega$ . Diese Fortsetzung ist eindeutig unter den obigen Bedingungen. Jedoch ist nicht ohne Weiteres klar, ob die jeweiligen Abbildungen  $\omega \mapsto \rho_\omega^*(X)$  mit  $X \in \mathcal{B}$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$  sind. Auch die Darstellung von  $\rho_0$  ist im Allgemeinen nicht gesichert.

### 2.2.3 Average Value at Risk

Um die Diskussion von regulären bedingten Darstellungen abzuschließen, untersuchen wir das bedingte kohärente Risikomaß *Average Value at Risk*. Es sei definiert wie in [13]:

$$AVaR_\Lambda(X) := \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_\Lambda} \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad (2.7)$$

wobei  $\Lambda \in \mathcal{X}_0$  eine  $\mathcal{F}_0$ -messbare Levelfunktion ist mit  $0 \leq \Lambda \leq 1$   $P$ -fast sicher und

$$\mathcal{Q}_\Lambda := \left\{ Q \in \mathcal{Q}_0 \mid \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\Lambda} \text{ } P\text{-f. s.} \right\}. \quad (2.8)$$

**Bemerkung 2.2.15.** *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}_0$  ist wegen*

$$\mathbb{E}_Q(X | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_P \left( X \cdot \frac{dQ}{dP} | \mathcal{F}_0 \right) \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

*genau dann in der Menge  $\mathcal{Q}_\Lambda$  enthalten, wenn für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  auf  $\{\Lambda > 0\}$  gilt:*

$$\left( \frac{\mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0) - (1 - \Lambda)}{\Lambda} \right)^+ \leq \mathbb{E}_Q(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0) \leq \left( \frac{\mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0)}{\Lambda} \wedge 1 \right).$$

*Außerdem genügt es zu zeigen, dass eine der beiden Abschätzungen für alle Ereignisse erfüllt ist. Die andere folgt dann durch Betrachtung des komplementären Ereignisses.*

Auch in diesem Abschnitt nehmen wir an, dass die Menge  $\Omega$  der zukünftigen Szenarien durch einen polnischen Raum gegeben ist und  $\mathcal{F}$  durch die zugehörige  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen. Wir fixieren für das Referenzmaß  $P$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit  $(\omega, A) \mapsto P_\omega(A)$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$ . In Abhängigkeit vom eintretenden Szenario  $\omega \in \Omega$  wird das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_\omega$  ebenfalls als Referenzmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  dienen.

Wir zeigen, dass für jede Levelfunktion  $\Lambda$  das bedingte Average Value at Risk  $AVaR_\Lambda$  eine reguläre bedingte Darstellung auf der Klasse  $\mathcal{B}$  aller beschränkten und messbaren Funktionen besitzt. Die zugehörige Familie von konvexen – hier sogar kohärenten – Risikomaßen ist durch die unbedingten Versionen des Average Value at Risk zum Level  $\lambda_\omega := \Lambda(\omega)$  unter dem jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaß  $P_\omega$  gegeben, für jedes Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{B}$  und für alle Szenarien  $\omega \in \Omega$  also durch

$$AVaR_{\lambda_\omega, P_\omega}(X) := \sup \left\{ \mathbb{E}_Q(-X) \mid Q \in \mathcal{M}_1(P_\omega), \frac{dQ}{dP_\omega} \leq \frac{1}{\lambda_\omega} \text{ } P_\omega\text{-f. s.} \right\}.$$

**Konvexe Verzerrungen der regulären bedingten Wahrscheinlichkeit**

Zur Vorbereitung untersuchen wir eine spezielle Klasse von „bedingten Kapazitäten“ sowie die zugehörigen „bedingten Choquet-Integrale“. Wir fixieren eine  $\mathcal{F}_0$ -messbare Parameterfunktion  $\Lambda : \Omega \rightarrow [0, 1]$ . Nach Lemma 2.2.4 ist diese Zufallsvariable  $P_\omega$ -fast sicher konstant  $P$ -fast überall, d. h., dass eine Menge  $N \in \mathcal{F}_0$  existiert mit  $P(N) = 0$ , so dass für alle Szenarien  $\omega \in N^c$  gilt

$$\Lambda \equiv \Lambda(\omega) =: \lambda_\omega \quad P_\omega\text{-f. s.}$$

Für  $\omega \in N$  setzen wir  $\lambda_\omega := 1$ . Die Abbildung  $\omega \mapsto \lambda_\omega$  ist ebenfalls messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$ , und es gilt  $\Lambda(\omega) = \lambda_\omega$   $P$ -fast sicher.

Nun betrachten wir eine mit  $\lambda$  parametrisierte Familie von konvexen Verzerrungsfunktionen

$$f(\cdot, \lambda_\omega) : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad \omega \in \Omega,$$

das bedeutet, dass die Funktion  $f(\cdot, \lambda_\omega)$  für jedes  $\omega \in \Omega$  monoton wachsend, konvex sowie auf  $f(0, \lambda_\omega) = 0$  und  $f(1, \lambda_\omega) = 1$  normiert ist. Wir definieren durch

$$(\omega, A) \in \Omega \times \mathcal{F} \mapsto c_\omega(A) := f(P_\omega(A), \lambda_\omega) \quad (2.9)$$

eine Abbildung auf dem Produktraum  $\Omega \times \mathcal{F}$ . Da sowohl  $\omega \mapsto P_\omega(A)$  als auch  $\omega \mapsto \lambda_\omega$  messbar bezüglich der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0$  sind, ist für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  auch die Zufallsvariable  $\omega \mapsto c_\omega(A)$   $\mathcal{F}_0$ -messbar. Außerdem ist bei fixiertem Szenario  $\omega \in \Omega$  die zugehörige Mengenfunktion  $c_\omega : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  eine konvexe Verzerrung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P_\omega$ , also eine unter  $P_\omega$  verteilungsinvariante und konvexe *Kapazität*.

Das *Choquet-Integral* bezüglich dieser Kapazitäten liefert eine Familie von kohärenten Risikomaßen  $\rho_\omega : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  auf der Klasse aller beschränkten und messbaren Auszahlungsprofile mit

$$\rho_\omega(X) := -\mathbb{E}_{c_\omega}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

Man vergleiche dazu auch die Abschnitte 4.6 und 4.7 im Buch von [21]. Für eine detaillierte Einführung des obigen Integralbegriffs verweisen wir auf [12]. Im Kapitel 3.3.2 geben wir in einem anderen Zusammenhang einen kurzen Überblick über Eigenschaften von Choquet-Integralen und Möglichkeiten der Darstellung, deshalb wollen wir an dieser Stelle darauf verzichten.

Jedes kohärente Risikomaß  $\rho_\omega$  bewertet das Verlustrisiko eines Auszahlungsprofils nur in Abhängigkeit von seiner Verteilung unter dem jeweiligen Referenzmaß  $P_\omega$ . Es ist stetig von oben und sogar stetig von unten, falls  $f(\cdot, \lambda_\omega)$

stetig ist, also linksstetig in 1. Des Weiteren verhält sich jedes  $\rho_\omega$  *additiv auf komonotonen Funktionen*, d. h., wenn  $X, Y \in \mathcal{B}$  zwei Auszahlungsprofile sind, so dass  $(X(\omega_1) - X(\omega_2))(Y(\omega_1) - Y(\omega_2)) \geq 0$  für alle  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ , dann haben wir  $\rho_\omega(X + Y) = \rho_\omega(X) + \rho_\omega(Y)$ .

Nun setzen wir für jedes Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}$

$$\rho_0(X)(\omega) := \rho_0(X')(\omega) := \rho_\omega(X'), \quad (2.10)$$

wobei das definierende Auszahlungsprofil  $X' \in \mathcal{B}$  so gewählt sei, dass  $X = X'$   $P$ -fast sicher.

**Satz 2.2.16.** *Die in (2.10) definierte Abbildung ist ein bedingtes kohärentes Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$ . Außerdem liefert die Familie  $\{\rho_\omega\}$  eine reguläre bedingte Darstellung für  $\rho_0$  auf  $\mathcal{B}$ . Insbesondere lassen sich daraus die folgenden Eigenschaften ableiten:*

- $\rho_0 \cdot \mathbb{I}_{\{\omega \in \Omega \mid f(\cdot, \lambda_\omega) \text{ stetig}\}}$  ist stetig von unten.
- $\rho_0$  verhält sich *additiv auf komonotonen Funktionen*.
- $\rho_0$  ist *bedingt verteilungsinvariant*:

$$X \sim_{P_\omega} Y \text{ für } P\text{-f. a. } \omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \rho_0(X) = \rho_0(Y) \quad P\text{-f. s.}$$

**Beweis:** Sind  $X' \in \mathcal{B}$  und  $A_0 \in \mathcal{F}_0$ , dann gilt  $P_\omega(A_0) = \mathbb{I}_{A_0}(\omega)$   $P$ -fast sicher. Damit haben wir

$$\rho_\omega(X')\mathbb{I}_{A_0}(\omega) = \rho_\omega(X'\mathbb{I}_{A_0}) \quad P\text{-f. s.}$$

Das bedeutet, dass für alle Auszahlungsprofile die Bedingung (2.1) erfüllt ist, nämlich

$$\rho_0(X)\mathbb{I}_{A_0} = \rho_0(X\mathbb{I}_{A_0}) \quad P\text{-f. s.} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Offenbar ist  $\rho_0$  eine monotone, normierte und von oben stetige Abbildung, die konvex und positiv homogen für Konstanten ist. Nach Bemerkung 2.1.3 (ii) ist  $\rho_0$  ein bedingtes kohärentes Risikomaß, falls wir die  $\mathcal{F}_0$ -Messbarkeit der Abbildung  $\omega \mapsto \rho_\omega(X') = \rho_0(X')$  für alle  $X' \in \mathcal{B}$  nachweisen können. Die aufgelisteten Eigenschaften folgen aus den Eigenschaften der Familie der unbedingten kohärenten Risikomaße.

Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass  $X' \geq 0$  ist, denn für allgemeine Funktionen folgt die Aussage durch Addition einer geeigneten Konstanten. Ist  $X'$  eine Treppenfunktion der Form

$$X' = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{A_i}$$

mit Konstanten  $x_i \geq 0$  und Ereignissen  $A_i \in \mathcal{F}$ , die ohne Einschränkung aufsteigend gewählt sind, dann gilt wegen der Additivität auf komonotonen Funktionen, dass

$$\rho_\omega(X') = - \sum_{i=1}^n x_i c_\omega(A_i).$$

Demnach ist die Messbarkeitsbedingung für alle einfachen Auszahlungsprofile erfüllt. Ein beliebiges nicht-negatives Auszahlungsprofil  $X' \in \mathcal{B}$  lässt sich stets punktweise von oben durch eine monoton fallende Folge  $\{X_n\}$  von einfachen Funktionen approximieren. Da die kohärenten Risikomaße  $\rho_\omega$  stetig von oben sind, gilt

$$\rho_\omega(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_\omega(X_n).$$

Als Grenzfunktion einer Folge von messbaren Funktionen ist die Abbildung  $\omega \mapsto \rho_\omega(X')$  ebenfalls messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$ .  $\square$

### Eine reguläre bedingte Darstellung für $AVaR_\Lambda$

Es sei  $\Lambda \in \mathcal{X}_0$  eine beliebige  $\mathcal{F}_0$ -messbare Levelfunktion. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass das bedingte Average Value at Risk als ein solches bedingtes komonotones Risikomaß bezüglich einer konvexen Verzerrung der zugrunde liegenden regulären bedingten Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden kann. Da  $AVaR_\Lambda$  als ein *essentielles* Supremum definiert ist, vgl. die Definition in (2.7) und (2.8), können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $0 \leq \Lambda(\omega) \leq 1$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Nach Lemma 2.2.4 dürfen wir die Levelfunktion außerdem so modifizieren, dass

$$\Lambda \equiv \Lambda(\omega) =: \lambda_\omega \quad P_\omega\text{-f. s.} \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (2.11)$$

Zunächst betrachten wir die Klasse aller stochastischen Kerne von  $(\Omega, \mathcal{F}_0)$  nach  $(\Omega, \mathcal{F})$ , die im unten definierten Sinne absolutstetig und beschränkt bezüglich der regulären bedingten Wahrscheinlichkeit des Referenzmaßes sind:

$$\mathcal{K}_\Lambda := \left\{ (\omega, A) \mapsto Q_\omega(A) \mid Q_\omega \ll P_\omega, \frac{dQ_\omega}{dP_\omega} \leq \frac{1}{\lambda_\omega} \text{ } P_\omega\text{-f. s. für alle } \omega \in \Omega \right\}.$$

Wie das folgende Lemma zeigt, kann  $\mathcal{K}_\Lambda$  mit der Klasse  $\mathcal{Q}_\Lambda$  identifiziert werden. Damit gilt für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} AVaR_\Lambda(X) &:= \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{Q}_\Lambda} \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}_\Lambda} \mathbb{E}_{Q_\omega}(-X). \end{aligned}$$

**Lemma 2.2.17.** *Zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}_\Lambda$  gibt es eine zugehörige reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit in  $\mathcal{K}_\Lambda$ , und jeder stochastische Kern  $\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}_\Lambda$  kann als eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit eines Wahrscheinlichkeitsmaßes in  $\mathcal{Q}_\Lambda$  aufgefasst werden.*

**Beweis:** Fixieren wir zuerst ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}_\Lambda$ . Für die Dichte  $h := dQ/dP \in L^1(P)$  gilt  $P$ -fast sicher  $0 \leq h \leq 1/\Lambda$  und

$$\mathbb{E}_P(h|\mathcal{F}_0)(\omega) = 1 = \mathbb{E}_{P_\omega}(h).$$

Wir können also eine Modifikation von  $h$  wählen, so dass  $h \in L^1(P_\omega)$  mit  $\mathbb{E}_{P_\omega}(h) = 1$  und  $0 \leq h \leq 1/\Lambda \equiv 1/\lambda_\omega$   $P_\omega$ -fast sicher für alle Szenarien  $\omega \in \Omega$ . Die durch  $h$  induzierten Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q_\omega \ll P_\omega$  bilden eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit für  $Q$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$ , denn für alle  $X \in \mathcal{B}$  ist die Abbildung

$$\omega \mapsto \mathbb{E}_{Q_\omega}(X) = \mathbb{E}_{P_\omega}(Xh)$$

messbar und eine Version der bedingten Erwartung  $\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_P(Xh|\mathcal{F}_0)$ . Nach Konstruktion gilt  $\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}_\Lambda$ .

Nun betrachten wir einen stochastischen Kern  $\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}_\Lambda$  und definieren

$$Q(A) := \mathbb{E}_P(Q_\omega(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Offenbar ist  $Q$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Es gilt für alle  $A \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} P(A) = 0 &\quad \Rightarrow \quad P_\omega(A) = 0 \quad P\text{-f. s.} \\ &\quad \Rightarrow \quad Q_\omega(A) = 0 \quad P\text{-f. s.} \\ &\quad \Rightarrow \quad Q(A) = 0, \end{aligned}$$

somit ist  $Q$  auch absolutstetig bezüglich  $P$ . Außerdem haben wir

$$P_\omega(A_0) = Q_\omega(A_0) = \mathbb{I}_{A_0}(\omega) \quad P\text{-f. s.} \quad \forall A_0 \in \mathcal{F}_0, \quad (2.12)$$

woraus folgt, dass  $Q(A_0) = P(A_0)$ , also ist  $Q \in \mathcal{Q}_0$ .

Wir zeigen, dass  $\{Q_\omega\}$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit von  $Q$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  ist. Für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  ist die Abbildung  $\omega \mapsto Q_\omega(A)$   $\mathcal{F}_0$ -messbar. Wegen (2.12) und  $Q|_{\mathcal{F}_0} = P|_{\mathcal{F}_0}$  gilt weiter für alle  $A_0 \in \mathcal{F}_0$

$$Q(A \cap A_0) = \mathbb{E}_P(Q_\omega(A \cap A_0)) = \mathbb{E}_P(Q_\omega(A)\mathbb{I}_{A_0}) = \mathbb{E}_Q(Q_\omega(A)\mathbb{I}_{A_0}).$$

Es gilt  $Q \in \mathcal{Q}_\Lambda$ , falls die zugehörige Dichte  $h := dQ/dP$   $P$ -fast sicher nach oben durch  $1/\Lambda$  beschränkt ist. Wir setzen  $A := \{h > 1/\Lambda\}$  und wollen nachweisen, dass tatsächlich  $P(A) = 0$  ist. Für alle  $\omega \in \Omega$  haben wir nämlich

$$Q_\omega(A) \leq \frac{P_\omega(A)}{\lambda_\omega},$$

woraus die Ungleichung folgt

$$\frac{\mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0)}{\Lambda} \leq \mathbb{E}_P(h \mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0) = \mathbb{E}_Q(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0) \leq \frac{\mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0)}{\Lambda} \quad P\text{-f. s.}$$

Demnach gilt, dass  $\mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0) = 0$   $P$ -fast sicher. Insbesondere haben wir, dass  $P(A) = \mathbb{E}_P(\mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_0)) = 0$ .  $\square$

Nun betrachten wir die durch die Parameterfunktion  $\lambda$  induzierte Familie der einfachen konvexen Verzerrungsfunktionen  $f(\cdot, \lambda_\omega) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit

$$f(x, \lambda_\omega) := \begin{cases} \left( \frac{x - (1 - \lambda_\omega)}{\lambda_\omega} \right)^+, & \text{falls } \lambda_\omega > 0, \\ \delta_1(x), & \text{sonst.} \end{cases}$$

für alle  $x \in [0, 1]$  und  $\omega \in \Omega$ . Die zugehörige Familie der kohärenten und komonotonen Risikomaße  $\rho_\omega : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch das unbedingte Average Value at Risk unter dem Referenzmaß  $P_\omega$  zum Level  $\lambda_\omega$

$$\rho_\omega(X) := AVaR_{\lambda_\omega, P_\omega}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad (2.13)$$

und es gilt

$$\rho_\omega(X) = \sup \left\{ \mathbb{E}_Q(-X) \mid Q \in \mathcal{M}_1(P_\omega), \frac{dQ}{dP_\omega} \leq \frac{1}{\lambda_\omega} \text{ } P_\omega\text{-f. s.} \right\},$$

vgl. dazu die Theoreme 4.47, 4.57 und 4.82 in [21].

**Theorem 2.2.18.** *Die in (2.13) definierte Familie von AVaR-Risikomaßen ist eine reguläre bedingte Darstellung auf  $\mathcal{B}$  für das bedingte Average Value at Risk  $AVaR_\Lambda$  mit Levelfunktion  $\Lambda$ . Insbesondere lassen sich daraus die folgenden Eigenschaften ableiten:*

- $AVaR_\Lambda \cdot \mathbb{I}_{\{\Lambda > 0\}}$  ist stetig von unten.
- $AVaR_\Lambda$  verhält sich additive auf komonotonen Funktionen.
- $AVaR_\Lambda$  ist bedingt verteilungsinvariant:

$$X \sim_{P_\omega} Y \quad \text{für } P\text{-f. a. } \omega \in \Omega \quad \Rightarrow \quad AVaR_\Lambda(X) = AVaR_\Lambda(Y) \quad P\text{-f. s.}$$

**Beweis:** Nach Satz 2.2.16 genügt es zu zeigen, dass das in (2.10) definierte kohärente Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  mit dem bedingten Average Value at Risk zum Level  $\Lambda$  übereinstimmt, d. h., dass  $AVaR_\Lambda(X) = \rho_0(X)$  für alle  $X \in \mathcal{X}$  bzw. für alle  $X \in \mathcal{B}$ .

Es gibt eine bedingt konvexe Menge

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0 := \{(\omega, A) \mapsto Q_\omega(A) \mid Q_\omega \ll P_\omega \text{ für alle } \omega \in \Omega\},$$

so dass für alle  $X \in \mathcal{X}$  die robuste Darstellung gilt:

$$\rho_0(X) = \operatorname{ess\,sup}_{\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}} \mathbb{E}_{Q_\omega}(-X) \quad P\text{-f. s.}$$

Wir fixieren einen beliebigen stochastischen Kern  $\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}$ . Für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  haben wir  $P$ -fast sicher

$$Q_\omega(A) \geq -\rho_\omega(\mathbb{I}_A) = c_\omega(A), \quad (2.14)$$

wobei die konvexen Kapazitäten  $c_\omega$  wie in (2.9) als einfache konvexe Verzerrungen des jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P_\omega$  definiert sind. Nun werden wir diesen Kern  $\{Q_\omega\}$  auf einer  $P$ -Nullmenge  $N \in \mathcal{F}_0$  so modifizieren, dass die obige Bedingung für alle Szenarien und auf der gesamten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  erfüllt ist.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $\Lambda > 0$  ist. Da  $\Omega$  ein polnischer Raum ist, existiert eine abzählbare Basis der Topologie. Diese bezeichnen wir mit  $\{A_i\} \subset \mathcal{F}$ . Dann gibt es eine Menge  $N \in \mathcal{F}_0$  mit  $P(N) = 0$ , so dass (2.14) für alle Ereignisse  $A = A_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , und für alle Szenarien  $\omega \in N^c$  gilt.

Wahrscheinlichkeitsmaße sind stetig von unten und regulär, und jede konvexe Kapazität  $c_\omega$  wird durch eine stetige Verzerrungsfunktion erzeugt. Es sei nun  $A \in \mathcal{F}$  offen. Wir wählen eine aufsteigende Folge  $\{A_n\} \subset \{A_i\}$  mit  $A = \cup A_n$  und erhalten

$$Q_\omega(A) = \lim Q_\omega(A_n) \geq \lim c_\omega(A_n) = c_\omega(A) \quad \forall \omega \in N^c.$$

Jetzt sei  $B \in \mathcal{F}$  beliebig und  $\omega \in N^c$ . Es ist

$$Q_\omega(B) = \inf\{Q_\omega(A) \mid B \subset A \text{ offen}\} \geq \inf\{c_\omega(A) \mid B \subset A \text{ offen}\} = c_\omega(B).$$

Auf der Nullmenge modifizieren wir den stochastischen Kern, indem wir  $Q_\omega := P_\omega$  für alle  $\omega \in N$  setzen. Das bedeutet, dass die Bedingung (2.14) tatsächlich auf der gesamten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  und für alle Szenarien  $\omega \in \Omega$  gilt.

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_\omega \ll P_\omega$  mit  $Q_\omega \geq c_\omega$  auf  $\mathcal{F}$  ist ein Element des Kerns  $\mathcal{Q}(c_\omega)$  dieser Kapazität. Aufgrund der speziellen Struktur der Kapazität wissen wir, dass dann

$$\frac{dQ_\omega}{dP_\omega} \leq \frac{1}{\lambda_\omega} \quad P_\omega\text{-f. s.}$$

Man vergleiche dazu die Charakterisierungen in [6], Proposition 1. Das heißt, dass es zu jedem stochastischen Kern  $\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}$  eine modifizierte Version in  $\mathcal{K}_\Lambda$  gibt. Deshalb haben wir für alle  $X \in \mathcal{X}$

$$\rho_0(X) \leq AVaR_\Lambda(X) \quad P\text{-f. s.}$$

Andererseits gilt für jeden stochastischen Kern  $\{Q_\omega\} \in \mathcal{K}_\Lambda$  nach Definition dieser Klasse, dass  $Q_\omega \in \mathcal{Q}(c_\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$ . Darum gilt für alle  $X \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{E}_{Q_\omega}(-X) \leq -\mathbb{E}_{c_\omega}(X) = \rho_\omega(X) = \rho_0(X).$$

Der Übergang zum essentiellen Supremum auf der linken Seite verändert die Relation nicht, also stimmen beide bedingten kohärenten Riskikomaße für alle Auszahlungsprofile  $P$ -fast sicher überein.  $\square$

**Bemerkung 2.2.19.** *Durch die Bildung von bedingten konvexen Kombinationen bedingter kohärenter Riskikomaße des Typs  $AVaR_\Lambda$  werden weitere bedingte kohärente Riskikomaße erzeugt. Wir setzen*

$$\rho_0(X) := \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot AVaR_{\Lambda_i}(X) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wobei für alle  $i \leq n$  die Koeffizientenfunktion  $\Delta_i : \Omega \rightarrow [0, 1]$   $\mathcal{F}_0$ -messbar ist und

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Nach der Bemerkung 2.2.2 besitzt ein solches bedingtes kohärentes Riskikomaß ebenfalls eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega\}$  auf  $\mathcal{B}$ , welche auch in diesem Fall als eine konvexe Verzerrung der regulären bedingten Wahrscheinlichkeit des Referenzmaßes angesehen werden kann, d. h., dass

$$\rho_\omega(X) := -\mathbb{E}_{c_\omega}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

mit

$$c_\omega(A) := \sum_{i=1}^n \delta_\omega^i \cdot f_{\lambda_\omega^i}(P_\omega(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

und  $\delta_\omega^i = \Delta_i(\omega)$  sowie  $\lambda_\omega^i = \Lambda_i(\omega)$   $P$ -fast sicher. Aus der regulären bedingten Darstellung lassen sich die folgenden Eigenschaften ableiten:  $\rho_0$  verhält sich additiv auf komonotonen Funktionen. Es ist bedingt verteilungsinvariant bezüglich  $P$  und stetig von unten auf der Menge

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \Delta_i \cdot \Lambda_i > 0 \right\} \in \mathcal{F}_0.$$

## Kapitel 3

# Dynamische konvexe Risikomaße

Ein dynamisches konvexes Risikomaß ist eine an eine Filtration adaptierte Familie von bedingten konvexen Risikomaßen, mit denen man das Verlustrisiko von Finanzanlagen zu verschiedenen Zeiten unter Berücksichtigung der jeweils zur Verfügung stehenden Information bewertet. In der finanzmathematischen Literatur wird derzeit diskutiert, welche Beziehungen und Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Zeitpunkten bei der Risikobewertung zu fordern sind und welche intertemporalen Strukturen sich daraus für die Akzeptanz- und Ablehnungsmengen oder die darstellenden Penalty-Funktionen ableiten lassen. Grundsätzlich kann dieses Problem aus zwei verschiedenen Perspektiven betrachtet werden.

Bei der Konstruktion von dynamischen konvexen Risikomaßen zu einer vorgegebenen Informationsstruktur ist darauf zu achten, dass gewisse Formen der zeitlichen Konsistenz in Bezug auf die Akzeptanz oder Ablehnung von Risiken erfüllt werden. Vorgeschlagen und analysiert wurde solche Konsistenzbedingungen erstmals von Artzner, Delbaen, Eber, Heath & Ku [2], [3], Riedel [31] und in einer schwachen Variante von Weber [40]. Es handelt sich dabei um zeitlich rückwärts gerichtete Bedingungen, die mit Hilfe der Akzeptanz- oder Ablehnungsmengen charakterisiert werden können. Wir vergleichen die Konsistenzbedingungen der oben genannten Autoren und verallgemeinern sie durch Einführung einer gewissen Testklasse, welche den Grad der Konsistenz bestimmt.

Ist die Filtration im Voraus nicht festgelegt, dann muss nach jedem Erhalt von zusätzlicher Information die Risikobewertung unter geeigneten Kriterien

aktualisiert werden. Wir argumentieren, dass dieses Aktualisierungsproblem einen zeitlich vorwärts gerichteten Ansatz der dynamischen Risikobewertung verlangt. Wir formulieren ein Kriterium, nach dem jedes bedingte konvexe Risikomaß als eine Konsequenz aus der eingehenden Information und der ursprünglichen Risikobewertung konstruiert wird. Im linearen Fall der bedingten Erwartung stimmen beide Ansätze überein, im allgemeinen konvexen Fall jedoch nicht.

In der Theorie der nicht-additiven Mengenfunktionen, welche in der Form  $c(A) = \inf_{\mathcal{Q}} Q(A)$  darstellbar sind, diskutiert man das Problem der Aktualisierung in einem einfachen Rahmen schon seit längerer Zeit, vgl. u. a. die Arbeiten von Dempster [10] und Shafer [36], Walley [37], Fagin & Halpern [16] oder Gilboa & Schmeidler [23]. Die dort beschriebenen Aktualisierungsansätze basieren alle auf demselben Prinzip, wonach einige Wahrscheinlichkeitsmaße nach dem Erhalt von zusätzlicher Information für die Zukunft aus der Menge  $\mathcal{Q}$  entfernt und die verbleibenden nach der Regel von Bayes aktualisiert werden. Wir vereinheitlichen und verallgemeinern diese Aktualisierungsmethoden und wenden sie auf die Klasse der kohärenten Risikomaße an, um die Reduzierung von Unsicherheit nach dem Erhalt von Zusatzinformation darzustellen.

Das Kapitel 3 ist wie folgt aufgebaut. Im ersten Teil untersuchen wir auf axiomatischer Ebene Kriterien, die die intertemporale Struktur von dynamischen konvexen Risikomaßen beschreiben. Nach der Definition von dynamischen konvexen Risikomaßen im Abschnitt 3.1.1 analysieren wir im Abschnitt 3.1.2 zunächst die zeitlich rückwärts gerichteten Bedingungen der Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz. Im Abschnitt 3.1.3 formulieren wir danach eine zeitlich vorwärts gerichtete Bedingung, die wir als Konsequenz bezeichnen wollen. Zur Veranschaulichung der einzelnen Kriterien betrachten wir im Abschnitt 3.1.4 die Klasse der dynamischen robusten Shortfall-Risikomaße und als einen Spezialfall das Average Value at Risk.

Im zweiten Teil beschäftigen wir uns mit dem Problem der Aktualisierung von konvexen Risikomaßen nach dem Erhalt von zusätzlicher Information. Im Abschnitt 3.2.1 definieren wir so genannte Aktualisierungsvorschriften. In den Abschnitten 3.2.2, 3.2.3 und 3.2.4 untersuchen wir anschließend, inwieweit die Bedingungen der starken Zeitkonsistenz, der schwachen Akzeptanzkonsistenz oder der Konsequenz als Aktualisierungskriterium geeignet sind. Im Abschnitt 3.2.5 stellen wir eine Methode zur Reduzierung von Unsicherheit vor, nach der Entscheidungen darüber getroffen werden können, welche probabilistischen Modelle nach dem Erhalt von neuer Information weiter berücksichtigt werden sollen. Im Abschnitt 3.2.6 diskutieren wir die Redu-

zierung der Unsicherheit im Fall der entropischen Risikomaße. Dies führt auf ein Problem der Entropie-Minimierung, welches wir unter der Annahme untersuchen, dass die Menge der weiter verwendeten Modelle durch den Kern einer konvexen Verzerrung des Referenzmaßes gegeben ist. Diese spezielle Struktur erlaubt es, die Dichte des entropieminimierenden Maßes genauer zu bestimmen.

## 3.1 Dynamische konvexe Risikomaße und ihre intertemporale Struktur

### 3.1.1 Definition

Es sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum, wobei  $\Omega$  eine Menge von zukünftigen Szenarien bezeichnet und  $\mathcal{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra von Ereignissen, die am Ende einer Handelsperiode beobachtbar sind. Wie im vorherigen Kapitel dient  $P$  als Referenzmaß. Sämtliche Ungleichungen und Gleichungen von Zufallsvariablen sind im  $P$ -fast sicheren Sinne zu verstehen.

Die Klasse der zu bewertenden Auszahlungsprofile sei gegeben durch den linearen Raum  $\mathcal{X} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  aller messbaren und  $P$ -fast sicher beschränkten Funktionen. Das Risiko dieser Auszahlungsprofile bemessen wir zu verschiedenen Zeiten in Abhängigkeit von der zur Verfügung stehenden Information. Wir fixieren eine Filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T \subset \mathcal{F}$ , wobei die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t$  die Informationsstruktur zum jeweiligen Bewertungszeitpunkt  $t$  widerspiegeln soll. Außerdem setzen wir  $\mathcal{X}_t := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$  für alle  $0 \leq t \leq T$ .

**Definition 3.1.1.** *Eine Familie  $\{\rho_t\}_{t=0}^T$  heißt dynamisches konvexes Risikomaß, falls zu jedem Zeitpunkt  $0 \leq t \leq T$  die Abbildung  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  ein bedingtes konvexes Risikomaß bezüglich  $\mathcal{F}_t$  ist.*

Jedes dynamische konvexe Risikomaß  $\{\rho_t\}_{t=0}^T$  kann mit seiner zugehörigen Folge von Akzeptanzmengen  $\{\mathcal{A}_t\}_{t=0}^T$  identifiziert werden. Ebenso können wir ihm seine Folge von Ablehnungsmengen  $\{\mathcal{N}_t\}_{t=0}^T$  zuordnen.

In Kapitel 2 haben wir uns bereits ausführlich mit bedingten konvexen Risikomaßen und den Möglichkeiten ihrer Darstellung befasst. Jetzt wollen wir Eigenschaften von dynamischen konvexen Risikomaßen und die dadurch implizierten Strukturen zwischen den einzelnen Bewertungszeitpunkten untersuchen. Wir diskutieren Kriterien für eine zeitlich „konsistente und konsequente“ Risikobewertung.

### 3.1.2 Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz

Zunächst untersuchen wir verschiedenen Formen der zeitlichen Konsistenz von dynamischen konvexen Risikomaßen. Dabei vergleichen wir für jeweils zwei aufeinander folgende Bewertungszeitpunkte  $t$  und  $t + 1$  die Akzeptanz- und Ablehnungskriterien der bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$ .

Fixieren wir also einen Zeitpunkt  $0 \leq t \leq T - 1$ . Des Weiteren sei  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{X}$  eine Vergleichs- oder Testklasse von Auszahlungsprofilen, so dass die Bedingungen  $0 \in \mathcal{Y}_t$  und  $\mathcal{Y}_t + \mathcal{X}_t = \mathcal{Y}_t$  erfüllt sind. Diese Testklasse bestimmt den Grad der Konsistenz. Sie kann in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Information gewählt werden, z. B.  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t$  oder  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_{t+1}$ . Sie kann aber auch allgemein festgesetzt sein, z. B.  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}$ .

**Definition 3.1.2.** Die bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  heißen akzeptanzkonsistent (ablehnungskonsistent) bezüglich der Testklasse  $\mathcal{Y}_t$ , falls für alle  $X \in \mathcal{X}$  und  $Y \in \mathcal{Y}_t$  gilt:

$$\rho_{t+1}(X) \leq (\geq) \rho_{t+1}(Y) \quad \Rightarrow \quad \rho_t(X) \leq (\geq) \rho_t(Y). \quad (3.1)$$

Diese Konsistenzbedingungen entsprechen einem zeitlich rückwärts gerichteten Ansatz der dynamischen Risikobewertung. In (3.1) wird gefordert, dass gewisse Maßgaben durch  $\rho_{t+1}$  hinsichtlich der Akzeptanz bzw. Ablehnung von Auszahlungsprofilen – zumindest für die Menge  $\mathcal{Y}_t$  – bereits durch das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_t$  berücksichtigt werden sollen.

Da für jede Wahl von  $\mathcal{Y}_t$  die konstanten Auszahlungsprofile in der Testklasse enthalten sind, insbesondere ist  $0 \in \mathcal{Y}_t$ , lassen sich die folgenden Beziehungen ableiten: Falls die bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanzkonsistent sind, dann gilt für die zugehörigen Akzeptanzmengen  $\mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_t$ . Sind sie hingegen ablehnungskonsistent, dann ist  $\mathcal{N}_{t+1} \subset \mathcal{N}_t$ .

**Bemerkung 3.1.3.** Betrachten wir zwei solche Testklassen  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}'_t \subset \mathcal{X}$  derart, dass  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{Y}'_t$ . Falls die bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanz- oder ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}'_t$  sind, dann sind sie nach Definition auch akzeptanz- bzw. ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$ . Deshalb werden wir in Zukunft den Begriff schwache Akzeptanz- bzw. Ablehnungskonsistenz verwenden, wenn  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t$  ist.

Mit der gleichen Begründung sprechen wir von starker Akzeptanz- oder Ablehnungskonsistenz, wenn  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}$  ist. Man beachte, dass Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz in diesem Fall dieselbe Bedeutung besitzen. In der Literatur zu dynamischen konvexen Risikomaßen wird diese Eigenschaft für gewöhnlich nur Zeitkonsistenz genannt.

### Charakterisierungen von Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz

Charakterisierungen der starken Zeitkonsistenz, also Beschreibungen der dadurch implizierten Eigenschaften der zugehörigen Akzeptanzmengen und Penalty-Funktionen, findet man z. B. in [2], [3] und [31] für den kohärenten Fall sowie in [13], [26], [17] und [7] für den konvexen Fall. In [40] und [33] werden dynamische konvexe bzw. kohärente Risikomaße hinsichtlich schwacher Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz untersucht.

Das folgende Theorem liefert eine allgemeine Charakterisierung von dynamischen konvexen Risikomaßen, die akzeptanzkonsistent sind. Im Beweis verwenden wir nur die Eigenschaften Normiertheit, bedingte Translationsinvarianz und Monotonie. Die Resultate gelten somit auch für dynamische monetäre Risikomaße. Dabei verwenden wir die Bezeichnungen

$$\mathcal{A}_{t,t+1} := \mathcal{X}_{t+1} \cap \mathcal{A}_t \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_{t,t+1} := \mathcal{X}_{t+1} \cap \mathcal{N}_t$$

für die Mengen aller bezüglich  $\mathcal{F}_{t+1}$  messbaren Auszahlungsprofile, die unter  $\rho_t$  akzeptiert bzw. abgelehnt werden.

**Theorem 3.1.4.** *Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße und  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{X}$  wie oben. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind akzeptanzkonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$ .
- (b)  $\rho_t(X) \leq \text{ess inf} \{ \rho_t(Y) | Y \in \mathcal{Y}_t, \rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \}$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .
- (c)  $\text{ess sup} \{ \rho_t(X + \rho_{t+1}(X) - \rho_{t+1}(Y) + \rho_t(Y)) | Y \in \mathcal{Y}_t \} \leq 0$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .
- (d)  $\mathcal{A}_{t+1} - \rho_{t+1}(\mathcal{Y}_t \cap \mathcal{A}_t) \subset \mathcal{A}_t$ .

Außerdem impliziert die Eigenschaft der Akzeptanzkonsistenz von  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  bezüglich der Testklasse  $\mathcal{Y}_t$  die folgenden äquivalenten Bedingungen, wobei  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t} := \{ X \in \mathcal{X} | -\rho_{t+1}(X) \in \mathcal{Y}_t \}$ :

- (e)  $\rho_t(X) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$  für alle  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ .
- (f)  $(\mathcal{A}_{t+1} + \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{A}_{t,t+1}) \cap \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t} \subset \mathcal{A}_t$ .
- (g)  $\mathcal{N}_t \cap \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t} \subset \mathcal{N}_{t+1} + \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{N}_{t,t+1}$ .
- (h) Für alle  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$  und alle  $Y \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{X}_{t+1}$  gilt die folgende Implikation:  
 $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$ .

**Beweis:** Die Äquivalenz von (a) und (b) ist offensichtlich. Wir zeigen, dass aus der Akzeptanzkonsistenz bezüglich  $\mathcal{Y}_t$  die Bedingung (d) folgt. Dazu wählen wir  $X \in \mathcal{A}_{t+1}$  und  $Y \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{A}_t$ . Es ist  $\rho_{t+1}(X - \rho_{t+1}(Y)) \leq \rho_{t+1}(Y)$  und somit  $\rho_t(X - \rho_{t+1}(Y)) \leq \rho_t(Y) \leq 0$ .

Bedingung (d) impliziert (c), denn für  $X \in \mathcal{X}$  und  $Y \in \mathcal{Y}_t$  ist

$$X + \rho_{t+1}(X) - \rho_{t+1}(Y) + \rho_t(Y) = X + \rho_{t+1}(X) - \rho_{t+1}(Y + \rho_t(Y))$$

und damit ein Element von  $\mathcal{A}_{t+1} - \rho_{t+1}(\mathcal{Y}_t \cap \mathcal{A}_t) \subset \mathcal{A}_t$ .

Aus Bedingung (c) folgt (a). Für  $X \in \mathcal{X}$  und  $Y \in \mathcal{Y}_t$  mit  $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y)$  ist nämlich wegen der Monotonie  $\rho_t(X + \rho_t(Y)) \leq \rho_t(X + \rho_{t+1}(X) - \rho_{t+1}(Y) + \rho_t(Y)) \leq 0$ , also  $\rho_t(X) \leq \rho_t(Y)$ . Damit haben wir den ersten Teil dieses Theorems bewiesen.

Jetzt sei angenommen, dass  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanzkonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$  sind. Für ein beliebiges  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$  haben wir aufgrund von Monotonie und  $\mathcal{F}_{t+1}$ -Translationsinvarianz  $\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(-\rho_{t+1}(X))$ . Die Bedingung (e) folgt dann wegen  $-\rho_{t+1}(X) \in \mathcal{Y}_t$ .

Wir beweisen die Äquivalenz von (e) und (f). Wenn (e) erfüllt ist und wenn  $X \in \mathcal{A}_{t+1}$  und  $Y \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{A}_{t,t+1}$  so gewählt werden, dass  $X + Y \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ , dann ist  $\rho_t(X + Y) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(X + Y)) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X) + Y) \leq \rho_t(Y) \leq 0$ .

Umgekehrt ist  $X + \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$  für alle  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ , also gilt  $\rho_t(X) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$ , denn das Auszahlungsprofil  $X + \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) = X + \rho_{t+1}(X) - \rho_{t+1}(X) + \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$  ist ein Element von  $\mathcal{A}_{t+1} + \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{A}_{t,t+1} \subset \mathcal{A}_t$ .

Der Beweis der Äquivalenz von (e) und (g) ist ähnlich. Ist (e) erfüllt und  $X \in \mathcal{N}_t \cap \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ , dann ist  $-\rho_{t+1}(X) \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{N}_{t,t+1}$ , also  $X = X + \rho_{t+1}(X) - \rho_{t+1}(X) \in \mathcal{N}_{t+1} + \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{N}_{t,t+1}$ . Gilt umgekehrt (g), und wählen wir  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ , dann ist  $X + \rho_t(X) \in \mathcal{N}_t \cap \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ . Demnach existiert ein  $Y \in \mathcal{X}_{t+1}$ , so dass  $X + Y \in \mathcal{N}_{t+1}$  und  $-Y + \rho_t(X) \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{N}_{t,t+1}$ . Da  $Y \leq \rho_{t+1}(X)$  ist, folgt (e) aufgrund der Monotonie von  $\rho_t$ , weil  $0 \leq \rho_t(-Y + \rho_t(X)) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(X) + \rho_t(X))$ .

Schließlich nehmen wir (e) an und betrachten ein  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$  sowie ein  $Y \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{X}_{t+1}$  mit  $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) = -Y$ . Aus der Monotonie folgt  $\rho_t(X) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) \leq \rho_t(Y)$  und somit (h). Umgekehrt impliziert (h) die Bedingung (e), denn für jedes  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$  haben wir  $-\rho_{t+1}(X) \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{X}_{t+1}$  und  $\rho_{t+1}(X) = \rho_{t+1}(-\rho_{t+1}(X))$ .  $\square$

Das folgende Theorem liefert äquivalente Charakterisierungen von Ablehnungskonsistenz und Bedingungen, die sich aus dieser Eigenschaft ableiten lassen. Wir verzichten auf den Beweis, da er analog zum vorherigen ist.

**Theorem 3.1.5.** *Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße und  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{X}$  wie oben. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$ .
- (b)  $\rho_t(X) \geq \text{ess sup} \{\rho_t(Y) | Y \in \mathcal{Y}_t, \rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(Y)\}$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .
- (c)  $\text{ess inf} \{\rho_t(X + \rho_{t+1}(X) - \rho_{t+1}(Y) + \rho_t(Y)) | Y \in \mathcal{Y}_t\} \geq 0$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .
- (d)  $\mathcal{N}_{t+1} - \rho_{t+1}(\mathcal{Y}_t \cap \mathcal{N}_t) \subset \mathcal{N}_t$ .

Außerdem impliziert die Eigenschaft der Ablehnungskonsistenz von  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  bezüglich der Testklasse  $\mathcal{Y}_t$  die folgenden äquivalenten Bedingungen, wobei  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t} := \{X \in \mathcal{X} | -\rho_{t+1}(X) \in \mathcal{Y}_t\}$ :

- (e)  $\rho_t(X) \geq \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$  für alle  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ .
- (f)  $\mathcal{A}_t \cap \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t} \subset \mathcal{A}_{t+1} + \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{A}_{t,t+1}$ .
- (g)  $(\mathcal{N}_{t+1} + \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{N}_{t,t+1}) \cap \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t} \subset \mathcal{N}_t$ .
- (h) Für alle  $X \in \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$  und alle  $Y \in \mathcal{Y}_t \cap \mathcal{X}_{t+1}$  gilt die folgende Implikation:  
 $\rho_{t+1}(X) \geq \rho_{t+1}(Y) \Rightarrow \rho_t(X) \geq \rho_t(Y)$ .

**Beispiel:** Wir betrachten die Testklasse  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_{t+1}$ . In diesem Fall gilt  $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{\mathcal{Y}_t}$ , weshalb sowohl in Theorem 3.1.4 als auch in Theorem 3.1.5 die Bedingungen (a)–(d) äquivalent zu den Bedingungen (e)–(h) sind. Die beiden bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind genau dann akzeptanzkonsistent bezüglich  $\mathcal{X}_{t+1}$ , wenn  $\mathcal{A}_{t+1} + \mathcal{A}_{t,t+1} \subset \mathcal{A}_t$  oder wenn  $\mathcal{N}_t \subset \mathcal{N}_{t+1} + \mathcal{N}_{t,t+1}$ . Äquivalent dazu ist auch die Abschätzung:

$$\rho_t(X) \leq \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Bei Ablehnungskonsistenz bezüglich  $\mathcal{X}_{t+1}$  gelten die umgekehrten Inklusionen und Ungleichungen. Außerdem sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  genau dann akzeptanz- und ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{X}_{t+1}$ , wenn sie akzeptanz- oder ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{X}$  sind, also stark zeitkonsistent.  $\diamond$

Wir wollen noch einmal die Resultate dieses Abschnitts für die starke und schwache Form der Akzeptanzkonsistenz zusammenfassen. Beginnen wir mit der größten Testklasse  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}$ . Die Forderung von starker Zeitkonsistenz

bei dynamischen konvexen Risikomaßen impliziert u. a. eine Projektionseigenschaft, wie wir sie von der bedingten Erwartung von Wahrscheinlichkeitsmaßen kennen, vgl. dazu die Bedingung (d) des folgenden Korollars.

**Korollar 3.1.6.** *Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind stark akzeptanzkonsistent.
- (b)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind stark ablehnungskonsistent.
- (c)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind akzeptanz- und ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{X}_{t+1}$ .
- (d)  $\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .
- (e)  $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t+1} + \mathcal{A}_{t,t+1}$ .
- (f)  $\mathcal{N}_t = \mathcal{N}_{t+1} + \mathcal{N}_{t,t+1}$ .

**Bemerkung 3.1.7.** *Falls  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  stetig von oben sind, dann erlauben sie eine robuste Darstellung durch Wahrscheinlichkeitsmaße, vgl. Theorem 2.1.6. Die zugehörigen minimalen Penalty-Funktionen  $\alpha_t^{\min}$  und  $\alpha_{t+1}^{\min}$  stehen in direkter Beziehung zu den Akzeptanzmengen  $\mathcal{A}_t$  und  $\mathcal{A}_{t+1}$ , vgl. die Definition in (2.4). Somit ergeben sich durch die starke Form der Zeitkonsistenz starke Relationen für die minimalen Penalty-Funktionen. Diese werden in [17], Theorem 4.5, beschrieben. Unter der Voraussetzung, dass  $\rho_t$  eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_e(P)$  besitzt, wird die Äquivalenz der folgenden Bedingungen gezeigt:*

- (a)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind stark zeitkonsistent.
- (b) Es gilt

$$\alpha_t^{\min}(Q) = \alpha_{t,t+1}^{\min}(Q) + \mathbb{E}_Q(\alpha_{t+1}^{\min}(Q) | \mathcal{F}_t) \quad \forall Q \in \mathcal{M}_e(P),$$

wobei  $\alpha_{t,t+1}^{\min}$  gegeben ist durch

$$\alpha_{t,t+1}^{\min}(Q) := \operatorname{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_{t,t+1}} \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_t).$$

Die schwache Akzeptanzkonsistenz von dynamischen konvexen Risikomaßen bezüglich der Testklasse  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t$  ist eine notwendige Voraussetzung für jede andere Form der Akzeptanzkonsistenz.

**Korollar 3.1.8.** *Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind schwach akzeptanzkonsistent.
- (a') Für alle  $X \in \mathcal{X}$  gilt  $\rho_t(X) \leq 0$ , falls  $\rho_{t+1}(X) \leq 0$ .
- (b)  $\rho_t(X) \leq \text{ess inf} \{X_t \in \mathcal{X}_t \mid \rho_{t+1}(X) \leq X_t\}$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .
- (c)  $\rho_t(X + \rho_{t+1}(X)) \leq 0$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .
- (d)  $\mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_t$ .
- (d')  $\mathcal{A}_{t+1} \subset \{X \in \mathcal{A}_t \mid X\mathbb{I}_A \in \mathcal{A}_t \forall A \in \mathcal{F}_{t+1}\}$ .

**Beweis:** Die Äquivalenz von (a)–(d) wurde bereits in Theorem 3.1.4 gezeigt, und wegen der bedingten Translationsinvarianz genügt es, die Konsistenzbedingung (3.1) nur für  $Y = 0$  nachzuweisen. Das heißt, dass (a) und (a') äquivalent sind. Natürlich impliziert (d') die Bedingung (d). Umgekehrt gilt für ein beliebiges Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{A}_{t+1}$  und für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}_{t+1}$ , dass auch  $X\mathbb{I}_A \in \mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_t$  ist.  $\square$

**Bemerkung 3.1.9.** *Sind die bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  stetig von oben, so erlauben sie eine robuste Darstellung, vgl. Theorem 2.1.6. In [17], Proposition 4.10, wird gezeigt, dass sich aus der schwachen Akzeptanzkonsistenz von  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  für die zugehörigen minimalen Penalty-Funktionen  $\alpha_t^{\min}$  und  $\alpha_{t+1}^{\min}$  die folgende Beziehung ableiten lässt:*

$$\mathbb{E}_Q(\alpha_{t+1}^{\min}(Q) \mid \mathcal{F}_t) \leq \alpha_t^{\min}(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{M}_e(P).$$

Falls  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_e(P)$  erlauben, dann folgt umgekehrt auch aus der obigen Ungleichung die schwache Akzeptanzkonsistenz von  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$ .

Die im Korollar 3.1.8 (d') zur Charakterisierung der schwachen Akzeptanzkonsistenz verwendete Menge

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) := \{X \in \mathcal{A}_t \mid X\mathbb{I}_A \in \mathcal{A}_t \forall A \in \mathcal{F}_{t+1}\}$$

bezeichnen wir von nun an als die *Akzeptanzmenge von  $\rho_t$  bezüglich  $\mathcal{F}_{t+1}$* .

**Bemerkung 3.1.10.** Die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  von  $\rho_t$  bezüglich  $\mathcal{F}_{t+1}$  ist im Allgemeinen keine Akzeptanzmenge eines  $\mathcal{F}_{t+1}$ -bedingten konvexen Risikomaßes.  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) \subset \mathcal{A}_t$  ist nicht leer und  $\mathcal{F}_t$ -bedingt konvex, jedoch für gewöhnlich nicht bezüglich  $\mathcal{F}_{t+1}$ . Falls  $\rho_t$  ein bedingtes kohärentes Risikomaß ist, dann ist  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  ein  $\mathcal{F}_t$ -bedingter konvexer Kegel. Außerdem ist  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  solide im Sinne, dass jedes Auszahlungsprofil  $Y \in \mathcal{X}$  mit  $Y \geq X$  zu  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  gehört, wenn  $X \in \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  ist. Falls  $\rho_t$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  die Bedingung erfüllt:

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

dann haben wir  $\text{ess inf } \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) \cap \mathcal{X}_{t+1} = 0$ . Man beachte auch die Darstellung von  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  in Theorem 3.2.11 für den Fall, dass  $\mathcal{F}_t$  trivial ist.

**Bemerkung 3.1.11.** Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  zwei bedingte konvexe Risikomaße. Sind diese stark zeitkonsistent, insbesondere schwach akzeptanzkonsistent, so gilt  $\mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$ . Falls  $\rho_t$  zusätzlich für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  die Bedingung erfüllt:

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad P(\rho_t(-\varepsilon \mathbb{1}_A) > 0) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0,$$

dann haben wir sogar  $\mathcal{A}_{t+1} = \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$ , vgl. [7], Proposition 4.7. Gäbe es ein  $X \in \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  derart, dass die Menge  $A := \{\rho_{t+1}(X) > 0\} \in \mathcal{F}_{t+1}$  positive Wahrscheinlichkeit unter  $P$  besitzt, so würde wegen der obigen Implikation der folgende Widerspruch entstehen:

$$0 \geq \rho_t(X \mathbb{1}_A) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X) \mathbb{1}_A) > 0.$$

**Bemerkung 3.1.12.** Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße, die schwach akzeptanzkonsistent sind. Falls  $\rho_t$  sogar ein bedingtes kohärentes Risikomaß ist, dann sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  auch akzeptanzkonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_{t+1}$ . Für alle  $X \in \mathcal{X}$  und  $Y \in \mathcal{X}_{t+1}$  mit  $\rho_{t+1}(X) \leq \rho_{t+1}(Y) = -Y$  gilt nämlich:

$$\rho_t(X) \leq \rho_t(X + \rho_{t+1}(X)) + \rho_t(-\rho_{t+1}(X)) \leq \rho_t(Y).$$

### Erhalt von Akzeptanz- und Ablehnungskonsistenz

Der Vollständigkeit halber wollen wir verschiedene Verknüpfungsmöglichkeiten für dynamische konvexe Risikomaße hinsichtlich der Frage untersuchen, ob diese in gewissem Sinne Akzeptanz- oder Ablehnungskonsistenz erhalten. Wir betrachten die Bildung bedingter konvexer Kombinationen, Streckung, Robustifizierung, Komposition und Faltung.

**Bemerkung 3.1.13.** *Es sei  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{X}$  eine Testklasse wie oben und fixiert.*

- (i) *Die zu einem  $\mathcal{F}_{t+1}$ -bedingten konvexen Risikomaß  $\rho_{t+1}$  gehörige Klasse der  $\mathcal{F}_t$ -bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$ , so dass  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanzkonsistent (ablehnungskonsistent) bezüglich  $\mathcal{Y}_t$  sind, ist bedingt konvex. Für alle  $X \in \mathcal{X}$  und  $Y \in \mathcal{Y}_t$  und für jede  $\mathcal{F}_t$ -messbare Parameterfunktion  $0 \leq \Lambda \leq 1$  gilt nämlich:*

$$\begin{aligned} & \rho_{t+1}(X) \leq (\geq) \rho_{t+1}(Y) \\ \Rightarrow & \rho_t^1(X) \leq (\geq) \rho_t^1(Y) \quad \text{und} \quad \rho_t^2(X) \leq (\geq) \rho_t^2(Y) \\ \Rightarrow & \Lambda \rho_t^1(X) + (1 - \Lambda) \rho_t^2(X) \leq (\geq) \Lambda \rho_t^1(Y) + (1 - \Lambda) \rho_t^2(Y). \end{aligned}$$

- (ii) *Umgekehrt ist die zu einem  $\mathcal{F}_t$ -bedingten konvexen Risikomaß  $\rho_t$  gehörige Klasse aller  $\mathcal{F}_{t+1}$ -bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_{t+1}$ , so dass  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanzkonsistent (ablehnungskonsistent) bezüglich  $\mathcal{Y}_t$  sind, im Allgemeinen nicht bedingt konvex.*

**Bemerkung 3.1.14.** *Es seien  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße. Streckung mit einem  $\mathcal{F}_t$ -messbaren Parameter  $0 < m \leq \Lambda \leq M < \infty$  erzeugt ein  $\mathcal{F}_t$ -bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_t^\Lambda$  und ein  $\mathcal{F}_{t+1}$ -bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_{t+1}^\Lambda$ , und zwar für  $i = t, t + 1$*

$$\rho_i^\Lambda(X) := \Lambda \rho_i \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

- (i) *Eine Testklasse  $\mathcal{Y}_t$  induziert die Menge  $\mathcal{Y}_t^\Lambda := \Lambda \mathcal{Y}_t$ , und  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind genau dann akzeptanz- oder ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$ , wenn  $\rho_t^\Lambda$  und  $\rho_{t+1}^\Lambda$  akzeptanz- bzw. ablehnungskonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t^\Lambda$  sind.*
- (ii) *Speziell sei  $\mathcal{Y}_t = \mathcal{X}_t$ , und  $\Lambda'$  und  $\Lambda$  seien zwei  $\mathcal{F}_t$ -messbare Parameterfunktionen mit  $0 < m \leq \Lambda' \leq 1 \leq \Lambda \leq M < \infty$ . Wegen der bedingten Konveritat der Risikomaße gilt für alle  $X \in \mathcal{X}$  und für  $i = t, t + 1$*

$$\rho_i^\Lambda(X) \leq \rho_i(X) \leq \rho_i^{\Lambda'}(X).$$

*Falls  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  schwach akzeptanzkonsistent sind, dann sind demnach auch  $\rho_t^\Lambda$  und  $\rho_{t+1}^\Lambda$  schwach akzeptanzkonsistent für alle Parameter  $\Lambda \geq 1$ . Ebenso sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}^{\Lambda'}$  schwach akzeptanzkonsistent für alle Parameter  $\Lambda' \leq 1$ .*

*Falls  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  hingegen schwach ablehnungskonsistent sind, dann sind  $\rho_t^{\Lambda'}$  und  $\rho_{t+1}^{\Lambda'}$  schwach ablehnungskonsistent für alle  $\Lambda' \leq 1$ . Genauso sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}^\Lambda$  schwach ablehnungskonsistent für alle  $\Lambda \geq 1$ .*

**Bemerkung 3.1.15.** Es seien  $\{\rho_t^k\}_{k \in \mathcal{I}}$  und  $\{\rho_{t+1}^k\}_{k \in \mathcal{I}}$  Familien von bedingten konvexen Risikomaßen. Durch Robustifizierung erzeugen diese zwei weitere bedingte konvexe Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  mit

$$\rho_i(X) := \operatorname{ess\,sup}_{k \in \mathcal{I}} \rho_i^k(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad i = t, t+1.$$

Wir nehmen an, dass  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{X}_{t+1}$ . Sind  $\rho_t^k$  und  $\rho_{t+1}^k$  akzeptanzkonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$  für jeden Index  $k \in \mathcal{I}$ , dann sind auch  $\rho_t^k$  und  $\rho_{t+1}^k$  akzeptanzkonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$  für alle  $k \in \mathcal{I}$ . Insbesondere sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanzkonsistent bezüglich  $\mathcal{Y}_t$ . Falls  $\mathcal{Y}_t$  keine Teilmenge von  $\mathcal{X}_{t+1}$  ist, dann bleibt die Akzeptanzkonsistenz im Allgemeinen nicht erhalten. Auch Ablehnungskonsistenz kann bei Robustifizierung verloren gehen.

**Bemerkung 3.1.16.** Es seien  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße. Wir vergrößern die Menge aller Auszahlungsprofile und setzen  $\tilde{\mathcal{X}} := L^\infty(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ , wobei  $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$  sowie  $\tilde{P}|_{\mathcal{F}} = P$  gelten soll. Jedes bezüglich  $\mathcal{F}$  bedingte konvexe Risikomaß  $\tilde{\rho} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$  erzeugt durch Komposition bedingte konvexe Risikomaße  $\rho'_t : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho'_{t+1} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$ . Wir definieren für  $i = t, t+1$

$$\rho'_i(\tilde{X}) := \rho_i(-\tilde{\rho}(\tilde{X})) \quad \forall \tilde{X} \in \tilde{\mathcal{X}}$$

Falls  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanzkonsistent (ablehnungskonsistent) bezüglich  $\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{X}$  sind, dann sind  $\rho'_t$  und  $\rho'_{t+1}$  akzeptanzkonsistent (ablehnungskonsistent) bezüglich der induzierten Testklasse  $\tilde{\mathcal{Y}}_t := \{\tilde{Y}_t \in \tilde{\mathcal{X}} \mid -\tilde{\rho}(\tilde{Y}_t) \in \mathcal{Y}_t\} \subset \tilde{\mathcal{X}}$ .

**Bemerkung 3.1.17.** Es seien  $\rho_t^k$  und  $\rho_{t+1}^k$  mit  $k = 1, 2$  bedingte konvexe Risikomaße. Die Faltung von  $\rho_t^1$  und  $\rho_t^2$  bzw. von  $\rho_{t+1}^1$  und  $\rho_{t+1}^2$  ist für alle  $X \in \mathcal{X}$  definiert als

$$\begin{aligned} \rho_i^1 \square \rho_i^2(X) &:= \operatorname{ess\,inf}_{Y \in \mathcal{X}} \{\rho_i^1(X - Y) + \rho_i^2(Y)\} \\ &= \operatorname{ess\,inf}_{Y \in \mathcal{A}_i^2} \rho_i^1(X - Y), \end{aligned}$$

wobei  $i = t, t+1$ . Angenommen, dass  $\rho_i^1 \square \rho_i^2(0) \in \mathcal{X}_i$  für  $i = t, t+1$ . Durch Normierung, d. h. durch

$$\rho_i(X) := \rho_i^1 \square \rho_i^2(X) - \rho_i^1 \square \rho_i^2(0) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

erhalten wir bedingte konvexe Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$ , vgl. [4]. Wenn  $\rho_i^1$  und  $\rho_i^2$  für  $i = t, t+1$  stetig von unten sind, dann ist  $\rho_i$  ebenfalls stetig von unten und die zugehörige Akzeptanzmenge ist gegeben durch

$$\mathcal{A}_i := \overline{\mathcal{A}_i^1 + \mathcal{A}_i^2} - \rho_i^1 \square \rho_i^2(0),$$

wobei der Abschluss bezüglich der Schwach\*-Topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$  gemeint ist. Den Beweis dieser Aussagen findet man in [26], Theorem 4.3. Unter diesen Voraussetzungen gilt:

- (i) Die Faltung beeinträchtigt die starke Form der Zeitkonsistenz nicht. Falls  $\rho_t^k$  und  $\rho_{t+1}^k$  sowohl für  $k = 1$  als auch für  $k = 2$  stark zeitkonsistent sind, dann sind auch  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  stark zeitkonsistent, vgl. Theorem 4.3 in [26].
- (ii) Unter der Zusatzbedingung  $-\mathcal{A}_i^2 \subset \mathcal{N}_i^1$  haben wir  $\rho_i = \rho_i^1 \square \rho_i^2$  für  $i = t, t + 1$ . Dann sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  schwach akzeptanzkonsistent, wenn  $\rho_t^k$  und  $\rho_{t+1}^k$  sowohl für  $k = 1$  als auch für  $k = 2$  schwach akzeptanzkonsistent sind.

### 3.1.3 Konsequenz

Neben der Konstruktion von dynamischen konvexen Risikomaßen zu einer vorgegebenen Filtration kann das Problem der dynamischen Risikobewertung auch aus einer anderen Perspektive betrachtet werden. Bei dieser nimmt man an, dass zu jedem Zeitpunkt das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_{t+1}$  in Übereinstimmung mit den Bewertungsmaßgaben des ursprünglichen bedingten konvexen Risikomaßes  $\rho_t$  und der erhaltenen Information  $\mathcal{F}_{t+1}$  konstruiert wird. Die Struktur der  $\sigma$ -Algebra ist im Voraus nicht bekannt.

Motiviert durch diese Sichtweise stellen wir in diesem Abschnitt einen zeitlich *vorwärts* gerichteten Ansatz der dynamischen Risikobewertung vor. Wie im vorherigen Abschnitt sei  $\{\rho_t\}_{t=0}^T$  ein dynamisches konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{X}$ , adaptiert an die Filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$ . Wieder vergleichen wir die Akzeptanzkriterien der beiden bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  zu zwei aufeinander folgenden Bewertungszeitpunkten. Es sei  $0 \leq t \leq T - 1$  fixiert.

Zunächst wollen wir kurz an die Charakterisierung der schwachen Akzeptanzkonsistenz in Korollar 3.1.8 (d') erinnern. Bei dieser Konsistenzeigenschaft wird das Risiko eines unter  $\rho_{t+1}$  akzeptablen Auszahlungsprofils unter  $\rho_t$  ebenfalls als akzeptabel angesehen, d. h., es gilt die Inklusion  $\mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_t$ . Wegen der Bedingung  $\rho_{t+1}(X)\mathbb{I}_A = \rho_{t+1}(X\mathbb{I}_A)$  für alle  $X \in \mathcal{X}$  und jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}_{t+1}$  wird schwache Akzeptanzkonsistenz auch durch die Beziehung  $\mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  äquivalent charakterisiert, wobei

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) := \{X \in \mathcal{A}_t \mid X\mathbb{I}_A \in \mathcal{A}_t \forall A \in \mathcal{F}_{t+1}\}$$

die Akzeptanzmenge von  $\rho_t$  bezüglich  $\mathcal{F}_{t+1}$  bezeichnet.

Die folgende Eigenschaft kann als die zeitlich vorwärts gerichtete Variante der schwachen Akzeptanzkonsistenz angesehen werden. Das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_{t+1}$  wird dabei als eine Aktualisierung von  $\rho_t$  nach dem Erhalt der Information  $\mathcal{F}_{t+1}$  aufgefasst.

**Definition 3.1.18.** *Das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_{t+1}$  heißt Konsequenz aus  $\rho_t$  und der eingehenden Information  $\mathcal{F}_{t+1}$ , falls*

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) \subset \mathcal{A}_{t+1}. \quad (3.2)$$

Die Forderung (3.2) bedeutet, dass das Risiko eines Auszahlungsprofils, das unter  $\rho_t$  unabhängig davon, welches Ereignis im nächsten Bewertungszeitpunkt tatsächlich eintritt, als akzeptabel angesehen wird, auch von dem dann verwendeten bedingten konvexen Risikomaß  $\rho_{t+1}$  als akzeptabel eingestuft werden sollte. Im Vergleich zur Bedingung (3.1) kann auch die folgende Implikation als Definition einer Konsequenz  $\rho_{t+1}$  aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$  verwendet werden. Für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$  gilt:

$$\rho_t(X\mathbb{I}_A) \leq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}_{t+1} \quad \Rightarrow \quad \rho_{t+1}(X) \leq 0.$$

**Bemerkung 3.1.19.** *Falls das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_{t+1}$  stetig von oben ist, dann besitzt es eine robuste Darstellung auf der Menge  $\mathcal{P}_{t+1}$  aller absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße, die auf  $\mathcal{F}_{t+1}$  zum Referenzmaß äquivalent sind, vgl. Theorem 2.1.6. In diesem Fall ist  $\rho_{t+1}$  genau dann eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und der Information  $\mathcal{F}_{t+1}$ , wenn die minimale Penalty-Funktion, definiert wie in (2.4), die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\operatorname{ess\,sup}_{X \in \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})} \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_{t+1}) \leq \alpha_{t+1}^{\min}(Q) \quad \forall Q \in \mathcal{P}_{t+1}.$$

**Bemerkung 3.1.20.** *Als zeitlich vorwärts gerichtete Variante der schwachen Ablehnungskonsistenz kann auch die Forderung  $\mathcal{N}_t(\mathcal{F}_{t+1}) \subset \mathcal{N}_{t+1}$  betrachtet werden, um intertemporale Strukturen von dynamischen konvexen Risikomaßen zu charakterisieren. Mit Hinblick auf die Diskussion des Aktualisierungsproblems im zweiten Teil dieses Kapitels wollen wir uns jedoch mit diesem Kriterium nicht weiter befassen.*

### Erhalt der Konsequenzeigenschaft

Wie im Abschnitt zur Konsistenz wollen wir abschließend Verknüpfungsmöglichkeiten für dynamische konvexe Risikomaße hinsichtlich der Frage untersuchen, ob sie in gewissem Sinne „konsequenzverträglich“ sind. Wir betrachten die Bildung bedingter konvexer Kombinationen, Streckung, Robustifizierung, Komposition und Faltung.

**Bemerkung 3.1.21.** *Die zu einem bedingten konvexen Risikomaß  $\rho_t$  und zur Information  $\mathcal{F}_{t+1} \subset \mathcal{F}$  gehörige Klasse aller Konsequenzen ist bedingt konvex. Definiert man nämlich  $\rho_{t+1} := \Lambda \rho_{t+1}^1 + (1-\Lambda) \rho_{t+1}^2$  für eine Parameterfunktion  $\Lambda \in \mathcal{X}_{t+1}$  mit  $0 \leq \Lambda \leq 1$ , dann ist*

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) \subset \mathcal{A}_{t+1}^1 \cap \mathcal{A}_{t+1}^2 \subset \mathcal{A}_{t+1}.$$

**Bemerkung 3.1.22.** *Es sei  $\rho_{t+1}$  eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$ . Die bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t^\Lambda$  und  $\rho_{t+1}^\Lambda$  bezeichnen die durch Streckung mit einer  $\mathcal{F}_t$ -messbaren Parameterfunktion  $0 < m \leq \Lambda \leq M < \infty$  erzeugten Risikomaße, d. h., dass*

$$\rho_i^\Lambda(X) := \Lambda \rho_i \left( \frac{X}{\Lambda} \right) \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad i = t, t+1.$$

*Wegen der bedingten Konvexität gelten für alle Parameterfunktionen  $\Lambda'$  und  $\Lambda$ , so dass  $0 < m \leq \Lambda' \leq 1 \leq \Lambda \leq M < \infty$ , die Beziehungen*

$$\mathcal{A}_t^{\Lambda'}(\mathcal{F}_{t+1}) \subset \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) \subset \mathcal{A}_t^\Lambda(\mathcal{F}_{t+1}) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{t+1}^{\Lambda'} \subset \mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_{t+1}^\Lambda.$$

*Das bedeutet, dass  $\rho_{t+1}$  auch eine Konsequenz aus  $\rho_t^{\Lambda'}$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$  ist für alle  $\Lambda' \leq 1$ . Ebenso ist  $\rho_{t+1}^\Lambda$  eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$  für alle  $\Lambda \geq 1$ .*

**Bemerkung 3.1.23.** *Es seien  $\{\rho_t^k\}_{k \in \mathcal{I}}$  und  $\{\rho_{t+1}^k\}_{k \in \mathcal{I}}$  zwei Familien bedingter konvexer Risikomaße derart, dass für jeden Index  $k \in \mathcal{I}$  durch  $\rho_{t+1}^k$  eine Konsequenz aus  $\rho_t^k$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$  gegeben ist. Für die durch Robustifizierung erzeugten bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  mit*

$$\rho_i(X) := \operatorname{ess\,sup}_{k \in \mathcal{I}} \rho_i^k(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad i = t, t+1,$$

*gelten die Beziehungen*

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) = \bigcap_{k \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_t^k(\mathcal{F}_{t+1}) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{t+1} = \bigcap_{k \in \mathcal{I}} \mathcal{A}_{t+1}^k.$$

Jedes bedingte konvexe Risikomaß der Form

$$\rho_{t+1}^{\mathcal{J}}(X) := \operatorname{ess\,sup}_{k \in \mathcal{J}} \rho_{t+1}^k(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

mit  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$  ist eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$ .

**Bemerkung 3.1.24.** Es seien  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  bedingte konvexe Risikomaße. Wir vergrößern nun den Raum der Auszahlungsprofile und betrachten  $\tilde{\mathcal{X}} := L^\infty(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ , wobei  $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$  und  $\tilde{P}|_{\mathcal{F}} = P$  gelten soll. Jedes  $\mathcal{F}$ -bedingte konvexe Risikomaß  $\tilde{\rho} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$  erzeugt durch Komposition, also durch

$$\rho'_i(\tilde{X}) := \rho_i(-\tilde{\rho}(\tilde{X})) \quad \forall \tilde{X} \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad i = t, t+1,$$

bedingte konvexe Risikomaße  $\rho'_t : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho'_{t+1} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$ . Falls  $\rho_{t+1}$  eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$  ist, dann ist  $\rho'_{t+1}$  eine Konsequenz aus  $\rho'_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_t(\mathcal{F}_{t+1}) &= \{\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{X}} \mid -\tilde{\rho}_t(\tilde{X}) \in \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})\} \\ &\subset \{\tilde{X} \in \tilde{\mathcal{X}} \mid -\tilde{\rho}_t(\tilde{X}) \in \mathcal{A}_{t+1}\} = \mathcal{A}'_{t+1}. \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.1.25.** Es sei  $\rho_t$  ein bedingtes konvexes Risikomaß. Wir betrachten zwei Konsequenzen  $\rho_{t+1}^1, \rho_{t+1}^2$  aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$ . Beide seien stetig von unten und so, dass das durch Faltung induzierte bedingte konvexe Risikomaß

$$\rho_{t+1}(X) := \rho_{t+1}^1 \square \rho_{t+1}^2(X) - \rho_{t+1}^1 \square \rho_{t+1}^2(0) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wohldefiniert ist, d. h., dass  $\rho_{t+1}^1 \square \rho_{t+1}^2(0) \in \mathcal{X}_{t+1}$  ist, siehe auch Bemerkung 3.1.17. Für die zugehörige Akzeptanzmenge gilt

$$\mathcal{A}_{t+1} := \overline{\mathcal{A}_{t+1}^1 + \mathcal{A}_{t+1}^2} - \rho_{t+1}^1 \square \rho_{t+1}^2(0),$$

wobei der Abschluss bezüglich der Schwach\*-Topologie  $\sigma(L^\infty, L^1)$  gemeint ist, vgl. [26]. Ist nun  $\rho_0^1 \square \rho_0^2(0)$   $\mathcal{F}_{t+1}$ -akzeptabel unter  $\rho_t$ , also ein Element von  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$ , dann folgt aus

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) &\subset \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) + \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) - \rho_{t+1}^1 \square \rho_{t+1}^2(0) \\ &\subset \mathcal{A}_{t+1}^1 + \mathcal{A}_{t+1}^2 - \rho_{t+1}^1 \square \rho_{t+1}^2(0), \end{aligned}$$

dass  $\rho_{t+1}$  ebenfalls eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$  ist.

### 3.1.4 Robustes Shortfall-Risikomaß

Anhand des Beispiels eines robusten Shortfall-Risikomaßes wollen wir die vorgestellten Kriterien noch einmal veranschaulichen. Wieder vergleichen wir die bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  zu zwei beliebigen aufeinander folgenden Bewertungszeitpunkten mit  $0 \leq t \leq T - 1$ .

Wir fixieren zwei konvexe und streng monoton wachsende Verlustfunktionen  $l_t, l_{t+1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und setzen  $x_t := l_t(0)$  sowie  $x_{t+1} := l_{t+1}(0)$ . Außerdem seien  $\mathcal{Q}_t$  und  $\mathcal{Q}_{t+1}$  konvexe Mengen von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $Q \sim P$ . Die Akzeptanzmengen von  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  seien gegeben durch

$$\mathcal{A}_t := \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_t) \leq x_t \forall Q \in \mathcal{Q}_t\} \quad (3.3)$$

bzw.

$$\mathcal{A}_{t+1} := \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(l_{t+1}(-X)|\mathcal{F}_{t+1}) \leq x_{t+1} \forall Q \in \mathcal{Q}_{t+1}\}. \quad (3.4)$$

Natürlich kann das bedingte robuste Shortfall-Risikomaß auch in allgemeinerer Form mit einer szenarioabhängigen Verlustfunktion definiert werden, z. B. durch Einführung eines messbaren Parameters. Diesen Aspekt wollen wir jedoch außer Acht lassen.

Wie müssen nun die Verlustfunktionen und die zugrunde liegenden Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen gewählt werden, damit die bedingten robusten Shortfall-Risikomaße  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  akzeptanz- oder aber ablehnungskonsistent sind? Unter welchen Bedingungen kann  $\rho_{t+1}$  als eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und der eingehenden Information  $\mathcal{F}_{t+1}$  aufgefasst werden?

#### Charakterisierung der Akzeptanzmenge von $\rho_t$ bezüglich $\mathcal{F}_{t+1}$

**Satz 3.1.26.** *Es sei  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  ein robustes Shortfall-Risikomaß mit einer Akzeptanzmenge wie in (3.3). Dann ist die zugehörige Akzeptanzmenge von  $\rho_t$  bezüglich  $\mathcal{F}_{t+1}$  gegeben durch*

$$\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1}) \leq x_t \forall Q \in \mathcal{Q}_t\}.$$

**Beweis:** Wir betrachten zunächst ein beliebiges Auszahlungsprofil  $X$ , das oben in der rechts definierten Klasse enthalten ist. Für alle  $Q \in \mathcal{Q}_t$  gilt  $\mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1}) \leq x_t$ , und wir haben für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}_{t+1}$

$$\mathbb{E}_Q(l_t(-X\mathbb{I}_A)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1})\mathbb{I}_A + l_t(0)\mathbb{I}_{A^c}|\mathcal{F}_t) \leq x_t,$$

Demnach ist  $X\mathbb{I}_A \in \mathcal{A}_t$  und  $X \in \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$ .

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, nehmen wir an, dass es ein Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  und ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}_t$  gibt, so dass die  $\mathcal{F}_{t+1}$ -messbare Menge  $A := \{\mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1}) > x_t\}$  nicht leer ist und  $P(A) > 0$ . Es ist  $X\mathbb{I}_A \in \mathcal{A}_t$  und damit

$$\mathbb{E}_Q(l_t(-X\mathbb{I}_A)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1})\mathbb{I}_A|\mathcal{F}_t) + l_t(0)\mathbb{E}_Q(\mathbb{I}_{A^c}|\mathcal{F}_t) \leq x_t.$$

Wir erhalten einen Widerspruch, denn es folgt, dass

$$\mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1})\mathbb{I}_A|\mathcal{F}_t) \leq x_t\mathbb{E}_Q(\mathbb{I}_A|\mathcal{F}_t).$$

□

Mit Hilfe dieses Satzes können wir eine „konsistente und konsequente“ dynamischen Risikobewertung im Fall der robusten Shortfall-Risikomaße wie folgt beschreiben.

**Korollar 3.1.27.** *Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  robuste Shortfall-Risikomaße mit zugehörigen Akzeptanzmengen wie in (3.3) und (3.4). Falls*

$$l_t = l_{t+1} \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}_t = \mathcal{Q}_{t+1},$$

*dann sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  schwach akzeptanzkonsistent. Gleichzeitig ist  $\rho_{t+1}$  eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und der Information  $\mathcal{F}_{t+1}$ .*

### Veränderungen in Bezug auf Unsicherheit und Risikoaversion

Die Mengen  $\mathcal{Q}_t$  und  $\mathcal{Q}_{t+1}$  können so interpretiert werden, dass sie die Unsicherheit gegenüber dem zugrunde liegenden probabilistischen Modell zum jeweiligen Bewertungszeitpunkt widerspiegeln. Eine im Laufe der Zeit steigende oder sinkende Unsicherheit hat im mathematischen Sinne die folgende Bedeutung.

**Korollar 3.1.28.** *Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  robuste Shortfall-Risikomaße mit Akzeptanzmengen wie in (3.3) und (3.4). Außerdem sei angenommen, dass  $l_t = l_{t+1}$ . Dann gilt:*

- (i)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind schwach akzeptanzkonsistent, falls  $\mathcal{Q}_t \subset \mathcal{Q}_{t+1}$ .
- (ii)  $\rho_{t+1}$  ist eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$ , falls  $\mathcal{Q}_{t+1} \subset \mathcal{Q}_t$ .

Der Grad der Konvexität der Verlustfunktionen  $l_t$  und  $l_{t+1}$  spiegelt die Risikoaversion zum entsprechenden Bewertungszeitpunkt wider. Als Maß dafür können wir den Arrow-Pratt-Koeffizienten der absoluten Risikoaversion betrachten. Dieser ist für zweimal stetig differenzierbare Verlustfunktionen definiert als

$$\alpha_t(x) := \frac{l_t''(x)}{l_t'(x)} \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{t+1}(x) := \frac{l_{t+1}''(x)}{l_{t+1}'(x)} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Korollar 3.1.29.** *Es seien  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_t$  und  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  robuste Shortfall-Risikomaße mit Akzeptanzmengen wie in (3.3) und (3.4) und zweimal stetig differenzierbaren Verlustfunktionen. Außerdem sei angenommen, dass  $\mathcal{Q}_t = \mathcal{Q}_{t+1}$ . Dann gilt:*

- (i)  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  sind schwach akzeptanzkonsistent, falls  $\alpha_t \leq \alpha_{t+1}$ .
- (ii)  $\rho_{t+1}$  ist eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$ , falls  $\alpha_{t+1} \leq \alpha_t$ .

**Beweis:** Wir zeigen Teil (i), denn der Beweis von Teil (ii) ist analog. Es seien  $l_t$  und  $l_{t+1}$  zweimal stetig differenzierbare Verlustfunktionen derart, dass für die zugehörigen Arrow-Pratt-Koeffizienten gilt, dass  $\alpha_t(x) \leq \alpha_{t+1}(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Dann existiert eine streng monoton wachsende und konvexe Funktion  $F$ , so dass  $l_{t+1} = F \circ l_t$ . Man vergleiche dazu das Resultat für Nutzenfunktionen in [21], Proposition 2.47.

Um zu zeigen, dass schwache Akzeptanzkonsistenz erfüllt ist, müssen wir nachweisen, dass  $\mathcal{A}_{t+1} \subset \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$ . Es sei  $X \in \mathcal{A}_{t+1}$ . Nach der Ungleichung von Jensen gilt für alle Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q \in \mathcal{Q}_t = \mathcal{Q}_{t+1}$

$$F(\mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1})) \leq \mathbb{E}_Q(l_{t+1}(-X)|\mathcal{F}_{t+1}) \leq x_{t+1}.$$

Demzufolge ist

$$\mathbb{E}_Q(l_t(-X)|\mathcal{F}_{t+1}) \leq F^{-1}(x_{t+1}) = l_t(0) = x_t,$$

für alle  $Q \in \mathcal{Q}_t$ , was nach Satz 3.1.26 bedeutet, dass  $X \in \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  ist.  $\square$

In [40], Theorem 4.15, werden die nicht-robusten dynamischen Shortfall-Risikomaße mit einer festen Verlustfunktion unter gewissen technischen Voraussetzungen eindeutig als diejenigen dynamischen konvexen und verteilungsinvarianten Risikomaße identifiziert, die schwach akzeptanz- und schwach ablehnungskonsistent sind. Die schwache Ablehnungskonsistenz bleibt auch erhalten, wenn die Risikoaversion im Laufe der Zeit abnimmt.

**Bemerkung 3.1.30.** *Es sei  $\mathcal{Q}_t = \mathcal{Q}_{t+1} = \{Q\}$  mit einem äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$ . Falls die Verlustfunktionen  $l_t$  und  $l_{t+1}$  zweimal stetig differenzierbar sind derart, dass  $\alpha_{t+1} \leq \alpha_t$ , dann sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  schwach ablehnungskonsistent. Der Beweis erfolgt wieder mit Hilfe der Ungleichung von Jensen. Man vergleiche auch die Aussage (ii) des vorherigen Korollars.*

### Average Value at Risk

Abschließend wollen wir die Ergebnisse dieses Abschnitts auf das kohärente Average Value at Risk anwenden. Wir beschränken unsere Untersuchungen dabei auf die folgende einfache Situation. Im Bewertungszeitpunkt  $t$  sei die verfügbare Information  $\mathcal{F}_t$  *trivial*, und in  $t+1$  sei die entsprechende  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_{t+1}$  *atomar*. Wir fixieren einen konstanten Level  $0 \leq \lambda \leq 1$  und setzen

$$\mathcal{Q}_\lambda := \left\{ Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\lambda} \right\}.$$

Das kohärente Risikomaß  $\rho_t : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  sei für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$  definiert durch

$$\rho_t(X) := AVaR_\lambda(X) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}_Q(-X).$$

Da das Referenzmaß  $P$  selbst in  $\mathcal{Q}_\lambda$  enthalten ist, können wir nach Lemma 1.1.13 bei der Bildung des Supremums auch zu den äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen übergehen, d. h., dass mit  $\mathcal{Q}_t := \mathcal{Q}_\lambda \cap \mathcal{M}_e(P)$  gilt:

$$\rho_t(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_t} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Demnach kann  $\rho_t$  als ein robustes Shortfall-Risikomaß mit einer linearen Verlustfunktion aufgefasst werden. Nach Satz 3.1.26 und Korollar 3.1.28 ist das durch die Akzeptanzmenge

$$\mathcal{A}_{t+1} = \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1}) = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_{t+1}) \leq 0 \quad \forall Q \in \mathcal{Q}_t\}$$

induzierte bedingte kohärente Risikomaß  $\rho_{t+1} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_{t+1}$  eine Konsequenz aus  $\rho_t$  und der Information  $\mathcal{F}_{t+1}$ . Gleichzeitig sind  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  schwach akzeptanzkonsistent. Wir zeigen unten, dass  $\rho_{t+1}$  ebenfalls vom Typ eines bedingten Average Value at Risk ist, nämlich

$$\rho_{t+1}(X) = AVaR_{\Lambda_{t+1}}(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad (3.5)$$

wobei

$$\Lambda_{t+1} := \lambda \cdot \operatorname{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}_P \left( \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right) \in \mathcal{X}_{t+1}. \quad (3.6)$$

Für die Definition des Average Value at Risk in seiner bedingten Form verweisen wir auf (2.7) und (2.8) in Kapitel 2. Offenbar gilt  $0 \leq \Lambda_{t+1} \leq \lambda \leq 1$ . Nach der folgenden Bemerkung nimmt die aktualisierte Levelfunktion sogar den Wert 0 an, sobald die zusätzliche Information  $\mathcal{F}_{t+1}$  fein genug ist. In diesem Fall ist  $\rho_{t+1}$  also durch das bedingte Worst-Case-Risikomaß gegeben.

**Bemerkung 3.1.31.** *Wir wollen das in (3.6) verwendete essentielle Infimum*

$$M_{t+1} := \operatorname{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}_P \left( \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right) \in \mathcal{X}_{t+1}$$

bestimmen. Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_{t+1}$  ist atomar. Das bedeutet, dass eine Zerlegung von  $\Omega$  in paarweise disjunkte Ereignisse  $\{B_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathcal{F}$  existiert, so dass  $\mathcal{F}_{t+1} = \sigma(B_i, i \in \mathcal{I})$ . Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass jedes Partitionselement positive Wahrscheinlichkeit unter  $P$  besitzt. Nun unterscheiden wir zwei Fälle.

Zunächst sei  $B \in \mathcal{F}_{t+1}$  ein Ereignis mit  $0 < P(B) \leq 1 - \lambda$ . Das bezüglich  $B^c$  bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß mit

$$Q(A) := \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

gehört ebenfalls zu  $\mathcal{Q}_\lambda$ . Außerdem gilt

$$0 \leq M_{t+1} \mathbb{I}_B \leq \mathbb{E}_P \left( \frac{dQ}{dP} \middle| \mathcal{F}_{t+1} \right) \mathbb{I}_B \equiv 0.$$

Nun betrachten wir ein Atom  $B \in \mathcal{F}_{t+1}$  mit  $P(B) \geq 1 - \lambda$ . Wir haben dann

$$M_{t+1} \mathbb{I}_B = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \frac{Q(B)}{P(B)} \mathbb{I}_B \geq \frac{P(B) - (1 - \lambda)}{\lambda P(B)} \mathbb{I}_B.$$

Definieren wir

$$Q(A) := \mathbb{E}_P \left( \mathbb{I}_{A \cap B} \frac{P(B) - (1 - \lambda)}{\lambda P(B)} + \mathbb{I}_{A \cap B^c} \frac{1}{\lambda} \right) \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad (3.7)$$

so ist  $Q \in \mathcal{Q}_\lambda$  und  $M_{t+1}$  wird auf  $B$  durch die bedingte Erwartung der Dichte  $dQ/dP$  angenommen.

Für die festgelegte einfache Informationsstruktur –  $\mathcal{F}_t$  trivial,  $\mathcal{F}_{t+1}$  atomar – erhalten wir nun das folgende Resultat. Es zeigt erneut, dass die schwache Akzeptanzkonsistenz eine Zunahme der Unsicherheit gegenüber dem probabilistischen Modell impliziert. Im Gegensatz dazu bedeutet eine Abnahme der Unsicherheit, dass das bedingte Average Value at Risk als eine Konsequenz aus dem unbedingten Average Value at Risk und der eingehenden Information konstruiert wird.

**Satz 3.1.32.** *Es sei  $0 \leq \lambda \leq 1$  ein fixierter Level,  $\Lambda_{t+1} \in \mathcal{X}_{t+1}$  definiert wie in (3.6) und  $\Lambda \in \mathcal{X}_{t+1}$  eine weitere bedingte Levelfunktion mit  $0 \leq \Lambda \leq 1$ . Dann gilt:*

- (i)  *$AVaR_\lambda$  und  $AVaR_\Lambda$  sind genau dann schwach akzeptanzkonsistent, wenn  $\Lambda \leq \Lambda_{t+1}$ .*
- (ii)  *$AVaR_\Lambda$  ist genau dann eine Konsequenz aus  $AVaR_\lambda$  und  $\mathcal{F}_{t+1}$ , wenn  $\Lambda_{t+1} \leq \Lambda$ .*

**Beweis:** Die Aussagen ergeben sich sofort aus der Gleichheit in (3.5). Diese ist trivial, falls  $\lambda = 0$  oder  $\lambda = 1$  ist. Deshalb nehmen wir an, dass  $0 < \lambda < 1$ . Es sei  $Q \in \mathcal{Q}_t$  beliebig. Für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$  gilt

$$\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_{t+1}) = \frac{\mathbb{E}_P(-Xh|\mathcal{F}_{t+1})}{\mathbb{E}_P(h|\mathcal{F}_{t+1})} = \mathbb{E}_P(-Xh'|\mathcal{F}_{t+1}) = \mathbb{E}_{Q'}(-X|\mathcal{F}_{t+1}),$$

wobei  $h := dQ/dP$  und  $dQ'/dP := h' := h/\mathbb{E}_P(h|\mathcal{F}_{t+1})$ . Außerdem haben wir  $\mathbb{E}_P(h'|\mathcal{F}_{t+1}) \equiv 1$  und  $h' \leq 1/\Lambda_{t+1}$ , d. h., dass  $Q'$  in der Menge

$$\mathcal{Q}_{t+1} := \left\{ Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid Q|\mathcal{F}_{t+1} = P|\mathcal{F}_{t+1} \text{ und } \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\Lambda_{t+1}} \right\} \cap \mathcal{M}_e(P)$$

enthalten ist. Demzufolge ist  $\rho_{t+1}(X) \leq AVaR_{\Lambda_{t+1}}(X)$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ .

Nun sei  $B \in \mathcal{F}_{t+1}$  ein fixiertes Atom. Wir nehmen zuerst an, dass dieses Ereignis der Bedingung  $P(B) > 1 - \lambda$  genügt. Für das in (3.7) definierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}_t$  mit zugehöriger Dichte  $h := dQ/dP$  gilt

$$\mathbb{E}_P(h|\mathcal{F}_{t+1}) \mathbb{I}_B = \frac{Q(B)}{P(B)} \mathbb{I}_B = M_{t+1} \mathbb{I}_B,$$

Zu jedem  $Q' \in \mathcal{Q}_{t+1}$  können wir dann durch

$$\hat{Q}(A) := \frac{Q'(A \cap B) \cdot Q(B)}{P(B)} + Q(A \cap B^c) \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad (3.8)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\hat{Q} \in \mathcal{M}_e(P)$  erzeugen, und für alle  $X \in \mathcal{X}$  haben wir

$$\mathbb{E}_{\hat{Q}}(X) = \mathbb{E}_Q \left( \frac{\mathbb{E}_{Q'}(X \mathbb{I}_B)}{P(B)} \mathbb{I}_B + X \mathbb{I}_{B^c} \right)$$

sowie

$$\mathbb{E}_{\hat{Q}}(X | \mathcal{F}_{t+1}) \mathbb{I}_B = \mathbb{E}_{Q'}(X | \mathcal{F}_{t+1}) \mathbb{I}_B = \frac{\mathbb{E}_{Q'}(X \mathbb{I}_B)}{P(B)} \mathbb{I}_B.$$

Nach Bemerkung 2.2.15 und nach Definition der Levelfunktion  $\Lambda_{t+1}$  gilt für alle  $A \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \hat{Q}(A) &= \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_{Q'}(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_{t+1}) \mathbb{I}_B) + Q(A \cap B^c) \\ &\leq \mathbb{E}_P \left( \frac{h \cdot \mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_{t+1})}{\Lambda_{t+1}} \mathbb{I}_B \right) + \frac{P(A \cap B^c)}{\lambda} \\ &= \mathbb{E}_P \left( \frac{\mathbb{E}_P(h | \mathcal{F}_{t+1}) \cdot \mathbb{E}_P(\mathbb{I}_A | \mathcal{F}_{t+1})}{\Lambda_{t+1}} \mathbb{I}_B \right) + \frac{P(A \cap B^c)}{\lambda} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{\lambda} + \frac{P(A \cap B^c)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass auch  $\hat{Q} \in \mathcal{Q}_t$  ist. Damit erhalten wir auf dem Ereignis  $B$  die Gleichheit

$$\rho_{t+1}(X) \mathbb{I}_B = AVaR_{\Lambda_{t+1}}(X) \mathbb{I}_B \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.9)$$

Falls  $P(B) \leq 1 - \lambda$  ist, dann wird das essentielle Infimum  $M_{t+1} \mathbb{I}_B \equiv 0$  über  $\mathcal{Q}_t$  nicht angenommen. Wir betrachten einen größeren Level  $\lambda' \geq \lambda$  derart, dass  $P(B) > 1 - \lambda'$ . Nach dem ersten Teil dieses Beweises haben wir für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$

$$\rho_{t+1}(X) \mathbb{I}_B \geq \sup_{\mathcal{Q}'_t} \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_{t+1}) \mathbb{I}_B = AVaR_{\Lambda'_{t+1}}(X) \mathbb{I}_B,$$

wobei  $\mathcal{Q}'_t := \mathcal{Q}_{\lambda'} \cap \mathcal{M}_e(P) \subset \mathcal{Q}_t$ . Lassen wir nun  $\lambda'$  monoton von oben gegen  $P(B^c) \vee \lambda$  streben, so konvergiert die bedingte Levelfunktion  $\Lambda'_{t+1}$  auf  $B$  gegen 0. Das bedeutet, dass die bedingten  $AVaR$ -Risikomaße auf der linken Seite der Ungleichung auf dem Ereignis  $B$  gegen das Worst-Case-Risikomaß konvergieren. Somit gilt (3.9) auch in diesem Fall.  $\square$

Nach Bemerkung 3.1.11 ist die Bedingung  $\mathcal{A}_{t+1} = \mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  notwendig dafür, dass  $\rho_t$  und  $\rho_{t+1}$  stark zeitkonsistent sind bzw. dass für alle  $X \in \mathcal{X}$  die rekursive Darstellung  $\rho_t(X) = \rho_t(-\rho_{t+1}(X))$  gilt. Wie das folgende Beispiel zeigt, lassen sich für das Average Value at Risk leicht Situationen konstruieren, in denen die Forderung der starken Zeitkonsistenz nicht erfüllt werden kann.

**Beispiel:** Wieder betrachten wir  $\rho_t = AVaR_\lambda$  mit einem Level  $0 < \lambda < 1$ , und wir nehmen an, dass der zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  groß genug ist, so dass paarweise disjunkte Teilmengen  $B_i \in \mathcal{F}$ ,  $i \leq n$ , mit  $0 < P(B_i) < 1 - \lambda$  ausgewählt werden können. Zusätzlich sei  $A \in \mathcal{F}$  ein Ereignis mit  $0 < P(A \cap B_i), P(A^c \cap B_i)$  für alle  $i \leq n$  und  $P(A) > 1 - \lambda$ . Wir setzen  $\mathcal{F}_{t+1} := \sigma(B_i, i \leq n)$ . Gibt es ein zugehöriges bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_{t+1}$ , so dass die starke Form der Zeitkonsistenz erfüllt ist? Bei dieser Informationsstruktur existiert ein solches  $\rho_{t+1}$  nicht. Nach Satz 3.1.32 und nach Bemerkung 3.1.31 wird nämlich durch  $\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$  das bedingte Worst-Case-Risikomaß  $\rho_{t+1}^{\text{worst}}$  erzeugt. Somit ist  $\rho_{t+1}^{\text{worst}}$  der einzige Kandidat für ein bedingtes konvexes Risikomaß, das in Bezug auf  $\rho_t$  stark zeitkonsistent ist. Jedoch gilt

$$\rho_t(X) = \frac{(1 - \lambda) - P(A)}{\lambda} < 0 = \rho_t(-\rho_{t+1}^{\text{worst}}(X)).$$

für das Auszahlungsprofil  $X = \mathbb{I}_A$ . ◇

**Bemerkung 3.1.33.** In [2], vgl. Abschnitt 6, ist ein weiteres Beispiel konstruiert, so dass für das Average Value at Risk kein zugehöriges bedingtes konvexes Risikomaß existiert, das die starke Zeitkonsistenz erfüllt. Dort wird nachgewiesen, dass die Menge  $\mathcal{Q}_\lambda$  im Allgemeinen nicht stabil ist.

## 3.2 Aktualisierung von konvexen Risikomaßen

### 3.2.1 Aktualisierungsvorschriften

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , wobei  $P$  wie gewöhnlich als Referenzmaß dienen soll, d. h., dass auch in diesem Abschnitt Ungleichungen und Gleichungen angewandt auf Zufallsvariablen im  $P$ -fast sicheren Sinne gemeint sind. Als Klasse aller Auszahlungsprofile wählen wir den Raum  $\mathcal{X} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Ein konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  soll nach dem Erhalt von neuer Information angepasst werden. Die Struktur der zusätzlichen Information wird durch eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  repräsentiert. Wir setzen  $\mathcal{X}_0 := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$  und bezeichnen mit  $\mathcal{R}_0 := \mathcal{R}_{\mathcal{F}_0}$  die zugehörige Klasse aller bezüglich  $\mathcal{F}_0$  bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$ .

**Definition 3.2.1.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß. Eine Aktualisierungsvorschrift für  $\rho$  ist eine Abbildung  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \mapsto \rho_{\mathcal{F}_0} \in \mathcal{R}_0$ , die jeder  $\sigma$ -Algebra ein bedingtes konvexes Risikomaß zuordnet, so dass  $\rho_{\{\emptyset, \Omega\}} = \rho$ .*

Eine Aktualisierungsvorschrift für ein konvexes Risikomaß ordnet jeder  $\sigma$ -Algebra ein bedingtes konvexes Risikomaß zu. Das bedeutet, dass wir die Informationsstruktur bzw. die Filtration, von der sie repräsentiert wird, im Voraus nicht festlegen.

Für jede Aktualisierungsvorschrift gilt  $\rho_{\mathcal{F}} = -\text{id}$ , da es bei voller Information nur dieses eine bedingte konvexe Risikomaß gibt. Deshalb nehmen wir an, dass es in  $\mathcal{F}$  mindestens drei disjunkte Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit unter  $P$  gibt. Ansonsten wäre die Aktualisierung eines jeden konvexen Risikomaßes trivial. Außerdem werden wir in Zukunft die Bezeichnung  $\rho_0$  statt  $\rho_{\mathcal{F}_0}$  benutzen.

**Bemerkung 3.2.2.** *In gleicher Weise können wir auch für ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  Aktualisierungsvorschriften definieren, wobei  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  die ursprünglich zur Verfügung stehende Information darstellt. Dies sind Abbildungen  $\mathcal{F}_1 \mapsto \rho_{\mathcal{F}_1} \in \mathcal{R}_1$  auf der Menge aller  $\sigma$ -Algebren mit  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ , so dass  $\rho_{\mathcal{F}_0} = \rho_0$ . Wir wollen uns jedoch auf die oben beschriebene einfache Situation konzentrieren.*

Wir diskutieren die Frage, inwiefern die zeitlich rückwärts gerichteten Bedingungen der Akzeptanzkonsistenz, die zur Konstruktion von dynamischen konvexen Risikomaße verwendet werden, auch als Aktualisierungskriterien geeignet sind. Dabei beschränken wir unsere Untersuchungen auf die starke und die schwache Form der Akzeptanzkonsistenz. Alternativ dazu betrachten wir die zeitlich vorwärts gerichtete Bedingung, nach welcher das bedingte konvexe Risikomaß als eine Konsequenz aus der ursprünglichen Risikobewertung und der eingehenden Information aufgefasst wird.

Im Fall der linearen Risikomaße der Form  $\rho(X) = \mathbb{E}_Q(-X)$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ , wobei  $Q \sim P$  ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß sei, stimmen die beiden Ansätze der rückwärts oder vorwärts gerichteten dynamischen Risikobewertung überein. Die bedingte Erwartung definiert eine Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  mit  $\rho_0(X) := \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0)$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ . Bei jeder Zusatzinformation sind  $\rho$  und  $\rho_0$  stark zeitkonsistent, und  $\rho_0$  kann als eine Konsequenz aus  $\rho$  und  $\mathcal{F}_0$  angesehen werden. Im allgemeinen konvexen Fall sind der rückwärts und der vorwärts gerichtete Ansatz nicht identisch.

Bei vorgegebener Information  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  charakterisiert das jeweilige Aktualisierungskriterium ein zugehöriges bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0$  nicht im-

mer eindeutig, sondern wird unter Umständen von einer ganzen Klasse von bedingten konvexen Risikomaßen erfüllt. Dann werden wir die Akzeptanzkriterien der in Betracht kommenden Risikomaße vergleichen. Wir benutzen dabei die folgende partielle Ordnung auf  $\mathcal{R}_0$ .

**Definition 3.2.3.** *Es seien  $\rho_0, \rho'_0 \in \mathcal{R}_0$  bedingte konvexe Risikomaße. Wir schreiben*

$$\rho_0 \preceq \rho'_0 \quad :\Leftrightarrow \quad \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}'_0. \quad (3.10)$$

*Ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0 \in \mathcal{R}'_0$  ist das kleinste Element einer Klasse  $\mathcal{R}'_0 \subset \mathcal{R}_0$ , falls  $\rho_0 \preceq \rho'_0$  für alle  $\rho'_0 \in \mathcal{R}'_0$ . Es heißt minimales Element, wenn für alle  $\rho'_0 \in \mathcal{R}'_0$  gilt:*

$$\rho'_0 \preceq \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}'_0 = \mathcal{A}_0.$$

*Die Definition des größten bzw. eines maximalen Elements von  $\mathcal{R}'_0$  ist analog.*

**Bemerkung 3.2.4.** *Es sei  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ . Für die Relation (3.10) gilt:*

(i) *Es ist  $\rho_0 \preceq \rho'_0$  genau dann, wenn  $\rho_0(X) \geq \rho'_0(X)$  für alle Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{X}$ . Das bedeutet, dass bei einer Risikobewertung durch  $\rho_0$  strengere Akzeptanzkriterien verwendet werden als bei einer Risikobewertung durch  $\rho'_0$ .*

(ii) *Das Worst-Case-Risikomaß  $\rho_0^{\text{worst}}$  mit*

$$\rho_0^{\text{worst}}(X) := \text{ess inf} \{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid X + X_0 \geq 0\} \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

*ist das kleinste Element der Klasse  $\mathcal{R}_0$ , denn  $\mathcal{A}_0^{\text{worst}} = \mathcal{X}_+$  ist für jedes  $\rho_0 \in \mathcal{R}_0$  eine Teilmenge der zugehörigen Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_0$ .*

(iii) *Jedes bedingte lineare Risikomaß  $\rho_0 \in \mathcal{R}_0$  der Form*

$$\rho_0(X) := \mathbb{E}_Q(-X \mid \mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

*mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  ist ein maximales Element. Falls nämlich  $\rho'_0 \in \mathcal{R}_0$  ein bedingtes konvexes Risikomaß ist, so dass  $\rho_0 \preceq \rho'_0$ , dann folgt aus der Konvexität von  $\rho'_0$*

$$-\mathbb{E}_Q(X \mid \mathcal{F}_0) \leq -\rho'_0(-X) \leq \rho'_0(X) \leq \mathbb{E}_Q(-X \mid \mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

*also die Gleichheit von  $\rho_0$  und  $\rho'_0$ .*

(iv) Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß und  $\mathcal{R}'_0 \subset \mathcal{R}_0$ . Angenommen,  $\rho_0 \in \mathcal{R}'_0$  ist das größte (kleinste) Element dieser Klasse. Aus der Monotonie von  $\rho$  folgt für alle  $\rho'_0 \in \mathcal{R}'_0$

$$\rho(X + \rho_0(X)) \geq (\leq) \rho(X + \rho'_0(X)) \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.11)$$

Falls  $\rho$  sogar streng monoton ist im Sinne, dass  $\rho(X) > \rho(Y)$  für alle  $X \leq Y$  mit  $P(X < Y) > 0$ , dann ist umgekehrt jedes bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0$  das größte (kleinste) Element der zugehörigen Klasse  $\mathcal{R}'_0$  aller bedingten konvexen Risikomaße  $\rho'_0 \in \mathcal{R}_0$ , die die Ungleichung (3.11) erfüllen.

Diese Beziehung charakterisiert z. B. ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0 \in \mathcal{R}_0$ , das in Bezug auf  $\rho$  sowohl schwach akzeptanz- als auch schwach ablehnungskonsistent ist. Es gilt nämlich nach Korollar 3.1.8 und Theorem 3.1.5:

$$\rho(X + \rho_0(X)) = 0 \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Demnach ist  $\rho_0$  das größte Element innerhalb der Klasse der bezüglich  $\rho$  schwach akzeptanzkonsistenten bedingten konvexen Risikomaße und das kleinste Element der Klasse der schwach ablehnungskonsistenten bedingten konvexen Risikomaße.

Um Aktualisierungsvorschriften für ein konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  zu beschreiben, werden wir häufig davon ausgehen, dass  $\rho$  stetig von oben ist und eine robuste Darstellung durch äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße besitzt, d. h., dass

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \sim P\} \quad \forall X \in \mathcal{X}, \quad (3.12)$$

wobei  $\alpha_{\min}$  die minimale Penalty-Funktion bezeichnet. Wir verweisen auf das Kapitel 1, wo wir erläutert haben, unter welchen Bedingungen eine solche Darstellung existiert. Wegen der Normiertheit von  $\rho$  gilt:

$$\inf_{Q \sim P} \alpha_{\min}(Q) = 0.$$

Für unsere Zwecke ist es häufig sehr hilfreich anzunehmen, dass das Infimum tatsächlich erreicht wird, d. h., dass ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, das unter der minimalen Penalty-Funktion nicht bestraft wird:

$$\exists Q \sim P \quad \text{mit} \quad \alpha_{\min}(Q) = 0. \quad (3.13)$$

**Beispiel:** Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein *robustes Shortfall-Risikomaß* mit einer streng monoton wachsenden und konvexen Verlustfunktion  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und einer Menge  $\mathcal{Q}$  von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $Q \sim P$ . Das heißt, dass die Akzeptanzmenge von  $\rho$  gegeben ist durch

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(l(-X)) \leq x \ \forall Q \in \mathcal{Q}\},$$

wobei  $x := l(0)$ . Da  $\rho$  stetig von oben ist, besitzt es nach Theorem 1.1.12 eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_1(P)$ . Für weitere Details verweisen wir auf [21], Abschnitt 4.9. Nach der Ungleichung von Jensen gilt für alle akzeptablen Auszahlungsprofile  $X \in \mathcal{A}$

$$l(\mathbb{E}_Q(-X)) \leq \mathbb{E}_Q(l(-X)) \leq x \quad \forall Q \in \mathcal{Q}.$$

Demnach haben wir für alle  $Q \in \mathcal{Q}$

$$0 \leq \alpha_{\min}(Q) = \sup_{X \in \mathcal{A}} \mathbb{E}_Q(-X) \leq l^{-1}(x) = 0.$$

Nach Lemma 1.1.14 erlaubt  $\rho$  also auch eine robuste Darstellung auf  $\mathcal{M}_e(P)$  wie in (3.12). Außerdem werden die probabilistischen Modelle der Menge  $\mathcal{Q}$  unter der minimalen Penalty-Funktion nicht bestraft.  $\diamond$

### 3.2.2 Starke Zeitkonsistenz als Aktualisierungskriterium

In diesem Abschnitt untersuchen wir, inwiefern die Bedingung der starken Zeitkonsistenz als Aktualisierungskriterium verwendet werden kann. Wir betrachten ein konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ . Gibt es eine Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  derart, dass  $\rho$  und  $\rho_0$  stets stark zeitkonsistent sind bzw. dass die folgende Rekursionsformel erfüllt ist:

$$\rho(X) = \rho(-\rho_0(X)) \quad \forall X \in \mathcal{X} \quad \forall \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} ?$$

Für weitere äquivalente Charakterisierungen der starken Zeitkonsistenz verweisen wir auf das Korollar 3.1.6.

#### Eindeutigkeit einer Aktualisierungsvorschrift und Beispiele

**Bemerkung 3.2.5.** *Es seien  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß mit einer robusten Darstellung wie in (3.12) und (3.13),  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  beliebig und  $\rho_0 \in \mathcal{R}_0$*

ein bedingtes konvexes Risikomaß, so dass  $\rho$  und  $\rho_0$  stark zeitkonsistent sind. Nach Bemerkung 1.1.15 erfüllt  $\rho$  die Sensitivitätsbedingung aus Bemerkung 3.1.11, und nach letzterer ist die Akzeptanzmenge von  $\rho_0$  gegeben durch

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(\mathcal{F}_0).$$

Diese Gleichheit ist notwendig jedoch nicht hinreichend für die starke Zeitkonsistenz von  $\rho$  und  $\rho_0$ . Zu jeder  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  gibt es demnach höchstens ein bedingtes konvexes Risikomaß, das diesem Aktualisierungskriterium genügt.

Es gibt drei Standardbeispiele für konvexe Risikomaße, die bei jeder zusätzlichen Information stark zeitkonsistent aktualisiert werden können, das Worst-Case-Risikomaß, die linearen und die entropischen Risikomaße.

**Beispiel:** Das *Worst-Case-Risikomaß* ist definiert als

$$\rho^{\text{worst}}(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} \mid X + m \geq 0\} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Wir betrachten die Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0^{\text{worst}} \in \mathcal{R}_0$ , wobei die bedingte Version des Worst-Case-Risikomaßes analog gegeben ist durch

$$\rho_0^{\text{worst}}(X) := \text{ess inf}\{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid X + X_0 \geq 0\} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  haben wir  $\mathcal{A}^{\text{worst}} = \mathcal{A}_0^{\text{worst}} = \mathcal{X}_+$ . Nach Bedingung (e) des Korollars 3.1.6 sind  $\rho^{\text{worst}}$  und  $\rho_0^{\text{worst}}$  also stark zeitkonsistent.  $\diamond$

**Beispiel:** Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein *lineares* Risikomaß, gegeben durch ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$ , d. h., dass

$$\rho(X) = \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Die bedingte Erwartung definiert eine kanonische Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  für  $\rho$  mit

$$\rho_0(X) := \mathbb{E}_Q(-X | \mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Natürlich sind  $\rho$  und  $\rho_0$  stets stark zeitkonsistent.  $\diamond$

**Beispiel:** Wir fixieren einen Parameter  $\beta > 0$  und ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$ . Das zugehörige *entropische* Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$\rho(X) := \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_Q(e^{-\beta X}) \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.14)$$

Die Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  mit

$$\rho_0(X) := \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_Q (e^{-\beta X} | \mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

ist wohldefiniert. Die konvexen Risikomaße  $\rho$  und  $\rho_0$  sind stark zeitkonsistent, denn es gilt die Bedingung (d) des Korollars 3.1.6.  $\diamond$

**Bemerkung 3.2.6.** *Die linearen und die entropischen Risikomaße gehören zur Klasse der Shortfall-Risikomaße, d. h., ihre Akzeptanzmengen sind von der Form*

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(l(-X)) \leq x\}.$$

*Dabei sei  $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe und monoton wachsende Verlustfunktion,  $x := l(0)$  und  $Q \sim P$  ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Lineare Risikomaße entsprechen einer linearen und entropische Risikomaße einer exponentiellen Verlustfunktion. Für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  ist das zugehörige bedingte Shortfall-Risikomaß durch die Akzeptanzmenge*

$$\mathcal{A}_0 = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(l(-X) | \mathcal{F}_0) \leq x\}$$

*gegeben. Die durch  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{A}_0$  induzierten Shortfall-Risikomaße  $\rho$  und  $\rho_0$  sind schwach akzeptanz- und ablehnungskonsistent, vgl. dazu Korollar 3.1.27 und Bemerkung 3.1.30.*

*Die Eigenschaft der starken Zeitkonsistenz gilt jedoch im Allgemeinen nicht, was durch das Beispiel 3.5 von [34] belegt wird: Wir betrachten die konvexe Verlustfunktion  $l(y) = (y + \varepsilon)^+$  für ein  $0 < \varepsilon < 1/4$  sowie zwei Auszahlungsprofile  $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$  mit  $Q(X_i = 0) = Q(X_i = 1) = 1/2$ ,  $i = 1, 2$ . Weiter sei angenommen, dass  $X_1$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$  ist und  $X_2$  unabhängig von  $\mathcal{F}_0$ . Wir setzen  $X := -X_1 \cdot X_2$  und erhalten für die durch  $l$  induzierten Shortfall-Risikomaße die Beziehungen  $\rho(X) = 1 - 3\varepsilon$ ,  $\rho_0(X) = (1 - \varepsilon)X_1$  und  $\rho(-\rho_0(X)) = 1 - 2\varepsilon$ .*

### Notwendige Bedingung für die Existenz einer Aktualisierungsvorschrift

Das folgende Theorem liefert eine weitere notwendige Bedingung für konvexe Risikomaße, die bei jeder Zusatzinformation stark zeitkonsistent aktualisiert werden können. Unter gewissen Stetigkeits- und Monotoniebedingungen zeigen wir, dass ein konvexes Risikomaß, das eine solche Aktualisierungsvorschrift erlaubt, nur von seinen Werten auf einfachen Auszahlungsprofilen der

Form  $x\mathbb{I}_A$  abhängt. Dies lässt bereits vermuten, dass die starke Zeitkonsistenz als Aktualisierungskriterium für konvexe Risikomaße ungeeignet ist.

Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß, das eine robuste Darstellung wie in (3.12) und (3.13) erlaubt. Für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  gilt:

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(-\varepsilon\mathbb{I}_A) > 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (3.15)$$

Man vergleiche auch die Diskussion zur Existenz einer robusten Darstellung von konvexen Risikomaßen durch äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße im Kapitel 1. Im folgenden Theorem fordern wir, dass für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  die etwas stärkere Monotoniebedingung

$$P(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(x\mathbb{I}_A) > \rho(y\mathbb{I}_A) \quad \forall x < y \leq 0 \quad (3.16)$$

erfüllt ist. Unter der Annahme von positiver Homogenität sind (3.15) und (3.16) äquivalent.

**Theorem 3.2.7.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß, das eine robuste Darstellung wie in (3.12) und (3.13) erlaubt und der Bedingung (3.16) genügt. Falls eine Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  für  $\rho$  existiert, so dass  $\rho$  und  $\rho_0$  stets stark zeitkonsistent sind, dann gilt:*

- (i)  $\rho$  ist eindeutig durch seine Werte auf der Menge der einfachen Auszahlungsprofile  $\{x\mathbb{I}_A \mid x \in (-\infty, 0], A \in \mathcal{F}\}$  bestimmt.
- (ii) Für disjunkte Ereignisse  $A, B \in \mathcal{F}$  mit  $P(A), P(B), P((A \cup B)^c) > 0$  und für alle Konstanten  $x, y, s, t \in \mathbb{R}$  ist

$$\rho(x\mathbb{I}_A + y\mathbb{I}_{A^c}) = \rho(s\mathbb{I}_B + t\mathbb{I}_{B^c}),$$

falls es Konstanten  $\alpha, \beta \leq 0$  gibt, so dass

- $\rho(t\mathbb{I}_{B^c}) = \rho(x\mathbb{I}_A + \alpha\mathbb{I}_{A^c})$ ,
- $\rho(y\mathbb{I}_{A^c}) = \rho(s\mathbb{I}_B + \beta\mathbb{I}_{B^c})$ ,
- $\rho(\alpha\mathbb{I}_{A^c}) = \rho(\beta\mathbb{I}_{B^c})$ .

**Beweis:** Zunächst fixieren wir ein beliebiges Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  mit  $P(A) > 0$  und betrachten die Abbildung  $x \mapsto \rho(x\mathbb{I}_A)$ . Diese ist konvex, Lipschitz-stetig und wegen der Bedingung (3.16) auch streng monoton fallend auf  $(-\infty, 0]$ . Außerdem gilt  $|x|\rho(-\mathbb{I}_A) \leq \rho(x\mathbb{I}_A)$  für alle  $x \leq -1$ . Demnach konvergiert  $\rho(x\mathbb{I}_A)$  gegen  $+\infty$ , wenn  $x$  gegen  $-\infty$  strebt. Für jedes  $y \geq 0$  besitzt also die Gleichung

$$\rho(x\mathbb{I}_A) = y \quad (3.17)$$

eine eindeutige Lösung  $x \leq 0$ .

Nun sei  $X \in \mathcal{X}$  ein beliebiges Auszahlungsprofil. Wir wählen  $\mathcal{F}_0 := \sigma(A)$ , und dann liefert die Aktualisierungsvorschrift ein zugehöriges bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0$ . Wir bezeichnen mit  $\rho_A(X)$  den konstanten Wert von  $\rho_0(X)$  auf der Menge  $A$ . Aufgrund der starken Zeitkonsistenz von  $\rho$  und  $\rho_0$ , löst  $\rho_A(X)$  die Gleichung

$$\rho(X\mathbb{I}_A) = \rho(-x\mathbb{I}_A), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für alle  $X \leq 0$  ist diese Lösung eindeutig.

Um Teil (i) zu beweisen, zeigen wir, dass für jede Treppenfunktion  $X$  das Risiko  $\rho(X)$  durch Lösen von Gleichungen des Typs (3.17) berechnet werden kann. Da ein relevantes konvexes Risikomaß stetig von oben ist, erhält man das Risiko beliebiger Auszahlungsprofile danach durch Approximation von oben. Nehmen wir also ein Auszahlungsprofil

$$X = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \mathbb{I}_{A_i},$$

wobei  $\{A_i\}_{i \leq n+1} \subset \mathcal{F}$  eine endliche Partition von  $\Omega$  ist und  $x_i \in \mathbb{R}$  für  $i \leq n+1$ . Wegen der Translationsinvarianz können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $x_i \leq x_{n+1} = 0$  für alle  $i \leq n$ . Für  $k = 1, \dots, n$  setzen wir

$$X^k := \sum_{i=1}^k x_i \mathbb{I}_{A_i} \quad \text{und} \quad y_k := \rho(X^k) \geq 0.$$

Offenbar ist  $X^n = X$  und  $y_n = \rho(X)$ . Zu jedem Index  $k \leq n$  gibt es genau ein  $x \leq 0$ , das die folgende Gleichung löst:

$$\rho(x\mathbb{I}_{A_{k+1}^c}) = y_k.$$

Aus der starken Zeitkonsistenz bezüglich  $\mathcal{F}_0 := \sigma(A_{k+1})$  folgt, dass

$$x = -\rho_{A_{k+1}^c}(X^{k+1}).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= \rho(-\rho_{A_{k+1}^c}(X^{k+1})\mathbb{I}_{A_{k+1}^c} + x_{k+1}\mathbb{I}_{A_{k+1}}) \\ &= \rho((x - x_{k+1})\mathbb{I}_{A_{k+1}^c}) - x_{k+1}. \end{aligned}$$

Der Startwert  $y_1$  ist gegeben. Wir wiederholen diese Berechnungen bis  $k = n$  und haben damit den ersten Teil des Theorems bewiesen.

Wir zeigen nun Teil (ii) des Theorems. Es seien  $A, B \in \mathcal{F}$  disjunkte Ereignisse,  $x, y, s, t \in \mathbb{R}$  und  $\alpha, \beta \leq 0$  Konstanten, so dass die drei aufgelisteten Bedingungen erfüllt sind. Der Einfachheit halber setzen wir  $C := (A \cup B)^c$ . Nach Voraussetzung hat dieses Ereignis positive Wahrscheinlichkeit unter  $P$ .

Es existiert eine Konstante  $\gamma \leq 0$  derart, dass

$$\rho(\alpha \mathbb{I}_{A^c}) = \rho(\beta \mathbb{I}_{B^c}) = \rho(\gamma \mathbb{I}_C),$$

das bedeutet, dass

$$\alpha = -\rho_{A^c}(\gamma \mathbb{I}_C) \quad \text{und} \quad \beta = -\rho_{B^c}(\gamma \mathbb{I}_C).$$

Mit der Konstante definieren wir das Auszahlungsprofil  $X := x \mathbb{I}_A + s \mathbb{I}_B + \gamma \mathbb{I}_C$ . Aus der starken Zeitkonsistenz von  $\rho$  bezüglich der beiden durch  $A$  bzw.  $B$  erzeugten  $\sigma$ -Algebren erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \rho(x \mathbb{I}_A - \rho_{A^c}(X) \mathbb{I}_{A^c}) \\ &= \rho(s \mathbb{I}_B - \rho_{B^c}(X) \mathbb{I}_{B^c}). \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn  $y = -\rho_{A^c}(X)$  und  $t = -\rho_{B^c}(X)$ . Tatsächlich haben wir wegen der starken Zeitkonsistenz bezüglich  $\mathcal{F}_0 := \sigma(B)$  und nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \rho(X \mathbb{I}_{A^c}) &= \rho(s \mathbb{I}_B + \gamma \mathbb{I}_C) \\ &= \rho(s \mathbb{I}_B - \rho_{B^c}(\gamma \mathbb{I}_C) \mathbb{I}_{B^c}) \\ &= \rho(s \mathbb{I}_B + \beta \mathbb{I}_{B^c}) \\ &= \rho(y \mathbb{I}_{A^c}). \end{aligned}$$

Den anderen Fall behandelt man analog. □

Aus den in Theorem 3.2.7 genannten notwendigen Bedingungen für die Existenz einer stark zeitkonsistenten Aktualisierungsvorschrift ergeben sich weitere Fragen, die wir im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht beantworten können. So wäre es interessant zu erfahren, ob es ausgehend von einer Risikobewertung auf den einfachen Funktionen vom Typ  $x \mathbb{I}_A$  möglich ist, ein zugehöriges konvexes Risikomaß auf  $\mathcal{X}$  zu definieren, das stets stark zeitkonsistent aktualisiert werden kann.

**Bemerkung 3.2.8.** *Wir betrachten eine Abbildung*

$$(x, A) \in (-\infty, 0] \times \mathcal{F} \mapsto \rho(x \mathbb{I}_A) \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

so dass für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  die Funktion  $x \mapsto \rho(x\mathbb{I}_A)$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1 ist, konvex, streng monoton fallend und normiert auf  $\rho(0\mathbb{I}_A) = 0$ . Außerdem sei  $\lim \rho(x\mathbb{I}_A) = +\infty$ , falls  $x \rightarrow -\infty$ .

Diese Abbildung induziert ein monetäres Risikomaß auf der Klasse aller Auszahlungsprofile der Form  $X = x\mathbb{I}_A + y\mathbb{I}_{A^c}$  mit  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $A \in \mathcal{F}$ , und zwar durch

$$\rho(X) := \begin{cases} \rho((x - y)\mathbb{I}_A) - y, & \text{falls } x \leq y, \\ \rho((y - x)\mathbb{I}_{A^c}) - x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Angenommen, der Zustandsraum  $\Omega$  ist endlich. Zusätzlich fordern wir, dass  $\rho$  die Konsistenzbedingung in Theorem 3.2.7 (ii) erfüllt. Dann können wir  $\rho$  induktiv – wie im Beweis des Theorems beschrieben – zu einem monetären Risikomaß auf  $\mathcal{X}$  fortsetzen, so dass es bei jeder Information stark zeitkonsistent aktualisiert werden kann. Die Konsistenzbedingung wird benötigt, um die Wohldefiniertheit des Funktionals zu beweisen.

Bislang konnten wir nicht ermitteln, welchen Bedingungen die Abbildung (3.18) genügen muss, damit auf diese Weise ein konvexes Risikomaß induziert wird. Um auf die Annahme eines endlichen Zustandsraums verzichten zu können, müssen außerdem noch Eigenschaften der Abbildung untersucht werden, die die Stetigkeit von oben garantieren.

Eine andere Frage, die sich stellt, betrifft die Klasse der Shortfall-Risikomaße. Gibt es außer den exponentiellen oder linearen Verlustfunktionen noch andere, die ein konvexes Risikomaß induzieren, das stets stark zeitkonsistent aktualisiert werden kann oder zumindest die notwendige Bedingung aus Theorem 3.2.7 (ii) erfüllt? Wir vermuten, dass dies nicht der Fall ist.

### Existenz einer Aktualisierungsvorschrift im kohärenten Fall

Im vorherigen Abschnitt hatten wir für das Beispiel des Average Value at Risk bereits nachgewiesen, dass die Bedingung der starken Zeitkonsistenz bei einer hinreichend feinen Informationsstruktur nicht erfüllt werden kann. Für dieses kohärente Risikomaß existiert demnach im Allgemeinen keine stark zeitkonsistente Aktualisierungsvorschrift. Um unsere Überlegungen zur starken Zeitkonsistenz abzuschließen, betrachten wir nun die Klasse der kohärenten Risikomaße, die der folgenden Zusatzbedingung genügen:

$$P(A) > 0, \quad A \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \rho(\mathbb{I}_A) < 0. \quad (3.19)$$

Wir werden zeigen, dass auch hier die starke Zeitkonsistenz kein geeignetes Aktualisierungskriterium ist. Man beachte, dass für ein kohärentes Risikomaß

$\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , das (3.19) erfüllt, auch die Implikationen in (3.15) und (3.16) gültig sind, denn für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  mit positiver Wahrscheinlichkeit  $P(A) > 0$  haben wir:

$$0 < -\rho(\mathbb{I}_A) \leq \rho(-\mathbb{I}_A).$$

Das folgende Theorem ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von [41] im Kontext der Nutzentheorie, welcher besagt, dass für das Choquet-Integral bezüglich einer Kapazität  $c : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  auf einem endlichen Zustandsraum das „Iterative Gesetz der Erwartung“ nur dann gilt, wenn  $c$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  ist:

$$\mathbb{E}_c(\mathbb{E}_c(X|\mathcal{F}_0)) = \mathbb{E}_c(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}, \forall \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F} \quad \Leftrightarrow \quad c \in \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F}).$$

Das bedeutet, für ein nicht-lineares komonotones Risikomaß  $\rho(X) := -\mathbb{E}_c(X)$  kann keine Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 := -\mathbb{E}_c(\cdot|\mathcal{F}_0) \in \mathcal{R}_0$  über die starke Zeitkonsistenz definiert werden. In unserem Theorem verzichten wir auf die Forderung der Additivität auf komonotonen Funktionen und auf die Voraussetzung eines endlichen Zustandsraums.

**Theorem 3.2.9.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein kohärentes Risikomaß, so dass (3.19) erfüllt ist, und  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  eine Aktualisierungsvorschrift für  $\rho$ . Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

- (a) *Für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  sind  $\rho$  und  $\rho_0$  stark zeitkonsistent.*
- (b)  *$\rho$  ist linear, und jede Aktualisierung  $\rho_0$  ist durch die bedingte Erwartung gegeben.*

**Beweis:** Die Implikation von (b) nach (a) ist klar. Es sei umgekehrt  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  eine Aktualisierungsvorschrift, so dass  $\rho$  und  $\rho_0$  stets stark zeitkonsistent sind. Da  $\rho$  ein kohärentes Risikomaß ist, das insbesondere die Bedingung (3.16) erfüllt, genügt es nach Theorem 3.2.7 zu zeigen, dass durch

$$Q(A) := \rho(-\mathbb{I}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  definiert wird, das äquivalent zu  $P$  ist.  $Q$  ist eine monotone, subadditive und von unten stetige Mengenfunktion, die auf  $Q(\emptyset) = 0$  und  $Q(\Omega) = 1$  normiert ist. Außerdem gilt  $Q(A) = 0$  genau dann, wenn  $P(A) = 0$ . Es reicht demnach aus, die Additivität bzw. Superadditivität von  $Q$  nachzuweisen. Wir zeigen, dass

$$\rho(-\mathbb{I}_A) = -\rho(\mathbb{I}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}, \tag{3.20}$$

denn dann gilt für zwei disjunkte Mengen  $A, B \in \mathcal{F}$

$$Q(A) + Q(B) = -\rho(\mathbb{I}_A) - \rho(\mathbb{I}_B) \leq -\rho(\mathbb{I}_{A \cup B}) = Q(A \cup B).$$

Um (3.20) zu beweisen, fixieren wir ein beliebig gewähltes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  und setzen  $\mathcal{F}_0 := \sigma(A)$ . Wir nehmen an, dass  $0 < P(A) < 1$ , ansonsten wäre (3.20) offensichtlich. Die Aktualisierungsvorschrift liefert ein zugehöriges bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0$ . Für  $X \in \mathcal{X}$  bezeichnen wir mit  $\rho_A(X)$  den konstanten Wert von  $\rho_0(X)$  auf der Menge  $A$ . Aus der starken Zeitkonsistenz und der positiven Homogenität folgt

$$\rho(X\mathbb{I}_A) = \rho(-\rho_A(X)\mathbb{I}_A) = \rho_A(X)\rho(-\mathbb{I}_A) \quad \forall X \in \mathcal{X}, X \leq 0.$$

Da  $\rho(-\mathbb{I}_A) > 0$  ist, gilt für nicht-positive Auszahlungsprofile

$$\rho_A(X) = \frac{\rho(X\mathbb{I}_A)}{\rho(-\mathbb{I}_A)}. \quad (3.21)$$

Wegen der Bedingung (3.19) können wir eine Partition  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  wählen, so dass  $\rho(\mathbb{I}_{A_i}) < 0$  für alle  $i \leq 3$  und so dass das oben fixierte Ereignis  $A$  in der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{G} := \sigma(A_i, i \leq 3)$  enthalten ist. Für  $i \neq j$  definieren wir

$$X_\beta^{ij} := -\mathbb{I}_{A_i} - \beta\mathbb{I}_{A_j},$$

wobei der Parameter  $\beta > 1$  hinreichend groß sei, damit wir in den beiden folgenden Berechnungen die positive Homogenität von  $\rho$  ausnutzen können. Aus der starken Zeitkonsistenz bezüglich der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 := \sigma(A_i)$  und aus (3.21) erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho(X_\beta^{ij}) &= \rho(-\rho_{A_i}(X_\beta^{ij})\mathbb{I}_{A_i} - \rho_{A_i^c}(X_\beta^{ij})\mathbb{I}_{A_i^c}) \\ &= \rho\left(-\mathbb{I}_{A_i} - \mathbb{I}_{A_i^c} \frac{\beta\rho(-\mathbb{I}_{A_j})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_i^c})}\right) \\ &= \rho\left(\left[\frac{\beta\rho(-\mathbb{I}_{A_j})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_i^c})} - 1\right]\mathbb{I}_{A_i}\right) + \frac{\beta\rho(-\mathbb{I}_{A_j})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_i^c})} \\ &= -\rho(\mathbb{I}_{A_i}) + \beta\rho(-\mathbb{I}_{A_j}) \left[\frac{\rho(\mathbb{I}_{A_i}) + 1}{\rho(-\mathbb{I}_{A_i^c})}\right] \\ &= -\rho(\mathbb{I}_{A_i}) + \beta\rho(-\mathbb{I}_{A_j}). \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus der starken Zeitkonsistenz bezüglich  $\mathcal{F}_0 := \sigma(A_j)$

$$\begin{aligned}
 \rho(X_\beta^{ij}) &= \rho(-\rho_{A_j}(X_\beta^{ij})\mathbb{I}_{A_j} - \rho_{A_j^c}(X_\beta^{ij})\mathbb{I}_{A_j^c}) \\
 &= \rho\left(-\beta\mathbb{I}_{A_j} - \mathbb{I}_{A_j^c}\frac{\rho(-\mathbb{I}_{A_i})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_j^c})}\right) \\
 &= \rho\left(-\left[\beta - \frac{\rho(-\mathbb{I}_{A_i})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_j^c})}\right]\mathbb{I}_{A_j}\right) + \frac{\rho(-\mathbb{I}_{A_i})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_j^c})} \\
 &= -\rho(-\mathbb{I}_{A_i})\left[\frac{\rho(-\mathbb{I}_{A_j}) - 1}{\rho(-\mathbb{I}_{A_j^c})}\right] + \beta\rho(-\mathbb{I}_{A_j}) \\
 &= -\rho(-\mathbb{I}_{A_i})\frac{\rho(\mathbb{I}_{A_j^c})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_j^c})} + \beta\rho(-\mathbb{I}_{A_j}).
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{\rho(\mathbb{I}_{A_i})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_i})} = \frac{\rho(\mathbb{I}_{A_j^c})}{\rho(-\mathbb{I}_{A_j^c})}.$$

Da wir  $i$  und  $j$  beliebig gewählt haben, folgt daraus, dass

$$0 > \frac{\rho(\mathbb{I}_B)}{\rho(-\mathbb{I}_B)} = K \geq -1 \quad \forall B \in \mathcal{G} \setminus \{\emptyset, \Omega\}. \quad (3.22)$$

Insbesondere nimmt dieses Verhältnis für das fixierte Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  den Wert  $K$  an. Es bleibt zu zeigen, dass  $K = -1$  ist.

Die Einschränkung von  $\rho$  auf die Menge aller beschränkten und  $\mathcal{G}$ -messbaren Funktionen ist ein kohärentes Risikomaß und streng monoton im Sinne der Bedingung (3.16). Es besitzt eine robuste Darstellung durch äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße, d. h., dass eine konvexe Menge

$$\mathcal{Q} = \{(p, q, 1 - p - q) \mid p \in [a, b], q \in [c, d]\}$$

existiert derart, dass

$$\rho(X) = \sup_{\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathcal{Q}}(-X) \quad \forall X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P).$$

Wegen (3.19) haben wir  $0 < a \leq b$  und  $0 < c \leq d$ . Setzen wir  $e := 1 - b - d$  und  $f := 1 - a - c$ , dann ist  $0 < e \leq f$ . (3.22) angewandt auf die Mengen  $B = A_i$ ,  $i \leq 3$ , liefert  $a = -Kb$ ,  $c = -Kd$  und  $e = -Kf$ . Demzufolge ist

$$(1 - K^2)(b + d) = 1 + K.$$

Mit (3.22) und  $B = A_2 \cup A_3$  erhalten wir andererseits

$$(1 - K^2)b = 1 + K.$$

Wäre  $K > -1$ , dann müsste gelten, dass  $b+d = b$  ist. Dies ist ein Widerspruch zur Bedingung (3.19), darum folgt  $K = -1$ .  $\square$

### 3.2.3 Schwache Akzeptanzkonsistenz als Aktualisierungskriterium

In diesem Abschnitt verwenden wir die Akzeptanzkonsistenz in ihrer schwachen Form als Aktualisierungskriterium. Das heißt, für ein konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  untersuchen wir Aktualisierungsvorschriften  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  derart, dass

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \quad \forall \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}. \quad (3.23)$$

Für weitere äquivalente Charakterisierungen der schwachen Akzeptanzkonsistenz verweisen wir auf das Korollar 3.1.8.

#### Existenz und Eindeutigkeit einer Aktualisierungsvorschrift

Jedes konvexe Risikomaß kann auf mindestens eine Weise schwach akzeptanzkonsistent aktualisiert werden. Häufig gibt es jedoch mehrere mögliche Aktualisierungsvorschriften, die der Bedingung (3.23) genügen.

**Beispiel:** Für ein beliebiges konvexes Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  betrachten wir die triviale *Worst-Case-Aktualisierungsvorschrift*  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0^{\text{worst}} \in \mathcal{R}_0$  mit

$$\rho_0^{\text{worst}}(X) := \text{ess inf} \{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid X + X_0 \geq 0\} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Wählen wir  $X \in \mathcal{X}$  und  $m \in \mathbb{R}$ , so ist  $\rho_0^{\text{worst}}(X) \leq m$  genau dann, wenn  $X \geq -m$ . Wegen Monotonie und Translationsinvarianz von  $\rho$  folgt  $\rho(X) \leq \rho(-m) = m$ . Demnach sind  $\rho$  und  $\rho_0^{\text{worst}}$  schwach akzeptanzkonsistent.  $\diamond$

**Beispiel:** Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß, das stetig von oben ist und eine robuste Darstellung durch äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße erlaubt, d. h., dass

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \mid Q \sim P\} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wobei  $\alpha$  eine geeignete Penalty-Funktion auf  $\mathcal{M}_e(P)$  ist. Wir betrachten nun die durch  $\alpha$  induzierte Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  mit

$$\rho_0(X) := \text{ess sup} \{ \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) - \alpha(Q) \mid Q \sim P \} \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Falls  $\rho_0(X) \leq m \in \mathbb{R}$ , dann gilt  $\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) - \alpha(Q) \leq m$  für alle  $Q \sim P$ . Insbesondere ist  $\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha(Q) \leq m$ , und wir erhalten  $\rho(X) \leq m$ . Das bedeutet, dass  $\rho$  und  $\rho_0$  schwach akzeptanzkonsistent sind.  $\diamond$

Wie diese Beispiele zeigen, charakterisiert die Forderung der schwachen Akzeptanzkonsistenz ein zugehöriges bedingtes konvexes Risikomaß nicht eindeutig. Außerdem sind beide vorgestellten Aktualisierungsvorschriften aus ökonomischer Sicht wenig plausibel. Warum sollten die Kriterien für die Akzeptanz von Risiken wie im Fall der Worst-Case-Aktualisierung durch den Erhalt zusätzlicher Information grundlegend verschärft werden? Die Aktualisierungsmethode des zweiten Beispiels ist ebenfalls fragwürdig. Zum einen hängt sie von der Wahl der Penalty-Funktion ab. Außerdem spiegelt die Penalty-Funktion unsere Unsicherheit gegenüber dem zugrunde liegenden probabilistischen Modell wider. Da sich diese Unsicherheit in Abhängigkeit der zur Verfügung stehenden Information verändern kann, erscheint auch eine Aktualisierung der Penalty-Funktion notwendig.

### Notwendige Bedingung für die Existenz einer optimalen Aktualisierungsvorschrift

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden wir bei einer fixierten Informationsstruktur versuchen, innerhalb der Klasse der schwach akzeptanzkonsistenten Aktualisierungen eines konvexen Risikomaßes diejenige zu bestimmen, die die mildesten Akzeptanzkriterien verwendet, die maximal im Sinne der partiellen Ordnung (3.10) ist. Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß und  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  eine beliebige  $\sigma$ -Algebra. Mit

$$\mathcal{R}_0^- := \{ \rho_0 \in \mathcal{R}_0 \mid \rho \text{ und } \rho_0 \text{ sind schwach akzeptanzkonsistent} \}$$

bezeichnen wir die zugehörige Klasse aller bedingten konvexen Risikomaße, die nach dem Kriterium der schwachen Akzeptanzkonsistenz als eine Aktualisierung von  $\rho$  nach dem Erhalt der Information  $\mathcal{F}_0$  in Frage kommen. Der Pfeil soll dabei andeuten, dass es sich bei dieser Konsistenzbedingung um einen zeitlich rückwärts gerichteten Ansatz der dynamischen Risikobewertung handelt. Im Sinne der partiellen Ordnung (3.10) gilt für zwei bedingte

konvexe Risikomaße:

$$\rho'_0 \preceq \rho_0 \quad \text{und} \quad \rho_0 \in \mathcal{R}_0^{\leftarrow} \quad \Rightarrow \quad \rho'_0 \in \mathcal{R}_0^{\leftarrow}.$$

Das kleinste Element der Klasse  $\mathcal{R}_0^{\leftarrow}$  ist das bedingte Worst-Case-Risikomaß.

**Bemerkung 3.2.10.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß und  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ .*

(i) *Angenommen,  $\rho$  ist streng monoton, d. h., dass  $\rho(X) > \rho(Y)$  für alle  $X \leq Y$  mit  $P(X > Y) > 0$ . Gibt es ein  $\rho_0^* \in \mathcal{R}_0^{\leftarrow}$ , so dass  $\rho$  und  $\rho_0^*$  auch schwach ablehnungskonsistent sind, also  $\rho(X + \rho_0^*(X)) = 0$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ , dann ist  $\rho_0^*$  nach Bemerkung 3.2.4 (iv) das größte Element von  $\mathcal{R}_0^{\leftarrow}$ .*

(ii) *Angenommen, für ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0^* \in \mathcal{R}_0$  gilt*

$$\mathcal{A}_0^* = \mathcal{A}(\mathcal{F}_0).$$

*Nach Korollar 3.1.8 (d') sind die Risikomaße  $\rho$  und  $\rho_0^*$  schwach akzeptanzkonsistent, und  $\rho_0^*$  ist das größte Element von  $\mathcal{R}_0^{\leftarrow}$ .*

Nach unserer letzten Bemerkung ist ein bedingtes konvexes Risikomaß, dessen Akzeptanzmenge mit der Akzeptanzmenge von  $\rho$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  übereinstimmt, das von uns gesuchte schwach akzeptanzkonsistente Risikomaß mit den mildesten Akzeptanzkriterien. Dieser Idee wollen wir weiter nachgehen. Wir wissen bereits, dass diese Bedingung auf die robusten Shortfall-Risikomaße anwendbar ist, vgl. Satz 3.1.26. Wir zeigen jetzt, dass sie im Fall der konvexen Risikomaße, die eine robuste Darstellung durch äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße besitzen, sogar notwendig für die Existenz eines größten Elements innerhalb der Klasse  $\mathcal{R}_0^{\leftarrow}$  ist.

**Theorem 3.2.11.** *Es seien  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß mit einer robusten Darstellung wie in (3.12) und (3.13) und  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  eine fixierte  $\sigma$ -Algebra. Die zugehörige Akzeptanzmenge von  $\rho$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  besitzt die folgende Darstellung:*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) = \bigcup_{\rho_0 \in \mathcal{R}_0^{\leftarrow}} \mathcal{A}_0.$$

*Insbesondere ist ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0^* \in \mathcal{R}_0^{\leftarrow}$  genau dann das größte Element der Klasse  $\mathcal{R}_0^{\leftarrow}$ , wenn seine Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_0^*$  mit  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  übereinstimmt.*

**Beweis:** Die Vereinigung aller Akzeptanzmengen  $\mathcal{A}_0$  von bedingten konvexen Risikomaße  $\rho_0 \in \mathcal{R}_0^\leftarrow$  ist eine Teilmenge von  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$ . Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, fixieren wir ein beliebiges Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$ . Wir werden ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0^X$  konstruieren, so dass  $\rho$  und  $\rho_0^X$  schwach akzeptanzkonsistent sind und dabei  $\rho_0^X(X) \leq 0$  gilt.

Da  $\rho$  eine robuste Darstellung durch äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße besitzt,

$$\rho(Y) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-Y) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \sim P\} \quad \forall Y \in \mathcal{X},$$

ist ein Auszahlungsprofil  $Y$  genau dann in  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  enthalten, wenn es die folgende Bedingung erfüllt:

$$\mathbb{E}_Q(-Y\mathbb{1}_A) \leq \alpha_{\min}(Q) \quad \forall Q \sim P, A \in \mathcal{F}_0. \quad (3.24)$$

Nun betrachten wir das Funktional  $\rho_0^X$  mit

$$\rho_0^X(Y) := \text{ess sup} \{ \mathbb{E}_Q(-Y|\mathcal{F}_0) - \alpha_0^X(Q) \mid Q \sim P \} \quad \forall Y \in \mathcal{X}.$$

und

$$\alpha_0^X(Q) := \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0)\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) \geq 0\}} \quad \forall Q \sim P.$$

Nach Konstruktion ist  $\rho_0^X(X) \leq 0$ . Außerdem ist  $\rho_0^X$  ein bedingtes konvexes Risikomaß, wenn wir zeigen können, dass die bedingte Penalty-Funktion  $\alpha_0^X$  normiert ist. Nach Voraussetzung existiert ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q^* \sim P$  derart, dass  $\alpha_{\min}(Q^*) = 0$ . Wir erhalten

$$0 \geq \mathbb{E}_{Q^*}(-X\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0) \geq 0\}}) = \mathbb{E}_{Q^*}(\mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0)\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0) \geq 0\}}) \geq 0.$$

Daraus folgt, dass  $\mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0) \leq 0$ , also

$$0 \leq \alpha_0^X(Q^*) = \mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0)\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0) \geq 0\}} = 0.$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $\rho$  und  $\rho_0^X$  schwach akzeptanzkonsistent sind. Wir weisen die Inklusion  $\mathcal{A}_0^X \subset \mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  nach. Dazu nehmen wir ein Auszahlungsprofil  $Y \in \mathcal{A}_0^X$ . Für  $Q \sim P$  haben wir

$$\mathbb{E}_Q(-Y|\mathcal{F}_0) \leq \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0)\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) \geq 0\}},$$

woraus wir für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}_0$  die Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(-Y\mathbb{1}_A) &= \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(-Y|\mathcal{F}_0)\mathbb{1}_A) \\ &\leq \mathbb{E}_Q(\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0)\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) \geq 0\}}\mathbb{1}_A) \\ &= \mathbb{E}_Q(-X\mathbb{1}_{\{\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) \geq 0\}}\mathbb{1}_A) \\ &\leq \alpha_{\min}(Q). \end{aligned}$$

erhalten. Die Behauptung folgt aus (3.24).  $\square$

Da die Vereinigung von Akzeptanzmengen im Allgemeinen keine Akzeptanzmenge eines bedingten konvexen Risikomaßes mehr ist, muss ein größtes Element in der Klasse  $\mathcal{R}_0^\leftarrow$  nicht existieren. Das Fazit lautet demnach: Die schwache Akzeptanzkonsistenz ist als Aktualisierungskriterium geeignet. Unter Umständen muss man dabei jedoch eine Verschärfung der Akzeptanzkriterien in Kauf nehmen. Für einige  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  kann es Auszahlungsprofile geben, die unter  $\rho$  akzeptabel sind unabhängig davon, welches  $\mathcal{F}_0$ -messbare Ereignis eintritt, jedoch unter dem zugehörigen bedingten konvexen Risikomaß  $\rho_0$  nicht mehr als akzeptabel angesehen werden.

### 3.2.4 Konsequenz als Aktualisierungskriterium

Wir prüfen nun, ob das zeitlich vorwärts gerichtete Kriterium, nach dem das zugeordnete bedingte konvexe Risikomaß als eine Konsequenz aus der ursprünglichen Risikobewertung und der eingehenden Information konstruiert werden soll, für die Aktualisierung eines konvexen Risikomaßes  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  geeignet ist. Das heißt, wir untersuchen Aktualisierungsvorschriften  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  für  $\rho$ , so dass

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{A}_0 \quad \forall \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}. \quad (3.25)$$

Die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  von  $\rho$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  ist im Allgemeinen eine echte Teilmenge der Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}$ . Wir fordern nicht, dass jedes unter  $\rho$  akzeptable Auszahlungsprofil auch unter dem bedingten Risikomaß  $\rho_0$  akzeptabel sein soll, also  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$ . Als Aktualisierungskriterium ist diese Bedingung nämlich zu stark. Das zeigt die folgende Bemerkung.

**Bemerkung 3.2.12.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß. Angenommen, es existiert eine Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0$  für  $\rho$ , so dass stets die Bedingung  $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_0$  erfüllt ist. Für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  erhalten wir dann*

$$\text{ess inf } \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{A} \geq \text{ess inf } \mathcal{X}_0 \cap \mathcal{A}_0 = 0.$$

*Daraus folgt, dass  $\mathcal{A} = \mathcal{X}_+$ . Die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}$  entspricht somit der des Worst-Case-Risikomaßes, d. h., es ist  $\rho = \rho^{\text{worst}}$ .*

### Eindeutigkeit einer Aktualisierungsvorschrift

Wie das folgende Beispiel zeigt, existiert zu jedem konvexen Risikomaß mindestens eine Aktualisierungsvorschrift, die das Kriterium einer konsequenten Risikobewertung erfüllt, vorausgesetzt, dass  $\rho$  eine robuste Darstellung besitzt derart, dass es ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß gibt, welches unter der minimalen Penalty-Funktion nicht bestraft wird.

**Beispiel:** Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß, das eine robuste Darstellung der Form

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_Q(-X) - \alpha_{\min}(Q) \mid Q \sim P\} \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

erlaubt, wobei  $\alpha_{\min}$  die minimale Penalty-Funktion bezeichnet. Falls es ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q^* \sim P$  gibt, so dass  $\alpha_{\min}(Q^*) = 0$ , dann können wir die folgende Aktualisierungsvorschrift  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0 \in \mathcal{R}_0^{\rightarrow}$  für  $\rho$  definieren. Wir setzen

$$\rho_0(X) := \mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X}$$

für den Fall, dass  $\mathcal{F}_0$  nicht trivial ist, und  $\rho_{\{\emptyset, \Omega\}}$  sei gegeben durch  $\rho$ . Das bedeutet, sobald wir irgendeine Art von Information erhalten, gehen wir von einem robusten Bewertungsansatz zu einer linearen Risikobewertung unter dem Modell  $Q^*$  über.

Tatsächlich ist jedes solche bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0$  eine Konsequenz aus  $\rho$  und der jeweiligen Information  $\mathcal{F}_0$ . Für ein Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  haben wir nämlich  $\mathbb{E}_{Q^*}(-X\mathbb{I}_A) \leq 0$  für alle  $A \in \mathcal{F}_0$ , d. h., dass  $\mathbb{E}_{Q^*}(-X|\mathcal{F}_0) \leq 0$ . Nach Bemerkung 3.2.4 (iii) ist ein bedingtes lineares Risikomaß *maximal* im Sinne der partiellen Ordnung (3.10).  $\diamond$

Für gewöhnlich charakterisiert die Bedingung (3.25) eine Aktualisierungsvorschrift nicht eindeutig und vor allem nicht ausreichend, wie es das obige Beispiel zeigt. Deshalb bezeichnen wir für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  mit

$$\mathcal{R}_0^{\rightarrow} := \{\rho_0 \in \mathcal{R}_0 \mid \rho_0 \text{ ist eine Konsequenz aus } \rho \text{ und } \mathcal{F}_0\}$$

die Klasse aller bedingten konvexen Risikomaße, die als eine Konsequenz aus  $\rho$  und  $\mathcal{F}_0$  aufgefasst werden können. Wir wissen bereits, dass diese Klasse nicht leer ist, falls  $\rho$  ein konvexes Risikomaß ist, das eine robuste Darstellung besitzt derart, dass ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, welches unter der minimalen Penalty-Funktion nicht bestraft wird. Die partielle

Ordnung (3.10) ermöglicht wie im vorherigen Abschnitt einen Vergleich von Elementen dieser Klasse. Für zwei bedingte konvexe Risikomaße gilt:

$$\rho'_0 \succeq \rho_0 \quad \text{und} \quad \rho_0 \in \mathcal{R}_0^\rightarrow \quad \Rightarrow \quad \rho'_0 \in \mathcal{R}_0^\rightarrow.$$

**Bemerkung 3.2.13.** *Es seien  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß mit einer robusten Darstellung wie in (3.12) und (3.13) und  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  eine beliebige  $\sigma$ -Algebra.*

- (i) *Besitzt die Klasse  $\mathcal{R}_0^\leftarrow$  ein größtes Element, d. h. ein schwach akzeptanzkonsistentes bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0^* \in \mathcal{R}_0^\leftarrow$  mit den mildesten Akzeptanzkriterien innerhalb dieser Klasse, dann gilt nach Theorem 3.2.11*

$$\mathcal{A}_0^* = \mathcal{A}(\mathcal{F}_0).$$

*Das bedeutet, dass  $\rho_0^*$  gleichzeitig das kleinste Element von  $\mathcal{R}_0^\rightarrow$  ist, also diejenige Konsequenz aus  $\rho$  und  $\mathcal{F}_0$  mit den strengsten Akzeptanzkriterien.*

- (ii) *Angenommen,  $\rho$  ist sogar linear, d. h., dass ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \sim P$  existiert mit*

$$\rho(X) = \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

*Nach Satz 3.1.26 ist die Akzeptanzmenge von  $\rho$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  gegeben durch*

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) = \{X \in \mathcal{X} \mid \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) \leq 0\},$$

*also durch die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_0$  des durch  $Q$  induzierten bedingten linearen Risikomaßes mit*

$$\rho_0(X) = \mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

*Dieses  $\rho_0$  ist das kleinste Element von  $\mathcal{R}_0^\rightarrow$ . Gleichzeitig ist es auch maximal, vgl. Bemerkung 3.2.4 (iii). Für äquivalente lineare Risikomaße gibt es demnach bei jeder Information genau eine mögliche Konsequenz. Diese ist durch die bedingte Erwartung gegeben.*

**Existenz einer optimalen Aktualisierungsvorschrift**

Ein konvexes Risikomaß, das stetig von oben ist und eine robuste Darstellung besitzt derart, dass ein äquivalentes probabilistisches Modell existiert, dass unter der minimalen Penalty-Funktion nicht bestraft wird, erlaubt stets eine konsequente Aktualisierungsvorschrift wie in (3.25), so dass das zugeordnete bedingte konvexe Risikomaß in der jeweiligen Klasse der möglichen Konsequenzen die strengsten Akzeptanzkriterien verwendet.

**Theorem 3.2.14.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein konvexes Risikomaß mit einer robusten Darstellung wie in (3.12) und (3.13). Außerdem sei  $\mathcal{F}_0 \mapsto \rho_0^* \in \mathcal{R}_0^\rightarrow$  die Aktualisierungsvorschrift für  $\rho$  mit*

$$\rho_0^*(X) := \rho_{\mathcal{A}_0^*}(X) := \text{ess inf} \{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid X + X_0 \in \mathcal{A}_0^*\} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wobei die Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}_0^*$  von  $\rho_0^*$  gegeben ist durch

$$\mathcal{A}_0^* = \bigcap_{\rho_0 \in \mathcal{R}_0^\rightarrow} \mathcal{A}_0.$$

Für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  ist das zugehörige bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0^*$  eine Konsequenz aus  $\rho$  und  $\mathcal{F}_0$  und das kleinste Element von  $\mathcal{R}_0^\rightarrow$ . Ebenso gilt die Darstellung:

$$\rho_0^*(X) = \text{ess inf} \{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid X + X_0 \in \text{conv}_{\mathcal{F}_0} \mathcal{A}(\mathcal{F}_0)\} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wobei

$$\text{conv}_{\mathcal{F}_0} \mathcal{A}(\mathcal{F}_0) := \{\Lambda Y_1 + (1 - \Lambda)Y_2 \mid Y_1, Y_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_0), \Lambda \in \mathcal{X}_0, 0 \leq \Lambda \leq 1\},$$

die bedingte konvexe Hülle der Akzeptanzmenge von  $\rho$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$  bezeichnet.

**Beweis:** Für jede  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  wird  $\rho_0$  durch Robustifizierung über die nicht-leere Klasse  $\mathcal{R}_0^\rightarrow$  gebildet und ist somit ein bedingtes konvexes Risikomaß. Offenbar ist  $\rho_0^*$  eine Konsequenz aus  $\rho$  und  $\mathcal{F}_0$ , da  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{A}_0^*$ . Außerdem ist es nach Konstruktion das kleinste Element von  $\mathcal{R}_0^\rightarrow$ .

Um die Darstellung im zweiten Teil des Theorems zu beweisen, zeigen wir, dass auch durch die bedingte konvexe Hülle von  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho_0'$  erzeugt wird. Wegen

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \text{conv}_{\mathcal{F}_0} \mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{A}_0^*$$

und der Minimalität von  $\rho_0^*$  innerhalb der Klasse aller Konsequenzen folgt dann sofort die Behauptung.

Die Eigenschaften der Akzeptanzmenge  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  von  $\rho$  bezüglich  $\mathcal{F}_0$ , vgl. Bemerkung 3.1.10, übertragen sich auf ihre bedingte konvexe Hülle. Die Menge  $\text{conv}_{\mathcal{F}_0}\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$  ist solide und nach Konstruktion bedingt konvex. Es gilt  $\text{ess inf } \mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \cap \mathcal{X}_0 = 0$  und insbesondere  $\text{ess inf } \text{conv}_{\mathcal{F}_0}\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \cap \mathcal{X}_0 = 0$ . Nach Satz 2.1.5 erzeugt die konvexe Hülle ein bedingtes konvexes Risikomaß  $\rho'_0$  mit  $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \text{conv}_{\mathcal{F}_0}\mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{A}'_0$ . Das bedeutet, dass  $\rho'_0$  eine Konsequenz aus  $\rho$  und der eingehenden Information  $\mathcal{F}_0$  ist.  $\square$

Wir haben gezeigt, dass das Kriterium der Konsequenz sehr gut zur Aktualisierung geeignet ist. Für jedes konvexe und von oben stetige Risikomaß existiert eine Aktualisierungsvorschrift derart, dass das zugeordnete bedingte konvexe Risikomaß stets mit der ursprünglichen Risikobewertung und der eingehenden Information vereinbar ist, vorausgesetzt, dass es ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß gibt, das unter der minimalen Penalty-Funktion nicht bestraft wird. Unter diesem Aktualisierungskriterium ist auch die Reduzierung der Unsicherheit gegenüber dem probabilistischen Modell oder der Risikoaversion möglich, die sich aus dem Erhalt von neuer Information ergeben kann.

### 3.2.5 Reduzierung der Modellunsicherheit

Zusätzliche Information kann dazu beitragen, dass Unsicherheit in Bezug auf das zugrunde liegende probabilistische Modell verringert wird. In diesem Abschnitt stellen wir eine Methode vor, nach der Entscheidungen darüber getroffen werden können, welche probabilistischen Modelle weiterhin bei der Bewertung des Risikos berücksichtigt werden sollen. Damit wollen wir gleichzeitig die Diskussion zum Thema der Aktualisierung von konvexen Kapazitäten aus der Theorie der nicht-additiven Mengenfunktionen zusammenfassen und ergänzen.

#### Die Aktualisierungsmethode

Betrachten wir eine Menge  $\mathcal{Q}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , welche wie beim Shortfall-Risikomaß durch Robustifizierung in die Risikobewertung eingeht.  $\mathcal{Q}$  sei konvex und jedes Element  $Q \in \mathcal{Q}$  zum Referenzmaß  $P$  äquivalent. Das Problem der Unsicherheitsreduzierung durch den Erhalt zusätzlicher Information werden wir in einem sehr einfachen Rahmen untersuchen. Angenommen, wir erfahren, dass ein gewisses Ereignis  $B \in \mathcal{F}$  mit

positiver Wahrscheinlichkeit  $P(B) > 0$  eintritt. Die Menge  $\mathcal{Q}$  erzeugt dann eine zugehörige Menge von bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathcal{Q}_B := \{Q(\cdot|B) \mid Q \in \mathcal{Q}\},$$

die äquivalent zum bedingten Referenzmaß  $P(\cdot|B)$  sind. Aus dieser Menge  $\mathcal{Q}_B$  können wir je nachdem, wie stark die Information unsere Annahmen zum probabilistischen Modell beeinflusst, einige Wahrscheinlichkeitsmaße für die Zukunft ausschließen. Es bleibt die Frage, nach welchen Kriterien dabei verfahren werden soll.

In der Literatur zu diesem Thema findet man im Wesentlichen drei Vorschläge, die verallgemeinerte Regel von Bayes, die Dempster-Shafer-Regel und die klassische Regel von Bayes. Sie alle basieren auf demselben Prinzip: Der Ausschluss eines bedingten probabilistischen Modells  $Q(\cdot|B)$  erfolgt in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $B$  unter  $Q$ . Wir wählen ein Intervall

$$[a, b] \subset [\inf_{Q \in \mathcal{Q}} Q(B), \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q(B)] \quad (3.26)$$

und definieren

$$\mathcal{Q}_B^{[a,b]} := \{Q(\cdot|B) \mid Q \in \mathcal{Q} \text{ und } Q(B) \in [a, b]\}. \quad (3.27)$$

Die oben erwähnten Regeln entsprechen den Extremvarianten dieser Auswahlmethode.

**Beispiel:** Das Intervall  $[\inf_{\mathcal{Q}} Q(B), \sup_{\mathcal{Q}} Q(B)]$  definiert die *verallgemeinerte Regel von Bayes*. Das bedeutet, dass die Information über das Eintreten von  $B$  keine Unsicherheitsreduzierung bewirkt. Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}$  wird gemäß der Regel von Bayes aktualisiert, und das so erzeugte bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q(\cdot|B)$  verbleibt in  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$ . Analysiert wird diese Methode z. B. in [37], [16], [25] oder [11].  $\diamond$

**Beispiel:** Die auf die beiden Randpunkte reduzierten Intervalle mit  $a = b = \sup_{\mathcal{Q}} Q(B)$  oder  $a = b = \inf_{\mathcal{Q}} Q(B)$  definieren die *Dempster-Shafer-Regel* bzw. die *klassische Regel von Bayes*. Den Namen der zweiten Aktualisierungsregel erklären wir später mit Hilfe der Darstellung in Theorem 3.2.19. Es werden nur diejenigen probabilistischen Modelle weiter verwendet, die dem Ereignis  $B$  maximale bzw. minimale Wahrscheinlichkeit zuordnen. Bei diesen

Methoden müssen zusätzliche Bedingungen formuliert werden, die garantieren, dass die Menge  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  nicht leer ist. Untersucht wurden sie von [10] und [36] sowie z. B. in [23] oder [11].  $\diamond$

### Anwendung auf konvexe Kapazitäten

Anstatt durch eine Menge  $\mathcal{Q}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Robustifizierung kann Modellunsicherheit auch durch ein nicht-additives Maß  $c$  und das zugehörige Choquet-Integral dargestellt werden. Beide Ansätze stimmen unter gewissen Annahmen überein, nämlich wenn  $\mathcal{Q}$  durch den Kern  $\mathcal{Q}(c)$  einer konvexen Kapazität gegeben ist. Um die durch (3.26) und (3.27) definierten Aktualisierungsregeln zu charakterisieren und zu vergleichen, wollen wir sie nun unter dieser zusätzlichen Voraussetzung untersuchen.

**Definition 3.2.15.** *Eine Mengenfunktion  $c : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  heißt Kapazität, wenn sie monoton und auf  $c(\emptyset) = 0$  sowie  $c(\Omega) = 1$  normiert ist. Eine Kapazität  $c$  heißt konvex, falls*

$$c(A) + c(B) \leq c(A \cup B) + c(A \cap B) \quad \forall A, B \in \mathcal{F}.$$

*Eine Kapazität  $c$  heißt bezüglich  $B \in \mathcal{F}$  bedingt, wenn  $c(A) = c(A \cap B)$  für alle  $A \in \mathcal{F}$ .*

Das zugehörige Choquet-Integral einer messbaren und beschränkten Funktion  $X \in \mathcal{B}$  ist definiert als

$$\mathbb{E}_c(X) := \int X dc := \int_{-\infty}^0 (c(X > x) - 1) dx + \int_0^{\infty} c(X > x) dx. \quad (3.28)$$

Wenn  $c$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  ist, dann stimmt  $\mathbb{E}_c(X)$  mit dem üblichen Erwartungswert überein. Das Choquet-Integral ist ein Funktional, das durch vier Eigenschaften charakterisiert werden kann. Für eine Einführung des Integralbegriffs und den Beweis des folgenden Satzes verweisen wir auf [12], Kapitel 5 und 6.

**Satz 3.2.16.** *Es sei  $c$  eine Kapazität und  $\mathbb{E}_c : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  das durch das Choquet-Integral induzierte Funktional. Dieses besitzt die folgenden Eigenschaften:*

- *Normiertheit:  $\mathbb{E}_c(\mathbb{1}) = 1$ .*

- *Positive Homogenität:*  $\mathbb{E}_c(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}_c(X)$  für alle  $\lambda \geq 0$ .
- *Monotonie:*  $\mathbb{E}_c(X) \leq \mathbb{E}_c(Y)$  für  $X, Y \in \mathcal{B}$  mit  $X \leq Y$ .
- *Additivität auf komonotonen Funktionen:*  $\mathbb{E}_c(X + Y) = \mathbb{E}_c(X) + \mathbb{E}_c(Y)$  für komonotone  $X, Y \in \mathcal{B}$ , d. h.,  $(X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega')) \geq 0$  für alle  $\omega, \omega' \in \Omega$ .

Ist  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional mit den obigen Eigenschaften, dann wird durch

$$c(A) := F(\mathbb{I}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

eine Kapazität definiert, und das zugehörige Choquet-Integral stimmt mit  $F$  überein, d. h., dass  $F(X) = \mathbb{E}_c(X)$  für alle  $X \in \mathcal{B}$ .

Kommen wir nun zum bereits angedeuteten Zusammenhang beider Ansätze zur Unsicherheitsmodellierung. Die Menge  $\mathcal{Q}$  erzeugt durch

$$c(A) := \inf_{Q \in \mathcal{Q}} Q(A) \quad (3.29)$$

eine Kapazität auf  $\mathcal{F}$ , so dass für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  gilt:

$$P(A) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(A) = 0. \quad (3.30)$$

Unter welchen Bedingungen sind das durch  $\mathcal{Q}$  induzierte Funktional  $F$  mit

$$F(X) := \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_Q(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}$$

und das Choquet-Integral  $\mathbb{E}_c$  der durch  $\mathcal{Q}$  induzierten Kapazität auf der Menge  $\mathcal{B}$  der beschränkten und messbaren Funktionen identisch? Die Antwort liefert der folgende Satz von [35].

**Satz 3.2.17.** *Es sei  $c$  eine Kapazität. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- $c$  ist konvex.*
- Das Choquet-Integral  $\mathbb{E}_c : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  ist superadditiv, d. h., dass für alle  $X, Y \in \mathcal{B}$  gilt  $\mathbb{E}_c(X) + \mathbb{E}_c(Y) \leq \mathbb{E}_c(X + Y)$ .*
- Der Kern  $\mathcal{Q}(c) := \{Q \in \mathcal{M}_{1,f}(\Omega, \mathcal{F}) \mid c(A) \leq Q(A) \forall A \in \mathcal{F}\}$  ist nicht leer, und es gilt die Darstellung*

$$\mathbb{E}_c(X) = \min_{Q \in \mathcal{Q}(c)} \mathbb{E}_Q(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

**Bemerkung 3.2.18.** *Es seien  $c$  eine konvexe Kapazität auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  und  $\mathcal{Q}(c)$  ihr Kern.*

- (i) *Das Infimum über den Kern in Aussage (c) des vorherigen Satzes wird stets angenommen, vgl. dazu auch [21], Proposition 2.85., bzw. das Theorem 1.1.7 in Kapitel 1.*
- (ii) *Ist die Kapazität stetig von unten in  $\Omega$ , so besteht der Kern nur aus Wahrscheinlichkeitsmaßen, denn wegen  $1 \geq Q(A) \geq c(A)$  überträgt sich die Stetigkeit von unten auch auf jedes  $Q \in \mathcal{Q}(c)$ .*
- (iii) *Für alle Mengen  $A \subset B$  gibt es ein additives Maß  $Q^* \in \mathcal{Q}(c)$ , so dass  $c(A) = Q^*(A)$  und  $c(B) = Q^*(B)$ . Wegen der Additivität des Choquet-Integrals auf komonotonen Funktionen gilt nämlich für ein  $Q^* \in \mathcal{Q}(c)$ ,*

$$c(A) + c(B) = \mathbb{E}_c(\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}_{Q^*}(\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B) = Q^*(A) + Q^*(B).$$

*Dieses leistet das Gewünschte, denn*

$$0 \geq c(B) - Q^*(B) = Q^*(A) - c(A) \geq 0.$$

Nehmen wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts an, dass die in (3.29) definierte Kapazität  $c$  konvex und stetig von unten ist und dass die in die Risikobewertung eingehende Menge  $\mathcal{Q}$  mit dem Kern  $\mathcal{Q}(c)$  dieser Kapazität übereinstimmt. Des Weiteren bezeichnen wir mit

$$\bar{c}(A) := \max_{Q \in \mathcal{Q}} Q(A) = 1 - c(A^c) \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

die durch  $\mathcal{Q}$  induzierte *konjugierte* Kapazität auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Für zwei beliebige Ereignisse  $A, B \in \mathcal{F}$  gilt  $\bar{c}(A) + \bar{c}(B) \geq \bar{c}(A \cup B) + \bar{c}(A \cap B)$ , d. h., dass  $\bar{c}$  *konkav* ist.

Das folgende Theorem liefert eine Darstellung und Eigenschaften der bedingten Kapazität, die aus der Aktualisierung von  $\mathcal{Q}$  bzw.  $c$  hervorgeht. Damit verallgemeinert es die Darstellungssätze für die oben erwähnten drei Methoden, vgl. z. B. [37], Theorem 7.2, oder die Abschnitte 2 und 3 in [11], .

**Theorem 3.2.19.** *Die aus (3.26) und (3.27) resultierende Menge  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  von bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen erzeugt durch*

$$c^{[a,b]}(A|B) := \inf \left\{ Q(A|B) \mid Q(\cdot|B) \in \mathcal{Q}_B^{[a,b]} \right\} \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

eine bedingte, konvexe und von unten stetige Kapazität. Es gilt

$$c^{[a,b]}(A|B) = \max \left( 1 - \frac{\bar{c}(A^c \cap B)}{a}, \frac{c(A \cap B)}{c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B)}, \frac{c(A \cap B)}{b} \right). \quad (3.31)$$

Im Allgemeinen ist  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  eine Teilmenge des Kerns  $\mathcal{Q}(c^{[a,b]}(\cdot|B))$ . In den Spezialfällen  $a = b = \max_{\mathcal{Q}} Q(B)$  bzw.  $a = b = \min_{\mathcal{Q}} Q(B) > 0$  stimmen beide Mengen stets überein.

**Beweis:** Wir zeigen zunächst die Darstellungsformel für die bedingte Kapazität  $c^{[a,b]}(\cdot|B)$ . Dazu wählen wir ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $Q(B) \in [a, b]$ . Dann gilt für alle  $A \in \mathcal{F}$

$$\frac{Q(A \cap B)}{Q(B)} = 1 - \frac{Q(A^c \cap B)}{Q(B)} \geq \max \left( \frac{c(A \cap B)}{b}, 1 - \frac{\bar{c}(A^c \cap B)}{a} \right).$$

Falls  $c(A \cap B) > 0$  ist, erhalten wir außerdem

$$\frac{Q(A \cap B)}{Q(B)} \geq \frac{1}{1 + \sup \left( \frac{Q(A^c \cap B)}{Q(A \cap B)} \right)} \geq \frac{1}{1 + \sup \left( \frac{\bar{c}(A^c \cap B)}{c(A \cap B)} \right)}.$$

Demnach ist

$$c^{[a,b]}(A|B) \geq \max \left( 1 - \frac{\bar{c}(A^c \cap B)}{a}, \frac{c(A \cap B)}{c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B)}, \frac{c(A \cap B)}{b} \right).$$

Um zu beweisen, dass beide Seiten gleich sind, betrachten wir drei Fälle. Zuerst nehmen wir an, dass  $c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B) \leq a$ , d. h., dass das Maximum auf der rechten Seite  $1 - \bar{c}(A^c \cap B)/a$  gegeben ist. Nach Bemerkung 3.2.18 (iii) existieren  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$  mit  $Q_1(A^c \cap B) = Q_2(A^c \cap B) = \bar{c}(A^c \cap B)$ ,  $Q_1(B) = \bar{c}(B)$  und  $Q_2(A \cap B) = c(A \cap B)$ . Definieren wir nun  $Q := \varepsilon Q_1 + (1 - \varepsilon) Q_2$  mit Parameter

$$\varepsilon := \frac{a - (c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B))}{\bar{c}(B) - (c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B))} \in [0, 1],$$

dann gilt  $Q \in \mathcal{Q}$  und  $Q(B) = a$ . Insbesondere ist die Darstellung (3.31) in diesem Fall gültig, denn

$$Q(A|B) = 1 - \frac{\bar{c}(A^c \cap B)}{a}.$$

Jetzt sei  $c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B) \in [a, b]$ . Das Maximum auf der rechten Seite von (3.31) ist durch den mittleren Term gegeben. Wieder finden wir ein

Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $Q(A^c \cap B) = \bar{c}(A^c \cap B)$  und  $Q(A \cap B) = c(A \cap B)$ . Damit gilt auch die Darstellung für  $c^{[a,b]}(A|B)$ , denn es ist

$$Q(A|B) = \frac{c(A \cap B)}{c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B)}.$$

Wenn  $c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B) \geq b$  ist, dann bildet der Term  $c(A \cap B)/b$  das Maximum in (3.31). Nach Bemerkung 3.2.18 (iii) gibt es Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ , so dass  $Q_1(A \cap B) = Q_2(A \cap B) = c(A \cap B)$ ,  $Q_1(B) = c(B)$  und  $Q_2(A^c \cap B) = \bar{c}(A^c \cap B)$ . Wie im ersten Fall definieren wir nun ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q := \varepsilon Q_1 + (1 - \varepsilon) Q_2 \in \mathcal{Q}$  mit  $Q(B) = b$ , wobei

$$\varepsilon := \frac{c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B) - b}{c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B) - c(B)} \in [0, 1].$$

Die Darstellung (3.31) gilt erneut, weil

$$Q(A|B) = \frac{c(A \cap B)}{b}.$$

Mit Hilfe von (3.31) zeigt man die Stetigkeit von unten für die bedingte Kapazität  $c^{[a,b]}(\cdot|B)$ . Der Nachweis der Konvexität ist aufwendiger. Wir werden eine Idee aus [37], wo die Konvexität für die verallgemeinerte Bayes-Regel bewiesen wird, auf unsere Situation übertragen. Dazu definieren wir zwei nicht-negative Mengenfunktionen auf  $\mathcal{F}$  durch

$$g(A) := \max(c(A \cap B), a - \bar{c}(A^c \cap B)) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

und

$$h(A) := \min(b - c(A \cap B), \bar{c}(A^c \cap B)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Für alle  $A \in \mathcal{F}$  gilt dann

$$c^{[a,b]}(A|B) = \frac{g(A)}{g(A) + h(A)}.$$

Wegen der Konvexität von  $c$  ist  $A \mapsto c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B)$  eine monoton fallende Abbildung bezüglich der partiellen Ordnung der Mengeninklusion. Damit zeigt man für die Mengenfunktionen die folgenden Eigenschaften:

- $g$  ist konvex,  $g(A) + g(A') \leq g(A \cap A') + g(A \cup A')$  für  $A, A' \in \mathcal{F}$ ,
- $h$  ist konkav,  $h(A) + h(A') \geq h(A \cap A') + h(A \cup A')$  für  $A, A' \in \mathcal{F}$ ,

- $g + h$  ist monoton fallend und nach unten beschränkt durch  $a > 0$ .

Die Beweise seien dem Leser überlassen. Jetzt betrachten wir zwei Ereignisse  $A, A' \in \mathcal{F}$ . Es gibt Konstanten  $\beta, \gamma, \gamma' \geq 0$ , so dass

$$\begin{aligned} g(A) + h(A) &= g(A \cup A') + h(A \cup A') + \gamma, \\ g(A') + h(A') &= g(A \cup A') + h(A \cup A') + \gamma' \end{aligned}$$

und

$$g(A \cap A') + g(A \cup A') = g(A) + g(A') + \beta.$$

Der Einfachheit halber setzen wir  $\alpha = g(A \cup A') + h(A \cup A')$  und haben somit

$$g(A \cap A') + h(A \cap A') \leq \alpha + \beta + \gamma + \gamma'.$$

Die Konvexität von  $c^{[a,b]}(\cdot|B)$  folgt, wenn

$$\frac{g(A)}{\alpha + \gamma} + \frac{g(A')}{\alpha + \gamma'} \leq \frac{g(A \cup A')}{\alpha} + \frac{g(A \cap A')}{\alpha + \beta + \gamma + \gamma'}$$

ist. Durch Multiplikation mit  $\alpha(\alpha + \gamma)(\alpha + \gamma')(\alpha + \beta + \gamma + \gamma')$  und weitere Umformungen erhalten wir, dass diese Ungleichung äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} 0 &\leq [\alpha^3\beta - \alpha^2\beta g(A \cup A')] \\ &+ \alpha^2[\beta(\gamma + \gamma') + (g(A \cup A') - g(A))(\beta + \gamma') \\ &+ (g(A \cup A') - g(A'))(\beta + \gamma)] \\ &+ \alpha[(g(A \cup A') - g(A))(\beta + \gamma')\gamma' + (g(A \cup A') - g(A'))(\beta + \gamma)\gamma] \\ &+ g(A \cup A')\gamma\gamma'(2\alpha + \beta + \gamma + \gamma') + \alpha\beta\gamma\gamma'. \end{aligned}$$

Der erste Term in eckigen Klammern auf der rechten Seite der Ungleichung ist nicht-negativ, weil  $\alpha \geq g(A \cup A') \geq 0$  ist.  $g$  ist monoton wachsend und alle Konstanten sind nicht-negativ. Damit sind auch alle übrigen Terme nicht-negativ.

Abschließend betrachten wir den zugehörigen Kern

$$\mathcal{Q}(c^{[a,b]}(\cdot|B)) = \{Q \in \mathcal{M}_{1,f}(\Omega, \mathcal{F}) \mid c^{[a,b]}(A|B) \leq Q(A) \forall A \in \mathcal{F}\}.$$

Da die bedingte Kapazität von unten stetig ist, ist ihr Kern eine Menge von bezüglich  $B$  bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Natürlich ist  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  eine Teilmenge. Für die Dempster-Shafer-Regel bzw. die klassische Bayes-Regel stimmen beide Mengen sogar überein. Falls nämlich  $a = b = \max_Q Q(B)$

ist, können wir ein beliebiges  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $Q(B) = a$  fixieren. Jedes bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q' \in \mathcal{Q}(c^{[a,b]}(\cdot|B))$  induziert durch

$$\bar{Q}(A) := Q'(A) \cdot a + Q(A \cap B^c) \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\bar{Q}$  mit  $\bar{Q}(B) = a$  und  $\bar{Q}(\cdot|B) = Q$ . Aufgrund der Konvexität von  $c$  und der Darstellungsformel (3.31) gilt

$$\bar{Q}(A) \geq c^{[a,b]}(A|B)a + c(A \cap B^c) = c(A \cup B^c) - c(B^c) + c(A \cap B^c) \geq c(A),$$

d. h., dass  $\bar{Q} \in \mathcal{Q}$ . Den Fall  $a = b = \min_{\mathcal{Q}} Q(B)$  behandelt man analog.  $\square$

**Beispiel:** Die zum Intervall  $[a, b] = [c(B), \bar{c}(B)]$  gehörige *verallgemeinerte Regel von Bayes* liefert die bedingte konvexe Kapazität

$$c^{\text{vB}}(A|B) = \frac{c(A \cap B)}{c(A \cap B) + \bar{c}(A^c \cap B)} \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Für das Choquet-Integral gilt die Abschätzung:

$$\mathbb{E}_{c^{\text{vB}}(\cdot|B)}(X) \leq \inf_{Q \in \mathcal{Q}_B^{\text{vB}}} \mathbb{E}_Q(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

◇

**Beispiel:** Aus der *Dempster-Shafer-Regel* mit  $a = b = \bar{c}(B)$  und aus der *klassischen Regel von Bayes* mit  $a = b = c(B)$  resultieren die bedingten konvexen Kapazitäten mit

$$c^{\text{DS}}(A|B) = 1 - \frac{\bar{c}(A^c \cap B)}{\bar{c}(B)} \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

und

$$c^{\text{kB}}(A|B) = \frac{c(A \cap B)}{c(B)} \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Man beachte, dass bei der zweiten Aktualisierungsregel die bedingte Kapazität eines Ereignisses ganz „klassisch“, d. h. wie für Wahrscheinlichkeitsmaße, berechnet wird. Die beiden Aktualisierungsmethoden sind eng miteinander verwandt. Für die Darstellungen der zugehörigen konjugierten Kapazitäten gelten die Beziehungen:

$$\overline{c^{\text{DS}}}(A|B) := 1 - c^{\text{DS}}(A^c|B) = \frac{\bar{c}(A \cap B)}{\bar{c}(B)} \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

und

$$\overline{c^{\text{kB}}}(A|B) := 1 - c^{\text{kB}}(A^c|B) = 1 - \frac{c(A^c \cap B)}{c(B)} \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Außerdem erhalten beide Aktualisierungen die Additivität auf komonotonen Funktionen, denn für die Choquet-Integrale gilt:

$$\mathbb{E}_{c^{[a,b]}(\cdot|B)}(X) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}_B^{[a,b]}} \mathbb{E}_Q(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}$$

◇

### Anwendung auf konvexe Verzerrungen eines Wahrscheinlichkeitsmaßes

Betrachten wir nun eine spezielle Klasse von konvexen Kapazitäten. Bei diesen soll die Unsicherheit gegenüber dem probabilistischen Modell durch eine konvexe Verzerrung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P$  dargestellt werden. Das heißt, dass  $\mathcal{Q}$  durch den Kern einer konvexen Kapazität  $c$  der Form

$$c(A) = f(P(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

gegeben ist. Dabei ist  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine konvexe Verzerrungsfunktion, eine konvexe, monoton wachsende Funktion mit  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$ . Nehmen wir zusätzlich an, dass  $f$  stetig ist, so besteht der Kern  $\mathcal{Q}$  aus absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaßen  $Q \ll P$ , deren Dichten wie folgt beschränkt sind:

$$f'(0+) \leq \frac{dQ}{dP} \leq f'(1-) \quad P\text{-f. s.} \quad (3.32)$$

Man vergleiche auch [6], Proposition 1. Außerdem sei  $f'(0+) > 0$ . In diesem Fall ist  $\mathcal{Q}$  sogar eine Menge von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Die aus der Aktualisierung mit dem Intervall  $[a, b]$  hervorgehende bedingte konvexe Kapazität ist ebenfalls eine konvexe Verzerrung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, nämlich des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P(\cdot|B)$ . Es gilt

$$c^{[a,b]}(A|B) = f_B^{[a,b]}(P(A|B)) \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

wobei die konvexe und stetige Verzerrungsfunktion  $f_B^{[a,b]} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  definiert ist durch

$$f_B^{[a,b]}(x) := \max \left( 1 - \frac{1 - f(v(x))}{a}, \frac{f(u(x))}{f(u(x)) + 1 - f(v(x))}, \frac{f(u(x))}{b} \right) \quad (3.33)$$

mit  $u(x) := xP(B)$  und  $v(x) := 1 - (1 - x)P(B)$ . Diese Funktion erhalten wir direkt aus der Darstellung (3.31).

Im Allgemeinen ist der Kern  $\mathcal{Q}(f^{[a,b]} \circ P(\cdot|B))$  der bedingten Kapazität wesentlich größer als die Menge  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$ . Dies wollen wir anhand der Klasse der *einfachen konvexen Verzerrungen* verdeutlichen. Die zugehörigen Verzerrungsfunktionen bilden in diesem Fall das Maximum zweier linearer Funktionen. Wir fixieren konstante Parameter  $\kappa, \lambda \in (0, 1]$  und setzen

$$f(x) := f_\lambda^\kappa(x) := \max\left(\kappa x, \frac{x - (1 - \lambda)}{\lambda}\right) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (3.34)$$

Die durch  $f$  und das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  erzeugte konvexe und stetige Kapazität  $c = f \circ P$  besitzt den Kern

$$\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(c) = \left\{ Q \sim P \mid \kappa \leq \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\lambda} \text{ P-f.s.} \right\} \quad (3.35)$$

Nach den Abschätzungen in (3.32) ist  $\mathcal{Q}$  in der Menge auf der rechten Seite enthalten. Beide Mengen sind sogar gleich, weil für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß mit einer wie oben angegeben beschränkten Dichte gilt:

$$Q(A) = \mathbb{E}_P\left(\frac{dQ}{dP}; A\right) = 1 - \mathbb{E}_P\left(\frac{dQ}{dP}; A^c\right) \geq f(P(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Jetzt beobachten wir ein Ereignis  $B \in \mathcal{F}$  mit Wahrscheinlichkeit  $P(B) > 0$  und aktualisieren die Menge  $\mathcal{Q}$  gemäß der in (3.26) und (3.27) beschriebenen Methode.

**Satz 3.2.20.** *Es sei  $c = f \circ P$  eine einfache konvexe Verzerrung des Referenzmaßes  $P$  mit einer Verzerrungsfunktion wie in (3.34) und einem zugehörigen Kern wie in (3.35). Die aktualisierte Menge  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  von bedingten Wahrscheinlichkeiten induziert durch*

$$F_B^{[a,b]}(X) := \inf_{Q' \in \mathcal{Q}_B^{[a,b]}} \mathbb{E}_{Q'}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}$$

ein Funktional, das als Infimum von Choquet-Integralen bezüglich einfacher konvexer Verzerrungen des bedingten Referenzmaßes  $P(\cdot|B)$  darstellbar ist:

$$F_B^{[a,b]}(X) = \inf_{y \in [a,b]} \mathbb{E}_{f_{\lambda_y}^{\kappa_y}(P(\cdot|B))}(X) \geq \mathbb{E}_{f_B^{[a,b]}(P(\cdot|B))}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B},$$

wobei die aktualisierten Parameter gegeben sind durch

$$\kappa_y := \frac{\kappa}{y} P(B) \in (0, 1] \quad \text{und} \quad \lambda_y := \frac{\lambda y}{P(B)} \in (0, 1]. \quad (3.36)$$

Insbesondere ist  $F_B^{[a,b]}$  nur von der Verteilung unter  $P(\cdot|B)$  abhängig. Falls das Aktualisierungsintervall  $[a, b]$  auf einen Punkt reduziert ist, dann verhält sich  $F_B^{[a,b]}$  additiv auf komotonen Funktionen.

**Beweis:** Zunächst nehmen wir an, dass die Aktualisierung definierende Intervall einem einzelnen Punkt entspricht, also  $0 < a = b = y \in [c(B), \bar{c}(B)]$ . Die Verzerrungsfunktion in (3.33) reduziert sich auf eine einfache konvexe Verzerrungsfunktion

$$f_B^y(x) = f_{\lambda_y}^{\kappa_y}(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

mit neuen Parametern wie in (3.36). Die aktualisierte Menge  $\mathcal{Q}_B^y$  ist eine Teilmenge des zugehörigen Kerns. Wir zeigen, dass  $\mathcal{Q}_B^y$  diesen Kern sogar vollständig ausschöpft. Sei  $Q' \in \mathcal{Q}(f_{\lambda_y}^{\kappa_y} \circ P(\cdot|B))$ . Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $Q(B) = y$  induziert durch

$$\bar{Q}(A) := Q'(A \cap B) \cdot y + Q(A \cap B^c)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\bar{Q} \ll P$  mit  $\bar{Q}(B) = y$  und  $\bar{Q}(\cdot|B) = Q'$ . Dieses ist ein Element der ursprünglichen Menge  $\mathcal{Q}$ , denn für seine Dichte gilt  $P$ -fast sicher

$$\kappa \leq \frac{d\bar{Q}}{dP} = \frac{y}{P(B)} \cdot \frac{dQ'}{dP(\cdot|B)} \mathbb{I}_B + \frac{dQ}{dP} \mathbb{I}_{B^c} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Wir haben bisher gezeigt: Die aus der Aktualisierung hervorgehende Menge  $\mathcal{Q}_B^y$  induziert eine einfache Verzerrung des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes

$$c^y(A|B) = f_{\lambda_y}^{\kappa_y}(P(A|B)) \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

mit den beiden aktualisierten Parametern  $\kappa_y, \lambda_y \in (0, 1]$ . Der zugehörige Kern  $\mathcal{Q}(f_{\lambda_y}^{\kappa_y} \circ P(\cdot|B))$  stimmt mit der Menge  $\mathcal{Q}_B^y$  überein. Insbesondere gilt

$$\mathbb{E}_{f_{\lambda_y}^{\kappa_y} \circ P(\cdot|B)}(X) = \min_{Q' \in \mathcal{Q}_B^y} \mathbb{E}_{Q'}(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}.$$

Wir wenden nun die Ergebnisse auf die allgemeine Aktualisierungsmethode mit einem Intervall  $[a, b] \subset [c(B), \bar{c}(B)]$  an. Es ist

$$\mathcal{Q}_B^{[a,b]} = \bigcup_{y \in [a,b]} \mathcal{Q}_B^y = \bigcup_{y \in [a,b]} \mathcal{Q}(f_{\lambda_y}^{\kappa_y} \circ P(\cdot|B)) \subset \mathcal{Q}(f_B^{[a,b]} \circ P(\cdot|B)).$$

Wir erhalten daraus die oben beschriebene Darstellung sowie die Eigenschaft der Verteilungsinvarianz in Bezug auf das bedingte Referenzmaß.  $\square$

### Anwendung auf kohärente Risikomaße

Die in diesem Abschnitt diskutierte Aktualisierungsmethode kann direkt auf die Klasse der kohärenten Risikomaße angewandt werden. Fassen wir also die Resultate zusammen. Wir betrachten ein kohärentes Risikomaß  $\rho : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ , das in Bezug auf ein Referenzmaß  $P$  für alle  $X, Y \in \mathcal{B}$  die folgende Bedingung erfüllt:

$$X = Y \quad P\text{-f. s.} \quad \Rightarrow \quad \rho(X) = \rho(Y).$$

In diesem Fall kann  $\rho$  auch als ein kohärentes Risikomaß auf der Klasse  $\mathcal{X} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  aufgefasst werden. Außerdem nehmen wir an, dass  $\rho$  stetig von oben ist und derart, dass  $\rho(-\mathbb{1}_A) > 0$  für alle Ereignisse  $A \in \mathcal{F}$  mit  $P(A) > 0$ . Nach Theorem 1.1.12 und Satz 1.1.14 erlaubt  $\rho$  unter diesen Voraussetzungen eine robuste Darstellung bezüglich einer konvexen Menge  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_e(P)$  von äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen:

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Nach dem Eintreten eines Ereignisses  $B \in \mathcal{F}$ , das unter dem Referenzmaß  $P$  eine positive Wahrscheinlichkeit besitzt, aktualisieren wir die Menge  $\mathcal{Q}$  und damit das kohärente Risikomaß  $\rho$  gemäß der in (3.26) und (3.27) beschriebenen Methode. Wir wählen ein Intervall

$$[a, b] \subset \left[ \inf_{Q \in \mathcal{Q}} Q(B), \sup_{Q \in \mathcal{Q}} Q(B) \right] = [-\rho(\mathbb{1}_B), \rho(-\mathbb{1}_B)]$$

und erhalten eine Menge  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  von bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen. Jedes  $Q \in \mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  ist äquivalent zu  $P(\cdot|B)$ . Das durch  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]}$  induzierte kohärente und bezüglich  $B$  bedingte Risikomaß  $\rho_B^{[a,b]}$  ist gegeben durch

$$\rho_B^{[a,b]}(X) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}_B^{[a,b]}} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.37)$$

**Korollar 3.2.21.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein kohärentes Risikomaß mit einer robusten Darstellung bezüglich einer Menge  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_e(P)$  und  $B \in \mathcal{F}$  ein Ereignis mit  $P(B) > 0$ . Die aktualisierte Menge von bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mathcal{Q}_B^{[a,b]} \subset \mathcal{M}_e(P(\cdot|B))$ , die durch (3.26) und (3.27) induziert wurde, erzeugt wie in (3.37) ein kohärentes Risikomaß  $\rho_B^{[a,b]} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\rho_B^{[a,b]}(X) = \rho_B^{[a,b]}(X\mathbb{1}_B)$  für alle  $X \in \mathcal{X}$ . Außerdem gilt:*

$$\rho(X\mathbb{1}_B) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_B^{[a,b]}(X) \leq 0.$$

Die obige Implikation bedeutet, dass die Aktualisierungsmethode ein kohärentes Risikomaß  $\rho_B^{[a,b]}$  erzeugt, das als eine Konsequenz aus dem ursprünglichen Risikomaß  $\rho$  und der Information über das Eintreten von  $B$  angesehen werden kann. Die konservativste Aktualisierungsmethode, bei der dieses Ereignisses keine Reduzierung der Unsicherheit gegenüber dem zugrunde liegenden probabilistischen Modell bewirkt, entspricht der verallgemeinerten Regel von Bayes mit  $[a, b] = [-\rho(\mathbb{I}_B), \rho(-\mathbb{I}_B)]$ .

Nehmen wir zusätzlich an, dass sich  $\rho$  additiv auf komonotonen Funktionen verhält, dann ist  $\rho$  nach den Sätzen 3.2.16 und 3.2.17 bis auf das Vorzeichen gegeben durch das Choquet-Integral bezüglich einer konvexen Kapazität  $c$ , d. h., dass

$$\rho(X) = -\mathbb{E}_c(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}. \quad (3.38)$$

In diesem Fall liefert das Theorem 3.2.19 eine Abschätzung des bedingten kohärenten Risikomaßes  $\rho_B^{[a,b]}$  nach oben.

**Korollar 3.2.22.** *Es sei  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  ein kohärentes und komonotones Risikomaß mit einer robusten Darstellung bezüglich einer Menge  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{M}_e(P)$ . Dabei sei  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(c)$  durch den Kern einer konvexen Kapazität  $c : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  gegeben und  $B \in \mathcal{F}$  ein Ereignis mit  $P(B) > 0$ . Für alle  $X \in \mathcal{X}$  gilt:*

$$\rho_B^{[a,b]}(X) \leq -\mathbb{E}_{c^{[a,b]}(\cdot|B)}(X),$$

wobei die bedingte konvexe Kapazität  $c^{[a,b]}(\cdot|B)$  wie in (3.31) definiert ist. Für die Dempster-Shafer-Regel und die klassische Regel von Bayes mit  $a = b = \rho(-\mathbb{I}_B)$  bzw.  $a = b = -\rho(\mathbb{I}_B)$  gilt sogar die Gleichheit. In diesen beiden Fällen ist  $\rho_B^{[a,b]}$  stets additiv auf komonotonen Funktionen. Im Allgemeinen geht diese Eigenschaft durch die Aktualisierung verloren.

Falls die konvexe Kapazität in (3.38) durch eine konvexe Verzerrung des Referenzmaßes gegeben ist, d. h., dass

$$c(A) := f(P(A)) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

für eine konvexe Verzerrungsfunktion  $f$ , dann ist das komonotone kohärente Risikomaß  $\rho$  verteilungsinvariant bezüglich  $P$ . Wenn  $f'(0+) > 0$  ist, so ist die zugehörige bedingte konvexe Kapazität eine konvexe Verzerrung des bedingten Wahrscheinlichkeitsmaßes  $P(\cdot|B)$ , nämlich

$$c^{[a,b]}(A|B) = f_B^{[a,b]}(P(A|B)) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

mit der konvexen Verzerrungsfunktion aus (3.33). Somit hängt die obere Schranke für das aktualisierte Risikomaß  $\rho_B^{[a,b]}$  nur von der Verteilung der

Zufallsvariablen unter  $P(\cdot|B)$  ab. Insbesondere erhalten die Dempster-Shafer Regel und die klassische Regel von Bayes für komonotone Risikomaße auch stets die Verteilungsinvarianz.

Abschließend hatten wir die Klasse der einfachen konvexen Verzerrungsfunktionen vom Typ  $f_\lambda^\kappa$  betrachtet, wobei  $\kappa, \lambda \in (0, 1]$ . Für die Definition und die Beschreibung des Kerns dieser Kapazitäten verweisen wir auf (3.34) und (3.35). Für  $\kappa = 0$  sind diese einfachen Verzerrungsfunktionen  $f_\lambda := f_\lambda^0$  ebenfalls definiert und sie induzieren wie in (3.38) das Average Value at Risk zum Level  $\lambda$ . Den Satz 3.2.19 für konvexe Verzerrungen des Referenzmaßes können wir jedoch nur unter der Bedingung  $f'(0+) > 0$  anwenden. Durch eine geeignete Approximation sind die Ergebnisse der Aktualisierung dennoch übertragbar.

Wir fixieren einen konstanten Parameter  $\lambda \in (0, 1]$  und betrachten das zugehörige Average Value at Risk

$$AVaR_\lambda(X) := -\mathbb{E}_{f_\lambda \circ P}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wobei

$$\mathcal{Q}_\lambda := \left\{ Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\lambda} \text{ P-f. s.} \right\} = \mathcal{Q}(f_\lambda \circ P).$$

Da das Referenzmaß  $P$  selbst in  $\mathcal{Q}_\lambda$  enthalten ist, können wir nach Lemma 1.1.13 bei der Bildung des Supremums auch zu den äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen übergehen. Mit  $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_\lambda \cap \mathcal{M}_e(P)$  haben wir die Darstellung

$$AVaR_\lambda(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_Q(-X) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Nach dem Eintreten eines Ereignisses  $B \in \mathcal{F}$  mit  $P(B) > 0$  wählen wir ein beliebiges Intervall

$$[a, b] \subset [f_\lambda(P(B)), 1 - f_\lambda(P(B^c))],$$

und aktualisieren die Menge  $\mathcal{Q}$  nach der in diesem Abschnitt vorgestellten Methode. Das induzierte bedingte kohärente Risikomaß ist wieder vom Typ eines Average Value at Risk, jedoch nun in Bezug auf das bezüglich  $B$  bedingte Referenzmaß und mit einem aktualisierten Levelparameter. Letzterer hängt vom ursprünglichen Level, der Wahrscheinlichkeit des eintretenden Ereignisses unter dem Referenzmaß und der unteren Grenze des Aktualisierungsintervalls ab.

**Korollar 3.2.23.** *Es seien  $B \in \mathcal{F}$  ein Ereignis mit  $P(B) \in (0, 1)$  und  $[a, b]$  ein geeignetes Intervall mit  $a > 0$ . Die Aktualisierung des  $AVaR_\lambda$  mit Level  $\lambda \in (0, 1]$  gemäß der in (3.26) und (3.27) beschriebenen Methode liefert*

das bedingte kohärente und komonotone Risikomaß  $AVaR_{\lambda_a, P(\cdot|B)}$ , wobei der aktualisierte Parameter gegeben ist durch

$$\lambda_a := \frac{\lambda \cdot a}{P(B)}.$$

**Beweis:** Offenbar gilt für die bedingte Dichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $Q(B) \in [a, b]$  die folgende Abschätzung:

$$\frac{dQ(\cdot|B)}{dP(\cdot|B)} = \mathbb{I}_B \frac{dQ P(B)}{dP Q(B)} \leq \frac{P(B)}{\lambda \cdot a} =: \frac{1}{\lambda_a}.$$

Daraus erhalten wir für das wie in (3.37) induzierte bedingte kohärente Risikomaß

$$\rho_B^{[a,b]}(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}_B^{[a,b]}} \mathbb{E}_Q(-X) \leq AVaR_{\lambda_a, P(\cdot|B)}(X) \quad \forall X \in \mathcal{X}.$$

Wir zeigen, dass beide Seiten sogar übereinstimmen. Für alle  $X \in \mathcal{X}$  gilt die Darstellung

$$AVaR_\lambda(X) = \sup_{\kappa \in (0,1]} \sup_{Q \in \mathcal{Q}(f_\lambda^\kappa \circ P)} \mathbb{E}_Q(-X),$$

das bedeutet, dass das Average Value at Risk auch eine robuste Darstellung bezüglich der kleineren Menge

$$\mathcal{Q}' := \bigcup_{\kappa \in (0,1]} \mathcal{Q}(f_\lambda^\kappa \circ P) \subset \mathcal{Q}$$

besitzt. Nach Satz 3.2.20 liefert die Aktualisierung von  $\mathcal{Q}(f_\lambda^\kappa \circ P)$  gemäß dem Intervall  $[a, b]$  für jeden Parameter  $\kappa \in (0, 1]$  die Mengen der bedingten Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\mathcal{Q}_B^{[a,b]}(f_\lambda^\kappa \circ P) = \bigcup_{y \in [a_\kappa, b_\kappa]} \mathcal{Q}(f_{\lambda_y}^{\kappa_y} \circ P(\cdot|B))$$

wobei  $a_\kappa := a \vee (\kappa \cdot P(B))$ ,  $b_\kappa := b \wedge (1 - \kappa \cdot P(B^c))$  und die aktualisierten Parameter  $\kappa_y, \lambda_y$  wie in (3.36) gegeben sind. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die obere Intervallgrenze  $b < 1$  ist, denn damit verstärken

wir die folgende Ungleichung nur noch. Wir haben für alle  $X \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned}
 \rho_B^{[a,b]}(X) &\geq \sup_{\kappa \in (0,1]} \sup_{Q \in \mathcal{Q}_B^{[a,b]}(f_\lambda^\kappa \circ P)} \mathbb{E}_Q(-X) \\
 &= \sup_{\kappa \in (0,1]} \sup_{y \in [a_\kappa, b_\kappa]} \sup_{Q \in \mathcal{Q}(f_{\lambda_y}^{\kappa y} \circ P(\cdot|B))} \mathbb{E}_Q(-X) \\
 &\geq \sup_{0 < \kappa \leq K} \sup_{y \in [a,b]} -\mathbb{E}_{f_{\lambda_y}^{\kappa y} \circ P(\cdot|B)}(X) \\
 &= -\inf_{y \in [a,b]} \inf_{0 < \kappa \leq K} \mathbb{E}_{f_{\lambda_y}^{\kappa y} \circ P(\cdot|B)}(X) \\
 &= -\inf_{y \in [a,b]} \mathbb{E}_{f_{\lambda_y} \circ P(\cdot|B)}(X) \\
 &= -\mathbb{E}_{f_{\lambda_a} \circ P(\cdot|B)}(X) = AVaR_{\lambda_a, P(\cdot|B)}(X),
 \end{aligned}$$

wobei wir die Konstante  $0 < K := (a/P(B)) \wedge ((1-b)/P(B^c))$  verwendet haben. Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

### 3.2.6 Reduzierung der Modellunsicherheit für das entropische Risikomaß

Im letzten Abschnitt des Kapitels über die Aktualisierung von konvexen Risikomaßen wollen wir das Problem der Reduzierung von Unsicherheit gegenüber dem zugrunde liegenden probabilistischen Modell im entropischen Fall genauer untersuchen. Betrachten wir also auf  $\mathcal{X} := L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$  das Shortfall-Risikomaß  $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , das durch eine exponentielle Verlustfunktion  $l(x) := e^{\beta x}$  mit einem Parameter  $\beta > 0$  induziert wird. Das bedeutet, dass  $\rho$  für alle  $X \in \mathcal{X}$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
 \rho(X) &:= \inf\{m \in \mathbb{R} \mid \mathbb{E}_P(e^{-\beta(X+m)}) \leq 1\} \\
 &= \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_P(e^{-\beta X}).
 \end{aligned}$$

Das entropische Risikomaß besitzt viele wertvolle Eigenschaften. Es ist stetig von unten, stetig von oben und robust darstellbar auf der Menge  $\mathcal{M}_1(P)$  bezüglich der minimalen Penalty-Funktion

$$\alpha_{\min}(Q) = \frac{1}{\beta} H(Q|P) := \frac{1}{\beta} \mathbb{E}_P \left( \frac{dQ}{dP} \log \left( \frac{dQ}{dP} \right) \right),$$

vgl. [21], Beispiel 4.33. Nach Lemma 1.1.13 erlaubt  $\rho$  sogar eine robuste Darstellung auf der Menge  $\mathcal{M}_e(P)$  aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße.

### Eine Aktualisierungsmethode

Das entropische Risikomaß ist außerdem eines der wenigen konvexen Risikomaße, für die eine stark zeitkonsistente Aktualisierungsvorschrift existiert. Nach dem Erhalt einer beliebigen Zusatzinformation  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  können wir zum zugehörigen bedingten entropischen Risikomaß übergehen, welches für  $X \in \mathcal{X}$  definiert ist durch

$$\begin{aligned} \rho_0(X) &:= \operatorname{ess\,inf} \{X_0 \in \mathcal{X}_0 \mid \mathbb{E}_P(e^{-\beta(X+X_0)}|\mathcal{F}_0) \leq 1\} \\ &= \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_P(e^{-\beta X}|\mathcal{F}_0). \end{aligned}$$

In diesem Fall sind  $\rho$  und  $\rho_0$  stets stark zeitkonsistent. Gleichzeitig ist das bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  eine Konsequenz aus dem ursprünglichen Risikomaß  $\rho$  und der eingehenden Information  $\mathcal{F}_0$ , und es verwendet innerhalb der Klasse aller Konsequenzen die strengsten Akzeptanzkriterien. Man vergleiche dazu Satz 3.1.26 und Theorem 3.2.14.

Auch das bedingte entropische Risikomaß erlaubt eine robuste Darstellung. Auf der Menge  $\mathcal{P}_0$  aller absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q \ll P$  mit  $Q|_{\mathcal{F}_0} \sim P|_{\mathcal{F}_0}$  gilt

$$\rho_0(X) = \operatorname{ess\,sup} \{\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) - \alpha_0^{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{P}_0\} \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

wobei die minimale Penalty-Funktion durch die bedingte relative Entropie gegeben ist. Für jedes  $Q \in \mathcal{P}_0$  bezeichne  $h = dQ/dP$  die Dichte von  $Q$  bezüglich  $P$  auf  $\mathcal{F}$  und  $h_0 := \mathbb{E}_P(h|\mathcal{F}_0)$  die entsprechende Dichte auf  $\mathcal{F}_0$ . Dann ist

$$\alpha_0^{\min}(Q) = \frac{1}{\beta} H_0(Q|P) := \frac{1}{\beta} \mathbb{E}_P \left( \frac{h}{h_0} \log \left( \frac{h}{h_0} \right) \mid \mathcal{F}_0 \right).$$

Man beachte, dass  $\alpha_0^{\min}(P) = 0$ , d. h., dass  $\rho$  sogar eine robuste Darstellung auf der Menge  $\mathcal{M}_e(P)$  aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße besitzt. Für weitere Eigenschaften des bedingten entropischen Risikomaßes und der bedingten relativen Entropie verweisen wir auf [13], Abschnitt 4, sowie auf [17], Abschnitt 6.

Wir wählen nun eine konvexe Teilmenge

$$\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}_0 \quad \text{mit} \quad P \in \mathcal{Q}. \quad (3.39)$$

Die Wahrscheinlichkeitsmaße, die nicht in dieser Menge enthalten sind, werden wir bei der Risikobewertung nach dem Eingang der Information  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  nicht mehr berücksichtigen. Das für  $X \in \mathcal{X}$  durch

$$\rho_0^{\mathcal{Q}}(X) := \operatorname{ess\,sup} \{\mathbb{E}_Q(-X|\mathcal{F}_0) - \alpha_0^{\min}(Q) \mid Q \in \mathcal{Q}\} \quad (3.40)$$

definierte bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0^{\mathcal{Q}}$  ist für jede Wahl von  $\mathcal{Q}$  eine Konsequenz aus  $\rho$  und  $\mathcal{F}_0$ . Durch den Ausschluss gewisser probabilistischer Modelle für die Zukunft schwächen wir im Vergleich zu  $\rho_0$  die Akzeptanzkriterien ab, d. h., es ist

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{A}_0^{\mathcal{Q}}.$$

**Satz 3.2.24.** *Das durch die in (3.39) und (3.40) beschriebene Aktualisierungsmethode erzeugte bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0^{\mathcal{Q}} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}_0$  besitzt für jedes Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}$  die Darstellung*

$$\rho_0^{\mathcal{Q}}(X) = \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_P(e^{-\beta X} | \mathcal{F}_0) - \frac{1}{\beta} \operatorname{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{Q}} H_0(Q | Q_{\beta X}),$$

wobei das äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_{\beta X} \in \mathcal{M}_e(P)$  durch die folgende Dichte bezüglich  $P$  gegeben ist:

$$\frac{dQ_{\beta X}}{dP} = \frac{e^{-\beta X}}{\mathbb{E}_P(e^{-\beta X})}.$$

**Beweis:** Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{P}_0$  kann die bedingte relative Entropie bezüglich  $P$  auf die folgende Weise umgeformt werden:

$$H_0(Q | P) = H_0(Q | Q_{\beta X}) - \mathbb{E}_Q(\beta X | \mathcal{F}_0) - \log \mathbb{E}_P(e^{-\beta X} | \mathcal{F}_0).$$

Damit erhalten wir für alle  $X \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \rho_0^{\mathcal{Q}}(X) &= -\frac{1}{\beta} \operatorname{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{Q}} \{ \mathbb{E}_Q(\beta X | \mathcal{F}_0) + H_0(Q | P) \} \\ &= \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_P(e^{-\beta X} | \mathcal{F}_0) - \frac{1}{\beta} \operatorname{ess\,inf}_{Q \in \mathcal{Q}} H_0(Q | Q_{\beta X}) \end{aligned}$$

□

Falls das zugrunde liegende Referenzmaß  $P$  bezüglich  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  eine reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit  $(\omega, A) \mapsto P_\omega(A)$  auf  $(\Omega, \mathcal{F})$  besitzt, dann liefert die Familie  $\{\rho_\omega\}$  der unbedingten entropischen Risikomaße  $\rho_\omega : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\rho_\omega(X) := \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_{P_\omega}(e^{-\beta X}) \quad \forall X \in \mathcal{B}$$

eine reguläre bedingte Darstellung für das bedingte entropische Risikomaß  $\rho_0$  auf dem Raum  $\mathcal{B}$  aller beschränkten und messbaren Zufallsvariablen. Das

bedeutet, dass für jedes Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{B}$  die Abbildung  $\omega \mapsto \rho_\omega(X)$  messbar bezüglich  $\mathcal{F}_0$  ist und

$$\rho_0(X)(\omega) = \rho_\omega(X) \quad P\text{-f. s.}$$

Unter diesen Bedingungen kann das in der robusten Darstellung von  $\rho_0$  verwendete essentielle Supremum als ein punktweise gebildetes Supremum angesehen werden.

Unter geeigneten Voraussetzungen existiert auch für das durch  $\mathcal{Q}$  induzierte bedingte konvexe Risikomaß  $\rho_0^{\mathcal{Q}}$  eine reguläre bedingte Darstellung  $\{\rho_\omega^{\mathcal{Q}}\}$  mit  $\mathcal{Q}_\omega \subset \mathcal{M}_1(P_\omega)$  und

$$\begin{aligned} \rho_\omega^{\mathcal{Q}}(X) &= \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\omega} \left\{ \mathbb{E}_Q(-X) - \frac{1}{\beta} H(Q|P_\omega) \right\} \\ &= \frac{1}{\beta} \log \mathbb{E}_{P_\omega}(e^{-\beta X}) - \frac{1}{\beta} \inf_{Q \in \mathcal{Q}_\omega} H(Q|Q_{\beta X}). \end{aligned}$$

Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$  durch eine disjunkte Zerlegung von  $\Omega$  erzeugt wird. Man vergleiche dazu auch die Untersuchungen im zweiten Teil von Kapitel 2. Dann kann das Problem der Minimierung der bedingten relativen Entropie für jedes Szenario als ein entsprechendes Minimierungsproblem in der unbedingten Situation aufgefasst werden, welches wir im Folgenden für den Spezialfall mit  $P_\omega = P$  und  $\beta = 1$  diskutieren.

### Das zugehörige unbedingte Minimierungsproblem

Wir fixieren ein beliebiges Auszahlungsprofil  $X \in \mathcal{X}$  und betrachten eine Menge  $\mathcal{Q}$  von Wahrscheinlichkeitsmaßen, welche absolutstetig bezüglich  $P$  sind. Es soll das folgende Problem gelöst werden:

$$\text{Minimiere } H(Q|Q_X) \text{ über } Q \in \mathcal{Q}! \quad (3.41)$$

Dabei bezeichne  $Q_X \sim P$  das äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß mit Dichte

$$\frac{dQ_X}{dP} = \frac{e^{-X}}{\mathbb{E}_P(e^{-X})}.$$

Minimierungsprobleme dieser Art sind in der Literatur wohlbekannt. Im folgenden Satz fassen wir zunächst Resultate zur Existenz eines minimierenden Wahrscheinlichkeitsmaßes von [30] und allgemeine Charakterisierungen von [24] zusammen.

**Satz 3.2.25.** *Unter den obigen Voraussetzungen gelten folgende Aussagen:*

(i) *Falls  $\mathcal{Q}$  konvex und abgeschlossen bezüglich der Totalvariation ist, so existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q' \in \mathcal{Q}$ , das die relative Entropie in (3.41) minimiert.*

(ii)  *$Q' \in \mathcal{Q}$  minimiert die relative Entropie in (3.41) genau dann, wenn*

$$\mathbb{E}_{Q'} \left( \log \left( \frac{dQ'}{dQ_X} \right) \right) = \inf_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_Q \left( \log \left( \frac{dQ'}{dQ_X} \right) \right).$$

(iii) *Angenommen, es existiert ein  $Q \in \mathcal{Q}$  mit  $Q \sim P$ . Falls ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q' \in \mathcal{Q}$  die relative Entropie in (3.41) minimiert, dann gilt  $Q' \sim P$ .*

**Beweis:** Die Existenz eines Wahrscheinlichkeitsmaßes, das die relative Entropie über  $\mathcal{Q}$  minimiert, wird von [30] in Proposition 8.5 in allgemeinerer Form für so genannte  $\varphi$ -Divergenzen gezeigt. Die relative Entropie entspricht der  $\varphi$ -Divergenz mit  $\varphi(x) := x \log x$ . Aus der strikten Konvexität des Funktionals  $H(\cdot|Q_X)$  folgt die Eindeutigkeit des Minimierers. Die Charakterisierung in (ii) und den Beweis von (iii) findet man in [24], Theorem 2.2 und Korollar 2.3.  $\square$

### Minimierung der relativen Entropie über einen Kern $\mathcal{Q}(f \circ P)$

Um weitere qualitative Aussagen über die Lösung des Problems (3.41) treffen zu können, werden wir von nun an unsere Diskussion auf die Situation beschränken, bei der  $\mathcal{Q}$  durch den Kern einer konvexen Verzerrung des Referenzmaßes gegeben ist. Diese zusätzliche Struktur wird sich auch in diesem Abschnitt als sehr hilfreich erweisen. Nehmen wir also an, es ist

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(f \circ P) := \{Q \in \mathcal{M}_1(P) \mid Q(A) \geq f(P(A)) \forall A \in \mathcal{F}\}$$

für eine konvexe Verzerrungsfunktion  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Außerdem sei  $f$  stetig. Unter diesen Bedingungen ist  $\mathcal{Q}$  eine konvexe Menge von absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsmaßen, vgl. Bemerkung 3.2.18, und abgeschlossen bezüglich der Totalvariation. Nach Satz 3.2.25 existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q' \in \mathcal{Q}$ , das die relative Entropie in (3.41) minimiert. Da auch das Referenzmaß  $P$  in  $\mathcal{Q}$  enthalten ist, ist der Minimierer  $Q'$  ein zu  $P$  äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß.

Das Choquet-Integral bezüglich einer konvexen Verzerrung von  $P$  ist ein konkaves Funktional auf dem Raum  $\mathcal{X}$ , vgl. die Definition in (3.28) und die Eigenschaften in Satz 3.2.16. Es gilt nach Satz 3.2.17:

$$\mathbb{E}_{f \circ P}(Y) = \min_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_Q(Y) \quad \forall Y \in \mathcal{X}.$$

Besitzt das minimierende Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q' \in \mathcal{Q}$  eine beschränkte Dichte bezüglich  $Q_X$ , dann muss nach Satz 3.2.25 (ii) die Gleichheit

$$\mathbb{E}_{f \circ P} \left( \log \left( \frac{dQ'}{dQ_X} \right) \right) = \mathbb{E}_{Q'} \left( \log \left( \frac{dQ'}{dQ_X} \right) \right) \quad (3.42)$$

gelten. Das bedeutet, der Erwartungswert der Zufallsvariable  $\log(dQ'/dQ_X)$  stimmt unter  $Q'$  mit dem Choquet-Integral bezüglich  $f \circ P$  überein.

Leider gibt es keine allgemein gültige Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen, die innerhalb des Kerns der konvexen Verzerrung  $f \circ P$  den Erwartungswert einer beliebigen Zufallsvariable minimieren. Umgekehrt lässt sich jedoch zu einem fixierten Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \in \mathcal{M}_1(P)$  stets eine konvexe Verzerrungsfunktion  $f^Q$  und damit eine konvexe Verzerrung  $f^Q \circ P$  konstruieren, so dass diese Optimalität zumindest für spezielle Zufallsvariablen erfüllt ist.

**Lemma 3.2.26.** *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q \ll P$  mit zugehöriger Dichte  $h = dQ/dP$  induziert durch*

$$f^Q(x) := \int_0^x F_h^{-1}(t) dt \quad \forall x \in [0, 1], \quad (3.43)$$

eine absolutstetige, konvexe Verzerrungsfunktion  $f^Q : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , wobei  $F_h^{-1}$  die rechtsstetige verallgemeinerte Inverse der Verteilungsfunktion von  $h$  bezeichnet, d. h., dass für alle  $t \in [0, 1]$

$$F_h^{-1}(t) := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_h(x) > t\} = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid P(h \leq x) > t\}.$$

Außerdem gilt:

- (i)  $\mathbb{E}_Q(\varphi(h)) = \mathbb{E}_{f^Q \circ P}(\varphi(h))$  für jede fallende Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (ii) Es ist  $Q \in \mathcal{Q}(f \circ P)$  genau dann, wenn  $f^Q \geq f$ . Insbesondere gilt, dass  $Q \in \mathcal{Q}(f^Q \circ P)$ .

**Beweis:** In Teil (i) verwendet man den Satz von Fubini und die untere Hardy-Littlewood-Ungleichung, siehe [21], Theorem A.24. Wir betrachten eine Zufallsvariable  $Y \in \mathcal{X}$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $Y \geq 0$  ist. Der allgemeine Fall folgt durch die Addition einer geeigneten Konstanten. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{f^Q \circ P}(Y) &= \int_0^\infty f^Q(P(Y \geq y)) dy = \int_0^\infty \int_0^1 F_{\mathbb{I}_{\{Y \geq y\}}}^{-1}(1-t) F_h^{-1}(t) dt dy \\ &= \int_0^1 F_Y^{-1}(1-t) F_h^{-1}(t) dt \leq \mathbb{E}_P(Yh) = \mathbb{E}_Q(Y). \end{aligned}$$

Insbesondere folgt daraus, dass  $Q \in \mathcal{Q}(f^Q \circ P)$ . Außerdem stimmen die linke und die rechte Seite der Ungleichung überein, falls die Zufallsvariable von der Form  $Y = \varphi(h)$  ist mit einer monoton fallenden Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . In ausführlicher Form findet man den Beweis in der Diplomarbeit von [29].

Natürlich gilt  $\mathcal{Q}(f^Q \circ P) \subset \mathcal{Q}(f \circ P)$ , wenn  $f^Q \geq f$  ist. In Teil (ii) bleibt demnach nur zu zeigen, dass  $f^Q$  jede andere konvexe Verzerrungsfunktion dominiert, deren zugehöriger Kern das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  enthält. Es sei also  $Q \in \mathcal{Q}(f \circ P)$ . Wir betrachten die monoton fallenden Funktionen vom Typ  $\varphi(x) = \mathbb{I}_{\{x \leq c\}}$  mit  $c \geq 0$ . Wir erhalten

$$f^Q(P(h \leq c)) = Q(h \leq c) \geq f(P(h \leq c)).$$

Für alle  $x \in [0, 1]$  der Form  $x = P(h \leq c)$  mit  $c \geq 0$  haben wir damit  $f^Q(x) \geq f(x)$ . Besitzt die Verteilungsfunktion von  $h$  eine Sprungstelle, so ist die verallgemeinerte Inverse auf dem zugehörigen Sprungintervall konstant und  $f^Q$  wächst linear. Die Funktion  $f$  ist konvex. Deshalb gilt die Ungleichung auf dem gesamten Einheitsintervall.  $\square$

Ausgestattet mit diesem Lemma sind wir nun in der Lage, das „passende Problem zur Lösung“ zu formulieren.

**Bemerkung 3.2.27.** Jede Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  induziert durch

$$\frac{dQ_{g(X)}}{dP} = \frac{e^{-g(X)}}{\mathbb{E}_P(e^{-g(X)})} \quad (3.44)$$

ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_{g(X)} \sim P$ , welches wiederum durch (3.43) eine absolutstetige und konvexe Verzerrungsfunktion  $f^{Q_{g(X)}}$  erzeugt.

- (i) Falls die Funktion  $g$  (streng) monoton wächst, dann ist die Dichte  $dQ_{g(X)}/dP$  eine (streng) monoton fallende Funktion von  $X$ .
- (ii) Angenommen,  $g$  ist streng monoton wachsend und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. Dann ist

$$\log \left( \frac{dQ_{g(X)}}{dQ_X} \right) = X - g(X) + \log \left( \frac{\mathbb{E}_P(e^{-X})}{\mathbb{E}_P(e^{-g(X)})} \right) \in \mathcal{X}$$

eine monoton wachsende Funktion von  $X$  bzw. eine fallende Funktion von  $dQ_{g(X)}/dP$ . Nach Lemma 3.2.26 gilt  $Q_{g(X)} \in \mathcal{Q}(f^{Q_{g(X)}} \circ P)$  und

$$\mathbb{E}_{Q_{g(X)}} \left( \log \left( \frac{dQ_{g(X)}}{dQ_X} \right) \right) = \mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P} \left( \log \left( \frac{dQ_{g(X)}}{dQ_X} \right) \right).$$

Nach den Charakterisierungen in Satz 3.2.25 (ii) und (3.42) bedeutet dies, dass das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_{g(X)}$  die relative Entropie bezüglich  $Q_X$  über den Kern der konvexen Verzerrung  $f^{Q_{g(X)}} \circ P$  minimiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} H(Q_{g(X)}|Q_X) &= \min_{Q \in \mathcal{Q}(f^{Q_{g(X)}} \circ P)} H(Q|Q_X) \\ &= \mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P} (X - g(X)) + \log \left( \frac{\mathbb{E}_P(e^{-X})}{\mathbb{E}_P(e^{-g(X)})} \right). \end{aligned}$$

Wegen der Komonotonie von  $g(X)$  und  $X - g(X)$  erhalten wir außerdem

$$\mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P} (X - g(X)) = \mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P} (X) - \mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P} (g(X)).$$

- (iii) Für die rechtsstetige verallgemeinerte Inverse von Verteilungsfunktionen gilt folgende Rechenregel, vgl. [21], Lemma A.23: Ist  $\varphi$  eine monoton fallende Funktion, so ist  $F_{\varphi(X)}^{-1}(t) = \varphi(F_X^{-1}(1-t))$  für fast alle  $t \in (0, 1)$ . Wächst die Funktion  $g$  monoton, dann haben wir also

$$f^{Q_{g(X)}}(x) = \int_0^x \frac{e^{-g(F_X^{-1}(1-t))}}{c(g)} dt \quad (3.45)$$

mit

$$c(g) := \mathbb{E}_P (e^{-g(X)}) = \int_0^1 e^{-g(F_X^{-1}(1-t))} dt. \quad (3.46)$$

Für konvexe Verzerrungsfunktionen  $f = f^{Q_{g(X)}}$ , die durch eine streng monoton wachsende und Lipschitz-stetige Funktion  $g$  induziert werden, haben wir das Minimierungsproblem gelöst. Jedoch kann nicht jede Verzerrungsfunktion  $f$  in dieser Form dargestellt werden. Das folgende Lemma zeigt jedoch, dass es für die Lösung des Minimierungsproblems nicht notwendig ist, dass  $f$  und  $f^{Q_{g(X)}}$  identisch sind. Es genügt, dass die zugehörigen Choquet-Integrale der Zufallsvariable  $X - g(X)$  übereinstimmen.

**Lemma 3.2.28.** *Es seien  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein monoton wachsende Funktion und  $f^{Q_{g(X)}}$  die in (3.45) und (3.46) definierte absolutstetige, konvexe Verzerrungsfunktion, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- $g$  ist streng wachsend und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1,
- $f^{Q_{g(X)}} \geq f$ ,
- $\mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P}(X - g(X)) = \mathbb{E}_{f \circ P}(X - g(X))$ .

Dann ist durch das in (3.44) definierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_{g(X)} \sim P$  die eindeutige Lösung des Problems (3.41) gegeben, d. h., dass  $Q_{g(X)} \in \mathcal{Q}$  und

$$\begin{aligned} H(Q_{g(X)}|Q_X) &= \min_{Q \in \mathcal{Q}} H(Q|Q_X) \\ &= \mathbb{E}_{f \circ P}(X - g(X)) + \log \left( \frac{\mathbb{E}_P(e^{-X})}{\mathbb{E}_P(e^{-g(X)})} \right). \end{aligned}$$

**Beweis:** Es ist  $Q_{g(X)} \in \mathcal{Q}$  nach Lemma 3.2.26 (ii), und nach Bemerkung 3.2.27 (ii) ist die Zufallsvariable  $\log(dQ_{g(X)}/dQ_X)$  eine monoton fallende Funktion der Dichte  $dQ_{g(X)}/dP$ . Mit dem Lemma 3.2.26 (i) und der dritten vorausgesetzten Eigenschaft erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Q_{g(X)}} \left( \log \left( \frac{dQ_{g(X)}}{dQ_X} \right) \right) &= \mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P} \left( \log \left( \frac{dQ_{g(X)}}{dQ_X} \right) \right) \\ &= \mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P}(X - g(X)) + \log \left( \frac{\mathbb{E}_P(e^{-X})}{\mathbb{E}_P(e^{-g(X)})} \right) \\ &= \mathbb{E}_{f \circ P}(X - g(X)) + \log \left( \frac{\mathbb{E}_P(e^{-X})}{\mathbb{E}_P(e^{-g(X)})} \right) \\ &= \mathbb{E}_{f \circ P} \left( \log \left( \frac{dQ_{g(X)}}{dQ_X} \right) \right) \\ &= \min_{Q \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_Q \left( \log \left( \frac{dQ_{g(X)}}{dQ_X} \right) \right). \end{aligned}$$

Nach Satz 3.2.25 (ii) ist  $Q_{g(X)}$  der eindeutige Minimierer von (3.41).  $\square$

**Lemma 3.2.29.** *Es sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende und Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante 1. Die durch (3.45) und (3.46) definierte absolutstetige, konvexe Verzerrungsfunktion  $f^{Q_{g(X)}}$  sei derart, dass  $f^{Q_{g(X)}} \geq f$ . Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

$$(a) \mathbb{E}_{f^{Q_{g(X)}} \circ P}(X - g(X)) = \mathbb{E}_{f \circ P}(X - g(X)).$$

$$(b) f^{Q_{g(X)}} = f \mu_{g,X}\text{-fast sicher, wobei } d\mu_{g,X} := d(g - \text{id})(F_X^{-1}(1 - \cdot)).$$

Zusätzlich sei  $f$  sogar streng konvex. Falls die obigen Bedingungen erfüllt sind, dann kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass  $g$  streng monoton wachsend ist.

**Beweis:** Wir verwenden die Notation  $f_g := f^{Q_{g(X)}}$ . Nach Theorem 4.64 und Lemma A.15 bei [21] gilt für die Choquet-Intergale bezüglich absolutstetiger und konvexer Verzerrungen des Referenzmaßes

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}_{f_g \circ P}(X - g(X)) - \mathbb{E}_{f \circ P}(X - g(X)) \\ &= \int_{[0,1]} F_{X-g(X)}^{-1}(1-t) \cdot (f'_g - f')(t) dt \\ &= \int_{[0,1]} (\text{id} - g)(F_X^{-1}(1-t)) \cdot (f'_g - f')(t) dt \\ &= \int_{[0,1]} G(t) dF(t), \end{aligned}$$

wobei  $F(t) := f_g(t) - f(t)$  und  $G(t) := (\text{id} - g)(F_X^{-1}(1-t))$  für alle  $t \in [0, 1]$ . In  $t = 0$  haben wir  $F_X^{-1}(1-t)$  beliebig monoton fortgesetzt. Der Satz von der partiellen Integration in seiner allgemeinen Form für linksstetige Funktionen  $F$  und  $G$  von beschränkter Variation lautet:

$$F(1) \cdot G(1) - F(0) \cdot G(0) = \int_{[0,1]} G(t) dF(t) + \int_{[0,1]} F(t+) dG(t)$$

Die Funktion  $F$  ist stetig und normiert auf  $F(0) = F(1) = 0$ . Damit erhalten wir

$$0 \leq \mathbb{E}_{f_g \circ P}(X - g(X)) - \mathbb{E}_{f \circ P}(X - g(X)) = \int_{[0,1]} (f_g - f) d\mu_{g,X}.$$

Da  $f_g \geq f$  ist, sind die Bedingungen (a) und (b) äquivalent.

Gilt die Bedingung (b) und ist  $f$  streng konvex, dann können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $g$  streng monoton wachsend ist. Falls nämlich ein Intervall  $(a, b]$  existiert, auf dem  $g$  konstant ist, dann haben wir entweder  $f_g(t) = f(t)$  für alle  $t \in (a, b]$  oder  $F_X^{-1}(1-t)$  ist ebenfalls konstant auf diesem Intervall. Im ersten Fall folgt, dass die Ableitung

$$f'_g(t) = \frac{e^{-g(F_X^{-1}(1-t))}}{c(g)}$$

auf dem Intervall streng monoton wächst und damit auch  $g$ . Dies ist ein Widerspruch. Im zweiten Fall können wir  $g$  auch linear zwischen  $a$  und  $b$  interpolieren, ohne dass dadurch die obigen Beziehungen beeinträchtigt werden.  $\square$

Für eine einfache Zufallsvariable  $X \in \mathcal{X}$  ist das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q' \in \mathcal{Q}$ , das die relative Entropie bezüglich  $Q_X$  in (3.41) minimiert, stets von der Form  $Q' = Q_{g(X)}$ , wobei  $g$  eine streng monoton wachsende und Lipschitz-stetige Funktion ist. Leider lassen sich die Beweismethoden nicht ohne Weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen.

**Theorem 3.2.30.** *Es sei  $X \in \mathcal{X}$  eine einfache Zufallsvariable. Falls die Verzerrungsfunktion  $f$  streng konvex ist und  $f'(1-) < \infty$ , dann existiert eine streng monoton wachsende und Lipschitz-stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Lipschitz-Konstante 1 derart, dass durch das in (3.44) definierte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_{g(X)} \sim P$  der eindeutige Minimierer des Problems (3.41) gegeben ist. Es gilt:*

$$\begin{aligned} H(Q_{g(X)}|Q_X) &= \min_{Q \in \mathcal{Q}} H(Q|Q_X) \\ &= \mathbb{E}_{f \circ P}(X - g(X)) + \log \left( \frac{\mathbb{E}_P(e^{-X})}{\mathbb{E}_P(e^{-g(X)})} \right). \end{aligned}$$

**Beweis:** Betrachten wir eine einfache Zufallsvariable  $X \in \mathcal{X}$  der Form

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{A_i},$$

welche gegeben sei durch eine disjunkte Zerlegung  $\{A_i\} \subset \mathcal{F}$  mit  $P(A_i) > 0$  für alle  $i \leq n$  und durch die reellen Werte  $x_1 > \dots > x_n$ . Die Verteilungsfunktion von  $X$  ist gegeben durch  $F_X(x) = P(A_n \cup \dots \cup A_{k+1})$ , falls

$x_{k+1} \leq x < x_k$ . Für die rechtsstetige Inverse erhalten wir  $F_X^{-1}(1-t) = x_k$ , falls  $P(A^{k-1}) < t \leq P(A^k)$ , wobei  $A^k := A_1 \cup \dots \cup A_k$ .

Nach Lemma 3.2.28 und Lemma 3.2.29 genügt es zu zeigen, dass eine monoton wachsende und Lipschitz-stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, so dass für die in (3.45) und (3.46) definierte absolutstetige, konvexe Verzerrungsfunktion die folgenden Bedingungen gelten:

- $f^{Q_{g(X)}} \geq f$ ,
- $f^{Q_{g(X)}} = f$   $\mu_{g,X}$ -fast sicher.

Für eine monoton wachsende und Lipschitz-stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit Lipschitz-Konstante 1 ist die zugehörige Verzerrungsfunktion  $f^{Q_{g(X)}}$  eine stückweise lineare, konvexe Funktion. Es gilt für  $P(A^{k-1}) < x \leq P(A^k)$

$$f^{Q_{g(X)}}(x) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{-g(x_i)}}{c(g)} P(A_i) + \frac{e^{-g(x_k)}}{c(g)} (x - P(A^{k-1})),$$

wobei

$$c(g) := \sum_{i=1}^n e^{-g(x_i)} P(A_i).$$

Demnach reicht es aus, die Funktion  $g$  auf der Menge  $\{x_n, \dots, x_1\}$  zu bestimmen. Die obigen Eigenschaften sind äquivalent dazu, dass für alle  $k = 1, \dots, n-1$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $f^{Q_{g(X)}}(P(A^k)) \geq f(P(A^k))$ ,
- $f^{Q_{g(X)}}(P(A^k)) = f(P(A^k))$  bzw.  $g(x_k) - g(x_{k+1}) = x_k - x_{k+1}$ .

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $\text{ess inf } X = x_n = 0$ , ansonsten betrachten wir statt  $X$  die Zufallsvariable  $Y = X - x_n$ . Ist  $g_Y$  die gesuchte Funktion für  $Y$ , dann setzen wir  $g_X(x) := g_Y(x - x_n)$ . Wir erhalten  $Q_{g_X(X)} = Q_{g_Y(Y)}$ . Wegen  $F_X^{-1} - x_n = F_Y^{-1}$  gelten die obigen Bedingungen genau dann für  $g_Y$ , wenn sie für  $g_X$  erfüllt ist.

Es sei  $\mathcal{G}(f, X)$  die Menge aller wachsenden Funktionen  $g : \{x_n, \dots, x_1\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x_n) = 0$ , welche Lipschitz-stetig sind mit Lipschitz-Konstante 1 und so, dass die induzierte Verzerrungsfunktion der Bedingung  $f^{Q_{g(X)}}(P(A^k)) \geq f(P(A^k))$  für alle  $k \leq n-1$  genügt. Auf dieser Menge von Funktionen definieren wir eine partielle Ordnung:

$$g_1 \preceq g_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f^{Q_{g_1(X)}} \leq f^{Q_{g_2(X)}}. \quad (3.47)$$

Die konstante Funktion 0 ist das größte Element von  $\mathcal{G}(f, X)$ . Es gilt nämlich  $f^{Q_0}(x) = x$ , und für jedes  $g \in \mathcal{G}(f, X)$  ist die Identität auf dem Einheitsintervall größer als  $f^{Q_g(x)}$ , also  $g \preceq 0$ . Für unsere Zwecke benötigen wir jedoch ein minimales Element. Das ist eine Funktion  $g \in \mathcal{G}(f, X)$  derart, dass für jede weitere Funktion  $g \succeq \bar{g}$  in  $\mathcal{G}(f, X)$  die Beziehung  $f^{Q_g(x)} = f^{Q_{\bar{g}}(x)}$  folgt. Wir zeigen unten, dass für ein solches minimales Element die gewünschten Eigenschaften gelten.

Zunächst beweisen wir die Existenz eines minimalen Elements mit Hilfe des Zornschen Lemmas. Dazu müssen wir nachweisen, dass jede Kette  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{G}(f, X)$  eine untere Schranke  $g^* \in \mathcal{G}(f, X)$  besitzt. Es sei  $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}(f, X)$  eine total geordnete Teilmenge. Wir verwenden der Einfachheit halber die Notation  $f_g := f^{Q_g(x)}$  und setzen

$$f^*(x) := \inf_{g \in \mathcal{C}} f_g(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Die Funktion  $f^*$  ist wohldefiniert, stückweise linear und dominiert  $f$ . Außerdem gibt es eine Folge  $\{g_m\} \subset \mathcal{C}$ , so dass  $g_m \succeq g_{m+1}$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  und

$$f^*(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{g_m}(x) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Die Funktionen  $f_{g_m}$  konvergieren gleichmäßig gegen  $f^*$ , womit die Grenzfunktion ebenfalls eine konvexe und stetige Verzerrungsfunktion ist.

Es bleibt zu zeigen, dass eine Funktion  $g^* \in \mathcal{G}(f, X)$  existiert mit  $f^* = f_{g^*}$ . Der einzige Kandidat ist für alle  $k \leq n$  definiert durch

$$\begin{aligned} g^*(x_k) &:= -\log \left( \frac{f^*(P(A^k)) - f^*(P(A^{k-1}))}{P(A_k)} \cdot c(g^*) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left( g_m(x_k) + \log \left( \frac{c(g_m)}{c(g^*)} \right) \right), \end{aligned}$$

wobei  $c(g^*)$  eine geeignet gewählte Konstante ist. Wir müssen nachweisen, dass  $g^*$  monoton wachsend und Lipschitz-stetig ist. Dazu betrachten wir die Folge der Konstanten

$$c(g_m) = \frac{c(g_m)}{e^{-g_m(x_n)}} = \frac{P(A_n)}{1 - f_{g_m}(P(A^{n-1}))} = \frac{1}{f'_{g_m}(1-)} \geq \frac{1}{f'(1-)} > 0.$$

Diese fällt monoton und ist nach unten durch eine positive Konstante beschränkt. Setzen wir  $c(g^*) := \lim c(g_m)$ , dann kann demnach  $g^*$  dargestellt werden als Grenzwert der Folge  $\{g_m\}$ . Es gilt

$$g^*(x_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x_k) \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Somit ist  $g^*$  monoton wachsend und Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante 1. Das bedeutet, dass wir mit  $g^* \in \mathcal{G}(f, X)$  eine untere Schranke für die Kette  $\mathcal{C}$  in Bezug auf die partielle Ordnung (3.47) gefunden haben.

Wir beweisen nun, dass ein minimales Element  $g \in \mathcal{G}(f, X)$  auch die zweite gewünschte Eigenschaft besitzt, d. h., dass für alle  $k \leq n - 1$  entweder  $f_g(P(A^k)) = f(P(A^k))$  oder  $g(x_k) - g(x_{k+1}) = x_k - x_{k+1}$  gilt. Wir nehmen stattdessen an, dass

$$f_g(P(A^k)) > f(P(A^k)) \quad \text{sowie} \quad g(x_k) - g(x_{k+1}) < x_k - x_{k+1}$$

für ein  $k \leq n - 1$  und leiten daraus einen Widerspruch ab. Ohne Einschränkung gelte  $g(x_k) < g(x_{k-1})$  und  $g(x_{k+1}) > g(x_{k+2})$ , falls  $1 < k < n - 1$ . Wir setzen

$$c(g_\varepsilon) := \begin{cases} c(g), & \text{falls } k < n - 1, \\ \frac{P(A_n)}{1 - f_g(P(A^{n-1})) + \varepsilon}, & \text{falls } k = n - 1 \end{cases}$$

und definieren die Funktion

$$g_\varepsilon(x_i) = \begin{cases} -\log \left( \frac{e^{-g(x_k)} c(g_\varepsilon)}{c(g)} - \frac{\varepsilon c(g_\varepsilon)}{P(A_k)} \right), & \text{falls } i = k, \\ -\log \left( \frac{e^{-g(x_{k+1})} c(g_\varepsilon)}{c(g)} + \frac{\varepsilon c(g_\varepsilon)}{P(A_{k+1})} \right), & \text{falls } i = k + 1, \\ -\log \left( \frac{e^{-g(x_i)} c(g_\varepsilon)}{c(g)} \right), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wählen wir  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, dann gilt  $g_\varepsilon \in \mathcal{G}(f, X)$ . Der Beweis dieser Aussage sei dem interessierten Leser überlassen. Außerdem haben wir

$$f_{g_\varepsilon}(P(A^i)) = \begin{cases} f_g(P(A^k)) - \varepsilon, & \text{falls } i = k, \\ f_g(P(A^i)), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von  $g$ , und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] ARTZNER, Philippe ; DELBAEN, Freddy ; EBER, Jean-Marc ; HEATH, David: Coherent measures of risk. In: *Mathematical Finance* 9 (1999), Nr. 3, S. 203–228
- [2] ARTZNER, Philippe ; DELBAEN, Freddy ; EBER, Jean-Marc ; HEATH, David ; KU, Hyejin: Coherent Multiperiod Risk Measurement. In: *Working Paper* (2002)
- [3] ARTZNER, Philippe ; DELBAEN, Freddy ; EBER, Jean-Marc ; HEATH, David ; KU, Hyejin: Coherent multiperiod risk adjusted values and Bellman’s principle. In: *Working Paper* (2003)
- [4] BARRIEU, Pauline ; EL KAROUI, Nicole: Inf-convolution of risk measures and optimal risk transfer. In: *Finance and Stochastics* 9 (2005), Nr. 2, S. 269–298
- [5] BAUER, Heinz: *Wahrscheinlichkeitstheorie, 4. Auflage*. Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1991
- [6] CARLIER, Guillaume ; DANA, Rose-Anne: Core of convex distortions of a probability. In: *Journal of Economic Theory* 113 (2003), Nr. 2, S. 199–222
- [7] CHERIDITO, Patrick ; DELBAEN, Freddy ; KUPPER, Michael: Dynamic Monetary Risk Measures for Bounded Discrete-Time Processes. In: *Electronic Journal of Probability* 11 (2006), Nr. 3, S. 57–106
- [8] CHOQUET, Gustave: Forme abstraite du théorème de capacitabilité. In: *Annales de l’institut Fourier* 9 (1959), S. 83–89
- [9] DELLACHERIE, Claude: Une version non linéaire du théorème de représentation de Riesz. In: *CRAS* 324 (1997), S. 1011–1014

- [10] DEMPSTER, A. P.: Upper and Lower Probabilities Induced by a Multi-valued Mapping. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 38 (1967), Nr. 2, S. 325–339
- [11] DENNEBERG, Dieter: Conditioning (updating) non-additive measures. In: *Annals of Operations Research* 52 (1994), S. 21–42
- [12] DENNEBERG, Dieter: *Non-additive measure and integral*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Boston - London, 1994
- [13] DETLEFSEN, Kai ; SCANDOLO, Giacomo: Conditional and dynamic convex risk measures. In: *Finance and Stochastics* 9 (2005), Nr. 4, S. 539–561
- [14] DIEUDONNÉ, Jean: *Grundzüge der modernen Analysis. Band 2*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1975
- [15] DUNFORD, Nelson ; SCHWARTZ, Jacob T.: *Linear Operators. Part I: General Theory*. Interscience Publishers, New York, 1958
- [16] FAGIN, Ronald ; HALPERN, Joseph Y.: A new approach to updating beliefs. In: *Uncertainty in Artificial Intelligence* 6 (1991), S. 347–374
- [17] FÖLLMER, Hans ; PENNER, Irina: Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions. In: *erscheint in Statistics & Decisions* (2005)
- [18] FÖLLMER, Hans ; SCHIED, Alexander: Convex measures of risk and trading constraints. In: *Finance and Stochastics* 6 (2002), Nr. 4, S. 429–447
- [19] FÖLLMER, Hans ; SCHIED, Alexander: Robust preferences and convex measures of risk. In: *Advances in Finance and Stochastic. Essays in Honour of Dieter Sondermann*. Springer-Verlag, Berlin, 2002, S. 39–56
- [20] FÖLLMER, Hans ; SCHIED, Alexander: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, Berlin - New York, 2002
- [21] FÖLLMER, Hans ; SCHIED, Alexander: *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time, 2<sup>nd</sup> Edition*. Walter de Gruyter, Berlin - New York, 2004
- [22] FRITTELLI, Marco ; ROSAZZA GIANIN, Emanuela: Putting Order in Risk Measures. In: *Journal of Banking and Finance* 26 (2002), Nr. 7, S. 1473–1486

- [23] GILBOA, Itzhak ; SCHMEIDLER, David: Updating Ambiguous Beliefs. In: *Journal of Economic Theory* 59 (1993), Nr. 1, S. 33–49
- [24] GOLL, Thomas ; RÜSCHENDORF, Ludger: Minimax and Minimal Distance Martingal Measures and Their Relationship to Portfolio Optimization. In: *Finance and Stochastics* 5 (2001), S. 557–581
- [25] JAFFRAY, Jean-Yves: Bayesian Updating and Belief Functions. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* 22 (1992), S. 1144–1152
- [26] KLÖPPEL, Susanne ; SCHWEIZER, Martin: Dynamic utility indifference valuation via convex risk measures. In: *Working Paper, ETH Zürich* (2005)
- [27] KÖNIG, Heinz: *Measure and Integration*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1997
- [28] KRÄTSCHMER, Volker: Robust representation of convex risk measures by probability measures. In: *Finance and Stochastics* 9 (2005), Nr. 4, S. 597–608
- [29] KUNZE, Mathias: Verteilungsinvariante konvexe Risikomaße. In: *Diplomarbeit, Humboldt-Universität zu Berlin* (2003)
- [30] LIESE, Friedrich ; VAJDA, Igor: *Convex statistical distances*. Teubner-Verlag, Leipzig, 1987
- [31] RIEDEL, Frank: Dynamic Coherent Risk Measures. In: *Stochastic Processes and Their Applications* 112 (2004), S. 185–200
- [32] ROGERS, C. A.: *Analytic Sets*. Academic Press, London, 1980
- [33] ROORDA, Berend ; SCHUMACHER, Hans: Time Consistency Conditions for Acceptability Measures, with an Application to Tail Value at Risk. In: *Working Paper* (2006)
- [34] SCHIED, Alexander: Optimal investments for risk- and ambiguity-averse preferences: a duality approach. In: *SFB 649 Discussion Paper* (2005)
- [35] SCHMEIDLER, David: Integral representation without additivity. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 97 (1986), Nr. 2, S. 255–261
- [36] SHAFER, Glenn: *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976

- [37] WALLEY, Peter: Coherent Lower (And Upper) Probabilities. In: *Statistics Research Report, University of Warwick, Coventry, U.K.* 22 (1981)
- [38] WALLEY, Peter: Coherent Upper and Lower Previsions. In: *Working Paper of the Imprecise Probabilities Project* (1998)
- [39] WANG, Tan: Conditional Preferences and Updating. In: *Journal of Economic Theory* 108 (2003), Nr. 2, S. 286–321
- [40] WEBER, Stefan: Distribution-Invariant Risk Measures, Information, and Dynamic Consistency. In: *Mathematical Finance* 16 (2006), Nr. 2, S. 419–441
- [41] YOO, Keuk-Ryoul: The iterative law of expectation and non-additive probability measures. In: *Economics Letters* 37 (1991), S. 145–149

# Symbolverzeichnis

## Zahlen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\bar{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$(a, b), [a, b]$	offenes bzw. abgeschlossenes Intervall

## Maße und Kapazitäten

$(\Omega, \mathcal{F})$	messbarer Raum
$Q$	endlich- oder $\sigma$ -additives Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$
$\mathcal{M}_{1f}, \mathcal{M}_{1f}(\Omega, \mathcal{F})$	Menge der endlich-additiven Maße
$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_1(\Omega, \mathcal{F})$	Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße
$P$	Referenzmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$
$Q \ll P$	$Q$ ist absolutstetig bezüglich $P$
$dQ/dP$	Dichte von $Q$ bezüglich $P$
$\mathcal{M}_1(P)$	Menge aller $Q \ll P$
$Q \sim P$	$Q$ ist äquivalent zu $P$
$\mathcal{M}_e(P)$	Menge aller $Q \sim P$
$\mathcal{Q}$	geeignete Teilmenge von $\mathcal{M}_1$
$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$	Teil- $\sigma$ -Algebra
$\mathcal{P}_0$	Menge aller $Q \in \mathcal{M}_1(P)$ mit $Q _{\mathcal{F}_0} \sim P _{\mathcal{F}_0}$
$\mathcal{Q}_0$	Menge aller $Q \in \mathcal{M}_1(P)$ mit $Q _{\mathcal{F}_0} = P _{\mathcal{F}_0}$
$\{\mathcal{F}_t\}_{t=0}^T$	Filtration
$\mathbb{E}_Q(X)$	Erwartungswert von $X$ unter $Q$
$\mathbb{E}_Q(X \mathcal{F}_0), \mathbb{E}_Q(X \mathcal{F}_t)$	bedingte Erwartung von $X$ unter $Q$
$(\omega, A) \mapsto Q_\omega(A), \{Q_\omega\}$	reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit für $Q$
$(\omega, A) \mapsto P_\omega(A), \{P_\omega\}$	reguläre bedingte Referenzwahrscheinlichkeit
$\mathcal{K}_0$	Menge aller $\{Q_\omega\}$ mit $Q_\omega \ll P_\omega \forall \omega \in \Omega$

$c$	Kapazität auf $(\Omega, \mathcal{F})$
$\bar{c}$	konjugierte Kapazität
$\mathbb{E}_c(X)$	Choquet-Integral von $X$ bezüglich $c$
$\mathcal{Q}(c)$	Kern von $c$
$Q(A B)$	bedingte Wahrscheinlichkeit
$\mathcal{Q}_B$	Menge aller $Q(\cdot B)$ mit $Q \in \mathcal{Q}$
$c^{[a,b]}(\cdot B)$	bedingte Kapazitäten

### Funktionen

$X, Y, Z, H$	Auszahlungsprofile, $\bar{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen
$\mathcal{X}^*$	Menge aller Auszahlungsprofile
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{H}$	geeignete Teilmengen von $\mathcal{X}^*$
$\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{H}}$	$-\mathcal{X}, -\mathcal{H}$
$\mathcal{X}^\sigma, \mathcal{X}_\sigma$	Menge aller Grenzfunktionen von monoton wachsenden bzw. fallenden Folgen in $\mathcal{X}$
$\mathcal{B}, \mathcal{B}(\Omega, \mathcal{F})$	Menge der messbaren und beschränkten Funktionen
$L^\infty, L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Menge der messbaren und $P$ -f. s. beschränkten Funktionen
$\mathcal{X}_0$	$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_0, P)$
$\mathbb{1}_A$	Indikatorfunktion eines Ereignisses
$\mathcal{C}, \mathcal{C}_b, \mathcal{C}_b(\Omega)$	Menge der stetigen, stetigen und beschränkten Funktionen
$\mathcal{U}, \mathcal{U}_b, \mathcal{U}_b(\Omega)$	Menge der oberhalbstetigen, oberhalbstetigen und beschränkten Funktionen
$\mathcal{L}, \mathcal{L}_b, \mathcal{L}_b(\Omega)$	Menge der unterhalbstetigen, unterhalbstetigen und beschränkten Funktionen
$\mathcal{BOR}(\mathcal{H})$	Menge der $\mathcal{H}$ -Borelfunktionen
$H(\Delta)$	$\mathcal{H}$ -Suslinfunktion
$SUS(\mathcal{H})$	Menge der $\mathcal{H}$ -Suslinfunktionen

### Risikomaße

$\rho$	monetäres Risikomaß, meist konvex
$\rho_0, \rho_t$	bedingtes konvexes Risikomaß
$\{\rho_t\}_{t=0}^T$	dynamisches konvexes Risikomaß
$\{\rho_\omega\}$	reguläre bedingte Darstellung
$\bar{\rho}$	konjugiertes Risikomaß zu $\rho$
$\rho _{\mathcal{H}}$	Einschränkung von $\rho$ auf $\mathcal{H}$

$\rho_\sigma, \rho^\sigma$	monotone Fortsetzungen von $\rho$
$\rho^*, \rho_*$	äußere, innere Fortsetzung von $\rho$
$\rho^{*,P}, \rho_{*,P}$	äußere, innere Fortsetzung von $\rho$ , $P$ -f. s.
$\mathcal{A}_\rho, \mathcal{A}$	Akzeptanzmenge
$\mathcal{A}_{\rho_0}, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_t$	bedingte Akzeptanzmenge
$\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$	Akzeptanzmenge von $\rho$ bezüglich $\mathcal{F}_0$
$\mathcal{A}_t(\mathcal{F}_{t+1})$	Akzeptanzmenge von $\rho_t$ bezüglich $\mathcal{F}_{t+1}$
$\mathcal{N}_\rho, \mathcal{N}$	Ablehnungsmenge
$\mathcal{N}_{\rho_0}, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_t$	bedingte Ablehnungsmenge
$\alpha_{\min}, \alpha$	Penalty-Funktion
$\alpha_{\min}^0, \alpha_0$	bedingte Penalty-Funktion
$\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_{\mathcal{F}_0}$	Menge aller $\mathcal{F}_0$ -bedingten konvexen Risikomaße
$\mathcal{R}_0^\leftarrow$	Menge der schwach akzeptanzkonsistenten Risikomaße zu $\rho$
$\mathcal{R}_0^\rightarrow$	Menge aller Konsequenzen aus $\rho$

### Sonstige Symbole

$\ \cdot\ _\infty$	Supremumsnorm
$\vee, \wedge$	Maximum, Minimum
ess sup	essentielles Supremum
ess inf	essentielles Infimum

# Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Mein erster und ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Hans Föllmer für die herzliche Aufnahme in seinen Arbeitskreis, seine engagierte Betreuung und die vielen inspirierenden Diskussionen. Meinem Projektleiter Alexander Schied danke ich ebenfalls für wertvolle Anregungen und seine Unterstützung.

Allen meinen lieben Freunden und Kollegen bin ich sehr dankbar für die Zeit, die ich mit ihnen am Institut für Mathematik verbringen durfte und die ich in bester Erinnerung behalten werde. Ein großes Dankeschön geht dabei an Stefan Ankirchner, Peggy Daume, Anne Gundel, Tobias Hahn, Ulrich Horst, Ilya Pavlyukevitch, Irina Penner, Jochen Pfeiffer, Steffen Voigtmann, Stefan Weber und Wiebke Wittmüß, die immer gern bereit waren, mathematische und natürlich auch nicht-mathematische Fragestellungen mit mir zu diskutieren. Das hat mir sehr geholfen und mich stets motiviert.

Für die finanzielle Unterstützung dieser Dissertation im Rahmen des Projekts „Beyond Value at Risk: Quantifying and Hedging the Downside Risk“ im DFG-Forschungszentrum MATHEON danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

# Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe. Alle Hilfsmittel und Hilfen sowie die verwendete Literatur habe ich vollständig angegeben.

Berlin, den 6. Juli 2006