Numerische Behandlung eines Algebro-Differentialgleichungssystems

Ein Beispiel aus der computergestützten Analyse elektronischer Schaltungen

Von einem der Autoren waren vor einigen Jahren im Rahmen eines Industrieauftrages Untersuchungen des Verhaltens einer *Spannungsverdopplerschaltung* durchgeführt worden [1]. Es handelt sich dabei um ein nichtlineares elektrisches Netzwerk mit harmonischer Erregung. Von besonderem Interesse ist der eingeschwungene Zustand, d.h. das Schwingungsverhalten für $t \to \infty$, der sogenannte *Periodic Steady-State* (*PSS*). Verfahrenstechnisch am einfachsten erhält man ihn durch die Berechnung des Einschwingverhaltens (*Transientverhalten*) aus dem energielosen Anfangszustand über ein genügend großes Zeitintervall, jedoch mit einem hohen Rechenaufwand, wenn das erforderliche Zeitintervall sehr groß gegenüber der Schwingungsperiode T ist. Man hat es also mathematisch mit der numerischen Lösung von Anfangswertproblemen nichtlinearer Differentialgleichungssysteme, allerdings in der Form sogenannter *Algebro-Differentialgleichungssysteme*, zu tun. Eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit in den PSS versprechen geeignete Randwertproblemlöser, die jedoch für diesen Gleichungstyp nicht so einfach verfügbar sind wie Anfangswertproblemlöser (s.u.).

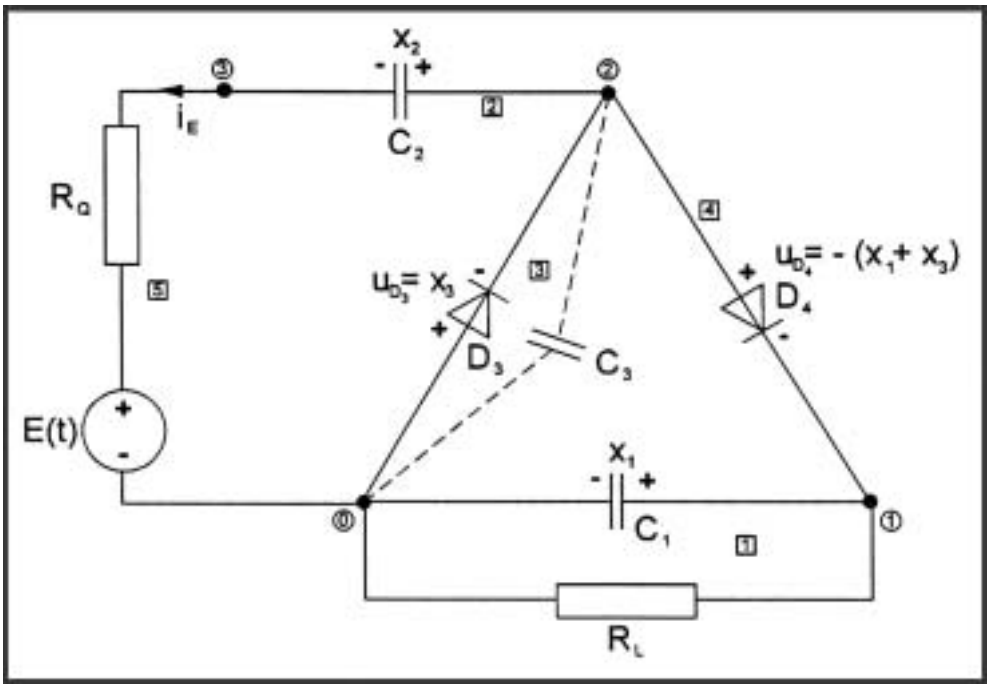


Abbildung 1: Spannungsverdoppler

$C_1 = C_2 = 2{,}75\ \text{nF};$
$C_3 \to 0;$

$R_Q = 0{,}1\ \text{M}\Omega;$
$R_L = \text{variabel};$
$G_L = \frac{1}{R_L};$

Dioden D_3, D_4: $i_{Dj} = F(u_{Dj})\ \text{mA};$
$F(u_{Dj}) = 5 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\exp(630 u_{Dj}) - 1\right)\ \text{mA};$
$E(t) = 3{,}95 \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)\ \text{kV}; \quad T = 0{,}064\ \text{s};$

Die Simulation der Schaltung erfolgte bei den in [1] beschriebenen Untersuchungen auf einem Hybridrechnersystem ADT 3000 (ARITMA, Prag). Das periodische Randwertproblem wurde über das Transientverhalten gelöst. Ziel der hier beschriebenen Arbeiten war es, das Verhalten der Schaltung mit den bei uns zur Verfügung stehenden Softwarewerkzeugen und Rechnern neu zu berechnen und die Ergebnisse aus [1] zu überprüfen.

Bekanntlich besaßen Hybridrechner, die nun wohl restlos aus der Computerlandschaft verschwunden sind, eine enorm hohe Rechengeschwindigkeit, hatten aber gegenüber der digitalen Simulation Genauigkeitsnachteile bei der Berechnung und der Schal-

tungsmodellierung. Die Ergebnisse unserer numerischen Experimente zeigen nun auch, daß einerseits die Rechengeschwindigkeit des Hybridrechners nicht erreicht wird, was allerdings in Anbetracht der Rechenzeiten im Minutenbereich unerheblich ist, andererseits jedoch die Ergebnisse der damaligen Berechnungen mit systematischen Fehlern behaftet sind. Diese hätten wahrscheinlich, z.B. durch genauere Diodenmodelle, innerhalb gewisser Grenzen verringert werden können, sind aber prinzipiell systembedingt. Es wurde so auch deutlich, daß der Einsatz moderner Computer gesicherte Ergebnisse nicht auf Anhieb garantiert, sondern numerische Experimente zur geeigneten Anpassung der Lösungsverfahren unter der Voraussetzung eines gewissen Vorwissens über das Verhalten des zu untersuchenden Systems notwendig sind.

Spannungsverdopplerschaltung u. beschreibendes Gleichungssystem

Die Abbildung 1 zeigt eine gängige Spannungsverdopplerschaltung [1], [2]. Sie ist durch Abrüstung aus einer Vervielfacherschaltung mit dem Faktor sechs hervorgegangen, wie sie in Fernsehgeräten verwendet wurde; daraus erklären sich die Parameterwerte.
Ein beschreibendes Gleichungssystem für diese Schaltung mit jeweils fünf zu berechnenden Zweigspannungen u. Zweigströmen ist in üblicher Weise mit den Kirchhoffschen Gesetzen - Knoten- u. Maschenregel - u. den Strom-Spannungsrelationen der Netzwerkelemente sehr leicht herzuleiten (s. z.B. [2], [3]). Wählt man die Zweigspannungen der Zweige ,1 u. ,2 , also die *Zustandsvariablen* des Systems x_1 u. x_2 als zu bestimmende Größen, dann ergibt sich ein sogenanntes Algebro-Differentialgleichungssystem AGDS (1) in x_1, x_2, x_3. Es besteht aus zwei nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung u. einer nichtlinearen (transzendenten) Gleichung, weil x_3 infolge der Strom-Spannungsrelationen der Dioden nicht zu eliminieren ist.
Die restlichen Zweigspannungen u. die Zweigströme lassen sich aus x_1 , x_2 , x_3 unter Berücksichtigung der zuvor benutzten Eliminationsschritte anschließend ermitteln.
Algebro-Differentialgleichungssysteme (englisch: Differential-Algebraic Equations) erhält man in der Elektronik auf einer bestimmten Stufe der Modellierung, vor allem von Halbleiterbauelemen-ten, sehr häufig (s. [3], [4]).
Bevor Algorithmen zur numerischen Lösung von Algebro-Differentialgleichungen zur Verfügung standen, war es eine übliche Methode in der computergestützten Netzwerkanalyse, durch Einfügen zusätzlicher „natürlicher“ u. - im Sinne des Verhaltens der Schaltung vernachlässigbarer - reaktiver Elemente, Kapazitäten u./oder Induktivitäten, reine Differentialgleichungssysteme zu erzeugen. In der angegebenen Schaltung geschieht das durch das Einfügen der „kleinen“ Kapazität C_3 , die durch die Eigenkapazität der Diode gerechtfertigt erscheint. Damit erhält man das Differentialgleichungssystem mit drei Differentialgleichungen erster Ordnung DGS (2).
Eine Rückführung des Algebro-Differentialgleichungssystem ADGS (1) auf ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, also in ein gegenüber DGS (2) reduziertes System, durch Elimination von x_2 ist recht einfach „von Hand“ möglich. Es ergibt sich das Differentialgleichungssystem DGS (3).

ADGS (1)

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{G_L}{C_1}x_1 + \frac{F(-x_1 - x_3)}{C_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{C_2 R_Q}\left(x_2 + x_3 + E(t)\right)$$

$$0 = -\frac{1}{R_Q}\left(x_2 + x_3 + E(t)\right) + F(-x_1 - x_3) - F(x_3)$$

DGS (2)

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{G_L}{C_1}x_1 + \frac{F(-x_1 - x_3)}{C_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{C_2 R_Q}\left(x_2 + x_3 + E(t)\right)$$

$$C_3\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{R_Q}\left(x_2 + x_3 + E(t)\right) + F(-x_1 - x_3) - F(x_3)$$

DGS (3)

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{G_1}{C_1}x_1 + \frac{h_{13}}{C_1}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{-\left[-\frac{G_L}{C_1}x_1 + \frac{h_{13}}{C_1}\right]\left[h_{13} + K\right]P - \frac{1}{R_Q}E'(t) + \frac{1}{R_Q C_2}\left[h_{13} - h_3\right]}{\frac{1}{R_Q} + P\left[h_{13} + h_3 + 2K\right]}$$

mit $h_{13} = F(-x_1-x_3)$; $h_3 = F(x_3)$; $K = 5\cdot 10^{-5}$; $P = 630$.

Unser Ziel war es, Anfangs- und Randwertprobleme von Algebro-Differentialgleichungssystemen numerisch zu lösen; deshalb standen selbstverständlich numerische Experimente mit dem System ADGS (1) im Vordergrund. Die numerische Lösung der Systeme DGS (2) und DGS (3) erfolgte lediglich aus Kontrollgründen.

Programme und Computerplattformen

Zunächst wurde ADGS (1) mit *Mathematica* 2.2 in eine zu DGS (2) äquivalente Form gebracht und der Versuch unternommen, die numerische Lösung mittels *NDSolve* zu bestimmen. Dieser Versuch scheiterte.

Die numerische Lösung des Anfangswertproblems von ADGS(1) mit $(x_1(0),x_2(0),x_3(0)) = (0,0,0)$ wurde mit Hilfe des Unterprogramms *D02NGF* (s. [5]) aus der *NAG Fortran Library Mark 14*, ein Produkt der *Numerical Algorithms Group Ltd.* und der *Numerical Algorithms Group Inc.*, gewonnen.

Andererseits wurde mit dem *PP NUMATH-2*, einem Programmpaket für Verfahren der Numerischen Mathematik , das im Auftrag des *VEB Robotron-Projekt Dresden* entwickelt wurde, gearbeitet. Hier gibt es für die gleiche Problemklasse das Modul *I2SAA2* (s. [6]). Das reduzierte Problem DGS (3) konnte mit dem *PP NUMATH-2* auf konventionelle Weise mit dem *Verfahren von Gragg-Bulirsch-Stoer* (Modul *I2SKEG*, s. [6]) gelöst werden. Weitere Hinweise zu den verwendeten Verfahren und Literaturverweise können [5] und [6] entnommen werden.

Versuche mit *Mathematica* wurden auf einer *Sun* Workstation durchgeführt. Sonst wurde hauptsächlich auf der *ALLIANT FX/2800* mit *NAG* und *PP NUMATH-2* gerechnet.

Die Ermittlung des PSS als numerische Lösung eines Randwertproblems erfolgte am Institut für Angewandte Mathematik. Das verwendete Programm *MSH2DAE* mit dem Integrator *IVPDAE* ist von *R. Lamour*[6] und Mitarbeitern zur Lösung von Randwertaufgaben von Algebro-Differentialgleichungssystemen (*DAE: Differential-Algebraic Equations*) entwickelt worden. Es beruht auf der Mehrzielmethode (*MSH: Multiple Shooting*).

Andere Programme für diese Aufgabenklasse konnten wir trotz verschiedentlicher Anfragen nicht ausfindig machen.

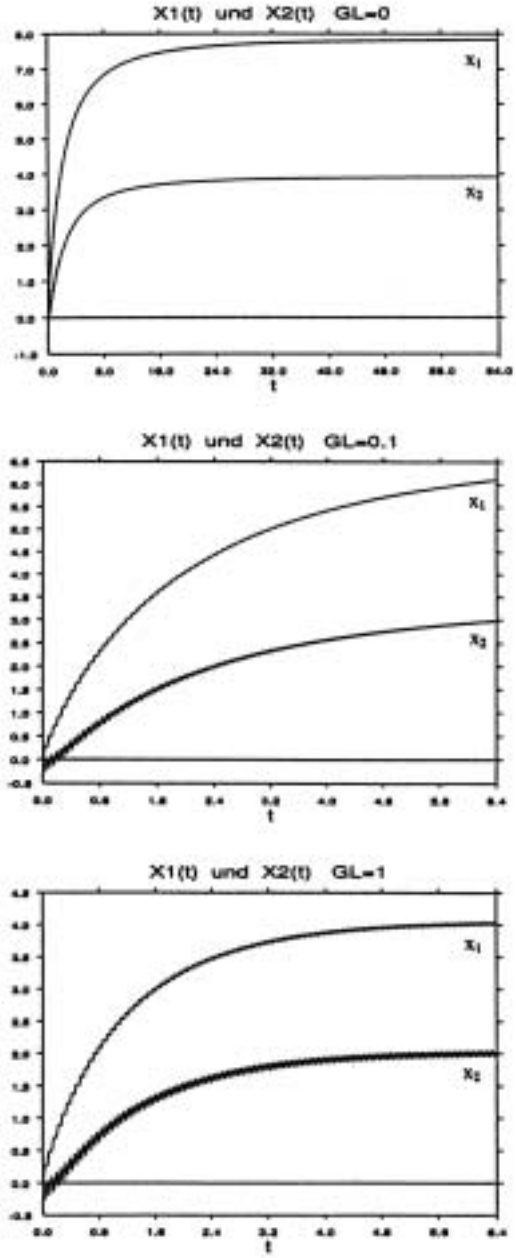
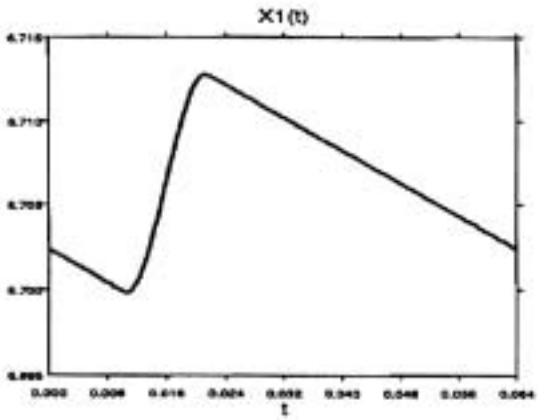
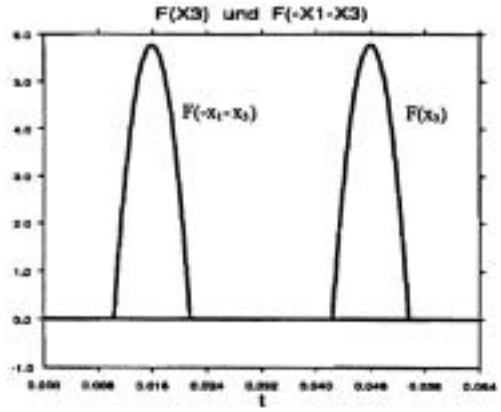
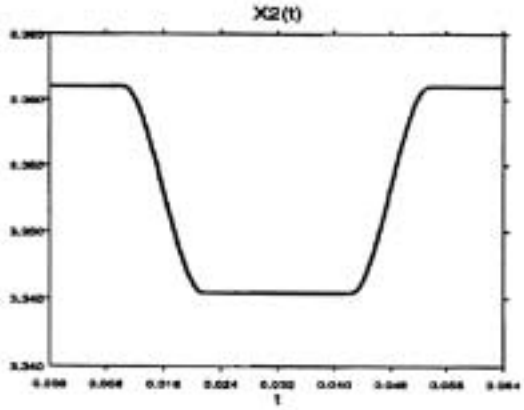


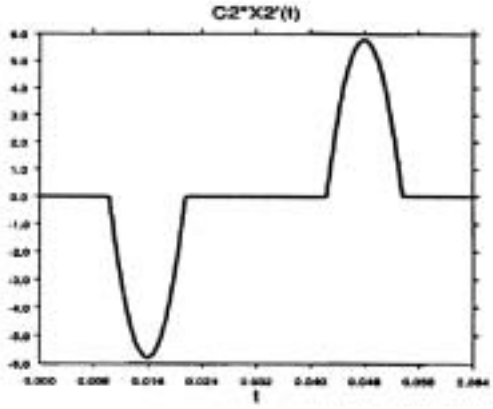
Abb. 2: Transientverhalten

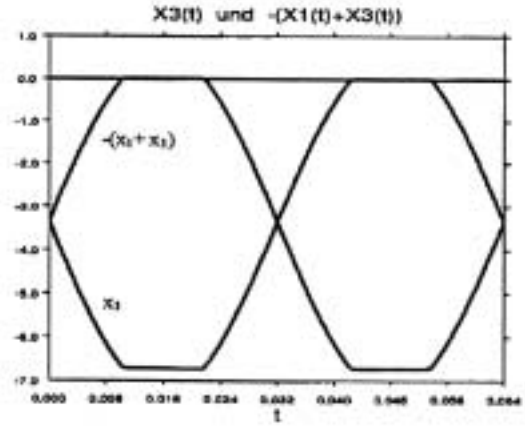
[6]Herrn Dr. René Lamour danken wir herzlich für die umfangreichen Rechnungen sowie für wertvolle Hinweise zur numerischen Behandlung von Algebro-Differentialgleichungssystemen.

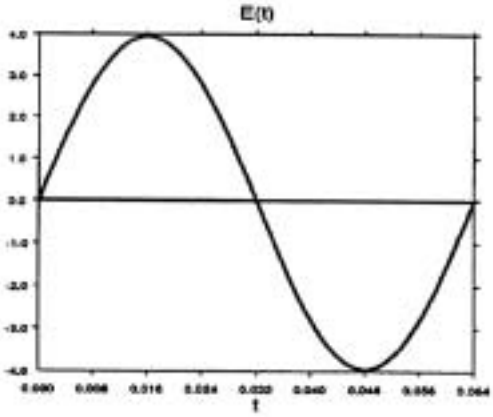


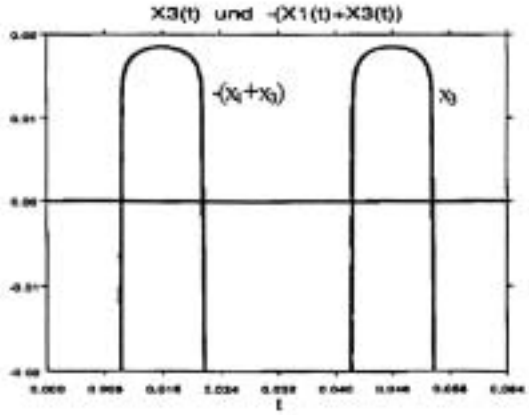












↑ Abb. 4: Diodenströme i_{D3}, i_{D4}
Quellstrom i_E
Eingangsspannung E

← Abb.3: Ausgangsspannung x_1
Spannung x_2
Diodenspannungen u_{D3}, u_{D4}
d.o. Ausschnitt

Periodic Steady-State für $G_L = 0{,}1$

Ergebnisse der numerischen Experimente

Probleme traten bei *D02NGF* und *I2SAA2* mit der Schrittweitensteuerung der Integrationsverfahren auf. Ohne eine Begrenzung der maximal zulässigen Schrittweite versagten die Verfahren. Ein Rechenzeitvergleich zwischen den Verfahren, die das Algebro-Differentialgleichungssystem benutzten, um das Einschwingverhalten im Intervall [0,100T] zu berechnen, ergab deutliche Vorteile für *NAG*. Das aufbereitete DGS (3) konnte aber erwartungsgemäß schneller gelöst werden, und man erzielt auch auf einem 486er PC noch vertretbare Rechenzeiten im Minutenbereich.

Die wichtigsten Ergebnisse sind in den Abbildungen 2 bis 5 dargestellt. Diese Ergebnisse können als gut abgesichert gelten, da zahlreiche Kontrollrechnungen, die hier im einzelnen nicht aufgeführt werden, sehr gut übereinstimmende Werte ergaben.

In der Abbildung 2 ist das Transientverhalten der Spannungen x_1 und x_2 aus dem energielosen Anfangszustand - $(x_1(0),x_2(0),x_3(0)) = (0,0,0)$ - für $G_L = 0$; 0,1 und 1 dargestellt. Es wird deutlich, daß die Einschwingzeit mit abnehmender Belastung, d.h. mit fallendem G_L , wächst. Für $G_L = 0$, also verschwindender Belastung, wird auch nach einer Einschwingzeit von 1000T = 64 s der PPS noch nicht erreicht.

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen die Ergebnisse der PSS-Berechnung mit dem Programm *MSH2DAE* für die Belastung $G_L = 0{,}1$ jeweils über eine Periode, d.h. $t \in [0,T]$.

Abbildung 3:
Spannungen sind in kV und Zeiten in s angegeben.
Der Verlauf der Ausgangsspannung $x_1(t)$ zeigt, daß aufgrund der Belastung die Verdopplung der Eingangsamplitude nicht erreicht und die Amplitude der der Gleichspannung überlagerten Wechselspannung, die sogenannte *Welligkeit*, erst in der dritten Nachkommastelle wirksam wird.
Das unterste Kurvenbild zeigt in starker Vergrößerung den Verlauf der Diodenspannungen um den Wert Null. Die positiven Impulse mit einer Höhe von ca. 18 V bei einer Amplitude der Diodenspannungen von ca. 3,4 kV (s. darüberliegendes Bild) bestimmen über die „starken“ Diodennichtlinearitäten im wesentlichen das Verhalten der Schaltung. Damit ist ein gewisser Hinweis auf die Anforderungen an die Rechengenauigkeit und folglich an die Schrittweitensteuerung gegeben.

Abbildung 4:
Spannungen sind in kV, Ströme in mA und Zeiten in s angegeben. Die Abbildung enthält aus Gründen des Zeitbezugs, auch für die Kurvenverläufe der Abbildung 3, die erregende Schwingung E(t).

Die Diodenströme $i_{D3} = F(x_3)$ und $i_{D4} = F(-x_1 - x_3)$ sind gemeinsam im obersten Kurvenbild dargestellt. Bis auf den schmalen positiven Impuls sind sie im gesamten Intervall von verschwindender Größe. Der Dioden-Sperrstrom beträgt nach den Parameterwerten in Abbildung 1 jeweils $i_S = -5 \cdot 10^{-5}$ mA. Das Bild darunter zeigt den Verlauf des Quellstromes $i_E = C_2\, x_2'(t)$ in der Orientierung nach Abbildung 1.

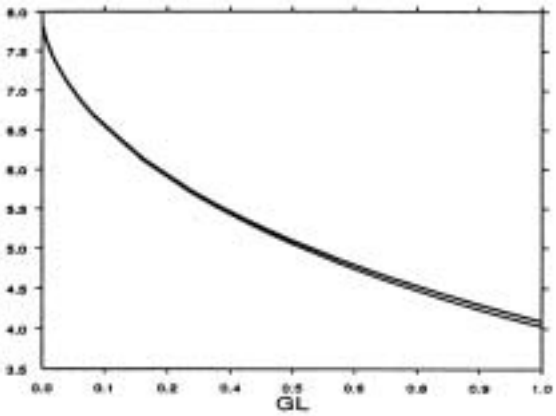


Abb. 5: Periodic Steady-State
Abhängigkeit der Ausgangsspannung x_1 von der Belastung

Schließlich gibt die Abbildung 5 mit der Abhängigkeit des Maximums und des Minimums der Ausgangsspannung x_1 (in kV) über eine Periode von der ohmschen Belastung einen Überblick über das Systemverhalten im stationären Zustand. Auf der Abszisse ist der Leitwert in µS aufgetragen. Der betrachtete Bereich des ohmschen Widerstandes R_L ergibt sich mithin zu $1\,M\Omega \le R_L \le \infty$. Bei verschwindender Last ($R_L \to \infty$) beträgt die Ausgangsspannung etwa das Doppelte der Eingangsamplitude. Sie fällt für $R_L = 1\,M\Omega$ auf etwa die Hälfte dieses Wertes ab. Die Welligkeit bleibt im ganzen Bereich unter 1,6% .

Zusammenfassend läßt sich zu unseren Untersuchungen folgendes sagen:
1. Mit den uns zur Verfügung stehenden Softwarewerkzeugen, den FORTRAN Bibliotheken *NAG* und *PP NUMATH-2*, war es möglich, das Einschwingverhalten für die gestellte Aufgabe in vertretbarer Zeit zu berechnen. Die Oszillation der Lösung und die „starke“ Nichtlinearität in den Gleichungen zählen offenbar zu den Gründen, daß nur durch Begrenzung der maximalen Verfahrensschrittweite eine Lösung zu erhalten war. Für diese Aufgabenklasse befinden sich jedoch keine Randwertproblemlöser in den benutzten Programmbibliotheken.
2. Die Einsatzmöglichkeiten von *Mathematica* für unsere Aufgabenklasse sind wahrscheinlich noch

nicht ausgeschöpft worden und sollten weiter untersucht werden.
3. Die hier präsentierten Resultate können aufgrund der Kontrollrechnungen mit unterschiedlichen mathematischen Modellen und Verfahren als gut gesichert angesehen werden. Die Ergebnisse von [1] stimmen jedoch mit unseren nur qualitativ überein: Der Periodic Steady-State von x_1 für $G_L = 1$ weicht um ca. -70% von unseren Ergebnissen ab. Um diese Abweichungen zu klären, sind Untersuchungen zur Abhängigkeit der Lösungen vor allem von den Dioden-Modellparametern geplant.
Eine experimentelle Überprüfung der Ergebnisse wäre wünschenswert.

Literatur

[1] Bartsch, H.-J.; Suschke, E.: Zur Parameterabhängigkeit des eingeschwungenen Zustandes von periodisch erregten Systemen. msr **23**, 1980, H. 7, S. 394-398.

[2] Lin, P.M.; Chua, L.O.: Topological generation and analysis of voltage multiplier circuits. IEEE Trans. on Circuits and Systems, CAS-24, 1977, No. 10.

[3] Chua, L.O.; Lin, P.M.: Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques. Englewood Cliffs, N.J, USA: Prentice-Hall, 1975.

[4] Elschner, H.; Möschwitzer, A.; Reibiger, A.: Rechnergestützte Analyse in der Elektronik. Berlin: Verlag Technik, 1977.

[5] NAG FORTRAN Library Manual, Mark 14. Oxford: The Numerical Algorithms Group Limited, ISBN 1-85206-053-0, 1990.

[6] PP NUMATH-2: Programmpaket für Verfahren der numerischen Mathematik. Systemunterlagen-Dokumentation PP NUMATH-2, Anwendungsbeschreibung, Stand 5/84. Dresden: VEB Robotron-Projekt.

Bernhard Barz
Edmund Suschke