Long Memory Effekte in Finanzzeitreihen

Diplomarbeit

zur Erlangung des Grades eines Diplom-Volkswirts

an der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät

der Humboldt Universität zu Berlin

vorgelegt von

Arne Wünsche

Immatrikulationsnummer: 100117

Prüfer: Prof. Dr. Bernd Rönz

Berlin, 13.04.2000

Inhaltsverzeichnis

1 Long Memory **3**
1.1 Eigenschaften . . . 3
1.2 Long Memory in stationären Prozessen . . . 5
1.2.1 Definitionen . . . 5
1.2.2 Fraktionale Brownsche Bewegung . . . 9
1.2.3 Fraktionale ARIMA-Prozesse . . . 10
1.3 Schätzverfahren für Long Memory Prozesse . . . 10
1.3.1 Hurst und R/S Analyse . . . 10
1.3.2 Korrelogramm und partielle Korrelationen . . . 14
1.3.3 Varianzplot . . . 16
1.3.4 Variogramm . . . 18
1.4 Tests und Schätzung der Lageparameter . . . 20
1.5 Prozesse mit unendlicher Varianz . . . 22

2 Simulationen **25**
2.1 Brownsche Bewegung . . . 25
2.2 Fraktionale Brownsche Bewegung . . . 28
2.3 MA-Prozesse . . . 30
2.4 AR-Prozesse . . . 31
2.5 ARMA- und ARIMA-Modelle . . . 32
2.6 Fraktionale ARIMA-Prozesse . . . 33

3 Datenanalyse **35**
3.1 Kointegration . . . 35
3.2 Ergebnisse R/S-Analyse . . . 36
3.3 Vergleich mit dem ADF-Kointegrationstest . . . 44
3.4 Schlußbemerkungen . . . 49

A Simulationsverfahren **50**
A.1 Simulation mit Cholesky Dekomposition . . . 50
A.2 Simulation fraktionales Gaußsches Rauschen nach Davies und Harte . . . 51
A.3 Simulation fraktionales ARIMA . . . 52

A.4 Laglänge bei der Berechnung von $\hat{H}$ 52

B Xplore Prozeduren **54**
B.1 Erzeugung fraktionaler Brownscher Bewegung 54
B.2 Inhalt der beigefügten CD-Rom 60

C Daten **61**
C.1 Datenstruktur 61
C.2 Datenkenngrößen 62

Kapitel 1

Long Memory

1.1 Eigenschaften

Long Memory Effekte in Datenreihen sind empirisch schon länger beobachtet worden. So haben schon Astronomen im 19. Jahrhundert bei der Vermessung astronomischer Größen festgestellt, dass häufig Messfehler in Messreihen über längere Zeit ähnlich sind [3], selbst bei genauester Versuchsdurchführung. Diese „halbsystematischen Fehler“ beeinflussten ganze Versuchsreihen. Mit anderen Worten, die Korrelation zwischen entfernten Versuchswerten nimmt langsamer ab, als man bei unabhängigen Daten ($\gamma(i,j) = 0$ für $i \neq j$ siehe Gleichung 1.3) erwarten würde. Die Ermittlung des Mittelwertes einer Versuchsreihe $\mu = E[X_i]$ mittels

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1.1}$$

zum Beispiel führt dann dazu, dass der traditionelle Varianzschätzer

$$var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{1.2}$$

mit $\sigma^2 = var(X_i)$ zu klein ist. Damit hält ein Konfidenzintervall für (1.1) nicht mehr das vorgegebene Signifikanzniveau ein. Um dies zu verdeutlichen ein kurzer Blick auf die Voraussetzungen damit (1.2) gilt.

Gibt es Beobachtungen $X_1, X_2, ..., X_n$ derselben Population mit gleicher Verteilung zu unterschiedlichen Zeitpunkten, lassen sich die Bedingungen wie folgt zusammenfassen:

1. Der Mittelwert $\mu = E[X_i]$ existiert und ist finit.
2. Die Varianz $\sigma^2 = var(X_i)$ existiert und ist finit.
3. $X_1, ..., X_n$ sind unkorreliert d.h. $\rho(i,j) = \gamma(i,j)/\sigma^2 = 0$ für $i \neq j$,

mit

$$\gamma(i,j) = E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] \tag{1.3}$$

der Autokovarianz zwischen X_i und X_j. Die ersten beiden Bedingungen hängen allein von der (marginalen) Verteilungsfunktion ab. Im weiteren wird davon ausgegangen, dass diese zwei zutreffen. Zu Fällen mit unendlicher Varianz, dem sogenannten *Noah Effekt* bzw. unendlichem Mittelwert vergleiche mit Abschnitt 1.5 und [20].

Bleibt die 3. Bedingung der Unkorreliertheit. Häufig wird diese als plausibel angenommen oder versucht Experimente so zu planen, dass zumindest annähernd Unabhängigkeit erreicht wird. Dann lassen sich die Standardwerkzeuge der Statistik anwenden. Leider ist dies nicht immer der Fall, wie schon die anfangs erwähnten Astronomen feststellen mussten.

Sind die Werte aber korreliert, gilt (1.2) nicht mehr, die Autokorrelationsfunktion (ACF) ist ungleich null, $\rho(i,j) \neq 0$. Daraus folgt für die Varianz von $\bar{X}$:

$$var(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \gamma(i,j) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \rho(i,j) = \frac{\sigma^2}{n} \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} \rho(i,j) \right] \tag{1.4}$$

Bezeichnet man den Korrekturterm $n^{-1} \sum_{i \neq j} \rho(i,j) = \delta_n(\rho)$, so gilt, dass immer noch $var(\bar{X})$ proportional zu σ^2/n, wenn

$$\delta(\rho) = \lim_{n \to \infty} \delta_n(\rho) \tag{1.5}$$

existiert, finit und größer ist als -1. Asymptotisch gilt dann

$$var(\bar{X}) \approx \frac{\sigma^2}{n} c(\rho) \tag{1.6}$$

mit $c(\rho) = 1 + \delta(\rho) = konstant$. Die meisten Zeitreihenmodelle der Literatur zeigen diese Struktur, wie ARMA und Markov Prozesse. Als Verallgemeinerung von (1.2) kann die Varianz jeden positiven Wert annehmen. Für viele Fälle ist dies ausreichend. Wie sich aber zeigte, gibt es Datenstrukturen, bei denen allein ein konstanter Faktor $c(\rho)$ nicht ausreicht. Die Konvergenz der Varianz gegen null vollzieht sich nicht proportional zu $1/n$. Fälle bei denen die Konvergenz schneller als mit $1/n$ erfolgt, müssten sich häufiger umkehren als dies ein zufälliger Prozess tun würde. Ein derartiges Verhalten wird als *Antipersistenz* bezeichnet und turbulente Ströme werden teilweise dadurch modelliert. In der Finanzstatistik häufiger zu beobachten ist der Fall einer Konvergenz der Varianz die langsamer als mit $1/n$ erfolgt und als *Persistenz* bezeichnet wird. Theoretisch beeinflusst ein Wert heute damit alle zukünftigen, d.h. ist mit diesen korreliert, bzw. zeigt *Long Memory*.

Verringert sich die Varianz langsamer als mit $1/n$ (Persistenz), kann dennoch für ein gegebenes n immer ein c gefunden werden, so dass $var(\bar{X}) = c/n$

gilt, z.B. ein ARMA Modell. Ist aber der wahre Prozess in Wirklichkeit persistent, strebt die Parameterzahl derartiger Modelle mit steigender Datenmenge gegen unendlich. Besser ist es hier die Varianzannahme explizit zu modellieren. Ein einfacher Ansatz wäre, dass die Varianz von $\bar{X}$ proportional zu $1/n^{\alpha}$ ist [3]. Demnach in Verbindung mit (1.4)

$$var(\bar{X}) \approx \frac{\sigma^2}{n^{\alpha}} c(\rho) \tag{1.7}$$

mit $\alpha \in (0,1)$ und $c(\rho) = lim_{n\to\infty}[n^{\alpha-2} \sum_{i,j\neq 1}^{n} \rho(i,j)]$. Hängen die Korrelationen nur vom Lag $|i-j|$ ab, muss gelten

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \rho(k) \approx cn^{1-\alpha} \tag{1.8}$$

mit $c = konstant$. Geht n nun gegen unendlich folgt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = \infty \tag{1.9}$$

und damit gehen die Korrelationen so langsam gegen null, dass ihre Summe nicht konvergiert.

1.2 Long Memory in stationären Prozessen

1.2.1 Definitionen

Im ersten Teil wurde davon ausgegangen, dass Mittelwert und Autokorrelationsfunktion zeitunabhängig sind. Derartige Prozesse werden als stationär bezeichnet [10].

Definition 1.1 : Unter einem stationären Prozess versteht man einen stochastischen Prozess X_t, für dessen Verteilungsfunktion in jedem Zeitpunkt t und alle $s \in \mathcal{Z}$ gilt

$$F_t(x) = F_{t+s}(x) \tag{1.10}$$

mit der Verteilungsfunktion $F_t(x) = Pr(X_t \leq x)$.
Existieren die ersten beiden Momentfunktionen für X_t (Bedingungen 1. und 2. im vorherigen Abschnitt), so folgt, aus der manchmal auch als strenge Stationarität bezeichneten Bedingung (1.10), die Kovarianzstationarität. Ein stochastischer Prozess X_t ist kovarianzstationär, wenn

1. $\mu_t = \mu$ und
2. $\gamma(i,j) = \gamma(k)$

gilt, mit $|i-j|, k \in \mathcal{Z}$ als Zeitdifferenz (*Lag*) zwischen den Werten i und j. Dabei ist $\gamma(0) = var(X_t)$.

Stationäre Prozesse sind deshalb von besonderer Bedeutung, da sie häufig als erste Annahme dienen können, wenn kein offensichtlicher Trend oder Zusammenhang zwischen den Werten ausgemacht werden kann, oder sich nicht sinnvoll erklären lässt. Dann kann mithilfe stationärer Modelle meist ein zufriedenstellendes Ergebnis erreicht werden. Daneben bieten diese den Vorteil, dass sie statistisch besser handhabbar sind gegenüber nichtstationären Modellen. Finanzzeitreihen lassen sich häufig durch Bildung erster Differenzen in annähernd stationäre Prozesse überführen. Eine solche Finanzzeitreihe bezeichnet man dann als integriert der Ordnung eins.

Definition 1.2 : Formal ist ein Prozess X_t integriert der Ordnung d, $I(d)$, wenn $(1-L)^d X_t$ stationär ist, mit L dem Lagoperator $LX_t = X_{t-1}$.

Eine besonders günstige Eigenschaft stationärer Prozesse ist, dass die ACF nicht mehr vom Zeitpunkt t abhängt, sondern lediglich von der Zeitdifferenz k zwischen den Werten. Damit lässt sich Gleichung (1.8) umformulieren in

$$\rho(k) \approx c_\rho |k|^{-\alpha} \tag{1.11}$$

und zeigt damit, dass wenn $k \to \infty$ die Korrelationen nur langsam abnehmen und nicht verschwinden. Damit lässt sich der Begriff des stationären Prozesses mit Long Memory wie folgt definieren (vergleiche Beran [3]):

Definition 1.3 : Ist X_t ein stationärer Prozess, existiert ein $\alpha \in (0,1)$ und eine Konstante $c_\rho > 0$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\rho(k)}{c_\rho k^\alpha} = 1 \tag{1.12}$$

so wird X_t als stationärer Prozess mit Long Memory (auch *Strong Dependence*) oder als stationärer Prozess mit langsam abnehmenden (auch *Long Range*) Korrelationen bezeichnet. Meist wird anstelle von α der Parameter $H = 1 - \alpha/2$ verwendet.

Definition 1.3 gilt asymptotisch und sagt nur etwas über die Entwicklung der Korrelationen aus, wenn die Zeitdifferenz gegen unendlich strebt. Dagegen über die Größe einzelner Korrelationen wird nichts ausgesagt. So kann es vorkommen, dass beim Überprüfen auf von null verschiedene Korrelationen, mittels des $\pm 2/\sqrt{n}$ Konfidenzband in der Darstellung von $\hat{\rho}(k)$ gegen k, keine signifikanten Werte ermittelt werden können.

Modelle mit stationärem Long Memory Verhalten gibt es eine Reihe. Zwei besonders wichtige sollen kurz beschrieben werden ohne auf alle Ein-

zelheiten einzugehen, zum einen fraktionale Brownsche Bewegung und zum anderen fraktionale ARIMA Prozesse (mehr dazu in [3] und [20] .

Der Begriff *fraktional* hängt eng mit dem Begriff selbstähnlicher Prozesse zusammen. Selbstähnliche Prozesse wurden 1941 von Kolmogorow [16] eingeführt, wurden aber längere Zeit in der Statistik kaum beachtet. Erst Ende der 60er Jahre führten insbesondere die Arbeiten von Mandelbrot [18] diese in die Statistik ein. Dabei ist Selbstähnlichkeit ein in der Natur vielfach anzutreffendes Phänomän . Insbesondere geometrische Strukturen wie Zweige von Bäumen, Wirbel oder die mathematisch definierten Fraktaldarstellungen sind bekannte Beispiele. Dort bedeutet Selbstähnlichkeit, dass die Struktur, egal aus welcher Entfernung betrachtet, eine ähnliche Gestalt aufweist. Für diese fraktalen Objekte ist die Dimension nicht mehr offensichtlich gegeben, sondern nimmt gebrochene Werte an. In Bezug auf stochastische Prozesse kann man Selbstähnlichkeit folgendermaßen definieren.

Definition 1.4 : Sei Y_t ein stochastischer Prozess mit kontinuierlichen Zeitparameter t. Y_t wird selbstähnlich mit Selbstähnlichkeitsparameter H, für jeden Streckungsfaktor c genannt, wenn der umskalierte Prozess $c^{-H}Y_{ct}$ die gleiche Verteilung wie Y_t aufweist.

Daraus lassen sich folgende asymptotische Eigenschaften für einen selbstähnlichen Prozess Y_t bestimmen [3]. Wenn man

$$Y_t =_d t^H Y_1 \qquad t > 0 \tag{1.13}$$

formuliert, wobei $=_d$ Gleichheit in Verteilung bezeichnet, folgt folgendes Verhalten für Y_t bei $t \to \infty$:

1. $H < 0$, dann $Y_t \to_d 0$ ($\to_d$ bezeichnet Konvergenz in Verteilung)
2. $H = 0$, dann $Y_t \to_d Y_1$
3. $H > 0$ und $Y_t \neq 0$, dann $|Y_t| \to_d \infty$

In gleicher Weise kann man für $t \to 0$ formulieren:

1. $H < 0$ und $Y_t \neq 0$, dann $|Y_t| \to_d \infty$
2. $H = 0$, dann $Y_t =_d Y_1$
3. $H > 0$, dann $Y_t \to_d 0$

Diese Bedingungen zeigen, dass Y_t, abgesehen vom trivialen $Y_t = 0$, lediglich für $H = 0$ stationär ist. Für die Modellierung von Daten reicht es Prozesse mit stationären Inkrementen zu betrachten.

Definition 1.5 : Es wird gesagt, der Prozess Y_t hat stationäre Inkremente,

wenn für den Prozess $X_t = Y_t - Y_{t-1}$ für jeden Zeitpunkt $t_1, ..., t_k$ mit $k \geq 1$ gilt, dass die Verteilung von $(X_{t_1+c}, ..., X_{t_k+c})$ unabhängig von $c \in \mathcal{R}$ ist.

Dann kann H auf Werte größer null eingeschränkt werden (der Prozess ist mathematisch gleichwertig für negative H).

Ohne weitere Herleitung sollen hier noch die Kovarianzfunktionen von Y_t und X_t angegeben werden.

$$cov(Y_t, Y_s) = \gamma_y(t,s) = \frac{\sigma^2}{2}\left[|t|^{2H} - |t-s|^{2H} + |s|^{2H}\right] \tag{1.14}$$

$$cov(X_i, X_{i+k}) = \gamma(k) = \frac{\sigma^2}{2}\left[|k+1|^{2H} - |2k|^{2H} + |k-1|^{2H}\right] \tag{1.15}$$

Die Abbildung 1.1 zeigt den Verlauf der Kovarianzfunktion (1.15) für ver-

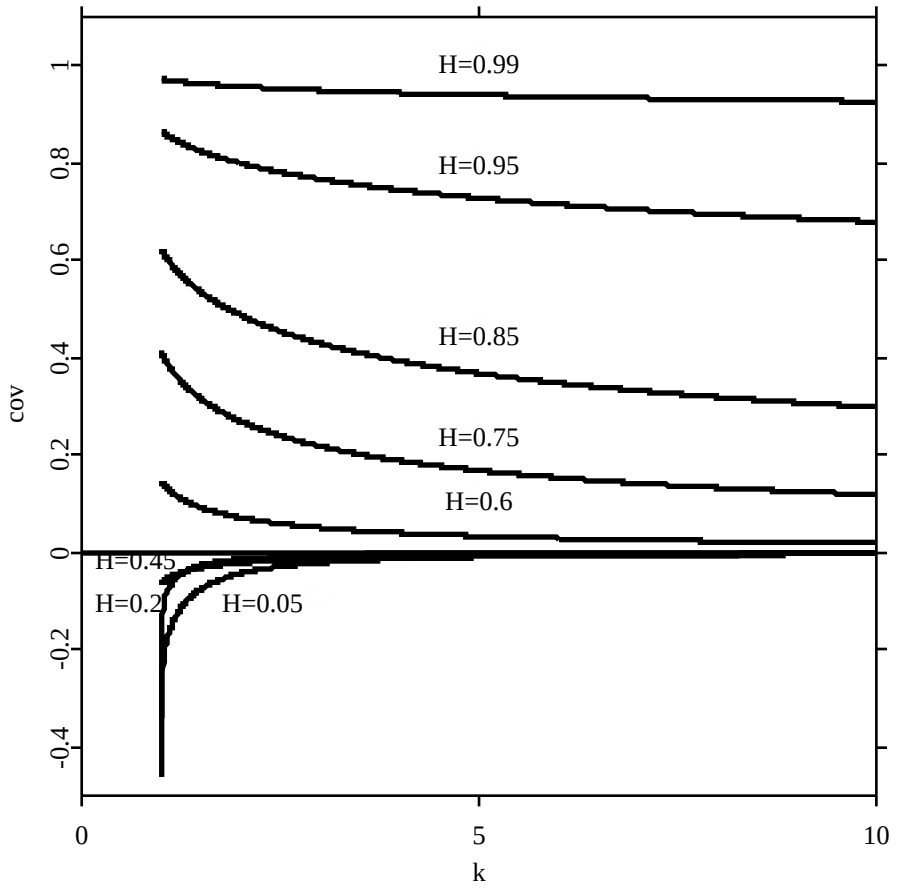

Abbildung 1.1: Simulation der Kovarianzen gegen die Länge der Lags k

schiedene Parameter H.

Mittels einer Taylor Erweiterung kann das asymptotische Verhalten von $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$ approximiert werden.

$$\lim_{k\to\infty} \rho(k) = H(2H-1)k^{2H-2} \tag{1.16}$$

Damit läßt sich folgendes zeigen:

1. Für $0 < H < 1/2$ lassen sich die Korrelationen aufsummieren, theoretisch gilt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = 0$, praktisch wird dies aber kaum vorkommen, da diese Beziehung äußerst instabil ist (siehe Beran [3]).

2. Für $1/2 < H < 1$ nehmen die Korrelation so langsam ab, dass $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho(k) = \infty$.

Für $0 < H < 1/2$ hat der Prozess *Short Range*-, für $1/2 < H < 1$ *Long Range*- Abhängigkeit und für $H = 1/2$ sind alle Korrelationen $\rho(k)$ null für alle $k \neq 0$. Wie anfangs erwähnt gelten diese ganzen Bedingungen nur für Prozesse bei denen die ersten beiden Momente existieren und finit sind. Bei Prozessen mit unendlicher Varianz gelten diese in dieser Form nicht mehr [20].

1.2.2 Fraktionale Brownsche Bewegung

Nun zu den zwei schon erwähnten Standardprozessen mit den vorgenannten Eigenschaften, als erstes fraktionale Brownsche Bewegung.

Definition 1.6 : $B(t)$ sei ein stochastischer Prozess mit kontinuierlichem *Sample* Pfad und es gilt:

1. $B(t)$ ist Gauß normalverteilt
2. $B(0) = 0$
3. $B(t)$ hat unabhängige Inkremente
4. $E[B(t) - B(s)] = 0$
5. $var[B(t) - B(s)] = \sigma^2|t-s|$

Dann ist $B(t)$ eine Brownsche Bewegung.

Fraktionale Brownsche Bewegung wird durch die Kovarianzfunktion (1.14) bestimmt mit dem Selbstähnlichkeitsparameter $H \in (0,1)$.

1.2.3 Fraktionale ARIMA-Prozesse

Ein zweites Modell sind fraktionale ARIMA Prozesse. Diese wurden 1970 von Box und Jenkins [4] als natürliche Erweiterung der klassischen ARIMA Modelle eingeführt. Ein ARMA(p,q) Prozess wird definiert mit $E(X_t) = 0$, $\varepsilon_t \sim iid$ normalverteilt mit $E(\varepsilon_t) = 0$ und $var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, sowie L dem Lagoperator als stationäre Lösung von

$$\alpha(L)X_t = \beta(L)\varepsilon_t \tag{1.17}$$

mit $\alpha(x) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x^j$ und $\beta(x) = 1 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j x^j$ mit $p, q \in \mathcal{Z}$, wobei angenommen wird, dass alle Lösungen von $\alpha(x)$ und $\beta(x)$ ausserhalb des komplexen Einheitskreises liegen (vergleiche [10]). Für ein ARIMA(p,d,q) gilt (1.17) für die d-te Differenz $(1-L)^d X_t$ anstelle von X_t (vgl. Definition 1.2 eines integrierten Prozesses).

Auf natürliche Weise kann ein ARIMA zu einem fraktionalen ARIMA Modell erweitert werden, indem d jeden Wert $d \geq 0$ annehmen kann.

Definition 1.7 : Sei X_t ein stationärer Prozess, so dass

$$\alpha(L)(1-L)^d X_t = \beta(L)\varepsilon_t \qquad -\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2} \tag{1.18}$$

gilt. Dann wird X_t fraktionaler ARIMA(p,d,q) Prozess bezeichnet.

Für Long Memory Prozesse ist allein der Bereich $0 \leq d \leq 1/2$ interessant. Prozesse mit $d \geq 1/2$ sind nicht stationär und zudem lassen sich alle Prozesse mit $d > 1/2$ durch Differenzbildung auf den Bereich in (1.18) zurückführen [3]. Die Kovarianzfunktion eines ARIMA(0,d,0) ist durch

$$\gamma(k) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(-1)^k, (1-2d)}{, (k-d+1), (1-k-d)} \tag{1.19}$$

gegeben. Die Bestimmung der Kovarianzfunktion eines allgemeinen ARIMA(p,d,q) Prozesses ist wesentlich aufwendiger, vergleiche dazu Tschernig [22].

1.3 Schätzverfahren für Long Memory Prozesse

In diesem Abschnitt sollen einige, vor allem heuristische Schätzverfahren für Long Memory Prozesse angesprochen werden. Zu weitergehenden Verfahren, insbesondere speziellen Maximum Likelihood Verfahren vergleiche Beran [3] und Baillie [2].

1.3.1 Hurst und R/S Analyse

Eine Darstellung der R/S Analyse von Hurst wäre unvollständig ohne einige Worte zur historischen Entwicklung zu verlieren.

H. E. Hurst war ein Hydrologe aus England, der intensiv an der Projektierung eines Nilstaudamms mitarbeitete. Dazu studierte er ausgiebig das Verhalten des Flusses. Die jährliche Wassermenge, insbesondere die Höhe des jährlich wiederkehrenden Frühjahrshochwassers, mit seinen fruchtbaren Boden anschwemmenden Überflutungen, war für Ägypten stets eine wichtige Größe. Über letzteres besaßen die Ägypter eine Aufzeichnung über die Dauer von 847 Jahren von 622 bis 1469. Hurst studierte und analysierte die Werte [11]. Sie erschienen ihm nicht zufällig angeordnet, sondern größere Hochwasser folgten eher überdurchschnittlichen Hochwassern und kleinere Hochwasser eher unterdurchschnittlichen Hochwassern. Dennoch waren keine offensichtlich wiederkehrenden Zyklen erkennbar. Es schien als träten Zyklen aller Frequenzen auf, berlagerten sich und waren zufällig. Schon im alten Testament war von „sieben Jahren Fülle und sieben Jahren Hunger" die Rede. In Anlehnung daran nannte Mandelbrot dieses Verhalten den *Joseph Effekt*.

Mit den damaligen Standardanalysen konnte Hurst keine signifikanten Korrelationen zwischen den Werten feststellen. So entwickelte Hurst eine eigene Analysemethode. Eingeführt für die Modellierung der Molekülbewegung in Gasen und Flüssigkeiten, wurde die Brownsche Bewegung zu einem Standardmodell in der Statistik. Für die approximierte Entfernung R die ein Teilchen in der Zeit T zurücklegt gilt:

$$R = \sqrt{T} \tag{1.20}$$

Dieser Zusammenhang wird auch in der Finanzstatistik eingesetzt. So werden Standardabweichungen monatlicher Erträge oft mit $\sqrt{12}$ multipliziert, um die jährliche Standardabweichung als ein Volatilitätsmaß zu bestimmen [19].

Hurst nutzte diese Erkenntnis und entwickelte auf dieser Basis seine rescaled range (R/S) Analyse. Für den Mittelwert einer Datenreihe $X_{t+1}, ..., X_{t+k}$ aus einer Reihe $X_1, ..., X_n$ gelte $\bar{X}_{t,k} = 1/k \sum_{i=t+1}^{t+k} X_i$. Die empirische Standardabweichung wird dann ermittelt mit

$$S(t,k) = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=t+1}^{t+k} (X_i - \bar{X}_{t,k})^2} \tag{1.21}$$

wobei $S^2(t,k) = \hat{\sigma}^2(k-1)/k$, mit $\hat{\sigma}^2$ als erwartungstreuen Varianzschätzer. Für die R/S Analyse wird die Reihe $X_{t,k}$ umskaliert bzw. normalisiert durch:

$$Z_i = (X_i - \bar{X}_{t,k}) \qquad i = 1, ..., k \tag{1.22}$$

Die resultierende Reihe Z hat nun den Erwartungswert null. Aus dieser Reihe wird nun eine kumulierte Reihe Y gebildet:

$$Y_j = \sum_{i=1}^{j} Z_i \qquad j = 1, ..., k \tag{1.23}$$

Daraus wird der adjusted range $R(t,k)$ als Differenz zwischen Maximum und Minimum der Werte von Y_k berechnet:

$$R(t,k) = max(Y_1, ..., Y_k) - min(Y_1, ..., Y_k) \tag{1.24}$$

Dieser Wert ist definitionsgemäß stets positiv und stellt in Bezug auf (1.20) die Distanz dar, die das System in der Zeit k zurücklegt, gilt aber genaugenommen nur für eine Brownsche Bewegung mit Mittelwert null und Varianz von eins. Hurst wandte dennoch dieses Konzept an und verallgemeinerte diese Gleichung. Er standardisierte $R(t,k)$ mit $S(t,k)$ aus (1.21)

$$(R/S)_{t,k} = \frac{R(t,k)}{S(t,k)} \tag{1.25}$$

Der resultierende Quotient wird *Rescaled Adjusted Range* kurz R/S genannt. Hurst berechnete (1.24) für verschieden große Werte von $k \in \mathcal{Z}$ und $t \in (1, N)$. Dann plottete er die Logarithmen gegeneinander. Er stellte fest, dass sich die Punkte um eine gerade Linie verteilten und folgende Beziehung für große k annähernd galt,

$$\log(R/S)_k \approx c + H \log k \tag{1.26}$$

bzw. $(R/S)_k \approx ck^H$, wobei $(R/S)_k = E[(R/S)_{t,k}]$ bezeichnet.

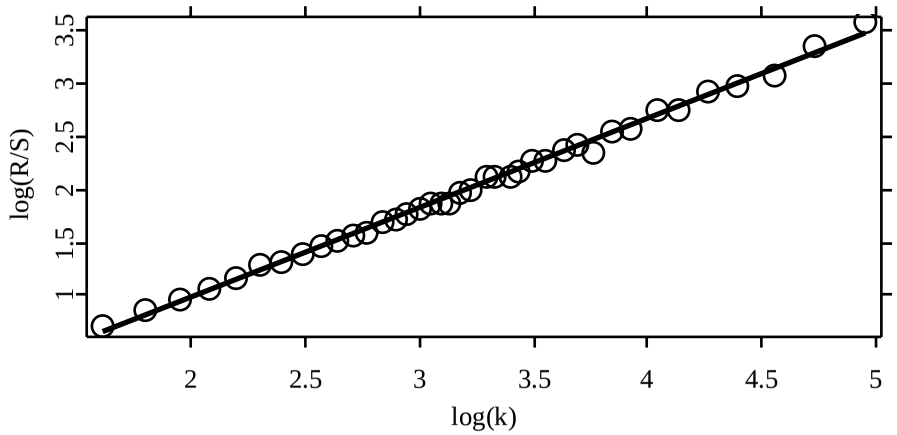

Abbildung 1.2: RS-Analyse mit Regrssionsgerade für die Werte der Nilminima aus [21], Regression $\hat{H} = 0.839$

Eine lineare Regression lieferte den Schätzwert $\hat{H}$ (Hurst selbst bezeichnete diesen Faktor noch mit K, Mandelbrot führte das H für Hurst Koeffizient ein). Aber im Gegensatz zu stochastischen Prozessen mit kurzfristigen Abhängigkeiten für die ein Wert $\hat{H} = 0,5$ zu erwarten wäre, erhielt

Hurst mit seinen Daten der Nilwasserstände einen Wert von $\hat{H} = 0,73$ mit einer Standardabweichung von 0,08. Das bedeutet das System der Nilwasserstände legt, in der Terminologie der Brownschen Teilchenbewegung, eine größere Entfernung in derselben Zeit zurück als ein rein zufälliger Prozess. Das ist nur möglich wenn sich die Werte gegenseitig beeinflussen, also korreliert sind.

Abbildung 1.2 zeigt den R/S Plot für Daten der Nilminima aus [21], die Regressionsgerade und den geschätzten Hurst Koeffizienten.

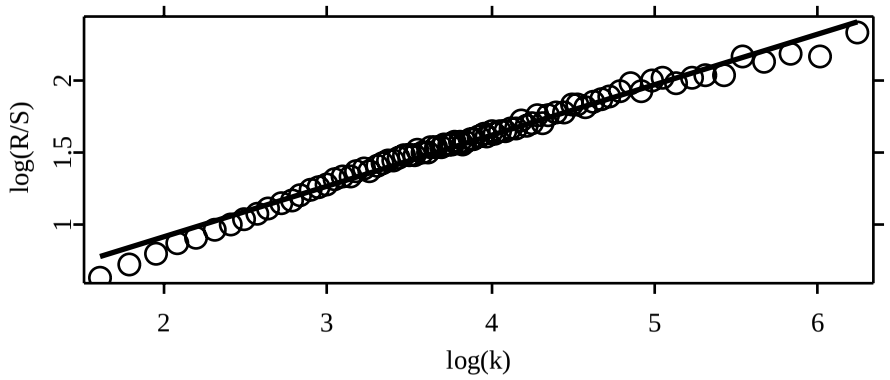

Abbildung 1.3: Simulation fraktionaler Brownscher Bewegung mit $H = 0.5$, Regression $\hat{H} = 0.352$

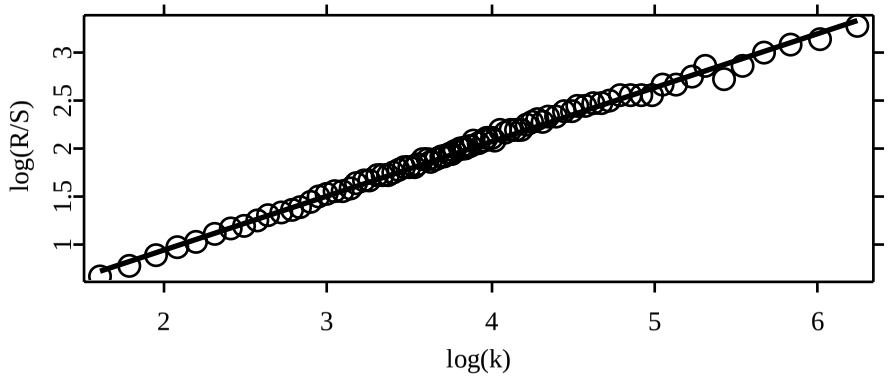

Abbildung 1.4: Simulation fraktionaler Brownscher Bewegung mit $H = 0.9$, Regression $\hat{H} = 0.565$

Die Abbildungen 1.3 und 1.4 zeigen den Plot $log(R/S)$ auf $log(k)$, die lineare Regressionsgerade über 2048 simulierte Werte von fraktionaler Brownscher Bewegung und den berechneten Hurst Koeffizienten $\hat{H}$.

1.3.2 Korrelogramm und partielle Korrelationen

Die Darstellung der Korrelationen (Korrelogramm)

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} \tag{1.27}$$

gegen die Zeitdifferenz k, als auch die der partiellen Korrelationen [10], kann dazu dienen signifikante Korrelation aufzuspüren. Dazu wird ein $\pm 2/\sqrt{n}$ Band eingefügt. Korrelationen ausserhalb werden als signifikant mit $\alpha = 0,05$ angesehen. Man sollte aber beachten, dass dies nur ein erster Anhaltspunkt sein kann, da die *Sample* Korrelationen oft untereinander nicht unabhängig sind und deshalb nicht genau das Signifikanzniveau eingehalten wird.

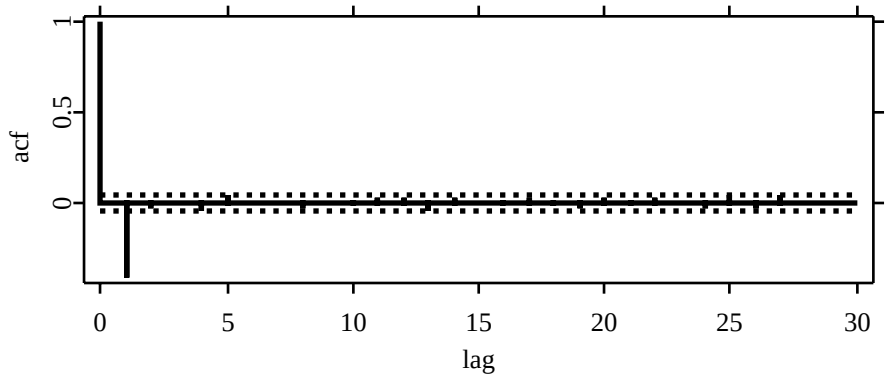

Abbildung 1.5: Korrelegramm Gaußschen Rauschens mit $H = 0.1$

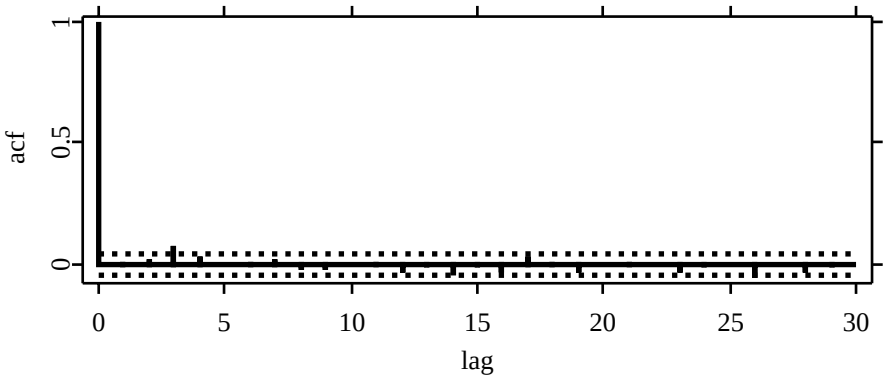

Abbildung 1.6: Korrelogramm fraktionales Gaußsches Rauschen mit $H = 0.5$

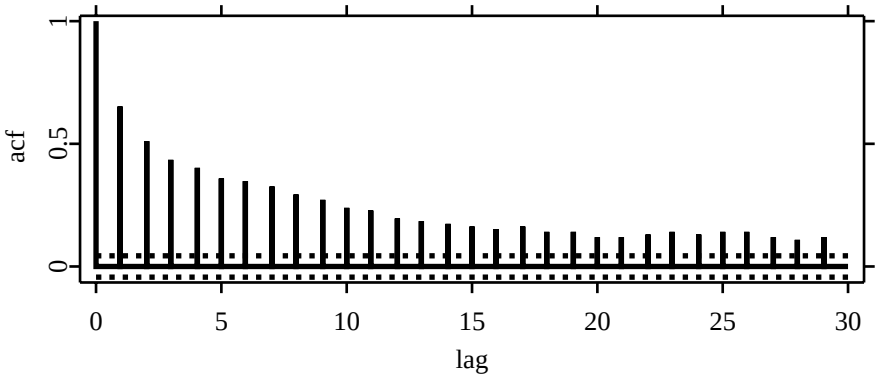

Abbildung 1.7: Korrelogramm fraktionales Gaußsches Rauschen mit $H = 0.9$

Die Abbildungen 1.5 bis 1.7 stellen Korrelogramme von 2048 simulierten Werten für verschiedene H dar. Deutlich zu sehen ist die langsamere Abnahme der Korrelationen, wenn H deutlich größer $1/2$ ist. Außerdem bei $H = 0.1$ ist die Kovarianz signifikant negativ für die ersten beiden Lags. Zusätzlich ist das angesprochene $\pm 2/\sqrt{n}$ Band eingefügt.

Das Korrelogramm ist insbesondere für die Einschätzung von Short Memory Prozessen geeignet, z.B. zur Bestimmung der Ordnung p eines AR Prozesses.

1.3.3 Varianzplot

Long Memory Prozesse sind gekennzeichnet durch eine langsamere Abnahme der Varianz des Mittelwertes als mit $1/n$. Aus Gleichung (1.8) läßt sich folgende Methode für eine Schätzung von H herleiten (vergleiche Beran [3]):

1. Für ganze k im Bereich $2 \leq k \leq n/2$ und eine angemessene Anzahl von Teilserien m_k wird der jeweilige Mittelwert bestimmt, $\bar{X}_1(k), ...\bar{X}_{m_k}(k)$, und daraus der Mittelwert aller m_k, $\bar{X}(k)$, errechnet.

2. Für jedes k wird die Varianz der Mittelwerte gemäß $s^2(k) = \frac{1}{(m_k-1)} \sum_{j=1}^{m_k} (\bar{X}_j(k) - \bar{X}(k))^2$ berechnet.

3. $\log s^2(k)$ gegen $\log k$ wird dargestellt.

Die Abbildungen geben die Ergebnisse einer Simulation von 2048 Werten fraktionalen Gaußschen Rauschens und der Berechnung und Anpassung einer Regressionsgeraden an die errechneten Punkte wieder. Für große k wird

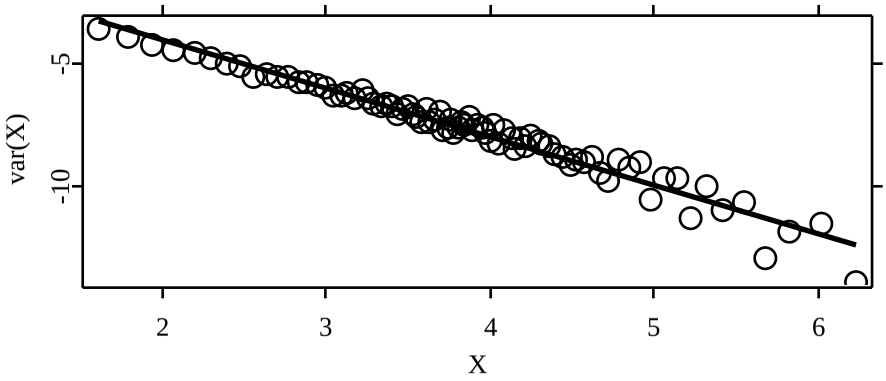

Abbildung 1.8: Gaußsches Rauschens $H = 0.1$, Steigung der Regressionsgeraden -1.955, d.h. $\hat{H} = 0.022$

erwartet, dass die Punkte um eine gerade Linie mit dem Anstieg $2H-2$ verteilt sind. Wie leicht zu errechnen ist, sollte bei einem unabhängigen Prozess eine Steigung von -1 auftreten.

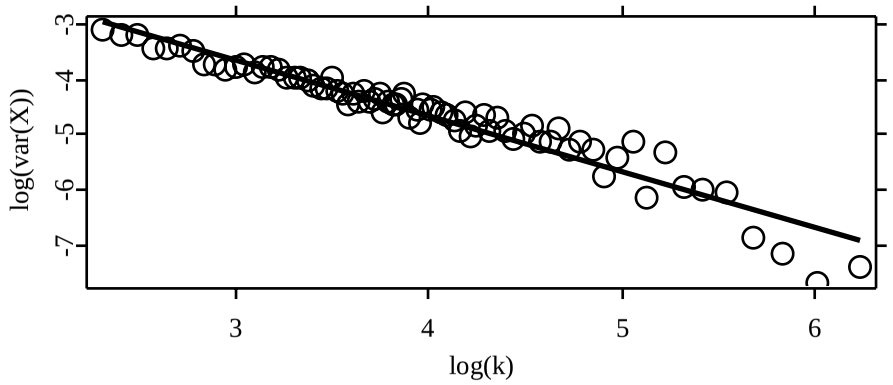

Abbildung 1.9: Varianzplot fraktionales Gaußsches Rauschen mit $H = 0.5$, Regressionsgerade -1.003, d.h. $\hat{H} = 0.498$

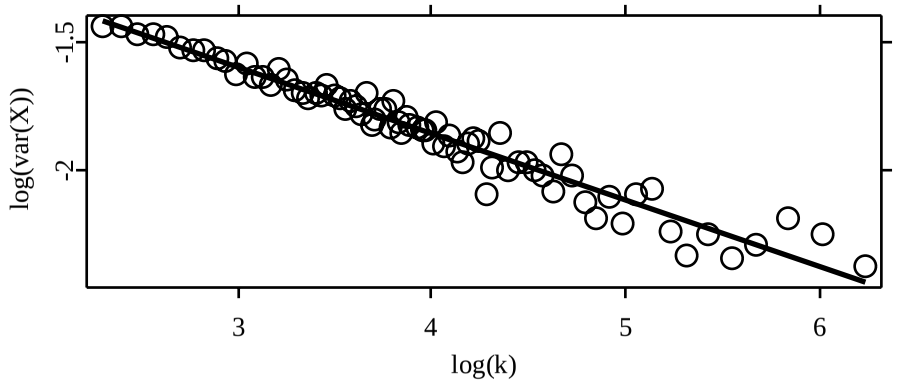

Abbildung 1.10: Varianzplot fraktionales Gaußsches Rauschen mit $H = 0.9$, Regressionsgerade -0.258, d.h. $\hat{H} = 0.871$

1.3.4 Variogramm

Das Variogramm ist folgendermaßen definiert [3]:

$$V(k) = \frac{1}{2} E\left[(X_t - X_{t-k})^2\right] \tag{1.28}$$

Ist X_t stationär mit definierter Kovarianz $\gamma(k)$ und der ACF $\rho(k)$, dann konvergiert $V(k)$ gegen einen festen Wert und es gilt $V(k) = \gamma(0)(1-\rho(k)) = V(\infty)(1-\rho(k))$, daraus

$$\rho(k) = 1 - \frac{V(k)}{V(\infty)} \tag{1.29}$$

Durch Einsetzen der *Sample* Korrelationen $\hat{\rho}(k)$ wird ein Plot der $V(k)$ gegen k äquivalent zum Variogramm. Alternativ kann auch direkt die quadrierte Differenz $(X_i - X_j)^2$ gegen den Betrag $|i-j|$ für alle Paare $i < j$ abgetragen werden. Eine einfache Kurve wird dann den Punkten angepaßt. Long Memory Prozesse sollten dann durch ihre langsamere Annäherung an den asymptotischen Wert erkennbar sein. Die Abbildungen geben die Ergebnisse

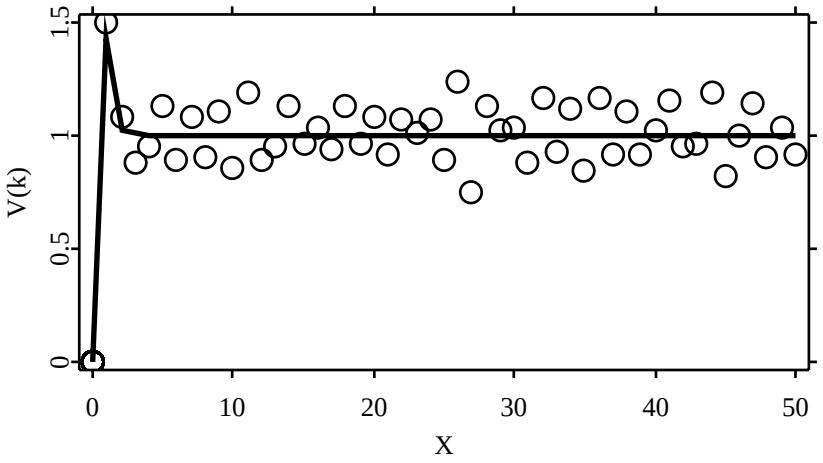

Abbildung 1.11: Gaußsches Rauschens $H = 0.1$, und wahres Variogramm (Linie)

von Simulation fraktionalen Gaußschen Rauschens mit je 250 Werten, sowie eine Darstellung des theoretischen Verlaufs des Variogramms für denselben Wert H. Der Grund für die relativ geringe Anzahl von Wiederholungen ist die hier benutzte Methode der Berechnung *standardisierten* fraktionalen Gaußschen Rauschen (vgl. Anhang A.1.1).

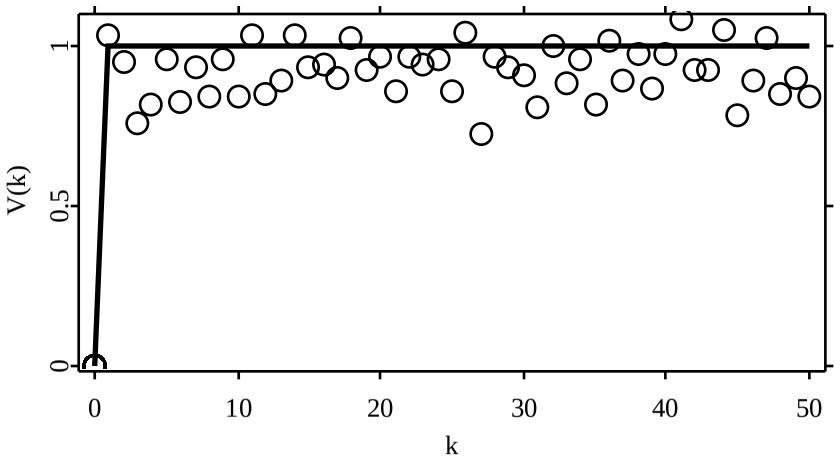

Abbildung 1.12: Variogramm fraktionales Gaußsches Rauschen mit $H = 0.5$ Simulation und wahres Variogramm

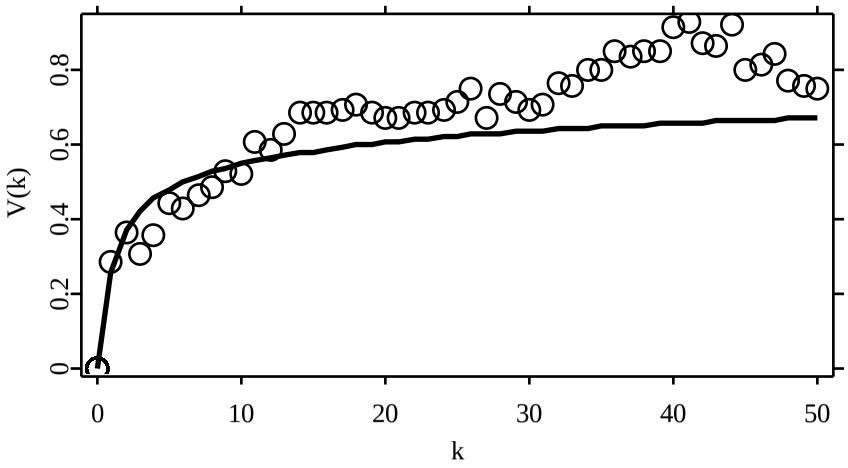

Abbildung 1.13: Variogramm fraktionales Gaußsches Rauschen mit $H = 0.9$ und wahres Variogramm

1.4 Tests und Schätzung der Lageparameter

Wenn die Vermutung besteht ein Prozess könnte Long Memory Eigenschaften aufweisen, ist schwierig einzuschätzen, ob nicht doch ein rein zufälliger oder short memory Prozess die Daten ausreichend erklären kann. Die im Abschnitt 3.1.1 vorgestellte R/S Analyse galt anfangs, insbesondere wegen des Verhalten der Sample Standardabweichung für kleinere Stichprobenumfänge, als unzugänglich in Analysen. Hurst selbst schlug als Nullhypothese, der Prozess ist ein *Random Walk*, die Beziehung

$$(R/S)_k = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^{1/2} \tag{1.30}$$

vor, mit k als Laglänge, konnte aber keinen formalen Beweis geben. Feller [7] fand ähnliche Resultate, aber lediglich für den *Adjusted Range* $(R_k)_{t,k}$.

$$E[R(t,k)] = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^{1/2} \tag{1.31}$$

$$var\,(E[(R(t,k)]) = \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\right) k \tag{1.32}$$

Die Varianzformel (1.31) gibt den Wert für ein bestimmtes $R_{t,k}$ an. Es kann angenommen werden, dass die Varianz des laut Nullhypothese *Random Walk* Prozesses, normalverteilt ist (vergleiche mit Abbildung 2.1). Deshalb verringert sich mit der Anzahl der Teilserien, i.d.R. N/k, der Wert der erwarteten Varianz $E[(R/S)_{t,k}]$, wie im ersten Abschnitt beschrieben mit $(N/k)^{-1}$.

Mit dem Aufkommen der Computertechnik wurden umfangreiche *Monte Carlo* Simulationen möglich. Damit wurde versucht das tatsächliche Verhalten der R/S, unter der Nullhypothese eines *Random Walk*, für begrenzte Stichprobenumfänge zu bestimmen. Dazu werden Zufallsreihen generiert, für diese die Werte der R/S Analyse berechnet und mit denen der asymptotisch vorausgesagten Werte verglichen. Dabei wurden systematische Abweichungen nach unten für Werte von $k < 20$ festgestellt.

1976 entwickelten Anis und Lloyd folgende Gleichung, mit , der Gamma Funktion,

$$E[(R/S)_k] = \frac{,\,(\frac{k-1}{2})}{\sqrt{\pi},\,(\frac{k}{2})} \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{\frac{k-i}{i}} \tag{1.33}$$

die diese systematische Abweichung für kleine k korregieren soll. Für große k wird allerdings die Berechnung sehr aufwendig. Mithilfe von Sterling's Funktion kann diese für große k, $k > 400$ jedoch vereinfacht werden zu:

$$E[(R/S)_k] = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{k-1} \sqrt{\frac{k-i}{i}} \tag{1.34}$$

Gleichung (1.33) ist nun in der Lage auch für kleine k das empirische Verhalten besser zu erklären. Peters schlägt für (1.33) zusätzlich einen multiplikativen Korrekturterm $(1 - \frac{1}{2n})$ vor. Die Ergebnisse von Simulationen in Abschnitt 2.1 in der Tabelle 1 konnten diesen allerdings nicht unterstützen, sondern präferieren die Gleichung (1.33) von Anis und Lloyd, welche aber für große k geringere Werte liefert, als die Simulationen (vergleiche Tabelle 2.1 und Abbildung 2.2).

Die Simulationen und die Gleichungen zeigen, dass $H = 0.5$ auch für einen unabhängigen Prozess nur ein asymptotischer Wert ist. Für kleinere k kann man eine signifikante Abweichung nach oben erwarten. Da unter der Nullhypothese die R/S Werte Zufallsvariablen darstellen, kann man auch von H erwarten zufällig, mit unseren Annahmen, normalverteilt zu sein. Dann gilt für die erwartete Varianz von H, allein abhängig von N als Stichprobengröße, folgende Beziehung:

$$var(H) = \frac{1}{n} \tag{1.35}$$

Eine weitere einfache Beziehung läßt sich ableiten, die sogenannte V-Statistik (vergleiche Peters [19]) als:

$$V_k = \frac{(R/S)_k}{\sqrt{n}} \tag{1.36}$$

Eine Darstellung von V_k gegen $\log k$ kann helfen Zyklen auszumachen Abbil-

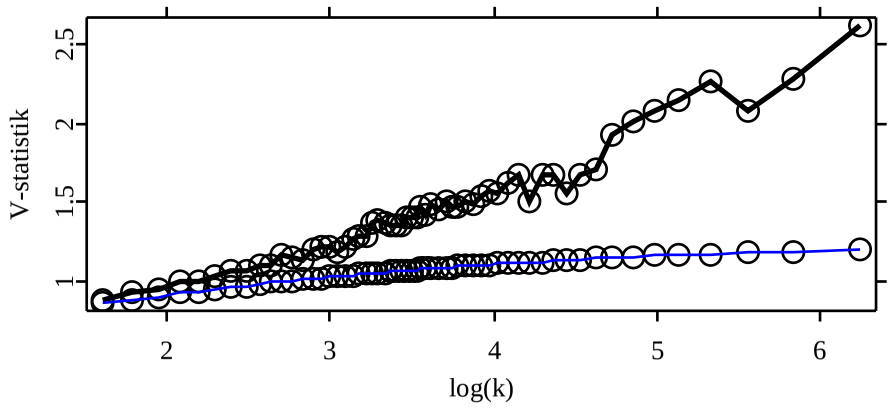

Abbildung 1.14: V-Statistik, gezackt für fraktionale Brownsche Bewegung mit $H = 0.7$, untere Kurve erwartete Werte für $H = 0.5$ berechnet nach Gleichung (1.33), jeweils 1024 Werten

dung 1.14 zeigt eine Darstellung der V-Statistik für fraktionale Brownsche

Bewegungen. Für $H = 1/2$ sollte die Kurve nahezu horizontal verlaufen (untere Kurve nach Gleichung 1.33).

Als nächstes soll noch kurz auf die Schätzung von Lage- und Streuungsparameter eingegangen werden. Dazu wird davon ausgegangen, dass die marginale Verteilung des beobachteten Prozesses zu einer Familie von Verteilungen gehört (siehe Beran [3]), die durch

$$F_{\mu,\sigma^2}(x) = F_o\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{1.37}$$

gekennzeichnet ist. Der *best linear unbiased estimator* BLUE für $\hat{\mu}$ ist gegeben durch

$$\hat{\mu} = [\mathbf{1}^t \Sigma_n^{-1} \mathbf{1}]^{-1} \mathbf{1^t} \Sigma_n^{-1} X \tag{1.38}$$

mit $\mathbf{1} = (1, 1, ..., 1)^t$ als Einsvektor und Σ_n der Matrix der Kovarianzen. Die Varianz ist dann gleich

$$var(\hat{\mu}) = [\mathbf{1}^t \Sigma_n^{-1} \mathbf{1}]^{-1} \tag{1.39}$$

Ist X_t ein Gaußscher Prozess ist der BLUE Schätzer gleich dem ML Schätzer. Im allgemeinen ist jedoch die Kovarianzmatrix nicht bekannt und muß deshalb in (1.38) durch die aus der Stichprobe geschätzte ersetzt werden. Gleichung (1.39) gilt dann nicht mehr exakt. So stellt sich die Frage, ob nicht ein einfacherer Schätzer für $\hat{\mu}$ wie das arithmetische Mittel $\bar{X}_n$ nicht ausreichend ist. Beran [3] konnte zeigen, dass die asymptotische Effizienz im Vergleich zum BLUE Schätzer stets größer ist als 98 Prozent. Der Verlust an Effizienz ist also nicht zu hoch, auch bei Vorhandensein von Long Memory. In der Praxis ist der Mittelwert aber sehr empfindlich gegenüber Ausreißern. So kann man daneben eine Reihe von sogenannten M-Schätzern definieren, die wesentlich robuster sind, i.a. dafür aber eine größere Stichprobenvarianz aufweisen.

Für die Schätzung der Varianz ist der Schätzer kann der allgemeine erwartungstreue Varianzschätzer

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X})^2 \tag{1.40}$$

verwendet werden. Ist die Korrelationsstruktur annähernd bekannt, kann ein nahezu unverzerrter Schätzer durch Multiplikation mit der Korrekturfaktor $[1 + \frac{1}{n-1}\delta_n(\rho)]$ (vgl. Gleichung (1.4)) definiert werden.

1.5 Prozesse mit unendlicher Varianz

Die bisher betrachteten Prozesse und die in der Literatur am weitesten verbreiteten beinhalten finite erste und zweite Momente. Das ist auch praktisch

weitestgehend plausibel, denn in der Praxis kann davon ausgegangen werden, dass ein Wert für Varianz und Mittelwert bestimmbar ist. Zwar wurde empirisch beobachtet, dass Finanzzeitreihen sehr häufig leptokurtische Eigenschaften aufweisen, also keineswegs einer Normalverteilung folgen. Dennoch konnte dieses Verhalten mit verbesserten Modellen z.B. GARCH u.ä. recht gut wiedergegeben werden.

Dennoch lassen allgemeine α-stabile Prozesse eine wesentlich größere Flexibilität und sparsamere Parametrisierung zu. Auch aus diesem Grund hat die Betrachtung von Prozessen, in denen die Varianz nicht erklärt ist, an Bedeutung gewonnen. Eine mathematisch gehaltene Übersicht über diese Thematik geben Samorodnitsky und Taqqu [20]. Hier sollen nur kurz und ohne Anspruch auf Vollständigkeit einige wichtige Punkte daraus wiedergegeben werden. Als erstes noch einmal eine allgemeine Definition einen selbstähnlichen Prozesses.

Definition 1.8: Ein Prozess $X = X(t)$ mit $t \in \mathcal{R}$ ist selbstähnlich mit Index $H > 0$ für alle $c > 0$, wenn die endlichdimensionale Verteilung von $X(ct)$ gleich der für $c^H X(t)$ ist. Der Prozess ist dann selbstähnlich (*self similar*) mit Selbstähnlichkeitsparameter H und hat stationäre Inkremente, abgekürzt H-sssi.

Zwischen selbstähnlichen und stationären Prozessen existiert dabei folgender wichtiger Zusammenhang. Ist X_t $(0 < t < \infty)$ H-ss (selbstähnlich mit Selbstähnlichkeitsparameter H), dann gilt

$$Y_t = e^{-tH} X(e^t) \qquad -\infty < t < \infty \tag{1.41}$$

ist stationär. Umgekehrt, wenn Y_t $(-\infty < t < \infty)$ stationär ist, dann gilt

$$X(t) = t^H Y(\ln t) \qquad 0 < t < \infty \tag{1.42}$$

ist H-ss. Brownsche Bewegung ist somit $1/2 - sssi$. Fraktionale Brownsche Bewegung ist dann wie in Abschnitt 1.2.2 erwähnt durch die Kovarianzfunktion 1.14 definiert, wobei für jedes $0 < H \leq 1$ genau ein Gaußscher Prozess mit dieser Kovarianzfunktion existiert, welcher fraktionale Brownsche Bewegung (B_H) genannt wird. Da diese $B_H(t)$ stationäre Inkremente aufweisen formt

$$Y_j = B_H(j+1) - B_H(j) \qquad j = ..., -1, 0 - 1, ... \tag{1.43}$$

eine stationäre Sequenz und diese wird als *fraktionales Gaußsches Rauschen* bezeichnet. Dieses ist stationär und zeigt im Bereich $1/2 < H < 1$ Long Memory Verhalten.

Im Bereich $0 < H < 1$ ist die fraktionale Brownsche Bewegung der einzige Gaußsche H-sssi Prozess. Daneben gibt es aber eine Reihe α-stabiler Prozesse mit H-sssi und $0 < \alpha < 2$. Zu den bekanntesten zählen die lineare

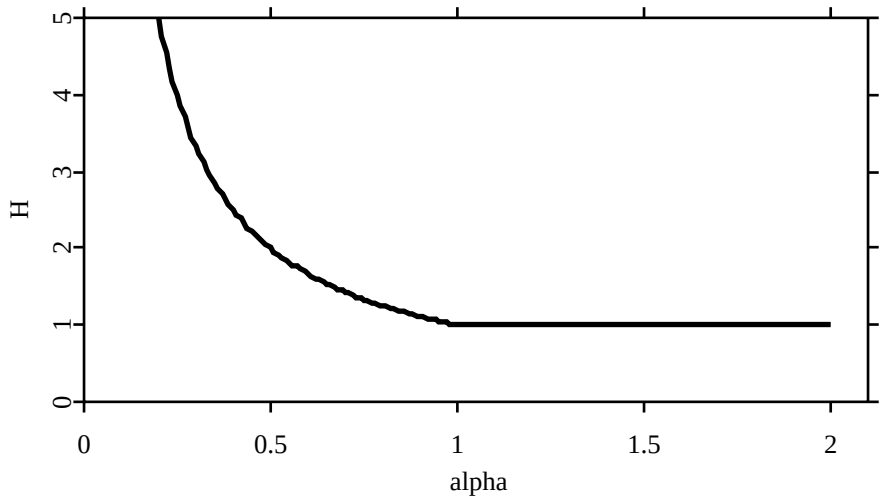

Abbildung 1.15: Darstellung des erlaubten Bereiches für die Werte α und H unterhalb der Linie

fraktionale stabile Bewegung (*linear fractional stable motion*) und die α-stabile Lévy Bewegung. Dabei gilt für einen nichtdegenerierten α-stabilen ($\alpha < 2$) H-sssi Prozess X_t mit $t \in \mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} \alpha &< 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < H \leq 1/\alpha \\ \alpha &> 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < H < 1 \end{aligned} \tag{1.44}$$

Man kann für jedes erlaubte Paar (H, α) einen α-stabilen H-sssi Prozess finden. Die dabei erlaubten Werte sind in Abbildung 1.15 dargestellt. Im Gegensatz zum Fall eines Gaußschen Prozesses ($\alpha = 2$) ist dieser aber nicht mehr eindeutig, es gibt mehrere verschiedene. Im Bereich $\alpha < 2$ ist dabei die Varianz unendlich, für $\alpha \leq 1$ auch der Mittelwert. Zu Definitionen und weitergehenden Eigenschaften vergleiche mit Samorodnitsky und Taqqu [20].

Kapitel 2

Simulationen

2.1 Brownsche Bewegung

In Definition 1.6 wurde die Brownsche Bewegung im Zusammenhang mit der fraktionalen Brownschen Bewegung definiert. Im Gegensatz zur fraktionalen Variante mit der Kovarianzfunktion (1.15) sind die Kovarianzen bei der einfachen Brownschen Bewegung für alle $k > 0$ gleich null. Dies führt, wie erwähnt, theoretisch zu einem Wert des Selbstähnlichkeitsparameters $H = 1/2$.

In diesem Abschnitt soll nun mittels Monte Carlo Simulationen von einfacher Brownscher Bewegung überprüft werden, inwieweit der im Abschnitt 1.4 beschriebene Erwartungswert von R/S in Gleichung (1.32) mit dem, aus den Simulationen errechneten Wert für R/S übereinstimmt. Dazu wird eine Prozedur verwendet, welche mehrere Simulationen von Gaußschem Rauschen, den stationären Inkrementen einer Brownschen Bewegung, durchführt und mittels der in Abschnitt 1.3.1 beschriebenen R/S Analyse, dessen R/S-Werte errechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Tabelle 2.1 zeigt, dass die Erwartungswerte nach Anis und Lloyd in Spalte 3 die besten Ergebnisse der verschiedenen Erwartungswerte im Vergleich zu der Simulation in Spalte 1 liefern. Deutlich zu sehen ist die schrittweise Annäherung der Erwartungswerte nach den verschiedenen Berechnungsmethoden. Dennoch bleibt auch bei steigender Laglänge k eine gewisse Abweichung. Die Ergebnisse zeigen auch, dass wie im Abschnitt 1.4. erwähnt, der Hurst Koeffizient ein asymptotischer Wert ist und für kleine k eine Abweichung nach oben zeigt.

Abbildung 2.2 zeigt eine Darstellung der zu erwartenden Hurst Koeffienten, wenn H anfangs aus Werten mit $5 \leq k \leq 25$ und am Ende mit $5 \leq k \leq 4971$ berechnet wurde. Dazu wurde die Gleichung (1.33) (Anis & Lloyd) für die Berechnung der erwarteten R/S Werte verwendet und dann der Hurst Koeffizient für $5 \leq k \leq 13$ bis $5 \leq k \leq 4971$ wie in Abschnitt 1.4 beschrieben berechnet (untere Punktreihe). Die obere Punktreihe stellt

Lag	Simalation log(R/S)	Hurst	Anis/Lloyd	Stirling	Korrektur
5	0.6553	1.0305	0.6562	0.4827	0.5508
9	1.0498	1.3244	1.0400	0.9499	0.9828
17	1.4355	1.6424	1.4316	1.3857	1.4017
45	2.0089	2.1291	1.9966	1.9797	1.9854
89	2.3724	2.4701	2.3748	2.3663	2.3691
189	2.7754	2.8467	2.7806	2.7766	2.7780
333	3.0195	3.1299	3.0798	3.0776	3.0783
636	3.3715	3.4534	3.4170	3.4158	3.4162
1000	3.5563	3.6797	3.6506	3.6498	3.6501
1750	4.0719	3.9595	3.9374	3.9370	3.9371
3500	4.4418	4.3061	4.2904	4.2902	4.2903

Tabelle 2.1: Simulation von 200 Reihen Gaußschen Rauschens mit je 7000 Werten, Spalten 3 bis 6 logarithmierte Erwartungswerte, Spalte 3 nach Gleichung (1.30), Spalte 4 nach Gleichung (1.33), Spalte 5 nach (1.34), Spalte 6 (1.33) mit dem Korrekturterm von Peters [19]

die Berechnung der Hurst Koeffizienten für eine Simulation von Gaußschem Rauschen im Bereich $5 \leq k \leq 11$ bis $5 \leq k \leq 5000$ für eine Brownsche Bewegung mit 40000 Werten dar. Die Werte liegen für größere k über den aus Gleichung (1.33) berechneten Werten, was zeigt, dass die Bestimmung der zu erwartenden Werte vor allem durch Monte Carlo Simulationen erfolgen sollte.

	Anzahl	Mittelwert	90%	95%	99%
direkt	7000	0.543	0.512-0.576	0.508-0.580	0.490-0.596
AR(1)	7000	0.536	0.523-0.570	0.511-0.572	0.495-0.578
direkt	3000	0.548	0.508-0.589	0.505-0.594	0.494-0.603
AR(1)	3000	0.549	0.511-0.584	0.499-0.598	0.487-0.616
direkt	1000	0.559	0.500-0.619	0.492-0.632	0.458-0.645
AR(1)	1000	0.558	0.500-0.613	0.492-0.626	0.458-0.643

Tabelle 2.2: Simulierte Konfidenzintervalle für verschiedene Anzahl von Beobachtungen, Nullhypothese Prozess ist unabhängig, direkt: der Prozess selbst geschätzt, AR(1): geschätzter AR(1) Prozess wird simuliert und daraus $\hat{H}$ geschätzt

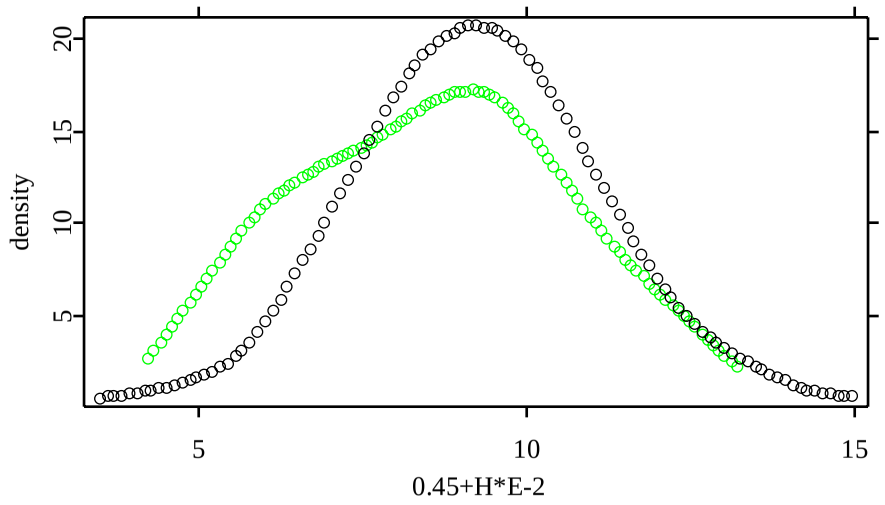

Abbildung 2.1: Kerndichteschätzung für die Werte des Hurst Koeffizienten geschätzt aus den 200 mal 7000 Werten aus Tabelle 2.2, dunkel $\hat{H}$ direkt geschätzt und grau aus AR(1)

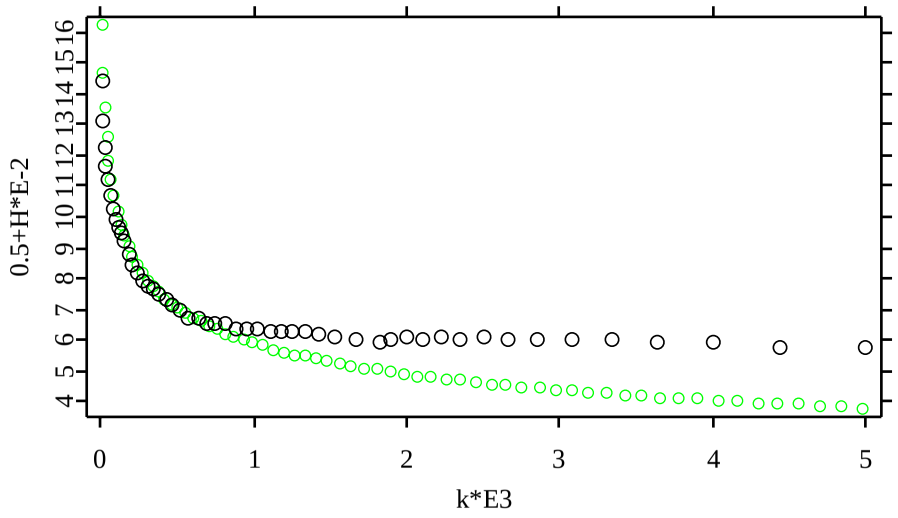

Abbildung 2.2: Berechnung des Hurst Koeffizienten aus Simulation und aus Regression über erwartete R/S Werte nach (1.33), $\hat{H}$ wurde immer von 5 bis zum dargestellten k berechnet

Die Tabelle 2.2 zeigt aus Simulationen erzeugte Konfidenzintervalle für verschiedene Beobachtungszahlen. Die Wahl der Werte erfolgte in Hinblick auf die Daten in Abschnitt 3.2. Dass diese Methode dazu dienen kann, Konfidenzintervalle für den Hurst Koeffizienten zu schätzen, konnte durch das in [15] beschriebene Bootstrap Verfahrens gezeigt werden.

2.2 Fraktionale Brownsche Bewegung

Ein Gaußscher H-sssi Prozess mit Selbstähnlichkeitsparameter $0 < H \leq 1$ wird wie in Abschnitt 1.5 dargelegt fraktionale Brownsche Bewegung genannt. Gilt $Var(X_1) = \sigma_0^2 = 1$ wird der Prozess als standardisierte fraktionale Brownsche Bewegung bezeichnet. Die Abildungen 2.3 bis 2.5 zeigen fraktionale Brownsche Bewegung für verschiedene H sowie deren Inkremente, dem fraktionalen Gaußschen Rauschen.

Die Simulationen wurden für 256 Werte mit dem im Anhang A.1.2 beschriebenen Verfahrens generiert. Man beachte bei der Darstellung die unterschiedlichen Skaleneinteilungen an den Ordinaten-Achsen der fraktionalen Brownschen Bewegung.

Parameter H in Simulation	geschätztes H	$\hat{H}$ aus AR(1) Residuen
0.1	0.251	0.745
0.3	0.399	0.569
0.5	0.560	0.570
0.7	0.716	0.716
0.9	0.843	0.841

Tabelle 2.3: Simulation des Selbstähnlichkeitsparameters H für verschiedene fraktionale Brownsche Bewegungen, je 50 Wiederholungen mit jeweils 1024 Werten

In der Tabelle 2.3 wurden einige Simulationen von fraktionalen Gaußschem Rauschen mittels der *Rescaled Range* Analyse geschätzt. Die Tabelle soll zeigen, dass das angesprochene Verfahren dazu dienen kann den Selbstähnlichkeitsparameter $\hat{H}$ zu schätzen. Deutlich wird allerdings eine starke Verzerrung nach oben insbesondere für $H \leq 1/2$ und eine etwas schwächere nach unten für $H = 0.9$. Dies bedeuted, dass das R/S Verfahren vor allem dazu dienen kann *Long Memory*, also $H > 1/2$ zu schätzen.

Gleichzeitig wurde der geschätzte AR(1)-Prozess errechnet und aus diesem ebenfalls der Hurst Koeffizient berechnet. Die Verwendung dieses AR(1) Filters soll, wie Peters [19] vorschlägt, die häufig in Finanzzeitreihen zu beobachtenden kurzfristigen Abhängigkeiten verringern.

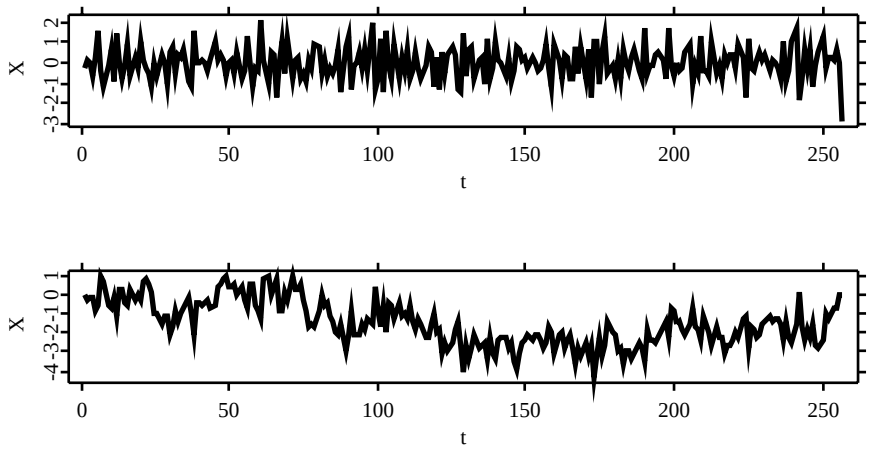

Abbildung 2.3: oben: Darstellung der Inkremente (fraktionales Gaußsches Rauschen) für fraktionale Brownsche Bewegung mit $H = 0.2$, unten die fraktionale Brownsche Bewegung dazu

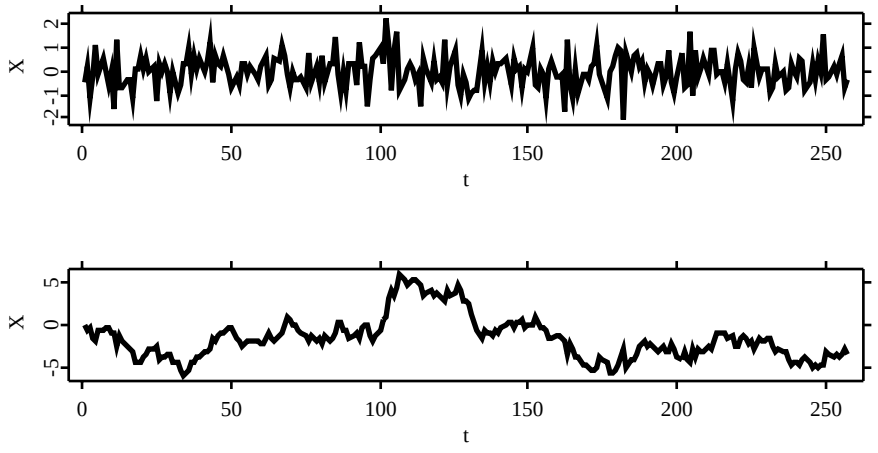

Abbildung 2.4: oben: Darstellung der Inkremente (fraktionales Gaußsches Rauschen) für fraktionale Brownsche Bewegung mit $H = 0.5$, unten die fraktionale Brownsche Bewegung dazu

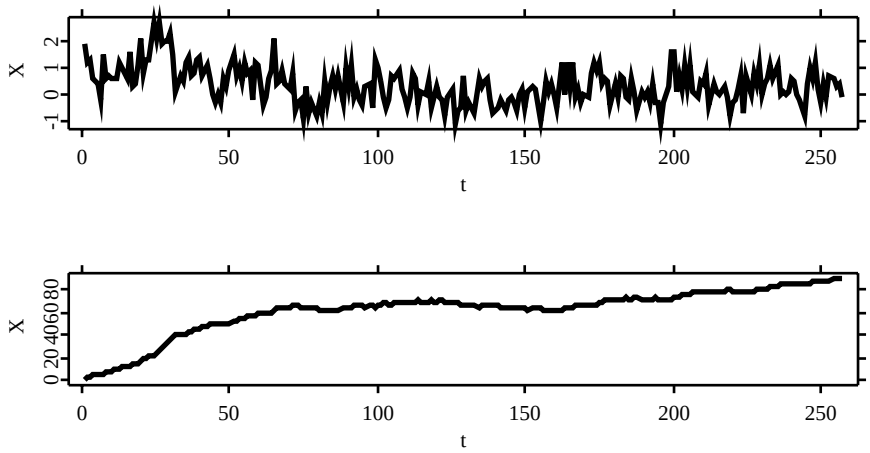

Abbildung 2.5: oben: Darstellung der Inkremente (fraktionales Gaußsches Rauschen) für fraktionale Brownsche Bewegung mit $H = 0.8$, unten die fraktionale Brownsche Bewegung dazu

2.3 MA-Prozesse

Ein Moving Average (MA) Prozess der Ordnung q wird durch (vergleiche [10])

$$X_t = \beta_1 \varepsilon_{t-1} + ... + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t \tag{2.1}$$

oder als Lagdarstellung

$$X_t = \beta(L)\varepsilon_t \tag{2.2}$$

mit ε_t als weissem Rauschen (iid. und gaußnormalverteilt) definiert. Da der MA(q)-Prozess eine Linearkombination stationären Gaußschen Rauschens darstellt, ist der MA-Prozess selbst stationär. Es gilt $E(X_t) = 0$ und für die Kovarianzfunktion

$$cov(X_t, X_{t+k}) = \gamma(k) = \sum_{i=0}^{q-|k|} \beta_i \beta_{i+|k|} \sigma^2 \qquad |k| \leq q \tag{2.3}$$

Die Autokorrelationsfunktion (ACF) $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0)$ bricht demzufolge nach q Lags ab.

Für die Identifikation von MA-Prozessen entsteht das Problem, dass die ACF für $\beta(L)$ dieselbe wie für $\beta^{-1}(L)$. Um dies auszuschließen wird i.a. verlangt, dass die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$1 + \beta_1 z + ... + \beta_q z^q = 0 \qquad z \in \mathcal{C} \tag{2.4}$$

ausserhalb des komplexen Einheitskreises liegen.

β_1	β_2	$\hat{H}$	$\hat{H}$ von geschätzten AR(1) Residuen
0	0	0.554	0.553
0.1	0	0.569	0.555
0.3	0	0.580	0.538
0.5	0	0.590	0.523
0.7	0	0.599	0.516
0.9	0	0.589	0.498
0.1	0.05	0.580	0.565
0.3	0.15	0.599	0.552
0.5	0.25	0.613	0.532
0.7	0.35	0.622	0.511
0.9	0.45	0.617	0.487

Tabelle 2.4: Schätzung des Selbstähnlichkeitsparameters H für mehrere MA(1) und MA(2) Prozesse und dem geschätzten AR(1) Residualprozess, dazu wurden jeweils 50mal 1500 Werte generiert, jeweils Mittelwerte für $\hat{H}$

In Tabelle 2.4 sind die Hurst Koeffizienten für verschiedene MA(1) und MA(2) Prozesse geschätzt worden. Man kann dabei sehen, dass der Einfluß von MA Termen die schätzung $\hat{H}$ nicht allzu stark beeinflußt. Zudem kann, wie in Spalte 4 erkennbar ist, das Verwenden der AR(1) Residuen teilweise den Effekt der MA Terme auf den geschätzten Hurst Koeffizienten noch verringern.

2.4 AR-Prozesse

Autoregressive (AR) Prozesse sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Werte linear von den vorhergehenden abhängen. Ein allgemeiner AR(p) Prozess mit p als Anzahl der miteinbezogenen zurückliegenden Werte kann durch

$$X_t = 1 + \alpha_1 X_{t-1} + ... + \alpha_p X_{t-p} + \varepsilon_t \tag{2.5}$$

bzw. mit der Lagdarstellung

$$\alpha(L) X_t = \varepsilon_t \tag{2.6}$$

definiert werden [10]. X_t ist stationär wenn alle Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\alpha(z) = 1 - \alpha_1 z + ... + \alpha_p z^p = 0 \qquad z \in \mathcal{C} \tag{2.7}$$

ausserhalb des komplexen Einheitskreises liegen. Dann lässt sich ein linearer Filter

$$\alpha^{-1}(L) = a_0 + a_1 L + ... = \sum_{i=0}^{\infty} a_i L^i \tag{2.8}$$

bestimmen, für den gilt $\alpha^{-1}(L)\alpha(L) = 1$. Mithilfe dieses Filters lässt sich der Prozess nun in Form einer MA(∞) schreiben und zwar

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \nu + \sum_{i=0}^{\infty} a_i(L)\varepsilon_t \tag{2.9}$$

Damit wird deutlich, dass die Autokorrelationen nicht nach einem gewissen Lag abbrechen. Dies ist im Hinblick auf das Erkennen von Long Memory natürlich von großer Bedeutung. Wie die Simulationen in Tabelle 2.5 zeigen, beeinflusst schon der Parameter α_1 in einem AR(1) Modell die Bestimmung des Hurst Koeffizienten (hier mittels der R/S Methode) in erheblichem Maße. Deshalb ist es von entscheidener Bedeutung den Parameter

α_1	α_2	$\hat{H}$	$\hat{H}$ aus geschätzten AR(1) Residuen
0.1	0	0.170	0.557
0.3	0	0.186	0.550
0.5	0	0.211	0.568
0.7	0	0.257	0.559
0.9	0	0.366	0.559
0.05	0.05	0.169	0.561
0.15	0.15	0.183	0.586
0.25	0.25	0.204	0.615
0.35	0.35	0.239	0.649
0.45	0.45	0.333	0.679

Tabelle 2.5: Schätzung des Hurst Koeffizienten aus Simulation von je 50 Realisationen von AR(1) und AR(2) Prozessen mit je 1500 Werten und dem Prozess der geschätzten AR(1) Residuen, jeweils ist der Mittelwert angegeben

α eines derartigen Modells möglichst exakt zu kennen. Nur leider wird dies bei empirischen Zeitreihen selten gegeben sein. Umso wichtiger ist also eine zuverlässige Schätzung. In Spalte 4 wurde der Hurst Koeffizient vom geschätzten AR(1) Residualprozess geschätzt. Die Werte zeigen, dasss dann der wahre Wert besser angenähert wird. aber deutlich ist eine verbleibende Abweichnung vom zu erwartenden Wert zu erkennen, insbesondere wenn, wie in Spalte 2 noch AR(2) Parameter hinzukommen.

2.5 ARMA- und ARIMA-Modelle

Eine logische Konsequenz aus den verhergehenden Modellen bilden die autorgressiven Moving Average (ARMA) Modelle, indem sowohl autoregressive, als auch Moving Average Terme zusammen in einem Modell vereint werden.

α_1	β_1	$\hat{H}$	$\hat{H}$ aus AR(1) Residuen
0.25	0.25	0.601	0.527
0.25	0.5	0.615	0.513
0.25	0.75	0.613	0.494
0.5	0.25	0.635	0.511
0.5	0.5	0.640	0.489
0.5	0.75	0.645	0.478
0.75	0.25	0.710	0.507
0.75	0.5	0.717	0.486
0.75	0.75	0.714	0.470

Tabelle 2.6: Schätzung des Hurst Koeffizienten aus Simulation von je 50 Realisationen von ARMA$(1,1)$ Prozessen mit je 1500 Werten und dem aus den geschätzten AR(1) Residuen $\hat{H}$, jeweils ist der Mittelwert angegeben

Ein ARMA(p,q)-Modell ist definiert durch Gleichung (1.17). Mit denselben Forderungen an die Polynome, wie bei den einzelnen Prozessen kann ein ARMA(p,q) sowohl durch ein MA(∞)-Prozess als auch durch ein AR(∞)-Prozess dargestellt werden. Der AR(∞)-Prozess hat dann die Form

$$\beta^{-1}(L)\alpha(L)X_t = \varepsilon_t \tag{2.10}$$

Daraus folgt natürlich, dass die Korrelationen nicht null werden, und dadurch die Ermittlung von Long Memory Effekten erschwert ist. Die Tabelle 2.6 zeigt einige Simulationen von ARMA(1,1)-Modellen und der dafür geschätzten Hurst Koeffizienten.

Ein ARIMA(p,d,q) Modell ist wie im Abschnitt 1.2.3 erwähnt dann folgendermaßen definiert

$$\alpha(L)(1-L)^d X_t = \beta(L)\varepsilon_t \qquad d \in \mathcal{Z} \tag{2.11}$$

Das heisst, die d-te Differenz des Prozesses X_t formt einen ARMA Prozess mit $d \in \mathcal{Z}$.

2.6 Fraktionale ARIMA-Prozesse

Fraktionale ARIMA(p,d,q)-Prozesse sind wie im Abschnitt 1.2.3 beschrieben definiert. Sie bilden also die Erweiterung der ARIMA(p,d,q)-Modelle, indem d gebrochene Werte annehmen kann.

Anhand einiger Simulationen soll auch noch das Schätzverhalten der R/S-Analyse für fraktionale ARIMA$(1,d,1)$ Prozesse mit verschiedenen d überprüft werden. Tabelle 2.7 zeigt Ergebnisse von je 50 Simulationen mit jeweils 1024 Werten. Diese Simulationen zeigen, dass hier durch die Bildung

$H = d + 1/2$	α_1	β_1	$\hat{H}$	$\hat{H}$ aus AR(1) Residuen
0.6	0	0	0.634	0.618
0.6	0	0.4	0.655	0.578
0.6	0	0.8	0.662	0.546
0.6	0.4	0	0.677	0.587
0.6	0.4	0.4	0.688	0.530
0.6	0.8	0	0.788	0.548
0.6	0.8	0.8	0.793	0.484
0.9	0	0	0.846	0.732
0.9	0	0.4	0.850	0.638
0.9	0	0.8	0.836	0.583
0.9	0.4	0	0.851	0.615
0.9	0.4	0.4	0.852	0.540
0.9	0.8	0	0.892	0.530
0.9	0.8	0.8	0.878	0.522

Tabelle 2.7: Schätzung des Hurst Koeffizienten aus Simulation von je 50 Realisationen von ARIMA$(1, d, 1)$ Prozessen mit je 1024 Werten und dem aus den geschätzten AR(1) Residuen $\hat{H}$, jeweils ist der Mittelwert angegeben

der AR(1)-Residuen die tatsachlichen Long Memory Eigenschaften überdeckt werden, und somit dieses Bilden der AR(1)-Residuen vorsichtig zu beurteilen ist.

Kapitel 3

Datenanalyse

3.1 Kointegration

Das eigentliche Ziel dieser Arbeit besteht in der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen den Aktienkursen von Stamm- und Vorzugsaktien einer Unternehmung. Die englische Bezeichnung *voting and nonvoting stocks* beschreibt den Unterschied zwischen den beiden Aktienformen deutlicher. Besitzer von Vorzugsaktien werden für den Verlust des Stimmrechts in der Hauptversammlung entweder durch einen Renditeaufschlag oder aber durch bevorzugte Auszahlung der Renditen (daher der Name) entschädigt.

Man sollte nun meinen, dass sich die Kurse beider Aktien eines Unternehmens nur in geringen Schwankungen auseinanderbewegen und die einzelnen Kursbewegungen auch voneinander abhängen. Dementgegen steht aber die Aussage von Granger [14], dass ein Paar von Kursen eines zusammen effizienten, spekulativen Marktes nicht *kointegriert* sein kann. Wären diese Kurse kointegriert, gäbe es eine Fehlerkorrektur- (*error correction*) Repräsentation, mithilfe dieser sich zumindest einer der beiden Kurse durch verzögerte Fehlerkorrekturterme vorhersagen ließe und damit eine Möglichkeit der Ausnutzung dieser Beziehung böte (die Darstellung folgt der in Breitung [5]). Formal lässt sich der lineare *error correction mechanism* (ECM) folgendermaßen formulieren.

Es seien X_t und Y_t zwei Zeitreihen für die gilt,

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta X_t + \varepsilon_t \\ \Delta X_t &= \nu_t \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$. Für die Fehlerterme ε_t und ν_t wird angenommen, dass sie stationär sind. Umgeformt durch Subtraktion von Y_{t-1} folgt

$$\Delta Y_t = \beta\nu_t + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} \tag{3.2}$$

mit $\varepsilon_{t-1} = Y_{t-1} - \beta X_{t-1}$ als *error correction term*. Sind die Fehlerterme ν_t

oder ε_t korreliert mit ε_{t-1}, wird (3.2) als

$$\Delta Y_t = \gamma(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + u_t \tag{3.3}$$

geschrieben, wobei $\gamma = E(\Delta Y_t \varepsilon_{t-1})/E(\varepsilon_{t-1}^2)$. Gleichung (3.3) wird dann als lineares ECM bezeichnet. Zum Teil wird wie in [5] für γ eine nichtlineare Funktion [5] eingesetzt.

Die Bedeutung liegt darin, dass sich, bei Vorliegen von Kointegration zwischen zwei Wertpapieren, die zukünftige Wertentwicklung zumindest eines Papieres mithilfe des anderen vorhersagen ließe. Damit wäre in diesem Markt Arbitragefreiheit nicht mehr gegeben, was einer allgemein getroffenen Grundannahme von Finanzmärkten widersprechen würde.

3.2 Ergebnisse R/S-Analyse

Anhand von 47 Paaren deutscher Aktienwerte mit Stamm- und Vorzugsaktien (zu Quelle und Struktur der Daten vergleiche Anhang C) wird versucht zu überprüfen, ob zwischen den Kursen der Stamm- und Vorzugsaktien eine Kointegrationsbeziehung besteht.Die Abbildungen 3.1 und 3.2 zeigen den Plot für die Kurse der Werte von BMW und RWE. Die Darstellungen legen deutlich die Vermutung nahe, dass die Werte kointegriert sind.

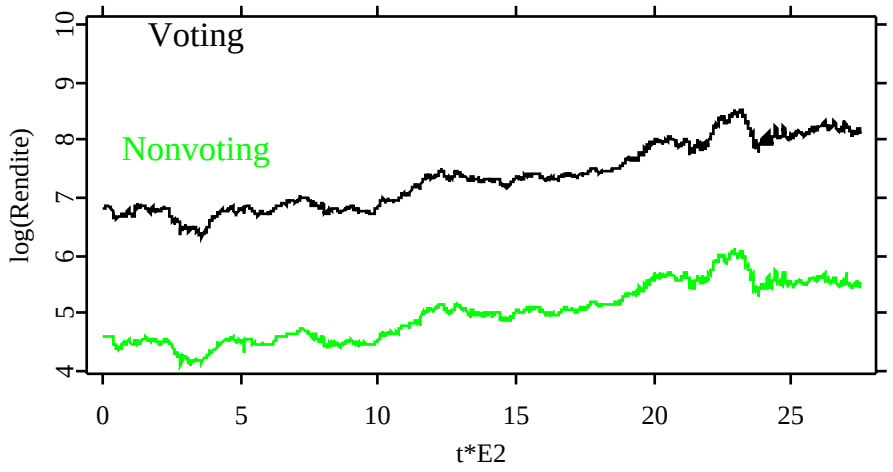

Abbildung 3.1: Darstellung des Spreads der Renditen von je 2750 Werten der logarithmierten Renditen von BMW Stämmen vs. Vorzügen

Für eine Analyse der Kointegrationsbeziehung wurde das in den vorangegangenen Abschnitten betrachtete *Rescaled Range* Verfahren eingesetzt, in einer Form die sich an der Darstellung in Krämer [17] orientiert. Zunächst

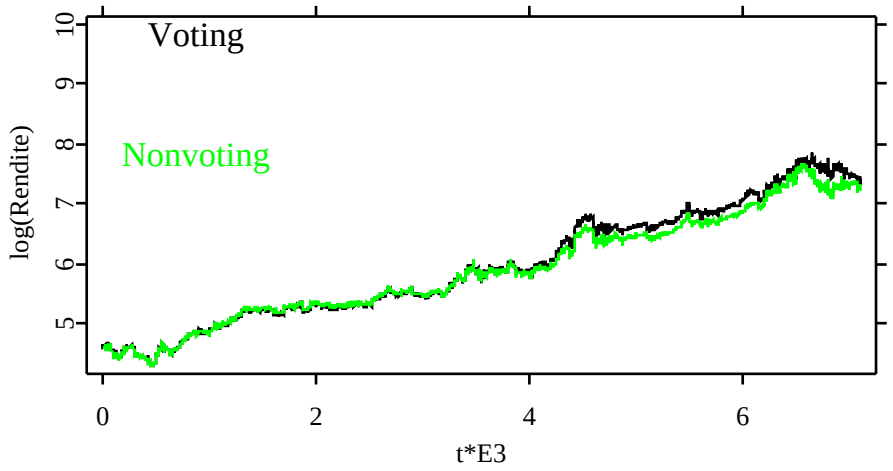

Abbildung 3.2: Darstellung des Spreads der Renditen von je 7094 Werten der logarithmierten Renditen von RWE Stämmen vs. Vorzügen

wurden die Differenzen der logarithmierten Werte von Stamm- und Vorzugsaktien berechnet, $z_t = log(y_t^S) - log(y_t^V)$ mit y_t^S den Werten der Stammaktien und y_t^V denen der Vorzugsaktien. Die Werte z_t dienen dann als die zu schätzende Reihe.

Die Plots der Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen diese Differenz für BMW und RWE. Diese Differenz sollte sich bei Unabhängigkeit wie eine Brownsche Bewegung verhalten, was auch die Abbildung 3.3 und 3.4 nahelegen. Bei einem Vergleich mit den Darstellungen von fraktionaler Brownscher Bewegung in Abschnitt 2.2 scheint aber am ehesten eine gewisse Ähnlichkeit mit der Darstellung für $H = 0.2$ zu bestehen.

In der Tabelle 3.1 ist nun die Schätzung für den Hurst Koeffizienten für die 47 Unternehmen in Spalte 4 dargestellt. Die meisten Werte liegen signifikant unter dem zu erwartenden Wert für den Hurst Koeffizienten (vergleiche mit Tabelle 2.1).

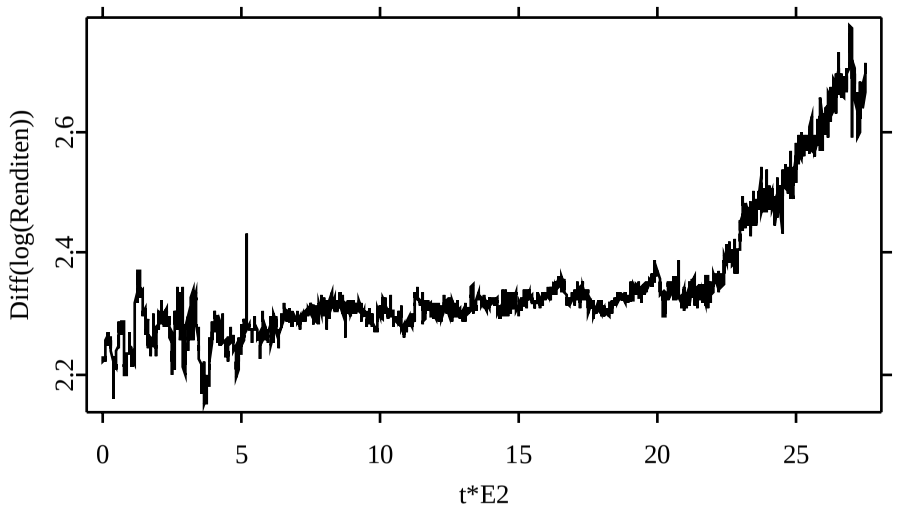

Abbildung 3.3: Darstellung der Differenz der logarithmierten Werte von BMW Stämmen und Vorzügen

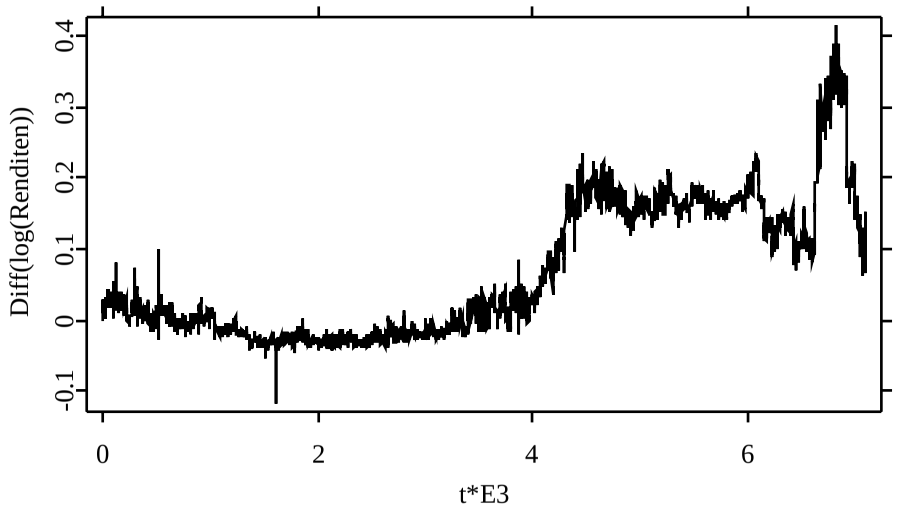

Abbildung 3.4: Darstellung der Differenz der logarithmierten Werte von RWE Stämmen und Vorzügen

Unternehmen	... bis 09.03.2000	Anzahl Werte	Anzahl S=0	direkt $\hat{H}$	AR(1) $\hat{H}$
Dax-Werte					
BMW	25.08.1989	2750	0	**0.360**	**0.413**
Henkel	02.07.1996	963	0	**0.372**	**0.438**
MAN	24.03.1975	6514	0	**0.367**	0.517
RWE	01.01.1973	7094	0	**0.409**	**0.445**
SAP	18.06.1990	2539	0	**0.428**	**0.451**
VW	06.10.1986	3504	0	**0.412**	**0.438**
MDax-Werte					
AXA Colonia	26.09.1988	2989	0	**0.431**	**0.482**
Boss	22.05.1989	2819	0	**0.346**	**0.434**
Dyckerhoff	01.01.1973	7094	0	**0.382**	0.564
Escada	26.09.1988	2989	0	**0.383**	0.512
Heidelberger Zement	18.07.1991	2256	0	**0.364**	0.602
Krones	31.08.1998	399	0	0.510	0.583
KSB	01.01.1973	7094	0	**0.348**	0.571
MLP	08.08.1990	2502	0	**0.432**	**0.455**
Rheinmetall	29.10.1984	4009	0	**0.397**	0.575
Rhön-Klinikum	07.06.1991	2285	0	**0.410**	**0.484**
Spar	28.05.1991	2293	0	**0.446**	**0.441**
Südzucker	01.03.1990	2616	0	**0.417**	**0.432**
Wella	13.01.1994	1606	0	**0.405**	**0.407**

Tabelle 3.1: Berechnete Hurstkoeffizienten für Dax und MDax Aktienwerte, fettgedruckt ausserhalb des 95% Konfidenzintervalls von Tabelle 2.2

Die Spalte mit der Benennung „Anzahl $S = 0$“ gibt die Häufigkeit des Auftretens eines Wertes von $S(t, k) = 0$ in Gleichung 1.25 an. Dies kann nur auftreten, wenn sich die Kurse innerhalb einer Laglänge nicht verändern. Da die kürzeste verwendete Laglänge 9 beträgt, heisst dies also, dass mindestens 9 aufeinanderfolgende Werte gleich sind. Der Wert, der zu diesem speziellen Lag gehört, wurde in diesen Fällen bei der Schätzung weggelassen. Besonders häufig trat dies bei den weniger gehandelten „Sonstigen“ Aktien auf. Demzufolge sind die berechneten Hurst Koeffizienten für diese Werte wesentlich unzuverlässiger und insbesondere der große Wert von *Kötitzer Leder* muß deshalb mit Vorsicht betrachtet werden.

Unternehmen	... bis 09.03.2000	Anzahl Werte	Anzahl S=0	direkt $\hat{H}$	AR(1) $\hat{H}$
Smax-Werte					
Berliner Elektro	26.09.1988	2989	0	**0.378**	0.535
Biotest	31.05.1996	985	0	**0.420**	0.542
B.U.S.	05.02.1990	2634	0	**0.365**	**0.443**
Fuchs Petrolub	03.04.1989	2854	0	**0.416**	**0.445**
Herlitz	26.09.1988	2989	0	**0.391**	**0.472**
König & Bauer	26.08.1988	2989	0	**0.361**	**0.445**
Möbel Walther	22.04.1994	1535	0	**0.409**	0.604
Sartorius	10.07.1990	2523	1	**0.399**	0.539
WMF	01.01.1973	7094	0	**0.332**	0.564
Sonstige					
Agrob	01.01.1973	7094	0	**0.361**	0.580
Albingia	26.09.1988	2989	14	0.528	0.532
Allweiler	01.01.1973	7094	36	**0.411**	0.557
Binding	26.09.1988	2989	3	**0.368**	0.519
Dahlbusch	24.10.1977	5839	28	**0.471**	0.505
Gea	13.12.1989	2672	0	**0.427**	0.499
Ingram Macrotron	15.06.1990	2540	26	**0.466**	0.495
Kennametall Hertel	09.11.1989	2696	5	**0.406**	**0.468**
Komm. Ind. Hold.	08.05.1991	2307	7	**0.402**	**0.415**
Knürr	28.05.1991	2293	2	**0.325**	0.569
Kötitzer Leder	28.10.1988	2965	205	**0.716**	**0.732**
Kunert	14.08.1990	2498	2	**0.391**	0.561
Mainzer Aktien Bierbr.	26.09.1988	2989	146	**0.472**	**0.601**
Mineralbr. Ueberk.-T.	28.10.1988	2965	1	**0.435**	0.515
Stumpf	26.09.1988	2989	20	**0.451**	**0.604**
Walter Bau	27.02.1992	2096	3	**0.426**	0.559
Westag & Getalit	18.10.1989	2712	0	**0.417**	**0.782**
WKM Terrain	28.10.1988	2919	19	**0.500**	0.575
Zanders	26.09.1988	2989	2	**0.397**	**0.463**

Tabelle 3.2: Berechnete Hurstkoeffizienten für Smax und sonstige Aktienwerte, fettgedruckt ausserhalb des 95% Konfidenzintervalls von Tabelle 2.2

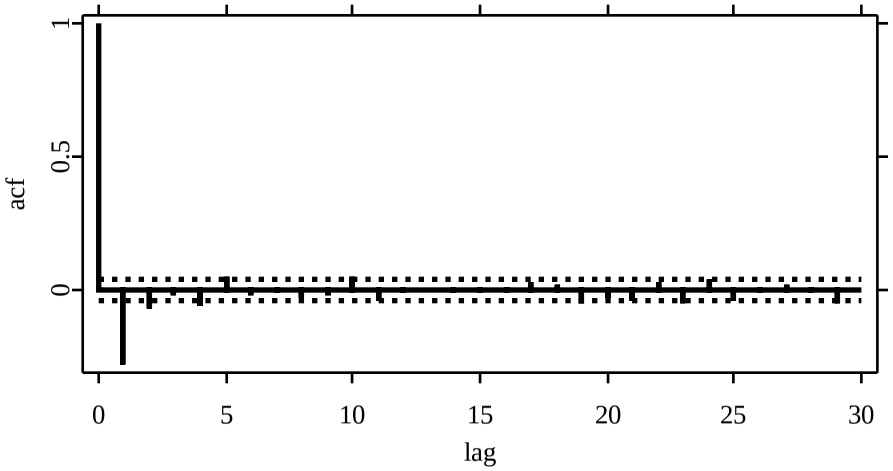

Abbildung 3.5: Darstellung des Korreleogramms der Differenz z_t von BMW

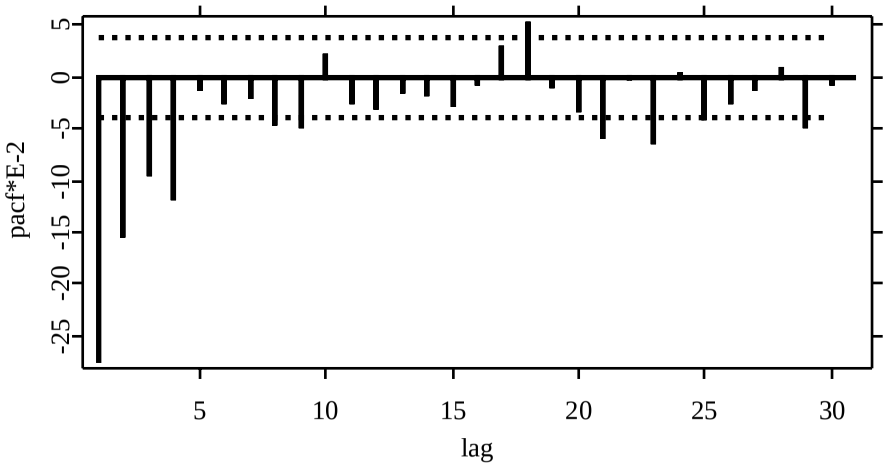

Abbildung 3.6: Darstellung der partiellen Korrelationen der Differenz z_t von BMW

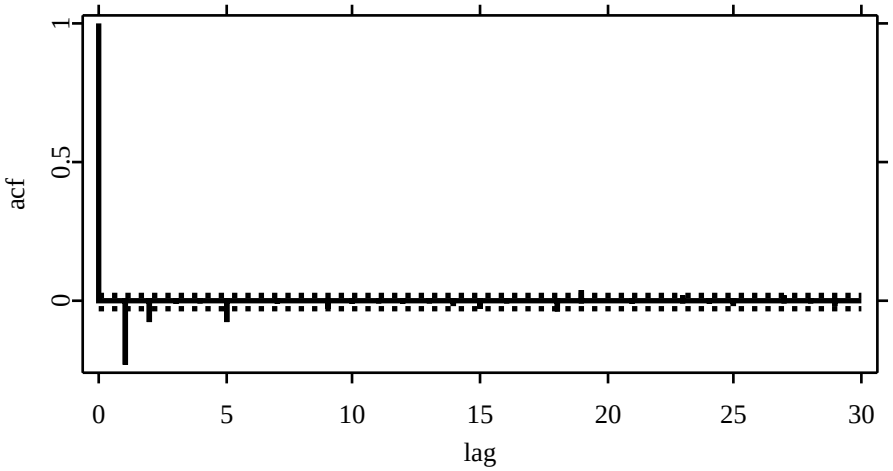

Abbildung 3.7: Darstellung des Korrelogramms der Differenz z_t von RWE

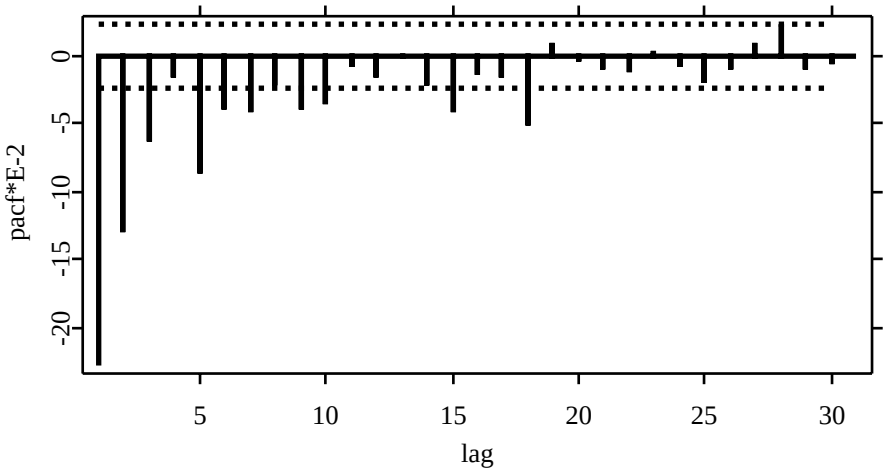

Abbildung 3.8: Darstellung der partiellen Korrelationen der Differenz z_t von RWE

Die Abbildungen 3.5 bis 3.8 zeigen die Autokorrelationen und partiellen Autokorrelationen für BMW und RWE. Deutlich ist zu erkennen, dass im Korrelogramm der Wert des ersten Lags signifikant negativ ist für beide Unternehmenswerte. Auch die partiellen Korrelationen sind über das erste Lag hinaus unter der $-2/\sqrt{n}$ Linie und deuten damit auf Signifikanz.

Die Abbildungen 3.9 und 3.10 zeigen den in Abschnitt 1.3.3 beschriebenen Varianz-Plot. Auch die so ermittelten Werte für den Hurst Koeffizienten liegen deutlich unterhalb von 1/2.

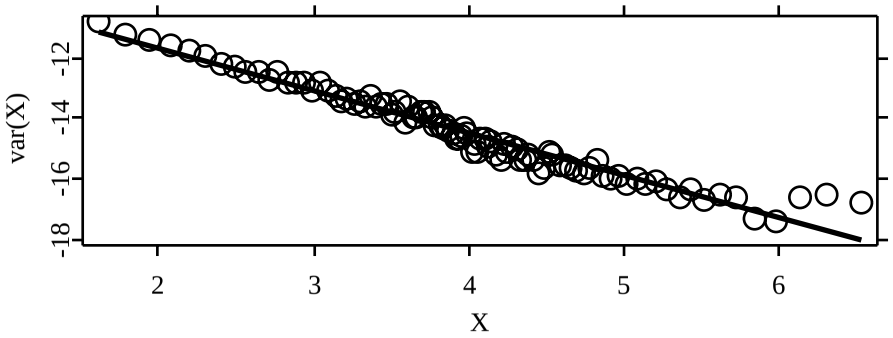

Abbildung 3.9: Darstellung des Varianzplots der Differenz z_t von RWE, Anstieg der geschätzten Geraden -1.411, d.h. $\hat{H} = 0.295$

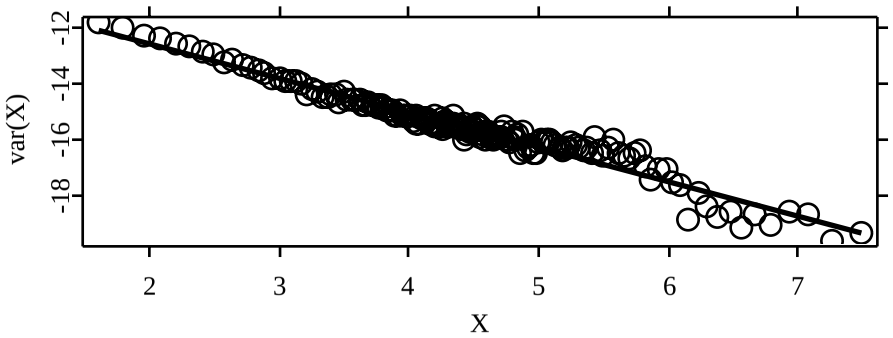

Abbildung 3.10: Darstellung des Varianzplots der Differenz z_t von RWE, Anstieg der geschätzten Geraden -1.243, d.h. $\hat{H} = 0.379$

	$\hat{H}$	mit Trend $\hat{\tau}$	ohneTrend F-Statistik
Mittelwert	0.548	1.596	3.183
95% Konfidenzintervall	0.497 - 0.601	-0.348 - 3.4616	0.971 - 7.474

Tabelle 3.3: Die simulierten Konfidenzintervalle sind ähnlich, für $\hat{H}$ mit den in Tabelle 2.1 simulierten, für die Prüfgrößen des ADF-Tests bei $p = 7$ mit den tabellierten Werten (-0.23 - 3.12 bzw. 0.94 - 7.16) in [13]

Die Tabellen C.1 und C.2 im Anhang C zeigen die geschätzten Hurst Koeffizientenen für die Daten, sowohl für Stämme als auch für Vorzüge. Erkennbar ist, dass selten die geschätzten Hurst-Koeffizient signifikant von dem bei unabhängigen Daten zu erwartenden (siehe Abschnitt 2.1) abweichen. Darum scheint eine Brownsche Bewegung eine recht gute Näherung (zu den Fällen mit $S = 0$ vergleiche vorher in diesem Abschnitt) zu sein.

Um zu zeigen, dass die hier eingeschlagene Vogehensweise vernünftig ist, wurde in Tabelle 3.3 der Hurst Koeffizient (in [15] konnte die Gültigkeit des verwendeten Bootstrapverfahrens gezeigt werden), sowie der im nächsten Abschnitt beschriebene ADF-Test für die logarithmierte Differenz zweier unabhängiger Brownscher Bewegungen mit 3000 Werten 400 mal simuliert und dann geschätzt. Die Werte zeigen, dass wenn die Datenreihen wirklich unabhängig sind, die Werte, denen der zu erwartenden entsprechen.

3.3 Vergleich mit dem ADF-Kointegrationstest

Der *Augmented Dickey-Fuller* Test auf Kointegration basiert auf folgender Beziehung, in Klammern mit linearen Trend (die Darstllung orientiert sich an Krämer, die kritischen Werte sind entnommen aus [13] bzw. [**?**] und ursprünglich von Fuller [8])

$$\Delta z_t = \nu_1 + (\nu_2 t) + (\rho_T - 1) z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \xi_i \Delta z_{t-i} + u_t \tag{3.4}$$

mit $z_t = y_t^S - y_t^V$ und $\Delta z_t = z_t - z_{t-1}$. Dabei bezeichnet y_t^S die logarithmierten Werte der Stammaktien und y_t^V die der Vorzüge. Dabei ist die Reihenfolge der Differenz der Aktienwerte unerheblich. Es werden $\hat{\nu}_1$, $\hat{\nu}_2$, $\hat{\rho}_T$ und die $\hat{\xi}_i$ mittels OLS geschätzt. Mit dem Schätzwert für $\hat{\rho}_T$ kann folgende Prüfgröße für den Fall ohne linearen Trend auf Basis des t-Testes berechnet werden

$$\hat{\tau} = \frac{1 - \hat{\rho}_T}{\sqrt{\hat{\sigma}_u^2 / \sum_{t=2}^{T} (z_{t-1} - \bar{z})^2}} \tag{3.5}$$

die zwar keiner Standardverteilung folgt, aber in mehreren Werken tabelliert ist (z.B. [13]). Dabei ist $\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{T}$ und $\bar{z} = 1/T \sum_{t=2}^{T} z_{t-1}$ mit T den einbe-

zogenen Werten, i.d.R. also $T = N - p - 1$, wenn die Reihe z_t ursprünglich N Werte hatte.

Für den Fall der Einbeziehung eines linearen Trends, bietet sich die in [**?**] beschriebene F-Statistik an. Dazu wird zuerst die nicht eingeschränkte Regression

$$\Delta z_t = \nu_1 + \nu_2 t + (\rho_T - 1) z_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \xi_i \Delta z_{t-1} + u_t \tag{3.6}$$

und dann die eingeschränkte Regression

$$\Delta z_t = \nu_1 + \sum_{i=1}^{p} \xi_i \Delta z_{t-i} + u_t \tag{3.7}$$

durchgeführt. Mithilfe dieser wird dann die Standard F-Statistik folgendermaßen berechnet

$$F = \frac{(SSR_R - SSR_{UR})/r}{SSR_{UR}/(T-k)} \tag{3.8}$$

wobei r die Anzahl der Restriktionen, hier also zwei, k die Anzahl der geschätzten Parameter in der nicht eingeschränkten Regression und SSR die Summe der quadrierten Residuen *sum of squared residuals* bezeichnet. Kritische Werte sind dann wie folgt für $T > 500$: 98% Konfidenzintervall [0.77 - 8.27], 95% Konfidenzintervall [0.94 - 7.16] und 90% Konfidenzintervall [1.13 - 6.25] aus Fuller [9].

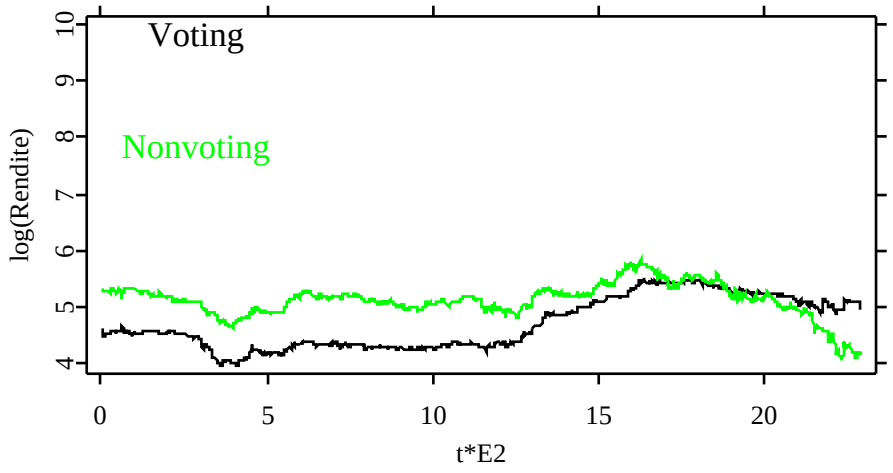

Abbildung 3.11: Darstellung des Spread der logarithmierten Renditen von Spar Stämmen vs. Vorzügen

Der *Augmented Dickey-Fuller* Test gehört zu den sogenannten Einheitswurzeltests, die auch zum Testen auf Differenzenstationarität eines Prozesses eingesetzt werden [10]. Diese testen ob die Nullhypothese einer Einheitswurzel ($\rho_T = 1$) vorliegt oder abgelehnt werden kann.

Im Rahmen der Kointegrationtests wird hier geprüft, ob die Werte der Stammaktien mit denen der Vorzugsaktien desselben Unternehmens kointegriert sind. Die Tabellen 3.3 und 3.4 zeigen die Ergebnisse des Tests. Drei Sterne am Unternehmensnamen geben Signifikanz zum 0.01- (drei Sterne), 0.05- (zwei Sterne) und 0.1-Niveau (ein Stern) für den F-Test mit linearem Trend geschätzt und $p = 7$, an.

Unternehmen	Anzahl Werte	ohne Trend $\hat{\tau}$ $p = 7$	mit Trend F-Statistik $p = 2$	$p = 7$
Dax-Werte				
BMW	2750	0.470	4.906	2.592
Henkel	963	**2.870**	6.095	4.430
MAN***	6514	**2.895**	**17.385**	**9.268**
RWE*	7094	2.013	**9.467**	5.892
SAP***	2539	.795	**20.177**	**13.884**
VW	3504	0.792	**6.551**	3.774
MDax-Werte				
AXA Colonia*	2989	2.121	**6.835**	5.400
Boss***	2819	2.779	**35.406**	**21.083**
Dyckerhoff***	7094	**4.735**	**19.347**	**12.232**
Escada**	2989	**3.046**	**10.098**	**6.587**
Heidelberger Zement***	2256	**4.854**	**23.579**	**15.327**
Krones**	399	2.557	5.378	4.039
KSB***	7094	**5.072**	**28.638**	**17.067**
MLP**	2502	1.374	**10.037**	**7.055**
Rheinmetall***	4009	**4.042**	**14.879**	**9.031**
Rhön-Klinikum**	2285	2.651	**11.136**	**7.806**
Spar	2293	-1.062	**2.321**	**2.206**
Südzucker	2616	1.153	**7.304**	4.073
Wella***	1606	2.245	**16.292**	**8.699**

Tabelle 3.4: ADF Prüfwerte für Dax und MDax, kritische Werte sind für FStatistik mit Konstante und Trend geschätzt: 8.27, 6.25 und 5.34, für $\hat{\tau}$ nur mit Konstante geschätzt: 3.43, 2.86 und 2.57 jeweils zum 0.01- (***), 0.05- (**) und 0.1-Niveau (*) (Sternchen gelten für die letzte Spalte mit $p = 7$), zusätzlich fett hervorgehoben die signifikanten Werte zum 0.05-Niveau bei allen

Unternehmen	Anzahl Werte	ohne Trend $p = 2$	mit Trend F-Statistik $p = 2$	$p = 7$
Smax-Werte				
Berliner Elektro	2989	2.651	**6.955**	3.409
Biotest**	985	2.512	**7.477**	**6.417**
B.U.S.	2634	2.248	**7.433**	4.055
Fuchs Petrolub**	2854	1.701	**9.154**	**7.119**
Herlitz	2989	2.289	**8.045**	3.658
König & Bauer***	2989	**3.695**	**31.055**	**21.089**
Möbel Walther***	1535	**4.542**	**16.389**	**9.508**
Sartorius***	2523	**4.113**	**17.780**	**11.496**
WMF***	7094	**4.837**	**21.636**	**12.888**
Sonstige				
Agrob***	7094	**5.280**	**28.011**	**15.831**
Albingia	2989	0.525	3.645	3.781
Allweiler***	7094	**4.661**	**20.218**	**13.312**
Binding***	2989	**3.713**	**17.556**	**10.802**
Dahlbusch***	5839	2.190	**13.838**	**9.770**
Gea***	2672	**3.482**	**19.173**	**14.724**
Ingram Macrotron**	2540	1.608	**9.188**	**7.072**
Kennametall Hertel**	2696	**3.028**	**10.883**	**8.108**
Komm. Ind. Hold.*	2307	1.302	5.193	3.788
Knürr***	2293	**6.479**	**30.467**	**18.006**
Kötitzer Leder	2965	1.991	3.585	3.727
Kunert***	2498	**4.236**	**12.184**	**8.551**
Mainzer Aktien Bierbr.***	2989	**5.761**	**19.506**	**15.856**
Mineralbr. Ueberk.-T.***	2965	**3.059**	**13.666**	**8.497**
Stumpf***	2989	**7.093**	**32.486**	**27.624**
Walter Bau***	2096	**4.888**	**19.700**	**16.144**
Westag & Getalit***	2712	**2.973**	**47.967**	**15.215**
WKM Terrain	2919	**2.968**	4.787	4.305
Zanders***	2989	2.368	**17.629**	**11.165**

Tabelle 3.5: ADF Prüfwerte für Smax und sonstige Aktienwerte, kritische Werte sind für die F-Statistik mit Konstante und Trend geschätzt: 29.5, 21.8 und 18.3, für die Prüfgröße $\hat{\tau}$ nur mit Konstante geschätzt: 3.43, 2.86 und 2.57 jeweils zum 0.01- (***), 0.05- (**) und 0.1-Niveau (*) (Sternchen gelten für die letzte Spalte mit $p = 7$), zusätzlich fett hervorgehoben die signifikanten Werte zum 0.05-Niveau bei allen

Der Wert von *Spar* fällt bei der Betrachtung der Tabelle 3.3 auf. Dieser ist signifikant für den ADF ohne Trend, aber mit $\hat{\rho}_T > 1$ im Gegensatz zu den anderen Werten. Eigentlich sollte ein derartiges Verhalten nicht auftreten, da dies bedeuten würde, die Reihe ist instationär, und der Spread Vorzüge/Stämme vergrößert sich ständig. Der Grund muß wohl in einer Besonderheit, die die Aktien von Spar im betrachteten Zeitraum trafen, zu suchen sein. Ein Plot des Aktiensspread von Spar zeigt den Verlauf der logarithmierten Renditen in Abbildung 3.11. Ungewöhnlich die Annäherung der logarithmierten Renditen und dann wieder eine Auseinanderbewegung mit umgekehrtem Vorzeichen.

Allgemein muß man sagen, dass die Werte in vielen Fällen auf Kointegration der Werte (d.h. die Nullhypothese auf Unabhängigkeit der Daten mußte abgelehnt werden) hindeuten, auch wenn in einigen Fällen keine Kointegration nachgewiesen werden konnte. Deutlich erkennbar ist der doch erhebliche Unterschied in den Testergebnissen des ADF-Testes mit und ohne linearen Trend, besonders deutlich beispielsweise bei SAP. Dies lässt darauf schließen, dass im betrachteten Zeitraum zumindest für einige Aktien eine deutliche Trendkomponente wirksam war, welche vermutlich, insbesondere durch den Aktienboom in Deutschland in den vergangenen Jahren, bewirkt sein dürfte. Ein Blick auf die Abbildungen 3.3 bzw. 3.12 verdeutlicht dies.

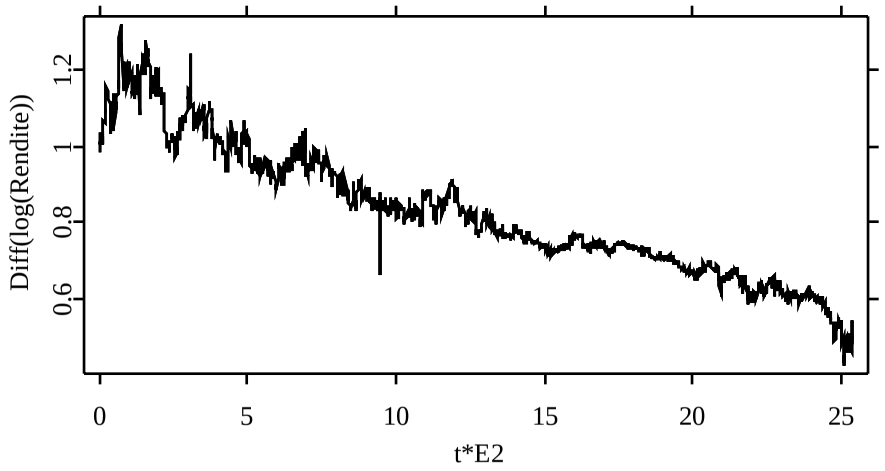

Abbildung 3.12: Darstellung der Differenz der logarithmierten Werte von SAP Stämmen und Vorzügen, ein deutlicher negativer Trend ist erkennbar

3.4 Schlußbemerkungen

Die in dieser Arbeit durchgeführten Analysen deuten in vielfacher Hinsicht darauf hin, dass die Aktienwerte der Stamm- und Vorzugsaktien eines Unternehmens langfristig nicht unabhängig sind. Die Differenz der logarithmierten Werte von Stämmen und Vorzügen scheint fraktional integriert mit einem Hurst Koeffizienten von ungefähr $H = 0.4$ zu sein. Der im Anschluß durchgeführte Augmented Dickey-Fuller Kointegrationstest scheint eine Kointegration der Aktienwerte in vielen Fällen zu bestätigen. Die Plots der einfachen und partiellen Autokorrelationen geben einen gewissen Anhaltspunkt zum Mechanismus der Beziehung. Die Bewegung des Kursabstandes scheint zumindest teilweise in den Folgeperioden wieder umgekehrt zu werden, also mean reverting auf ein langfristiges Mittel. Damit böte sich die Möglichkeit einer Handelsstrategie die dieses Verhalten ausnutzt, dass hieße der Markt wäre nicht arbitragefrei.

Dennoch ist noch Vorsicht geboten. Zwar scheinen die Ergebnisse relativ eindeutig, aber um diese Ergebnisse zu überprüfen und zuverlässigere Schätzungen für den Hurst Koeffizienten als durch die R/S-Analyse zu erhalten, sollten zusätzlich Maximum Likelihood oder approximative ML-Schätzverfahren (wie z.B. der Whittle Estimator, vergleiche [3]) angewendet werden. Einen Einstieg in diese Problematik gibt Baillie [2].

Anhang A

Simulationsverfahren

A.1 Simulation mit Cholesky Dekomposition

Für die Generierung fraktionaler Prozesse existieren mehrere Simulationsverfahren. Ein sehr einfaches und elegantes Verfahren besteht darin, standardnormalverteilte Zufallsvariablen mit einer speziellen Transformationsmatrix zu multiplizieren. Dazu ist die Kenntnis der Kovarianzmatrix des zu generierenden Prozesses erforderlich. Für das Verfahren wird zunächst eine Reihe Z_t von *iid* standardnormalverteilten Werten erzeugt. Dann muss die Kovarianzmatrix des zu generierenden Prozesses berechnet werden.

$$\Sigma_n = [\gamma(i-j)]_{i,j} \qquad i,j = 1,...,n \tag{A.1}$$

Dann wird die Kovarianzmatrix als Produkt einer reellen unteren Dreiecksmatrix L und ihrer transponierten L^t, der Cholesky Dekomposition als $\Sigma_n = LL^t$, geschrieben. Damit wird dann das Produkt

$$X_t = LZ_t \tag{A.2}$$

gebildet. Die entstandene Reihe X_t hat dann die angestrebten Eigenschaften. Im Prinzip kann damit auch ein fraktionaler ARIMA-Prozess generiert werden, wenn die Kovarianzmatrix bekannt ist. Nur ist die Berechnung dieser für allgemeine ARIMA(p,d,q) recht aufwendig vergleiche dazu Tschernig [22].

Der entscheidene Einwand gegen dieses Verfahren liegt in der Cholesky Dekomposition, die für große Matrizen sehr aufwendig ist und in vertretbarer Zeit lediglich bis zu $n = 250$ durchführbar ist. Deshalb werden in der Regel schnellere Verfahren eingesetzt. Ein derartiges Verfahren soll im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

A.2 Simulation fraktionales Gaußsches Rauschen nach Davies und Harte

Dieses Verfahren wurde 1987 von Davies und Harte in [6] vorgeschlagen und auch von Beran [3] beschrieben und eingesetzt. Die Darstellung folgt weitestgehend der in Beran [3]. Der Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass durch die Möglichkeit der Approximation der Summen durch die *Fast Fourier Transform* die Laufzeit sich proportional zu $n \log n$ gestaltet und darum die Berechnung schnell durchzuführen ist.

Das Verfahren für die Generierung einer Reihe X_n gestaltet sich folgendermaßen (eine Xplore Prozedur mit der *Fast Fourier Transform* ist im Anhang B aufgeführt):

1. Es wird eine Reihe der Kovarianzen gebildet
   $\gamma(k) = \gamma(0), \gamma(1), ..., \gamma(n-2), \gamma(n-1), \gamma(n-1), ..., \gamma(1)$

2. Berechnung folgender Summe für $k = 1, ..., 2n-2$:

$$g_k = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma(j-1) e^{i\frac{(j-1)(k-1)2\pi}{2n-2}} + \sum_{j=n}^{2n-2} \gamma(2n-j-1) e^{i\frac{(j-1)(k-1)2\pi}{2n-2}} \quad \text{(A.3)}$$

3. Überprüfen, dass alle $g_k > 0$ (i.a. kein Problem).

4. Erzeugen zweier unabhängiger normalverteilter Reihen, $U_1, ..., U_n$ und $V_2, ..., V_{n-1}$ mit $E(U) = E(V) = 0$, wobei
   $var(U_1) = var(U_n) = 2 \qquad k = 1, ..., n$
   $var(U_k) = var(V_k) = 1 \qquad k = 2, ..., n-1.$

5. Definiere die komplexe Zahl
   $Z_k = U_k + iV_k \qquad k = 1, ..., n$
   $Z_{n+k} = U_{n-k} + iVn - k \qquad k = 1, ..., n-2.$

6. Für $t = 1, ..., n$ Berechnung der X_t nach

$$X_t = \frac{1}{2\sqrt{n-1}} \sum_{k=1}^{2n-2} \sqrt{g_k} e^{i\frac{(t-1)(k-1)2\pi}{2n-2}} Z_k \quad \text{(A.4)}$$

Die Reihe X_t hat dann die geforderten Eigenschaften. Die Summen (A.3) und (A.4) können durch die *Fast Fourier Transform* schnell berechnet werden. Im Gegensatz zum Verfahren im Abschnitt A.1. sind die hier erzeugten Werte jedoch nicht standardisiertes fraktionales Rauschen mit $var(X_t) = 1$, was sich leicht in einem Variogramm erkennen läßt.

A.3 Simulation fraktionales ARIMA

Die Simulation eines ARIMA(p, d, q) kann in zwei Schritten erfolgen (eine Xplore Prozedur ist auf der beigefügten CD-ROM)

1. Simulation einer Reihe fraktionales ARIMA$(0, d, 0)$. Dies kann mithilfe eines der vorher beschriebenen Verfahren geschehen. Der einzige Unterschied zum fraktionalen Gaußschem Rauschen ist die Verwendung von Kovarianzfunktion (1.19) anstelle von (1.14) beim fraktionalen Gaußschen Rauschen.

2. Simulation eines ARMA(p, q) Prozesses mit der in Punkt 1 erzeugten Reihe als Innovationen anstelle von weissem Rauschen

Die erzeugte Reihe entspricht dann dem gewünschtem ARIMA(p, d, q) Prozess.

A.4 Laglänge bei der Berechnung von $\hat{H}$

Die Berechnung von $\hat{H}$ erfolgt wie in Abschnitt 1.3.1 dargestellt. Lediglich die Wahl der verwendeten Laglängen k blieb offen. Der offensichtlichen Idee, die Gesamtlänge n einer Zeitreihe in alle möglichen Teilserien aufzugliedern, stehen zwei Einwände entgegen. Einerseits kann die Länge der Zeitreihe eine Primzahl oder auch nur eine Zahl mit sehr wenigen Teilern sein. Andererseits werden für verschiedene Reihen immer sehr unterschiedliche k verwendet. Darum wurde hier eine andere Variante gewählt.

Die Gesamtlänge wurde, beginnend beim ersten Wert der Reihe, in alle maximalen Teilserien aufgeteilt mit einer Länge $9 \leq k \leq n/2$ und $k \in \mathcal{N}$ (die Grenzen von 9 und $n/2$ schließen die extremen Randwerte für k aus). Maximal ist in dem Sinne zu verstehen, dass der ganze Teil von n/i mit $2 \leq i \leq n/9$ maximal gewählt wird. Damit wird die längstmögliche Teilserie für einen gegebenen Teiler i verwendet. Dabei wird aus Laufzeitgründen diese Auswahl noch ein wenig eingeschränkt. Beginnend mit dem Startwert 9 ist die erste Differenz zum nächsten Wert (i.a. 13) mindestens 4. Von da ist die nächste Differenz mindestens $2 * 4$ dann $3 * 4$ usw.

Anfangs werden so nur ungerade Werte ausgesucht. Ungerade Werte wurden deshalb den geraden vorgezogen, da wesentlich seltener die Grenzen der Teilserien zusammentreffen und somit die Zusammensetzung der Teilserien stärker variiert.

Das Verfahren hat ebenso einige Unregelmäßigkeiten. Erstens werden nicht alle Werte einer gegebenen Zeitreihe verwendet und zweitens ist die Zahl der einbezogenen Werte für verschiedene k unterschiedlich. Daneben sind die gewählten k bei verschiedenen Zeitreihenlängen lediglich für kleine k identisch.

Trotzdem sollten sich diese Unregelmäßigkeiten, in Bezug auf das angestrebte Ergebnis, nur gering auswirken. Durch das Berechnungsverfahren mit der Mittelwertbildung über die $(R/S)_{t,k}$ und die Datenstruktur (es sollten mindestens 200 Werte gegeben sein) ist der Einfluss zusätzlicher Werte auf die Bestimmung von $\hat{H}$ gering. Würden die letzten Werte das Ergebnis entscheidend beeinflussen, wäre das *Rescaled Range* Berechnungsverfahren in aller Regel sowieso ungeignet.

Das dargelegte Verfahren stellt somit einen Kompromiß zwischen einer günstigen Struktur der Werte k und angemessenen Laufzeitverhalten in den Simulationen dar.

Anhang B

Xplore Prozeduren

B.1 Erzeugung fraktionaler Brownscher Bewegung

Prozedur zur Berechnung der Kovarianzfunktion fraktionalen Gaußschen Rauschens

```
proc(FGNcov)=FGNcov(n,H)
; ---------------------------------------------------------------------
; Library
; ---------------------------------------------------------------------
; See_also    FGNgk,FGNx,FBMx
; ---------------------------------------------------------------------
; Macro       FGNcov
; ---------------------------------------------------------------------
; Description Calculation of the aotocovariance function of fractional
; Gaussian noise
; ---------------------------------------------------------------------
; Usage       (FGNcov)=FGNcov(n,H)
; Input
; Parameter   n length of vector for the calculated autocovariances
; Definition
; Parameter   H Hurst coefficient
; Definition
; Output
; Parameter   FGNcov vector of the autocovariances
; Definition
; ---------------------------------------------------------------------
; Notes
; ---------------------------------------------------------------------
; Example     cov=FGNcov(4,.7)
; ---------------------------------------------------------------------
; Result      Contents of cov
```

```
; [1,]       1
; [2,] 0.31951
; [3,] 0.18875
; [4,] 0.14617
; ----------------------------------------------------------------------
; Keywords
; ----------------------------------------------------------------------
; Reference   Beran, J. "Statistics for Long-Memory Processes" Chapman
; & Hall 1994
; ----------------------------------------------------------------------
; Link
; ----------------------------------------------------------------------
; Author      Arne Wuensche, 000402
; ----------------------------------------------------------------------
//
k=0
alpha=2*H
cov=matrix(n)
while (k<n)
  cov[k+1]=((abs(k-1))^alpha-2*(abs(k))^alpha+(abs(k+1))^alpha)/2
  k=k+1
endo
FGNcov=cov
endp
```

Prozedur zur Berechnung der g_k aus (A.3)

```
proc(gk)=FGNgk(m,H)
; ----------------------------------------------------------------------
; Library
; ----------------------------------------------------------------------
; See_also    FGNcov,FGNx,FBMx,fft
; ----------------------------------------------------------------------
; Macro       FGNgk
; ----------------------------------------------------------------------
; Description Calculation of a series gk for the calculation of
; fractional Gaussian noise by a method from Davies and
; Harte
; ----------------------------------------------------------------------
; Usage       (gk)=FGNgk(m,H)
; Input
; Parameter   m Length of the series of fractional Gaussian noise
; Definition   generated by procedure FGNx, must be a power of 2
; Parameter   H Hurst Koeffizient as self similarity parameter
```

```
; Definition
; Output
; Parameter   gk vector of term used by FGNx
; Definition
; ---------------------------------------------------------------------
; Notes
; ---------------------------------------------------------------------
; Example     gk=FGNgk(2,.7)
; ---------------------------------------------------------------------
; Result      Contents of gk
; [1,]  1.8278
; [2,] 0.81125
; [3,] 0,54974
; [4,] 0,81125
; ---------------------------------------------------------------------
; Keywords
; ---------------------------------------------------------------------
; Reference   Beran, J. "Statistic for Long Memory Processes", Chapman
; & Hall 1994
; Davies, R.B. and Harte, D.S. "Test for Hurst effect"
; Biometrica 74, 1987
; ---------------------------------------------------------------------
; Link
; ---------------------------------------------------------------------
; Author      Arne Wuensche 000402
; ---------------------------------------------------------------------
//
n=m+1
gammak=FGNcov(n,H)
i=0
cvre=matrix(2*(n-1))
cvim=matrix(2*(n-1))-matrix(2*(n-1))
while  (i<n-1)
  i=i+1
  cvre[i]=gammak[i]
  cvre[2*(n-1)-i+1]=gammak[i+1]
endo
cv=matrix(2*(n-1),2)
cv=cvre~cvim
gk=fft(cv)[,1]
endp
```

Prozedur zur Erzeugung einer Reihe fraktionalen Gaußschen Rauschens

```
proc(FGNx)=FGNx(m,H)
; ---------------------------------------------------------------------
; Library
; ---------------------------------------------------------------------
; See_also    FGNgk,FGNx,fft,FBMx
; ---------------------------------------------------------------------
; Macro       FGNx
; ---------------------------------------------------------------------
; Description Simulation of a series of fractional Gaussian noise (not
; standard fractional Gaussian noise) by a method proposed
; by Davies and Harte
; ---------------------------------------------------------------------
; Usage       (FGNx)=FGNx(m,H)
; Input
; Parameter   m Length of the generated series, must be a power of 2
; due to the use of the Fast Fourier Transform, for
; instance ...,64,128,256,512,1024,2048,... and so on
; Definition
; Parameter   H Hurst Koeffizient as self similarity parameter
; Definition
; Output
; Parameter   FGNx Vector of size m of the generated series
; Definition
; ---------------------------------------------------------------------
; Notes     uses the procedures FGNx and FGNgk
; ---------------------------------------------------------------------
; Example     x=FGNx(4,.7)
; ---------------------------------------------------------------------
; Result      Contents of x
; [1,]  0.84046
; [2,] -0.21559
; [3,] -0.21796
; [4,] -0.66536
; ---------------------------------------------------------------------
; Keywords
; ---------------------------------------------------------------------
; Reference   Beran, J. "Statistics for Long Memory Processes", Chapman
; & Hall 1994
; Davies, R.B. and Harte, D.S. "Test for Hurst effect"
; Biometrica 74, 1987
; ---------------------------------------------------------------------
; Link
; ---------------------------------------------------------------------
; Author      Arne Wuensche, 000402
```

```
; ---------------------------------------------------------------------
//
n=m+1
z=normal(2*n)
i=0
z[1]=z[1]*sqrt(2)
z[n]=z[n]*sqrt(2)
z[n+1]=0
z[2*n]=0
k=0
zk=matrix(2*n-2)
while (k<2*n-2)
  k=k+1
  if (k<=n)
    zk[k]=z[k]
  else
    zk[k]=z[2*n-k]
  endif
endo
faktor=1/(2*sqrt(n-1))
gk=FGNgk(m,H)
sqrtgk=sqrt(gk)
zsgk=matrix(2*n-2)
k=0
while (k<2*n-2)
  k=k+1
  zsgk[k]=zk[k]*sqrtgk[k]
endo
hilfsmatrix=matrix(2*n-2)-matrix(2*n-2)
zsgk=zsgk~hilfsmatrix
xt=faktor*fft(zsgk)
xt=xt[1:m]
FGNx=xt[,1]
endp
```

Erzeugung einer fraktionalen Brownschen Bewegung

```
proc(FBMx)=FBMx(n,H,startval)
; ---------------------------------------------------------------------
; Library
; ---------------------------------------------------------------------
; See_also  FGNx,FGNgk,FGNcov,fracbrown,hurst
; ---------------------------------------------------------------------
; Macro       FBMx
```

```
; ---------------------------------------------------------------------
; Description Calculation of a series of fractional Brownian motion,
; after a method proposed by Davies and Harte
; ---------------------------------------------------------------------
; Usage       (FBMx)=FBMx(n,H)
; Input
; Parameter   n length of the generated series, must be power of 2
; Definition
; Parameter   H Hurst Koeffizient as self similarity parameter
; Definition
; Parameter
; Definition startval Starting Value of the series
; Output
; Parameter   FBMx vector of the generated series
; Definition
; ---------------------------------------------------------------------
; Notes
; ---------------------------------------------------------------------
; Example     x=FBMx(4,.7,0)
; ---------------------------------------------------------------------
; Result      Contents of x
; [1,]      0
; [2,]  1.407
; [3,] 2.2431
; [4,] 1.5175
; ---------------------------------------------------------------------
; Keywords
; ---------------------------------------------------------------------
; Reference   Davies, R.B. and Harte, D.S. "Test for Hurst effect",
; Biometrica 74, 1987
; ---------------------------------------------------------------------
; Link
; ---------------------------------------------------------------------
; Author      Arne Wuensche, 000402
; ---------------------------------------------------------------------
//
x=FGNx(n,H)
xt=matrix(n)
xt[1]=startval
t=0
while (t<n-1)
  t=t+1
  xt[t+1]=xt[t]+x[t]
endo
```

```
FBMx=xt
endp
```

B.2 Inhalt der beigefügten CD-Rom

1. **Inhalt.txt** - Inhalt der CD-Rom
2. **LongMem.ps** - Postscript-File der Arbeit
3. Xplore Prozeduren (**.xpl**)
   (a) **FGNcov** - Berechnung der Kovarianzmatrix fraktionalen Gaußschen Rauschens
   (b) **FGNgk** - Berechnung der gk
   (c) **FGNx** - Erzeugt eine Reihe fraktionalen Gaußschen Rauschens
   (d) **FBMx** - Erzeugt eine Reihe fraktionaler Brownscher Bewegung
   (e) **FARcov** - Berechnung der Kovarianzfunktion fraktionales ARIMA$(0, d, 0)$
   (f) **FARgk** - Berechnung der gk
   (g) **FARx** - Erzeugt Reihe ARIMA$(0, d, 0)$
   (h) **RShurst** - Einfache Prozedur zur Berechnung des Hurst Koeffizienten
   (i) **RSteiler** - Festlegung der Laglängen in **RShurst**
   (j) **Variogramm** - Berechnung des Variogramms
   (k) **Varplot** - Varianzplot und Regression über die Punkte
   (l) **Vstat** - Berechnung der V-Statistik
   (m) **FGNchol** - Erzeugt eine Reihe fraktionalen Gaußschen Rauschens mittels Cholesky Dekomposition
   (n) **ADF** - Berechnet die Werte des Augmented Dickey-Fuller Tests
4. Daten (**.dat**)
   (a) **Nilminima** - Daten Nilminima von 715 bis 1284 aus Tousson, 1925, S. 363, [21]
   (b) **UntVorz.txt** - Namen der Unternehmen in der Reihenfolge, in der die Werte in **Vorzug** stehen
   (c) **Vorzug** - Daten der Renditen der Aktienwerte, fehlende Werte gleich -1, Quelle: Datastream
   (d) **Vorzugldiff** - Differenz der logarithmierten Renditen von **Vorzug**, Grundlage der RS-Analyse, fehlende Werte gleich 55555

Anhang C

Daten

C.1 Datenstruktur

Bei den in dieser Arbeit verwendeten Daten handelt es sich um Werte für Aktienkurse deutscher Unternehmen, von denen sowohl Stamm- als auch Vorzugsaktien gehandelt werden. Werte des Dax, MDax, Smax sowie einige andere sind vertreten.

Die Daten stammen vom Dateninformationsdienst „Datastream“ und sind in bereinigter Form gegeben und zwar als Performance RI (Return on Investment) der einzelnen Aktie. Die Berechnung erfolgte bis 1988 folgendermaßen:

$$RI_t = RI_{t-1} \frac{PI_t}{PI_{t-1}} \left(1 + \frac{DY_t}{100N}\right) \tag{C.1}$$

mit

- RI_t = Performance am Tag t
- PI_t = Kursindex am Tag t
- DY_t = Dividendenrendite in Prozent am Tag t
- N = Anzahl der Tage im Finanzjahr (i.a. 260)

Die Berechnung wird vom *FT-SE Actuaries Steering Committee* festgelegt. Der RI zeigt ein theoretisches Wachstum einer Aktie in einem bestimmten Zeitraum. Dabei wird angenommen, dass die Dividenden neu investiert werden, um zusätzliche Aktien zum Schlusskurs am Zeitraumende anzukaufen. Steuer- und Investitionskosten bleiben unberücksichtigt. Ab 1988 wurde die Berechnungsmethode angepasst durch hinzufügen der gezahlten Dividende in die Berechnung am Zeitraumende, und zwar:

$$RI_t = RI_{t-1} \frac{P_t}{P_{t-1}} \tag{C.2}$$

außer am Zeitpunkt der Dividendenausschüttung, dann

$$RI_t = RI_{t-1} \frac{P_t + D_t}{P_{t-1}} \tag{C.3}$$

wobei

- P_t = Kurs zum Ex-Dividenden Zeitpunkt
- D_t = Dividendenausschüttung im Ex-Dividendenzeitpunkt

In der Berechnung werden Brutto-Dividenden eingesetzt, Steuererhebungen und Wiederanlagesätze werden nicht berücksichtigt. Für den Kursindex wurden auschließlich berichtigte Schlusskurse verwendet.

C.2 Datenkenngrößen

	Stämme			Vorzüge		
Unternehmen	Anzahl	$S = 0$	$\hat{H}$	Anzahl	$S = 0$	$\hat{H}$
Dax-Werte						
BMW	7094	0	0.557	2750	0	0.544
Henkel	963	0	**0.461**	3760	0	0.509
MAN	7094	0	0.539	**6514**	0	0.510
RWE	7094	0	0.527	7094	0	0.520
SAP	2961	0	**0.598**	2539	0	0.581
VW	7094	0	**0.602**	3504	0	**0.603**
MDax-Werte						
AXA Colonia	7094	3	0.536	2989	1	**0.587**
Boss	2819	0	0.538	3710	0	0.558
Dyckerhoff	7094	0	0.513	7094	0	0.566
Escada	2989	0	0.565	3600	0	0.588
Heidelberger Zement	7094	0	0.545	2256	0	0.537
Krones	399	0	0.501	2989	0	0.557
KSB	7094	0	0.511	7094	0	0.537
MLP	2502	4	0.574	3063	0	0.582
Rheinmetall	7094	0	0.551	4009	0	0.570
Rhön-Klinikum	2285	20	0.503	2681	0	0.566
Spar	2293	10	0.584	2933	0	0.571
Südzucker	7094	0	0.533	2616	0	0.545
Wella	1606	0	0.554	4304	0	0.542

Tabelle C.1: Berechnete Hurstkoeffizienten für Dax und MDax Aktienwerte, fettgedruckte Werte signifikant ausserhalb der 95% Konfidenzintervalls aus Tabelle 2.2

Unternehmen	Stämme Anzahl	Stämme $S=0$	Stämme $\hat{H}$	Vorzüge Anzahl	Vorzüge $S=0$	Vorzüge $\hat{H}$
Smax-Werte						
Berliner Elektro	2989	0	0.558	2989	0	0.539
Biotest	985	0	0.561	3237	0	0.558
B.U.S.	2634	0	0.525	2634	0	0.545
Fuchs Petrolub	2854	0	0.522	3945	0	0.560
Herlitz	5854	0	0.538	2989	0	0.546
König & Bauer	2989	3	0.544	2989	1	0.574
Möbel Walther	1535	2	0.614	2172	3	0.652
Sartorius	2523	8	0.602	2523	17	0.597
WMF	7094	0	0.523	7094	2	0.515
Sonstige						
Agrob	7094	3	0.542	7094	0	0.568
Albingia	7094	349	0.573	2989	41	0.528
Allweiler	7094	179	0.508	7094	83	0.541
Binding	7094	7	0.522	2989	74	**0.497**
Dahlbusch	5839	346	0.532	5839	176	0.574
Gea	2672	0	0.547	2672	0	0.552
Ingram Macrotron	2989	125	0.590	2540	51	0.574
Kennametall Hertel	2696	80	0.527	3333	35	0.541
Komm. Ind. Hold.	2307	80	0.551	3069	17	0.533
Knürr	2293	34	0.551	2989	5	0.532
Kötitzer Leder	2989	922	**0.741**	2965	634	**0.766**
Kunert	3046	27	0.548	2498	22	0.512
Mainzer Aktien Bierbr.	2989	253	0.528	2989	509	**0.636**
Mineralbr. Ueberk.-T.	2965	22	0.540	2965	9	0.516
Stumpf	7094	117	0.516	2989	204	0.563
Walter Bau	2096	16	0.533	2096	43	0.585
Westag & Getalit	2989	27	0.520	2712	0	0.516
WKM Terrain	2919	96	0.586	2965	238	**0.601**
Zanders	4207	8	0.526	2989	6	0.556

Tabelle C.2: Berechnete Hurstkoeffizienten für Smax und sonstige Aktienwerte, fettgedruckte Werte signifikant ausserhalb der 95% Konfidenzintervalls aus Tabelle 2.2

Literaturverzeichnis

[1] Anis, A. A., Lloyd, E. H., (1976), *The expected Value of the adjusted rescaled Hurst Range of independent normal Summands*, Biometrica 63

[2] Baillie, R. T., (1996), *Long Memory Processes and fractional Integration in Econometrics*, Journal of Econometrics 73, S. 5-59

[3] Beran, J. (1994), *Statistics for Long Memory Processes*, Chapman & Hall, New York

[4] Box,G. E. P., Jenkins, G. M., (1970), *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden Day, San Francisco

[5] Breitung, J.,Wulff, C., (1999), *Nonlinear Error Correction and the Efficient Market Hypothesis: The Case of German Dual-Class Shares*, Quantification and Simulation of Economic Processes, Sonderforschungsbereich 373 Humboldt Universität Berlin

[6] Davies, R. B., Harte, D. S., (1987), *Test for Hurst Effect*, Biometrica 74, S. 95-102

[7] Feller, W., (1951), *The Asymptotic Distribution of the Range of Sums of independent Variables*, Annals of Mathematics and Statistics 22

[8] Dickey, D. A., Fuller, W. A. (1979), *Distribution of the Estimators for autoregressive Time Series with a unit Root*, Journal of the American Statistical Association 74, S. 427-431

[9] Dickey, D. A., Fuller, W. A. (1981), *Likelihood Ratio Statistics for autoregressive Time Series with a unit Root*, Econometrica Vol. 49, S. 1057-1072

[10] Franke, J., Härdle, W., Hafner, C., (1999), *Statistik der Finanzmärkte*, Berlin

[11] Hurst, H. E. (1951)*long Term Storage Capacity of Reservoirs*, Trans. Am. Soc. Civil Engineers 116, S. 770-799

[12] Gardeazabal, J., Regúlaz, M., (1992), *The Monetary Model of Exchange Rates and Cointegration*, Springer-Verlag, Heidelberg

[13] Gourieroux, C., Monfort, A., (1990), *Time Series and Dynamic Models*, Cambridge University Press

[14] Granger, C.W.J., (1986), *Developments in the Study of Cointegrated Economic Variables*, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 48, 3, S. 213-228

[15] Hall, P., Härdle, W., Kleinow, T., Schmidt, P., *Semiparametric Bootstrap Approach to Hypothesis Tests and Confidence Intervalls for the Hurst Coefficient*, Quantifikation und Simulation ökonomischer Prozesse, Sonderforschungsbereich 373 Humboldt Universität Berlin

[16] Kolmogorow, A. N., (1941), *Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum*, Comptes Rendues (Doklady), Akad. d. Wiss. d. UdSSR NS 26, S. 115-118

[17] Krämer, W., (1999), *Kointegration von Aktienkursen*, zfbf 51 (10/1999)

[18] Mandelbrot, B.B., van Ness, J. W., (1968), *Fractional Brownian Motion, fractional Noises and applications*, SIAM Rev. 10, No. 4, S. 422-437

[19] Peters, E. E., (1994), *Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, Wiley, New York

[20] Samorodnitsky, G., Taqqu, M. S., (1994), *Stable non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with infinite Variance*, Chapman & Hall, New York

[21] Tousson, O., 1925, *Mémoire sur l'Histoire du Nil*, Mémoires de l'Institut d'Egypte, S. 363

[22] Tschernig, R., (1992), *Wechselkurse, Unsicherheit und Long Memory*, Physica Verlag, Heidelberg

[23] Tschernig, R., (1994), *Long Memory in Foreign Exchange Rates Revisited*, Quantifikation und Simulation ökonomischer Prozesse, Sonderforschungsbereich 373 Humboldt Universität Berlin

Erklärung zur Urheberschaft

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbsttätig und nur unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Arne Wünsche

Berlin, 13.04.2000