Index3 Algebro-Differentialgleichungen mit proper formuliertem Hauptterm

Irina Schumilina.

January 16, 2002

Diese Arbeit widmet sich der Untersuchung von Algebro-Differentialgleichungen mit Index 3. Algebro-Differentialgleichung werden wir bezeichnen durch DAE. Ich baue auf die Ergebnisse und grundlegenden Begriffe, die in den Arbeiten von R.März und in der Doktorarbeit von D.Estévez-Schwarz vorgeschlagen worden sind auf. In der Arbeit [Ba.Mä] ist eine Theorie der DAE mit Index 1,2 entwickelt worden, die auch wichtig für die Untersuchung der DAEs mit Index 3 ist. In [Ba.Mä] und in [Mär] werden DAEs mit proper formulierten Hauptterm untersucht. Auch in der vorliegenden Arbeit wird vorausgesetzt, dass der Hauptterm proper formuliert ist.

Meine Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Im ersten Kapitel werden grundlegende Begriffe und die Definition der DAE mit Index3 eingeführt. Dabei wird eine spezielle Kette von Matrixfunktionen verwendet. Weiter wird die Invarianz des Indexes $\mu = \{1, 2, 3\}$ unter regulären Transformationen bewiesen.

Im zweiten Kapitel erhalten wir die Zerlegung der index3 DAE und beweisen die Lösbarkeit der DAE.

Im dritten Teil vergleichen wir den von P.Kunkel und V.Mehrmann [Kun.,Meh] vorgeschlagenen Begriff des Strangeness-Indexes mit dem hier verwendeten Index-Begriff.

1 Definition von DAE mit Index-3.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$A(t)(D(t)x(t))' + B(t)x(t) = q(t) \qquad t \in I \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

wobei $A \in C(I, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)), D \in C(I, L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)), B \in C(I, L(\mathbb{R}^m)), q \in C(I, \mathbb{R}^m)$.

Definition 1 *: x(.) ist Lösung der DAE (1), wenn* $x(.) \in C^1_D(I, \mathbb{R}^m) = \{x(.) \in C(I, \mathbb{R}^m), D(.)x(.) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)\}$ *und die Gleichung (1) auf I erfüllt ist.*

Definition 2 *A(t), D(t) heissen zusammenpassend, wenn* $\ker A(t) \oplus \operatorname{im} D(t) = \mathbb{R}^n \ \forall t \in I$ *und wenn ein Projektor* $R(.) \in C^1(I, L(\mathbb{R}^n))$ *existiert so, dass* $\operatorname{im} R(t) = \operatorname{im} D(t), \ker R(t) = \ker A(t) \ \forall t \in I$ *gilt.*

Der Hauptterm in (1) heisst proper formuliert, wenn A und D zusammenpassend sind.

Weiterhin setzen wir voraus, dass die Matrix $A(t)D(t) = G_0(t)$ singulär ist. Bezeichne $P_0(t)$ einen Projektor mit $\ker P_0(t) = \ker G_0(t)$.

Definition 3 *Sei D(t) eine $(m \times n)$ Matrix. $D^-(t)$ heisst verallgemeinerte reflexive Inverse zu D(t), wenn $D^-(t)$ folgende Eigenschaften erfüllt:*

$$D^-(t)D(t)D^-(t) = D^-(t)$$

$$D(t)D^-(t)D(t) = D(t)$$

Für jede $(m \times n)$ Matrix kann man mehr als eine verallgemeinerte reflexive Inverse definieren. Wir bestimmen die verallgemeinerte reflexive Inverse D^- zu D durch die Bedingungen $D(t)D^-(t) = R(t)$ und $D^-(t)D(t) = P_0(t)$. In diesem Fall ist die verallgemeinerte reflexive Inverse eindeutig bestimmt.

Im Folgenden verwenden wir noch die Bezeichnungen:

$$N_0(t) = \ker A(t)D(t),\ S_0(t) = \{z \in \mathbb{R}^m : B(t)z \in \operatorname{im} G_0(t)\},$$

$$Q_0(t) \text{ ist ein Projektor auf } N_0(t),\ P_0(t) = I - Q_0(t),$$

$$W_0(t) \text{ ist ein Projektor so dass } \ker W_0(t) = \operatorname{im} G_0(t)$$

$$G_1(t) = G_0(t) + B(t)Q_0(t),\ N_1(t) = \ker G_1(t),$$

$$S_1(t) = \{z \in \mathbb{R}^m : B(t)P_0(t)z \in \operatorname{im} G_1(t)\},$$

$$Q_1(t) \text{ ist ein Projektor auf } N_1(t),\ P_1(t) = I - Q_1(t),$$

$$G_2(t) = G_1(t) + B_1(t)Q_1(t),$$

wobei

$$B_1(t) = B(t)P_0(t) - G_1(t)D^-(t)(D(t)P_1(t)D^-(t))'D(t) \text{ und}$$

$$N_2(t) = \ker G_2(t),\ S_2(t) = \{z \in \mathbb{R}^m : B(t)P_0(t)P_1(t)z \in \operatorname{im} G_2(t)\}.$$

$$Q_2(t) \text{ ist ein Projektor auf } N_2(t), P_2(t) = I - Q_2(t).$$

$$G_3(t) = G_2(t) + B_2(t)Q_2(t),$$

wobei

$$B_2(t) = B_1(t)P_1(t) - G_2(t)D^-(t)(D(t)P_1(t)P_2(t)D^-(t))'D(t)P_1(t)$$

Definition 4 *Sei (1) eine DAE mit proper formulierten Hauptterm.*

1) Die DAE (1) hat index1, wenn $N_0(t) \cap S_0(t) = 0, \forall t \in I$.

2) Die DAE (1) hat index2, wenn $\dim(N_0(t) \cap S_0(t)) = \kappa_0 > 0$ *und* $N_1(t) \cap S_1(t) = 0, \forall t \in I$.

3) Die DAE (1) hat index3, wenn $\dim(N_0(t) \cap S_0(t)) = \kappa_0 > 0, \dim(N_1(t) \cap S_1(t)) = \kappa_1 > 0, N_2(t) \cap S_2(t) = 0, \forall t \in I$.

Wir befassen uns hier mit DAEs mit dem Index$\leq$ 3. Im Folgenden seien die Projektoren $Q_0(t), Q_1(t)$ so gewählt, dass sie die Eigenschaft $Q_jQ_i = 0$ für $j > i$ erfüllen. Diese Wahl ist für DAEs mit Index$\leq$ 3 möglich, weil für sie $N_i \cap N_j = 0$ für $i \neq j$ gilt. Speziell sei Q_2 der kanonische Projektor auf N_2 längs S_2.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
Q_2 = Q_2G_3^{-1}B_2 &= Q_2G_3^{-1}BP_0P_1 - Q_2G_3^{-1}G_3P_2P_1D^-(DP_1D^-)'DP_1 \\
&\quad -Q_2G_3^{-1}G_3P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1 \\
&= Q_2G_3^{-1}BP_0P_1 = Q_2G_3^{-1}B
\end{aligned}$$

Bemerkung 1 *Wie man aus [Grie.Mä] erkennt, ist Definition* 4 *äquivalent zu den Bedingungen:*

1) Die DAE (1) ist index1, wenn $G_0(t)$ singulär ist und konstanten Rang hat und $G_1(t)$ regulär ist $\forall t \in I$.

2) Die DAE (1) ist index2, wenn $G_0(t), G_1(t)$ singulär sind und konstanten Rang haben und $G_2(t)$ regulär ist $\forall t \in I$.

3) Die DAE (1) ist index3, wenn $G_0(t), G_1(t), G_2(t)$ singulär sind und konstanten Rang haben und $G_3(t)$ regulär ist $\forall t \in I$.

Im Folgenden werden wir einige Ergebnisse der Arbeit [Ba.Mä] verwenden, wo DAEs mit Index $\mu = \{1, 2\}$ detailiert untersucht werden. In [Ba.,Mä] ist die Matrix G_2 dargestelt in der Form $G_2 = G_1 + BP_0Q_1$. Wir verwenden hier für G_2 einen komplizierteren Ausdruck. Mit Beispiel 1 wird gezeigt, dass diese kompliziertere Form notwendig ist.

Beispiel 1: Wir betrachten die DAE mit den zeitinvarianten Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{x}' + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{x} = \tilde{q},$$

wobei

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir nehmen:

$$K(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta t & 1 \end{pmatrix}, H(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$H^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\eta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die DAE hat Index 3. Durch die reguläre Transformation mit der Matrix $K(t)$ und die Refaktorisierung mit der regulären Matrix $H(t)$ erhalten wir:

$\tilde{x}(t) = K(t)x(t), A(t) = \tilde{A}H(t), D(t) = H^{-1}(t)\tilde{D}K(t), B(t) = \tilde{B} - \tilde{A}H(t)H^{-1}(t)'\tilde{D}K(t)$. Dann hat die neue DAE folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \eta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) \right)' + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta+1 & 0 \\ 0 & \eta t & 1 \end{pmatrix} x(t) = q(t),$$

wobei $\eta \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

Weiterhin wird gezeigt, dass der Index $\mu = \{1,2,3\}$ invariant unter reguläre Transformation ist. Es folgt, dass die neue DAE unabhängig von Parametr η ebenfalls den Index 3 hat.

Wir bestimmen $G_0(t) = A(t)D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \eta t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und

$$N_0(t) = \ker G_0(t) = \{z \in \mathbb{R}^3 : z_2 = 0, \eta t z_2 + z_3 = 0\}$$
$$= \{z \in \mathbb{R}^3 : z_2 = 0, z_3 = 0\}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_0(t) = \{z \in \mathbb{R}^3 : B(t)z \in \operatorname{im} G_0(t)\} = \{z \in \mathbb{R}^3 : \eta t z_2 + z_3 = 0\}.,$$

Es folgt insbesondere

$$N_0(t) \cap S_0(t) = N_0(t) \neq 0,$$

$$G_1(t) = G_0(t) + B(t)Q_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \eta t & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$\ker G_1(t) = N_1(t) = \{z \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 = 0, \eta t z_2 + z_3 = 0\}.$$
$$S_1(t) = \{z \in \mathbb{R}^3 : B(t)P_0(t)z \in \operatorname{im} G_1(t)\} = \{z \in \mathbb{R}^3 : \eta t z_2 + z_3 = 0\}.$$

Insbesondere gilt $N_1(t) \cap S_1(t) = N_1(t) \neq 0$.

Wir berechnen einen Projektor $Q_1(t)$ auf $N_1(t)$ so, dass $Q_1 Q_0 = 0$. Es ergeben sich

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\eta t & 0 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta t & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

Wir betrachten die Matrix $G_2 = G_1 + BP_0Q_1 - G_1 D^-(DP_1D^-)'DQ_1$, wobei

$$D^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man erhält

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \eta t + 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen

$$N_2 = \ker G_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 = 0, (\eta t + 1)z_2 + z_3 = 0\},$$

$S_2 = \{z \in \mathbb{R}^3 : BP_0P_1z \in \mathrm{im}G_2\} = \{z \in \mathbb{R}^3 : \eta t z_2 + z_3 = 0\}$ und folgern $S_2 \cap N_2 = 0$ d.h. unsere DAE hat für beliebige η den Index 3.

Wir betrachten die Matrix $A_2(t) = G_1(t) + B(t)P_0(t)Q_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \eta t + \eta + 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

und setzen

$$\bar{N}_2(t) = \ker A_2(t) = \{z \in \mathbb{R}^3 : z_1 + z_2 = 0, (\eta t + \eta + 1)z_2 + z_3 = 0\} \text{ und}$$

$$\bar{S}_2(t) = \{z \in \mathbb{R}^3 : B(t)P_0(t)P_1(t)z \in \mathrm{im}A_2(t)\} = \{z \in \mathbb{R}^3 : \eta t z_2 + z_3 = 0\}.$$

Wir haben dann im Falle von $\eta = -1$, die Beziehung $\bar{S}_2 \cap \bar{N}_2 \neq 0$. Damit erhalten wir, dass die Matrix $A_2 = G_1 + BP_0Q_1$ zur Definition des Indexes 3 nicht geeignet ist.

In der Zerlegung der DAE entstehen die Ableitungen der Terme $D(t)P_1(t)D^-(t), D(t)P_1(t)P_2(t)D^-(t)$. Deshalb ist es nötig vorauszusetzen, dass diese Terme stetig differenzierbar sind.

Im Folgenden seien die Matrizen und Projektoren weiterhin von t abhängig, wir werden aber die Variable t wegen besserer Lesbarkeit nicht mitschreiben.

Wir betrachten eine DAE in der Form (1) mit proper formulierten Hauptterm und $K \in C(I, L(\mathbb{R}^m)$ sowie $H \in C^1(I, L(\mathbb{R}^n))$. Nach der regulären Transformation $x(t) = K(t)\bar{x}(t)$ und der Refaktorisierung $AD = AHH^{-1}D$ von der DAE (1) mit der regulären Matrix $H(t)$, bekommt man die DAE $AHH^{-1}(DK\bar{x})' + BK\bar{x} = q$, d.h., $AH(H^{-1}DK\bar{x})' + (BK - AH(H^{-1})'DK)\bar{x} = q \quad (2a)$.

Mit $\bar{A} = AH, \bar{D} = H^{-1}DK$ und $\bar{B} = BK - AH(H^{-1})'DK$ hat (2a) die Gestalt:

$$\bar{A}(t)(\bar{D}(t)\bar{x}(t))' + \bar{B}(t)\bar{x}(t) = q(t), \tag{2}$$

wobei die Koeffizienten $\bar{A}$ und $\bar{D}$ zusammenpassend sind.

Im Satz 1 zeigen wir, dass sich der Index $\mu \in \{1, 2, 3\}$ unter regulären Transformationen nicht verändert, d.h. die DAE (2) hat den selben Index wie die ursprüngliche DAE (1).

Satz 1 *Der Index $\mu \in \{1, 2, 3\}$ ist invariant unter regulären Transformationen.*

Beweis:Wir betrachten die DAE (2), die durch eine reguläre Transformation mit $K(t) \in L(\mathbb{R}^m)$ der unbekannten Variablen $x(t)$ erhalten wurde.

$$\bar{G}_0 = \bar{A}\bar{D} = AHH^{-1}DK = G_0K.$$

Da K(t) als regulär vorausgesetzt wurde, folgt dass $\mathrm{im}G_0 = \mathrm{im}\bar{G}_0$ und $N_0 = K^{-1}\bar{N}_0$ sowie

$$\bar{S}_0 = \{z \in \mathbb{R}^m : \bar{B}z \in \bar{G}_0\} = \{z \in \mathbb{R}^m : BKz - AH(H^{-1})'DKz \in \mathrm{im}G_0\}$$

$$= \{z \in \mathbb{R}^m : BKz \in \mathrm{im}G_0\} = K^{-1}S_0.$$

Somit erhalten wir, dass $\dim N_0 \cap S_0 = \dim \bar{N}_0 \cap \bar{S}_0$.

Bei der Verwendung regulärer Transformationen erhält man folgende Beziehungen für den Projektor $\bar{Q}_0$ auf $\ker\bar{G}_0$ und die reflexive verallgemeinerte Inverse $\bar{D}^-$:

$$\bar{Q}_0 = K^{-1}Q_0K$$

$$\bar{D}^- = K^{-1}D^-H.$$

Wir setzen $G_1 := G_0 + BQ_0$ und bestimmen $\bar{G}_1$ durch

$$\bar{G}_1 = G_0K + \bar{B}\bar{Q}_0$$

$$= G_0K + [BK - AH(H^{-1})'DK]K^{-1}Q_0K$$

$$= (G_0 + BQ_0)K = G_1K.$$

Wir erhalten mit dieser Beziehung

$$\mathrm{im}G_1(t) = \mathrm{im}\bar{G}_1(t),\ N_1(t) = K^{-1}(t)\bar{N}_1(t) \text{ und}$$

$$\bar{S}_1 = \{z \in \mathbb{R}^m : \bar{B}\bar{P}_0 z \in \mathrm{im}\bar{G}_1\}$$

$$= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0Kz - AH(H^{-1})'D \in \mathrm{im}G_1\}$$

$$= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0Kz \in \mathrm{im}G_1\} = K^{-1}S_1.$$

Daraus folgt

$$\dim \bar{N}_1 \cap \bar{S}_1 = \dim N_1 \cap S_1.$$

Die Matrix G_2 ist definiert durch

$$G_2 = G_1 + BP_0Q_1 - G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1.$$

Wir bemerken dabei, dass

$$G_2P_1P_0 = G_1P_1P_0 = G_1P_0 = ADP_0 = AD$$

$$G_1D^- = ADD^- = A.$$

Dann definieren wir eine weitere Matrix $\bar{G}_2$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
\bar{G}_2 &= \bar{G}_1 + \bar{B}\bar{P}_0\bar{Q}_1 - \bar{G}_1\bar{D^-}(\bar{D}\bar{P}_1\bar{D^-})'\bar{D}\bar{Q}_1 \\
&= G_1K + [BK - AH(H^{-1})'DK]K^{-1}P_0Q_1K - G_1D^-H(H^{-1}DP_1D^-H)'H^{-1}DQ_1K \\
&= G_1K + BP_0Q_1K - AH(H^{-1})'DP_0Q_1K - G_1D^-H(H^{-1}DP_1D^-H)'H^{-1}DQ_1K \\
&= G_1K + BP_0Q_1K - AH(H^{-1})'DQ_1K - G_1D^-H(H^{-1})'DP_1D^-DQ_1K \\
&\quad -G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1K - G_1D^-DP_1D^-(H)'H^{-1}DQ_1K \\
&= [G_1 + BP_0Q_1 - G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1]K - AH(H^{-1})'DQ_1K \\
&\quad -ADP_1D^-(H)'H^{-1}DQ_1K \\
&= [G_1 + BP_0Q_1 - G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1]K - ADD^-H(H^{-1})'DQ_1K \\
&\quad -ADP_1D^-(H)'H^{-1}DQ_1K \\
&= G_2K - G_2P_1P_0D^-H(H^{-1})'DQ_1K - G_2P_1P_0P_1D^-(H)'H^{-1}DQ_1K \\
&= G_2[I - P_1P_0D^-H(H^{-1})'DQ_1 - P_1P_0P_1D^-H'H^{-1}DQ_1]K \\
&= G_2[I - P_1(P_0D^-H(H^{-1})' + P_0P_1D^-H'H^{-1})DQ_1]K \\
&= G_2F_2K,
\end{aligned}
$$

wobei

$$F_2 = I - P_1[P_0D^-H(H^{-1})' + P_0P_1D^-H'H^{-1}]DQ_1$$

eine reguläre Matrix ist und

$$F_2^{-1} = I + P_1[P_0D^-H(H^{-1})' + P_0P_1D^-H'H^{-1}]DQ_1.$$

Wir erhalten mit diesen Beziehungen

$$
\begin{aligned}
\bar{N}_2 &= \ker\bar{G}_2 = K^{-1}F_2^{-1}N_2 \\
\bar{S}_2 &= \{z \in \mathbb{R}^m : \bar{B}\bar{P}_0\bar{P}_1z \in \mathrm{im}\bar{G}_2\} \\
&= \{z \in \mathbb{R}^m : (BK - AH(H^{-1})'DK)K^{-1}P_0P_1Kz \in \mathrm{im}G_2\} \\
&= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0P_1Kz - AH(H^{-1})'DP_0P_1Kz \in \mathrm{im}G_2\} \\
&= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0P_1Kz \in \mathrm{im}G_2\} = K^{-1}S_2.
\end{aligned}
$$

Wir wollen prüfen, ob $S_2 = F_2^{-1}S_2$ erfüllt ist. In der Tat gilt:

$$
\begin{aligned}
F_2^{-1}S_2 &= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0P_1F_2^{-1}z \in \mathrm{im}G_2\} \\
&= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0P_1z + BP_0P_1D^-H(H^{-1})'DQ_1 + BP_0P_1D^-H'H^{-1}DQ_1z \in \mathrm{im}G_2\} \\
&= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0P_1z + BP_0P_1D^-[H(H^{-1})' + H'H^{-1}]DQ_1z \in \mathrm{im}G_2\} \\
&= \{z \in \mathbb{R}^m : BP_0P_1z \in \mathrm{im}G_2\} = S_2,
\end{aligned}
$$

also $F_2^{-1}S_2 = S_2$. Wir erhalten auch die Beziehungen

$$\bar{N}_2 \cap \bar{S}_2 = K^{-1}F_2^{-1}(N_2 \cap S_2) \Longleftrightarrow \dim \bar{N}_2 \cap \bar{S}_2 = \dim N_2 \cap S_2$$

Damit ist Satz 1 bewiesen. □

Wir betrachten nun ein Beispiel.

Beispiel 2: Wir betrachten die zeitinvariante DAE (1) in Kronecker Normalform, wobei

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_J \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} W & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Sei J ein nilpotenter Operator mit $J^2 \neq 0$ und $J^3 = 0$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und P_J ein Projektor mit $\ker P_J = \ker J, JP_J = J$.

Man zeigt, dass die Aufgabe den Index 3 hat.

Es ist

$$\ker AD = \{z \in \mathbb{R}^m : z_1 = 0, Jz_2 = 0\}.$$

$\ker AD$ ist nicht leere Menge, weil

$$\ker J = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\} \neq 0 \Rightarrow \ker G_0 \neq 0 \Rightarrow G_0 \text{ singulär ist.}$$

Q_0 ist ein Projektor auf $\ker G_0$.

Es bietet sich an

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_J \end{pmatrix},$$

wobei $Q_J = I - P_J$ ein Projektor auf $\ker J$ ist, zu wählen.

$$Q_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$P_0 = I - Q_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - Q_J \end{pmatrix}.$$

Wir finden einen Projektor R mit Hilfe der Bedingungen $\ker R = \ker A, \operatorname{im} R = \operatorname{im} D$ und es ergibt sich

$$R = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_J \end{pmatrix}.$$

Mit den Bedingungen $D^- D = P_0, DD^- = R$ finden wir die verallgemeinerte reflexive Inverse D^-, welche hier gegeben ist durch

$$D^- = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_J \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix G_1 bekommen wir

$$G_1 = G_0 + BQ_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J + Q_J \end{pmatrix}.$$

Es gilt auch

$$\ker G_1 = \{z \in \mathbb{R}^m : z_1 = 0, z_2 \in \ker(J + Q_J)\}.$$

Sei nun Q_1 ein kanonischer Projektor auf $\ker G_1$, dann erhalten wir

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{J1} \end{pmatrix}, P_1 = I - Q_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I - Q_{J1} \end{pmatrix}.$$

wobei Q_{J1} ein Projektor auf $\ker(J + Q_J)$ ist

$$J + Q_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_{J1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\ker(J + Q_J) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_2, x_3 = 0\} \neq 0 \Rightarrow \ker G_1 \neq 0 \Rightarrow G_1$ ist singulär.

Die Matrix G_2 hat folgende Gestalt:

$$G_2 = G_1 + BP_0Q_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1} \end{pmatrix}.$$

$$\ker G_2 = \{z \in \mathbb{R}^m : z_1 = 0, z_2 \in \ker(J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1})\}.$$

$$J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dann $\ker(J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = -x_1, x_2 = -x_3\} \neq 0$

$$\Rightarrow \ker G_2 \neq 0 \Rightarrow G_2 \text{ singulär ist.}$$

Q_2 ist ein Projektor auf $\ker G_2$ dann gilt:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_{J2} \end{pmatrix},$$

wobei Q_{J^2} ein Projektor auf $\ker(J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J^1})$ und

$$Q_{J2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix G_3 erhalten wir:

$$G_3 = G{+}2{+}BP_0P_1Q_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1} + (I - Q_J)(I - Q_{J1})Q_{J2} \end{pmatrix},$$

$$\ker G_3 = \{z \in \mathbb{R}^m : z_1 = 0, z_2 \in \ker(J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1} + (I - Q_J)(I - Q_{J1})Q_{J2})\},$$

$$\text{wobei } J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1} + (I - Q_J)(I - Q_{J1})Q_{J2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker(J + Q_J + (I - Q_J)Q_{J1} + (I - Q_J)(I - Q_{J1})Q_{J2}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_2 = x_3 = 0\} = 0$$

$$\Rightarrow \ker G_3 = 0 \Rightarrow G_3 \text{ ist regulär.}$$

Nach einer regulären Transformation $x(t) = K(t)\bar{x}(t), K(t) \in C(I, L(\mathbb{R}^m)), H(t) \in C^1(I, L(\mathbb{R}^m))$ bekommen wir die DAE $\bar{A}(t)(\bar{D}(t)\bar{x}(t))' + \bar{B}(t)\bar{x}(t) = q(t)$, wobei $\bar{A}(t) = AH(t), \bar{D}(t) = H^{-1}(t)DK(t), \bar{B}(t) = BK(t) - AH(t)(H^{-1}(t))'DK(t)$. Nach Satz 1 ist diese DAE Index3-tractable und es gilt

$$\bar{G}_0(t) = G_0K(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} K(t) \text{ sowie}$$

$$\bar{G}_1(t) = G_1K(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & J + Q_J \end{pmatrix} K(t).$$

Für die Matrix $\bar{G}_2$ erhalten wir

$$\bar{G}_2(t) = G_2[I - P_1[P_0D^-H(H^{-1})' +$$

$$P_0P_1D^-H'(t)H^{-1}(t)]DQ_1]K(t) =$$

$$G_2[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + (\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I - Q_{J^1})(I - Q_J) \end{pmatrix} H(t)(H^{-1}(t))' +$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I - Q_{J^1})P_J \end{pmatrix} H'(t)H^{-1}(t))DQ_1]K(t).$$

2 Hauptsatz für lineare DAEs mit Index-3.

In diesem Abschnitt erhalten wir die Zerlegung der DAE mit Index 3 in eine Differentialgleichung und algebraische Gleichungen. Im Index- 3 Fall gibt es eine Zerlegung $R^n = \ker A(t) \oplus D(t)N_1(t) \oplus D(t)P_1(t)S_2(t) \oplus D(t)P_1(t)N_2(t) = \ker A(t) \oplus \operatorname{im} D(t)Q_1(t) \oplus \operatorname{im} D(t)P_1(t)P_2(t) \oplus \operatorname{im} D(t)P_1(t)Q_2(t)$. Damit können wir die DAE in eine ODE für $D(t)P_1(t)P_2(t)x(t)$ und algebraische Gleichungen für $Q_0(t)x(t), D(t)P_1(t)Q_2(t)x(t)$ und $D(t)Q_1(t)x(t)$ entkoppeln. In [Mä] ist die Zerlegung für die DAE mit Index3 in Standardform vorgeschlagen und ihre Lösbarkeit bewiesen. Wir beweisen die Lösbarkeit unter allgemeineren Bedingungen. Analog zu [Ba.Mä] definieren wir dafür einen Projektor Q_{1c}, durch den man die Zerlegung vereinfachen kann.

Wir setzen voraus, dass die DAE $A(t)(D(t)x(t))' + B(t)x(t) = q(t)$ Index 3 hat. Es gilt, dass die Matrizen

$$G_0(t) = A(t)D(t),\ G_1(t) = G_0(t) + B(t)Q_0(t)$$

$$G_2(t) = G_1(t) + B(t)P_0(t)Q_1(t) - G_1(t)D^-(t)(D(t)P_1(t)D^-(t))'D(t)Q_1(t)$$

singulär sind und die Matrix

$$\begin{aligned} G_3(t) = G_2(t) + B(t)P_0(t)P_1(t)Q_2(t) - G_1(t)D^-(t)(D(t)P_1(t)D^-(t))'D(t)P_1(t)Q_2(t) \\ -G_2(t)D^-(t)(D(t)P_1(t)P_2(t)D^-(t))'D(t)P_1(t)Q_2(t) \end{aligned}$$

regulär ist. Wir multiplizieren die DAE mit der Matrix G_3^{-1} und verwenden folgende Identitäten:

$$G_3^{-1}AD = G_3^{-1}G_3P_2P_1P_0$$

$$B(P_0Q_1 + P_0P_1Q_2 + P_0P_1P_2 + Q_0) = B$$

und

$$BP_0Q_1 = G_3Q_1 + G_3P_2P_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1$$

$$BP_0P_1Q_2 = G_3Q_2 + G_3P_2P_1D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2 + G_3P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2,$$

$$BQ_0 = G_3Q_0.$$

Damit erhalten wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} P_2P_1D^-(Dx)' + G_3^{-1}BP_0P_1P_2x + P_2P_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1x \\ +Q_1x + Q_2x + Q_0x + P_2P_1D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2x \\ +P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2x = G_3^{-1}q, \end{aligned} \tag{3}$$

die wir durch Multiplikation mit $DP_1P_2, Q_1P_2, Q_0P_1P_2, Q_2$ in folgendes System umformen:

$$\begin{aligned} DP_1P_2D^-(Dx)' + DP_1P_2G_3^{-1}BP_0P_1P_2x \\ +DP_1P_2D^-(DP_1D^-)'DQ_1x + DP_1P_2D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2x \\ +DP_1P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2x = DP_1P_2G_3^{-1}q \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} -Q_1Q_2D^-(Dx)' + Q_1P_2G_3^{-1}BP_0P_1P_2x \\ -Q_1Q_2D^-(DP_1D^-)'DQ_1x - Q_1Q_2D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2x \\ +Q_1P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2x + Q_1x = Q_1P_2G_3^{-1}q \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} Q_0P_1P_2D^-(Dx)' + Q_0P_1P_2G_3^{-1}BP_0P_1P_2x \\ +Q_0P_1P_2D^-(DP_1D^-)'DQ_1x + Q_0P_1P_2D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2x \\ +Q_0P_1P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2x + Q_0x = Q_0P_1P_2G_3^{-1}q \end{aligned} \tag{6}$$

$$Q_2x \quad = \quad Q_2G_3^{-1}q \tag{7}$$

Dieses System schreiben wir in der geeigneten Gestalt auf. Wir rechnen aus:

$$DP_1P_2D^-(Dx)' = (DP_1P_2x)' - (DP_1P_2D^-)'Dx$$

Für den Term $(DP_1P_2D^-)'Dx$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}(DP_1P_2D^-)'Dx &= (DP_1P_2D^-)'DQ_1x + (DP_1P_2D^-)'DP_1x \\ &= (DP_1P_2D^-)'DP_1P_2x + (DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2x \\ &\quad +(DP_1P_2D^-)'DQ_1x\end{aligned}$$

Nach den Berechnungen:

$$\begin{aligned}DP_1P_2D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2 &= DP_1P_2D^-(DP_1P_0P_1Q_2)' - DP_1P_2P_0P_1D^-(DP_1Q_2)' \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DP_1P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2 &= (DP_1P_2P_0P_1P_2D^-)'DP_1Q_2 \\ &\quad -(DP_1P_2D^-)'DP_1P_2P_0P_1Q_2 \\ &= (DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2.\end{aligned}$$

$$DP_1P_2D^-(DP_1D^-)'DQ_1 = (DP_1P_2D^-)'DQ_1$$

Dann formen wir Differentialgleichung (4) um in:

$$\begin{aligned}(DP_1P_2x)' - (DP_1P_2D^-)'DP_1P_2x \quad &+ \quad DP_1P_2G_3^{-1}BP_0P_1P_2x \\ &= \quad DP_1P_2G_3^{-1}q\end{aligned} \tag{8}$$

Nach den folgenden Berechnungen:

$$\begin{aligned}Q_1Q_2D^-(Dx)' &= Q_1Q_2D^-(DP_1x)' + Q_1Q_2D^-(DQ_1x)' \\ &= Q_1Q_2D^-(DP_1P_2x)' + Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2x)' + Q_1Q_2D^-(DQ_1x)' \\ &= Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2x)' + Q_1Q_2P_0P_1D^-(DQ_1x)' \\ &\quad +Q_1Q_2P_0P_1Q_2D^-(DP_1P_2x)' \\ &= Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2x)' - Q_1Q_2D^-(DP_1D^-)'DQ_1x \\ &\quad -Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'DP_1P_2x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_1Q_2D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2 &= (Q_1Q_2P_0P_1D^-)'DP_1Q_2 \\ &\quad -(Q_1Q_2D^-)'DP_1P_0P_1Q_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2 &= (Q_1P_2P_0P_1P_2D^-)'DP_1Q_2 \\ &\quad -(Q_1P_2D^-)'DP_1P_2P_0P_1Q_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

erhalten wir für Gleichung (5)

$$\begin{aligned} Q_1x &= Q_1P_2G_3^{-1}q + Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2G_3^{-1}q)' \\ &\quad -[Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'D + Q_1P_2G_3^{-1}B]P_0P_1P_2x \end{aligned} \tag{9}$$

Für den Term $Q_0P_1P_2D^-(Dx)'$ rechnen wir aus:

$$\begin{aligned} &Q_0P_1P_2D^-(Dx)' = Q_0P_1P_2D^-(DP_1x)' + Q_0P_1P_2D^-(DQ_1x)' \\ &\quad = Q_0P_1P_2D^-(DP_1P_2x)' + Q_0P_1P_2D^-(DP_1Q_2x)' + Q_0P_1P_2D^-(DQ_1x)' \end{aligned}$$

Nach weiteren Berechnungen:

$$\begin{aligned} &Q_0P_1P_2D^-(DP_1P_2x)' = Q_0P_2D^-(DP_1P_2x)' - Q_0Q_1P_2D^-(DP_1P_2x)' \\ &= -Q_0Q_2D^-(DP_1P_2x)' - Q_0Q_1D^-(DP_1P_2x)' + Q_0Q_1Q_2D^-(DP_1P_2x)' \\ &= -Q_0Q_1D^-(DP_1P_2x)' - Q_0P_1Q_2D^-(DP_1P_2x)' \\ &= Q_0P_1P_0Q_1D^-(DP_1P_2x)' - Q_0P_1Q_2D^-DP_1Q_2D^-(DP_1P_2x)' \\ &= Q_0P_1D^-(DQ_1D^-DP_1P_2x)' - Q_0P_1D^-(DQ_1D^-)'DP_1P_2x \\ &\quad -Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-DP_1P_2x)' + Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'DP_1P_2x \\ &= -Q_0P_1D^-(DQ_1D^-)'DP_1P_2x + Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'DP_1P_2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-Q_0P_1P_2D^-(DQ_1x)' - Q_0P_1P_2D^-(DP_1D^-)'DQ_1x \\ &\quad = -Q_0P_1P_2D^-(DQ_1x)' + Q_0P_1P_2P_0P_1D^-(DQ_1x)' \\ &\quad = -Q_0P_1P_2D^-(DQ_1x)' + Q_0P_1P_2D^-(DQ_1x)' \\ &\quad\quad -Q_0P_1D^-(DQ_1x) \\ &\quad = -Q_0P_1D^-(DQ_1x)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0P_1P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2 &= -Q_0P_1P_2P_0P_1P_2D^-(DP_1Q_2)' \\ &= 0. \end{aligned}$$

erhält man die algebraische Gleichung für Q_0x:

$$\begin{aligned} Q_0x = {} & Q_0P_1P_2G_3^{-1}q - Q_0P_1P_2D^-(DP_1Q_2G_3^{-1}q)' \\ & -Q_0P_1D^-(DQ_1x)' - Q_0P_1P_2D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2x \\ & -[Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'D - Q_0P_1D^-(DQ_1D^-)'D \\ & +Q_0P_1P_2G_3^{-1}B]P_0P_1P_2x \end{aligned} \tag{10}$$

Nun erkennen wir leicht die Struktur der entkoppelten DAE mit Index 3:

1) (8) ist eine ODE für $P_0P_1P_2x$

2) Q_2x wird direkt durch (7) bestimmt.

3) Die Komponenten DQ_1x und Q_0x werden durch die algebraischen Gleichungen (9) und (10) bestimmt.

Wir bezeichnen nun das System aus den Gleichungen (8) (9) (10) (7) mit (*). Wir wollen eine neue Zerlegung der DAE (1) bekommen, die eine einfachere Form hat. . In der Tat fangen wir mit einem Projektor Q_{0c}, der bestimmt wird durch

$$Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'D - Q_0P_1D^-(DQ_1D^-)'D + Q_0P_1P_2G_3^{-1}B = Q_{0c}.$$

unsere Kette von Matrixfunktionen noch einmal neu an.

Wenn man die Eigenschaft $BQ_0 = G_3Q_0$ verwendet, folgt sofort,dass Q_{0c} ein Projektor auf $\ker G_0$ ist und $Q_{0c}Q_0 = Q_0, Q_0Q_{0c} = Q_{0c}$ gelten. Wir prüfen, dass $Q_{0c}P_0Q_1 = 0$:

$$\begin{aligned} Q_{0c}P_0Q_1 &= Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'DQ_1 \\ &\quad -Q_0P_1D^-(DQ_1D^-)'DQ_1 + Q_0P_1P_2G_3^{-1}BP_0Q_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'DQ_1 &= Q_0P_1Q_2D^-(DP_1Q_2P_0Q_1)' \\ &\quad -Q_0P_1Q_2P_0P_1Q_2D^-(DQ_1)' \\ &= -Q_0P_1Q_2D^-(DQ_1)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0P_1D^-(DQ_1D^-)'DQ_1 &= Q_0P_1D^-(DQ_1)' + Q_0Q_1D^-(DQ_1)' \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_0P_1P_2G_3^{-1}BP_0Q_1 &= Q_0P_1P_2Q_1 \\ &\quad +Q_0P_1P_2P_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1 \\ &= -Q_0P_1P_2P_0P_1D^-(DQ_1)' \\ &= -Q_0P_1P_2D^-(DQ_1)' + Q_0P_1D^-(DQ_1)' \end{aligned}$$

Schlislich erhalten wir:

$$-Q_0P_1Q_2D^-(DQ_1)' - Q_0P_1P_2D^-(DQ_1)' + Q_0P_1D^-(DQ_1)' = 0$$

Wir untersuchen einen Operator Q_{1c}

$$\begin{aligned} Q_{1c} &= Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'D + Q_1P_2G_3^{-1}BP_0 \\ &= Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'D + Q_1P_2G_3^{-1}B_1 + Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'D \\ &= Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'D + Q_1P_2G_3^{-1}B_1 + Q_1P_2P_1D^-(DP_1D^-)'D \\ &= Q_1P_2G_3^{-1}B_1 - Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D \end{aligned}$$

wobei $B_1 = BP_0 - G_1D^-(DP_1D^-)'D$. Wir prüfen, dass $Q_{1c}^2 = Q_{1c}$

$$\begin{aligned}
Q_{1c}^2 &= [Q_1P_2G_3^{-1}B_1 - Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D] * \\
&\quad [Q_1P_2G_3^{-1}B_1 - Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D] \\
&= Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'DQ_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D \\
&\quad -Q_1P_2G_3^{-1}B_1Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D \\
&\quad -Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'DQ_1P_2G_3^{-1}B_1 + Q_1P_2G_3^{-1}B_1Q_1P_2G_3^{-1}B_1
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'DQ_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D \\
&\quad = Q_1Q_2D^-(DP_1P_2P_0Q_1Q_2D^-)'(DP_1P_2D^-)'D \\
&\qquad -Q_1Q_2P_0P_1P_2D^-(DQ_1Q_2D^-)'(DP_1P_2D^-)'D \\
&\quad = Q_1Q_2D^-(DP_1(I-Q_2)Q_1Q_2D^-)'(DP_1P_2D^-)'D \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'DQ_1P_2G_3^{-1}B_1 \\
&\quad = (Q_1Q_2P_0P_1P_2D^-)'DQ_1P_2G_3^{-1}B_1 \\
&\qquad -(Q_1Q_2D^-)'DP_1P_2P_0Q_1P_2G_3^{-1}B_1 \\
&\quad = -(Q_1Q_2D^-)'DP_1(I-Q_2)Q_1P_2G_3^{-1}B_1 \\
&\qquad +(Q_1Q_2D^-)'DP_1Q_0Q_1P_2G_3^{-1}B_1 \\
&\quad = 0
\end{aligned}$$

Aus der Difinition der Matrix G_2 bemerken wir, dass

$$BP_0Q_1 = G_2Q_1 + G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1 = G_3Q_1 + G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned}
&Q_1P_2G_3^{-1}B_1Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D = Q_1P_2G_3^{-1}BP_0Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D \\
&\quad -Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D \\
&\quad = Q_1P_2Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D = Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'D
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Q_1P_2G_3^{-1}B_1Q_1P_2G_3^{-1}B_1 = Q_1P_2G_3^{-1}BP_0Q_1P_2G_3^{-1}B_1 \\
&\quad -Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1P_2G_3^{-1}B_1 \\
&\quad = Q_1P_2G_3^{-1}B_1
\end{aligned}$$

Also ist Q_{1c} ein Projektor auf $N_{1c} = \ker G_{1c} = G_0 + BQ_{0c}$ und Q_{1c} erfüllt folgende Eigenschaften:

$$1) Q_1Q_{1c} = Q_{1c}$$

$$2) Q_{1c} Q_1 = Q_1$$

$$\begin{aligned}
Q_{1c}Q_1 &= Q_1P_2G_3^{-1}B_1Q_1 - Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'DQ_1\\
&= -Q_1Q_2D^-(DP_1P_2P_0Q_1)' + Q_1Q_2P_0P_1P_2D^-(DQ_1)'\\
&\quad +Q_1P_2G_3^{-1}BP_0Q_1 - Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1\\
&= Q_1P_2Q_1 + Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1\\
&\quad -Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1\\
&= Q_1
\end{aligned}$$

$$3) Q_{1c}Q_0 = Q_1P_2G_3^{-1}B_1Q_0 - Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'DQ_0 = 0$$

$$4) Q_{1c}Q_{0c} = 0$$

$$5) Q_{1c}P_1Q_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
Q_{1c}P_1Q_2 &= Q_1P_2G_3^{-1}B_1P_1Q_2 - Q_1Q_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2\\
&= Q_1Q_2P_0P_1P_2D^-(DP_1Q_2)' - Q_1Q_2D^-(DP_1P_2P_0P_1Q_2)'\\
&\quad +Q_1P_2G_3^{-1}BP_0P_1Q_2 - Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2\\
&= Q_1P_2Q_2 + Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2\\
&\quad -Q_1P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2 - Q_1P_2G_3^{-1}G_1D^-(DP_1D^-)DP_1Q_2\\
&= Q_1P_2D^-(DP_1P_2P_0P_1Q_2)' - Q_1P_2P_0P_1P_2D^-(DP_1Q_2)'\\
&= 0
\end{aligned}$$

wobei wir benutzen

$$BP_0P_1Q_2 = G_3Q_2 + G_1D^-(DP_1D^-)'DP_1Q_2 + G_3P_2D^-(DP_1P_2D^-)'DP_1Q_2$$

Aus den Eigenschaften der Projektoren Q_{1c} und Q_{0c} erhält man:

$$G_{1c} = AD + BQ_{0c} = AD + BQ_0Q_{0c} + BQ_0 - BQ_0 = G_1 - BQ_0P_{0c}$$

$$= G_1(I - Q_0P_{0c}) = G_1F_1,$$

wobei $F_1^{-1} = I + Q_0P_{0c}$. Also erhält man für Projektoren Q_1 und Q_{1c}:

$$Q_{1c} = (I + Q_0P_{0c})Q_1.$$

Wir verwenden folgende Eigenschaften: $DD^- = R = DD_c^-$ und $P_0 = D^-D, P_{0c} = D_c^-D$ und erhalten $D^- = D^-DD_c^-, D_c^- = P_{0c}D^-$, wobei $P_{0c} = I - Q_{0c}$.

Wir erhalten eine analoge Beziehung für Matrizen G_{2c} und G_2.

$$G_{2c} = G_{1c} + BP_{0c}Q_{1c} - G_{1c}D_c^-(DP_{1c}D_c^-)'DQ_{1c}$$

$$
\begin{aligned}
G_{1c}D_c^-(DP_{1c}D_c^-)'DQ_{1c} &= G_1(I-Q_0P_{0c})P_{0c}D^-(DP_{1c}P_{0c}D^-)DQ_{1c}\\
&= G_1P_{0c}D^-(DP_{1c}D^-)'DQ_{1c} - G_1Q_0P_{0c}D^-(DP_{1c}D^-)'DQ_{1c}\\
&= G_1D^-(DP_{1c}D^-)'DQ_{1c} - G_1Q_{0c}D^-(DP_{1c}D^-)'DQ_{1c}\\
&\quad +G_1Q_0Q_{0c}D^-(DP_{1c}D^-)'DQ_{1c}\\
&= G_1D^-(DP_{1c}D^-)'DQ_{1c} = G_1D^-(DP_{1c}D^-DP_1D^-)'DQ_{1c}\\
&= G_1D^-(DP_{1c}D^-)'DP_1P_0Q_{1c} + G_1P_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}\\
&= G_1P_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}\\
&= G_1P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c} - G_1Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}\\
&= G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}(Q_1+P_1) - G_1Q_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}\\
&\quad -G_1Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}\\
&= G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1 + G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}P_1\\
&\quad -G_1Q_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c} - G_1Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
BP_{0c}Q_{1c} &= BP_{0c}P_0Q_{1c} = BP_0Q_{1c}(Q_1+P_1) - BQ_0Q_{0c}P_0Q_{1c}\\
&= BP_0Q_1 + BP_0Q_1Q_{1c}P_1 - BQ_0Q_{0c}P_0Q_{1c}\\
&= BP_0Q_1 + G_2Q_{1c}P_1 + G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1Q_{1c}P_1,
\end{aligned}
$$

wobei

$$BP_0Q_1Q_{1c}P_1 = G_2Q_{1c}P_1 + G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}P_1,$$

$$BQ_{0c}P_0Q_{1c} = 0 \text{ wegen der Eigenschaft } Q_{0c}P_0Q_1 = 0.$$

Es ist leicht zu prüfen, dass

$$BP_{0c}Q_{1c}F_1 = BP_{0c}Q_{1c}$$

und

$$G_{1c}D_c^-(DP_{1c}D_c^-)'DQ_{1c}F_1 = G_{1c}D_c^-(DP_{1c}D_c^-)'DQ_{1c}$$

Also erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G_{2c}F_1^{-1} &= G_1 + BP_0Q_1 - G_1D^-(DP_1D^-)'DQ_1 + G_1Q_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}\\
&\quad +G_1Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c} + G_2Q_{1c}P_1\\
&= G_2(I + Q_{1c}P_1 + Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c})) = G_2F_2
\end{aligned}
$$

F_2 wird dargestellt durch Multiplikation zweier reguläre Matrizen:

$$F_2 = (I + Q_{1c}P_1)(I + Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c})$$

Es folgt, dass F_2 regulär ist. Wir haben folgende Beziehungen für die Matrizen G_{2c}, G_2 und für die Operatoren $Q_2, Q_{2c} = \ker G_{2c}$:

$$G_{2c} = G_2F_2F_1$$

$$\begin{aligned}
Q_{2c} &= F_1^{-1}F_2^{-1}Q_2 \\
&= (I+Q_0P_{0c})(I-Q_{1c}P_1-Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c} \\
&\quad +Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}P_1)Q_2 \\
&= Q_2-Q_0P_{1c}D^-(DP_1D^-)'DQ_{1c}Q_2+Q_0P_{0c}Q_2
\end{aligned}$$

Aus der Definition von Q_{2c} folgt sofort , dass Q_{2c} ein Projektor ist und Q_{2c} folgende Eigenschaften erfüllt:

$$Q_2Q_{2c}=Q_2, Q_{2c}Q_2=Q_{2c}, Q_{2c}Q_{0c}=0, Q_{2c}Q_{1c}=0.$$

Aus analogen Rechnungen folgt, dass die Matrix G_{3c} dargestellt werden kann in der Form:

$$G_{3c}=G_3F_3F_2F_1, \text{ wobei } F_3=I+P_2XQ_2 \text{ und } F_3^{-1}=I-P_2XQ_2$$

mit einer gewissen Matrix $X=-Q_{1c}P_1D^-(DP_{1c}P_{2c}D^-)'DP_{1c}Q_{2c}-Q_{0c}P_1$

$$G_{3c}^{-1}=F_1^{-1}F_2^{-1}F_3^{-1}G_3^{-1}.$$

Lemma 1 *:Es gilt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}=[&Q_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}D_c^-)'D \\
&+Q_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}B]P_{0c}P_{1c}P_{2c}=0
\end{aligned}$$

Beweis:Wir zeigen, dass der Term $Q_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}D_c^-)'D + Q_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}B = Q_{1c}-Q_{1c}P_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2$. Damit ist das Lemma bewiesen. Also:

$$Q_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}D_c^-)'D=Q_{1c}Q_{2c}D^-(DP_{1c}Q_{2c}D^-)'D$$

$Q_{1c}Q_{2c}D^-=Q_1Q_{1c}P_0Q_{2c}D^-=Q_1Q_{1c}Q_1Q_2D^-+Q_1Q_{1c}P_1Q_2D^-=Q_1Q_2D^-$
Dabei wurde die Eigenschaft $Q_{1c}P_1Q_2=0$ verwendet.

$$\begin{aligned}
DP_{1c}Q_{2c}D^- &= DP_{1c}P_1P_0Q_2D^- \\
&= DP_1P_{1c}P_1Q_2D^-+DQ_1P_{1c}P_1Q_2D^-=DP_1Q_2D^-
\end{aligned}$$

Man erhält:

$$Q_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}D_c^-)'D=Q_1Q_2D^-(DP_1Q_2D^-)'D$$

$$\begin{aligned}
Q_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}B &= Q_{1c}G_{3c}^{-1}B-Q_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}B \\
&= Q_{1c}F_1^{-1}F_2^{-1}F_3^{-1}G_3^{-1}B-Q_{1c}Q_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}F_3^{-1}G_3^{-1}B
\end{aligned}$$

Wir rechnen weiter aus:

$$\begin{aligned}
Q_{1c}F_1^{-1}F_2^{-1}F_3^{-1}G_3^{-1}B &= Q_{1c}F_1^{-1}F_2^{-1}G_3^{-1}B \\
&\quad -Q_{1c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2G_3^{-1}B \\
&= Q_{1c}G_3^{-1}B-Q_{1c}P_1G_3^{-1}B-Q_{1c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2 \\
&= Q_1G_3^{-1}B-Q_{1c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{1c}Q_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}F_3^{-1}G_3^{-1}B &= Q_{1c}Q_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}G_3^{-1}B \\
&\quad -Q_{1c}Q_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2G_3^{-1}B \\
&= Q_{1c}(Q_1+P_1)Q_2G_3^{-1}B - Q_{1c}Q_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2 \\
&= Q_1Q_2G_3^{-1}B - Q_{1c}Q_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2
\end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
Q_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}B &= Q_1P_2G_3^{-1}B - Q_{1c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2 \\
&+ Q_{1c}Q_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathcal{A} = (Q_{1c} - Q_{1c}P_{2c}F_1^{-1}F_2^{-1}P_2XQ_2)P_{0c}P_{1c}P_{2c} = 0$$

□

Aus dem Lemma folgt, dass man eine neue Zerlegung der DAE (1) durch Projektoren $Q_{0c}, P_{0c}, Q_{1c}, P_{1c}, Q_{2c}, P_{2c}$ und entsprechende Matrizen G_{1c}, G_{2c}, G_{3c} gewinnen kann, die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned}
(DP_{1c}P_{2c}x)' &- (DP_{1c}P_{2c}D_c^-)'DP_{1c}P_{2c}x + DP_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}BP_{0c}P_{1c}P_{2c}x \\
&= DP_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}q
\end{aligned} \tag{11}$$

$$Q_{1c}x = Q_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}q + Q_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q)' \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
Q_{0c}x &= Q_{0c}P_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}q - Q_{0c}P_{1c}P_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q)' \\
&- Q_{0c}P_{1c}D_c^-(DQ_{1c}x)' - Q_{0c}P_{1c}P_{2c}D_c^-(DP_{1c}D_c^-)'DP_{1c}Q_{2c}x \\
&- [Q_{0c}Q_{1c}D_c^-(DQ_{1c}D_c^-)'D \\
&+ Q_{0c}P_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}D_c^-)'D + Q_{0c}P_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}B]P_{0c}P_{1c}P_{2c}x
\end{aligned} \tag{13}$$

$$Q_{2c}x = Q_{2c}G_{3c}^{-1}q \tag{14}$$

Man sieht insbesondere an (11), dass Anfangsbedingungen nur für die Komponente $DP_{1c}P_{2c}x$ frei gegeben werden können. Die Beziehungen (12), (13) und (14) können als Konsistenzbedingungen verstanden werden. Oder man kann die Anfangsbedingungen definieren durch die Beziehung: $D(t_0)x(t_0) = x^0$. Dabei muss man verlangen, dass die Anfangsbedingungen die Beziehungen (12), (13) und (14) erfüllt.

Aus den gegebenen Resultaten folgt:

Satz 2 *Die DAE (1) habe Index 3. Seien:*$DP_{1c}D_c^-, DP_{1c}P_{2c}D_c^-$ *stetig differenzierbar sind.*

Das Anfangswertproblem

$$A(t)(D(t)x(t))' + B(t)x(t) = q(t), (DP_{1c}P_{2c})(t_0)x(t_0) - y_0 = 0$$

ist eindeutig lösbar für

$$y_0 \in im(DP_{1c}P_{2c})(t_0), t_0 \in I$$

$$q \in C(I, \mathbb{R}^m), DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q \in C^1(I, L(\mathbb{R}^m)),$$

$$DQ_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}q + DQ_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q)' \in C^1(I, L(\mathbb{R}^m))$$

□

Man definiert den Operator $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} : C_D^1 \rightarrow C(I, \mathbb{R}^m),\ \mathcal{L}x = A(Dx)' + Bx$$

Satz 3 *: Die DAE habe Index 3. Sei $DP_{1c}D_c^-, DP_{1c}P_{2c}D_c^-$ stetig differenzierbar.*

Dann ist das Bild des Operatores $\mathcal{L}$ gegeben durch

$$\mathrm{im}\mathcal{L} = \{q \in C(I, \mathbb{R}^m) : DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q \in C^1(I, L(\mathbb{R}^m)),$$

$$DQ_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}q + DQ_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q)' \in C^1(I, L(\mathbb{R}^m))\}$$

Beweis Wir haben vorausgesetzt, dass die Projektoren $DD^-, DP_{1c}D_c^-, DP_{1c}P_{2c}D_c^-$ stetig differenzierbar sind

Dann folgt aus $x \in C_D^1(I, \mathbb{R}^m)$ sofort:

$$DP_{1c}x = DP_{1c}D_c^-Dx \in C^1(I, \mathbb{R}^m), DQ_{1c}x = DQ_{1c}D_c^-Dx \in C^1(I, \mathbb{R}^m),$$

$$DP_{1c}P_{2c}x = DP_{1c}P_{2c}D_c^-Dx \in C^1(I, \mathbb{R}^m), DP_{1c}Q_{2c}x = DP_{1c}Q_{2c}D_c^-Dx \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$$

Für $q = \mathcal{L}x$ sind dann folgende Bedingungen erfüll:

$$DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q \in C^1(I, \mathbb{R}^m) \text{ wegen}(14)$$

$$DQ_{1c}P_{2c}G_{3c}^{-1}q + DQ_{1c}Q_{2c}D_c^-(DP_{1c}Q_{2c}G_{3c}^{-1}q)' \in C^1(I, \mathbb{R}^m) \text{ wegen}(12)$$

Zusammen mit Satz 2 ergibt sich die Behauptung.

□

3 Beziehung zum Strangeness-Index.

In [Kun.,Meh.] werden DAEs in der Form E(t)x'(t)+N(t)x(t)=q(t) untersucht und der Index der DAE wird durch den Begriff Strangeness-Index von Matrixpaar (E(t),N(t)) definiert. Um die Definition zu verstehen, schreiben wir nachfolgend die notwendigen Definitionen und Theoreme auf, die in [Kun.,Meh] gegeben sind.

Wir fangen mit der kurzen Beschreibung des Konzeptes an, das in [Kun.Meh] vorgeschlagen worden ist.

Man betrachtet DAE in der Form:

$$E(t)x'(t) + N(t)x(t) = q(t), \tag{15}$$

wobei $E(t) \in C(I, L(\mathbb{R}^m)), N(t) \in C(I, L(\mathbb{R}^m)), q(t) \in C(I, \mathbb{R}^m)$.

Definition 5 *Zwei Paare $(E_i, N_i), E_i, N_i \in C(I, L(\mathbb{R}^m))i = 1, 2$ von Matrixfunktionen heissen global äquivalent, wenn es reguläre Matrixfunktionen $M \in C(I, L(\mathbb{R}^m)), K \in C^1(I, L(\mathbb{R}^m))$ gibt, sodass*

$$E_2 = ME_1K, N_2 = MN_1K - ME_1K'. \tag{16}$$

Man schreibt $(E_1, N_1) \sim (E_2, N_2)$.

Definition 6 *Zwei Paare $(E_i, N_i), E_i, N_i \in L(\mathbb{R}^m), i = 1, 2$ von Matrizen heissen lokal äqvivalent, wenn es Matrizen $M, K, H \in L(\mathbb{R}^m)$, M,K regulär gibt, sodass*

$$E_2 = ME_1K, N_2 = MN_1K - ME_1H. \tag{17}$$

Wir verwenden folgende Bezeichnungen:

$$T \text{ Basis von } \ker E$$

$$Z \text{ Basis von } \operatorname{im} E^\perp = \ker E^*$$

$$T' \text{ Basis von } \ker E^\perp = \operatorname{im} E^*$$

$$V \text{ Basis von } \operatorname{im}(Z^* NT)^\perp,$$

wobei E^* die transponierte Matrix zu E ist. Man setzt ebenfalls voraus, dass $\operatorname{rang} E = r_0$.

Die Matrix T besteht aus den Basisvektoren des Raums $\ker E$. Es folgt, dass T eine $(m - r) * m$ Matrix ist und $\ker T = 0, \operatorname{rang} T = \operatorname{rang} T^* = m - r$. Für die Matrix Z erhalten wir analoge Eigenschaften: Z ist eine $(m - r) * m$ Matrix, deren $\ker Z = 0, \operatorname{rang} Z = \operatorname{rang} Z^* = m - r$.

Dabei bemerken wir, dass die Matrizen (T^*T) und (Z^*Z) reguläre sind. Wenn $T^*Tz = 0$ ist, dann $Tz \in \ker T^* = \operatorname{im} T^\perp \Rightarrow x = Tz \in \operatorname{im} T^\perp \cap \operatorname{im} T \Rightarrow x = 0$. Dann erhält man $Tz = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

Satz 4 *Die Grössen*

$$\begin{aligned} r &= \operatorname{rang} E \\ a &= \operatorname{rang}(Z^*NT) \\ s &= \operatorname{rang}(V^*Z^*NT') \\ d &= r-s \\ u &= m-r-a-s \end{aligned}$$

sind invariant unter (17) und (E,N) ist local äquivalent zu der Normalform

$$\left(\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_a & 0 & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{18}$$

Beweis:In [Kun.Meh.] □

Die Matrix

Z^*NT nennt man algebraischen Teil, $\operatorname{rang}(V^*Z^*NT') = s$-Strangeness,

d-differentieller Teil, u-unbestimmter Teil.

Man kann für jedes $t \in I$ dem Matrixpaar $(E(t), N(t))$ die charakteristi schen Werte $(r(t), a(t), s(t))$ konstruieren. Man nimmt an, dass die Funktionen $r(t), s(t)$ und $a(t)$ konstant sind. Dann erhalten wir, dass die entsprechenden Blockgrössen in (18) von t nicht abhängig sind.

Satz 5 *Sei (E,N) ein Paar von hinreichend glatten Matrixfunktionen und gelte r(t), s(t), a(t) konstant. Dann ist (E,N) global äqvivalent zu der Normalform:*

$$\left(\begin{pmatrix} I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & 0 & N_{14} & N_{15} \\ 0 & 0 & 0 & N_{24} & N_{25} \\ 0 & 0 & I_a & 0 & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right). \tag{19}$$

Dabei sind alle N_{ij} selbst Matrixfunktionen.

Beweis: In [Kun.Meh.]. □

Damit kann man eine äquivalente differentiell-algebraische Gleichung zur DAE (15) aufschreiben:

$$\begin{aligned} x_1' &= N_{12}x_2 + N_{14}x_4 + N_{15}x_5 + q_1 && (20) \\ x_2' &= N_{24}x_4 + N_{25}x_5 + q_2 && (21) \\ 0 &= x_3 + q_3 && (22) \\ 0 &= x_1 + q_4 && (23) \\ 0 &= q_5 && (24) \end{aligned}$$

Die Gleichung (22) ist eine algebraische Gleichung für x_3 (algebraischer Teil), (21) ist eine Differentialgleichung (differentieller Teil), (24) ist eine Konsistenzbedingung zusammen mit der freien Wahl von x_5 (unbestimmter Teil). Man kann die algebraische Gleichung (23) für x_1 ableiten und das Resultat in die Gleichung (20) einsetzen, wo die Ableitung von x_1' vorkommt (Strangeness). Es folgt daraus, dass (20) eine algebraische Gleichung ist. Die Matrizen, die zur neuen differential-algebraische Gleichung gehören, haben folgede Gestalt:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & N_{12} & 0 & N_{14} & N_{15} \\ 0 & 0 & 0 & N_{24} & N_{25} \\ 0 & 0 & I_a & 0 & 0 \\ I_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right). \tag{25}$$

Wir überführen die Matrixpaar (E, N) zu der Normalform (19)$((E_1, N_1))$ und dann zu der Form (25), die wir durch (E_2, N_2) bezeichnen. Wenn Strangeness-Index s_1 von der Matrixpaar (E_2, N_2) ungleich Null ist, dann wird die Matrixpaar (E_2, N_2) wieder zu der Normalform (19), dann zu (25) gebracht. Wir erfühlen diese Prozeduren bis Strangeness-Index s_i gleich Null ist. Dabei gewinnen wir die Matrixfolge (E_i, N_i) und die Folge $(r_i, a_i, s_i) i = 0, 1, 2, ...$ Aus der Struktur der Matrizen E_i und E_{i+1} in (19) und (25) bemerken wir , dass $r_{i+1} = r_i - s_i$. Dies garantiert, dass nach endlich vielen Schritten Strangeness s_i verschwindet und durch Übergang von (19) auf (25) die Folge (E_i, N_i) sich nicht mehr ändert.

Definition 7 *Sei (E,N) ein Paar von hinreichend glatten Matrixfunktionen. Die Folge (r_i, a_i, s_i) besteht aus konstanten Funktionen r_i, s_i und a_i. Dann heisst*

$$\mu = \min\{i = 0, 1, 2, .. : s_i = 0\}$$

Strangeness-Index von (E,N).

Beispiel Wir betrachten die DAE (1) mit den Koeffizienten:

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen , dass Strangeness-Index $s_2 = 0$ ist. $\Rightarrow$ DAE (1) mit den Koeffizienten J_0, B_0 hat Strangeness-Index 2.

$$\ker J_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\} \Rightarrow$$

Die Basis von $\ker J_0$ ist: $T_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$J_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\ker J_0^* = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 0\}$, dann $Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Z_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$T_0' \text{ ist Basis von } \mathrm{im} J_0^*, T_0' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist der algebraische Teil $Z_0^* B_0 T_0 = 0 \Rightarrow \mathrm{im}(Z_0^* B_0 T_0)^{\perp} = \mathbb{R}^1 \Rightarrow V_0 = 1 \Rightarrow V_0^* Z_0^* B_0 T_0' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$. Also erhalten wir: $r_0 = 2, a_0 = 0, s_0 = 1, d_1 = 1, u_0 = 0$.

Dann musste das Paar J_1^3, B_1^3 die folgende Normalform (19) haben:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{14} \\ 0 & 0 & b_{24} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir überführen das Matrixpaar J_0, B_0 zur Normalform (19) und dann zu der Normolform (25).

In der Tat multiplizieren wir das Matrixpaar J_0, B_0 mit der Matrix $U_0^* = I$ auf der linken Seite und mit der unitaren Matrix $V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf der rechten Seite. Damit erhalten wir ein neues Matrixpaar J_0^1, B_0^1, wobei

$$J_0^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Multiplikation des Matrixpaares (J_0^1, B_0^1) mit den Matrizen $U_1^* = I$ und $V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ erhält man das Matrixpaar J_0^2, B_0^2 :

$$J_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

und weiter mit den Matrizen

$$U_2^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } V_2 = I$$

erhalten wir das Matrixpaar J_0^3, B_0^3, das die Normalform (19) hat:

$$J_0^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_0^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraus gewinnen wir gemäss (25) J_1, B_1 als:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Multiplikation mit den regulären Matrizen K und M erhalten wir die Kroneker Normalform J_1^K, B_1^K von J_1, B_1:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$KJ_1M = J_1^K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, KB_1M = B_1^K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

J_1^K enthält einen Jorden-Block mit der Ordnung 2 und einen Jorden-Block mit der Ordnung 1.

Basis von $\ker J_1$ ist:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und $Z_1 = T_1$, wobei Z_1 Basis von $\ker J_1^* \Rightarrow Z_1^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$Z_1^* B_1 T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(Z_1^* B_1 T_1) = 1 \Rightarrow \operatorname{im}(Z_1^* B_1 T_1)^\perp \in \mathbb{R}^2$ wird aufgespannt durch:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

T_1' ist Basis von $\operatorname{im} J_1^* = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 = 0\} \Rightarrow$

$$T_1' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1^* Z_1^* B_1 T_1' = 1.$$

Für das Matrixpaar J_1, B_1 ergibt sich: $r_1 = a_1 = s_1 = 1, d_1 = u_1 = 0$.

Wir transformieren die Matrixpaar J_1, B_1 zur Normalform (19). Die Matrizen U_0^* und V_0 werden so gewählt, dass

$$U_0^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir

$$J_1^1 = U_0^* J_1 V_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_1^1 = U_0^* B_1 V_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dem Matrixpaar J_1^1, B_1^1 gewinnen wir durch Übergang zu (25)

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also: $T_2 = Z_2^* = \mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$$Z_2^* B_2 T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(\mathrm{im}(Z_2^* B_2 T_2)^\perp) = 0 \Rightarrow V_2 = 0.$$

$$\Rightarrow r_2 = 0, a_2 = 3, s_2 = 0, d_2 = 0, u_2 = 0.$$

Definition 8 *Sei E eine $n*n$ Matrix, E^+ heisst Moore Penrose Inverse zu E, wenn E^+ folgende Bedingungen erfüllt:*

$$\begin{aligned} EE^+E &= E \\ E^+EE^+ &= E^+ \\ (EE^+)^* &= EE^+ \\ (E^+E)^* &= E^+E \end{aligned}$$

Wir überführen DAE (15) zu der Form (1). Die DAE $EE^+Ex' + Nx = q$ ist äquivalent zur Gleichung $EE^+(Ex)' + (N - EE^+E')x = q$. Man bezeichnet $EE^+ = A, E = D, N - EE^+E' = B$ und so bekommen wir eine DAE in der Form (1), d.,h.

$$A(Dx)' + Bx = q.$$

Die Projektoren Q_0 und W_0 wählen wir als Orthoprojektoren:

$$\begin{aligned} Q_0 &= I - E^+E \\ W_0 &= I - EE^+ \end{aligned}$$

Wir studieren den algebraischen Teil von DAE (1). Der algebraische Teil wird durch die Matrix W_0BQ_0 beschrieben.

Lemma 2 *$T(T^*T)^{-1}T^*$ ist der Orthoprojektor auf* $\ker E$.

<u>Beweis</u> Zunächst zeigen wir, dass $T(T^*T)^{-1}T^*$ ein Orthoprojektor ist.

$$T(T^*T)^{-1}T^*T(T^*T)^{-1}T^* = T(T^*T)^{-1}T^*$$

und

$$(T(T^*T)^{-1}T^*)^* = T(T^*T)^{-1}T^*.$$

Jetzt beweisen wir: $\mathrm{im}T(T^*T)^{-1}T^* = \ker E$.

Aus dem Struktur des Orthoprojektors folgt:

$$\mathrm{im}T(T^*T)^{-1}T^* \in \mathrm{im}T = \ker E.$$

Sei $x \in \mathrm{im}T \Rightarrow x = Tz = T(T^*T)^{-1}T^*Tz = T(T^*T)^{-1}T^*x \Rightarrow x \in T(T^*T)^{-1}T^*$.

Also $\mathrm{im}T(T^*T)^{-1}T^* = \mathrm{im}T = \ker E$.

□

Da wir oben Q_0 als Orthoprojektor gewählt haben, gilt $Q_0 = T(T^*T)^{-1}T^*$ ist.

Analog kann man zeigen, dass $Z(Z^*Z)^{-1}Z^*$ ein Ortoprojektor auf $\mathrm{im}Z = \mathrm{im}E^\perp = \ker E^*$ ist und $W_0 = Z(Z^*Z)^{-1}Z^*$ gilt.

Den algebraischen Teil W_0BQ_0 schreiben wir auf in der Form:

$$\begin{aligned} W_0BQ_0 &= (I - EE^+)(N - EE^+E')(I - E^+E) && (26)\\ &= (I - EE^+)N(I - E^+E) && (27)\\ &= Z(Z^*Z)^{-1}Z^*NT(T^*T)^{-1}T^* && (28) \end{aligned}$$

Lemma 3 *:*

$$\mathrm{rang}Z^*NT = \mathrm{rang}W_0BQ_0.$$

<u>Beweis</u> Man setzt voraus, dass $\mathrm{rang}Z^*NT = a$. Die Matrizen T^*T und Z^*Z sind nicht singulär und

$$\mathrm{rang}(T^*T) = m - r_0,$$
$$\mathrm{rang}(Z^*Z) = m - r_0$$

$$\mathrm{rang}Z^*NT = \mathrm{rang}(Z^*Z)^{-1}Z^*NT(T^*T)^{-1} = a \leq (m - r_0)$$

Wir multiplizieren letzte Matrix mit der Matrix T^* auf der rechten Seite und mit der Matrix Z auf der linksten Seite, so bekommen wir die Matrix $W_0BQ_0 = Z(Z^*Z)^{-1}Z^*NT(T^*T)^{-1}T^*$. Wir erhalten:

$$\mathrm{rank}W_0BQ_0 \leq \mathrm{rank}Z^*NT = a$$

$$Z^*W_0BQ_0T = Z^*NT$$

also rank$Z^*W_0BQ_0T = a$ daher rank$W_0BQ_0 \geq a \Rightarrow$

$$\text{rank}W_0BQ_0 = \text{rank}Z^*NT.$$

□

Wir zeigen, dass ker$W_0BQ_0 = (N_0 \cap S_0) \oplus \text{im}P_0$:

Sei $x \in (N_0 \cap S_0) \oplus \text{im}P_0 \Rightarrow x = x_1 + x_2$, wobei $x_1 \in N_0 \cap S_0 \Rightarrow Q_0x_1 = x_1, Bx_1 \in \text{im}G_0$ und $x_2 \in \text{im}P_0$.

Dann $W_0BQ_0x = W_0BQ_0x_1 + W_0BQ_0x_2 = W_0BQ_0P_0y = 0 \Rightarrow x \in$ kerW_0BQ_0.

Sei $x \in$ ker$W_0BQ_0 \Rightarrow W_0BQ_0x = 0 \Rightarrow BQ_0x \in \text{im}G_0 \Rightarrow Q_0x \in S_0 \cap N_0$. Dann aus der Beziehung $x = Q_0x + P_0x = z_1 + z_2$ und $z_1 \in N_0 \cap S_0, z_2 \in \text{im}P_0$.

Wir bezeichnen:

$$\text{rang}G_0 = r_0$$

$$\text{rang}G_1 = \bar{r}_1$$

Aus der Beziehung: $\dim(\ker G_1) = \dim(N_0 \cap S_0) = m - \bar{r}_1$ erhalten wir: $\dim(\ker W_0BQ_0) = m - \bar{r}_1 + r_0 \Rightarrow \dim W_0BQ_0 = \bar{r}_1 - r_0$.

Wir nehmen an, dass die Definition des Strangeness-Indexes algebraisch äquivalent zu der Definition des Indexes von DAE, die im ersten Teil gegeben ist. Das Problem kann man wahrscheinlich im Detail studieren mittels der kanonischen Normalform vom Matrixpaar (E, N). Man kann ebenfalls die Beziehung zwischen dem Strangeness-Index μ und Differentationsindex ν verwenden: $\mu = \nu - 1$. [Kun.Meh]

4 References

[Ba.Mä] K.Balla and R.März: Unified approach to linear differential algebraic equations and their adjoint equations. Humboldt-Universität, Berlin, Preprint Nr: 2000-18.

[Mär] R.März: The index of linear differential algebraic equations with properly stated leading term. Preprint Nr. 2001-7. Humboldt-University,Berlin. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II, Institut für Mathematik.

[Mä] R.März: Some New Result concerning Index-3 Differential-Algebraic Equations. Jornal of Mathematical Analysis and Applications, 177-199, Vol. 140, No 1, 1989.

[Gi.Mä] E.Griepentrog, R.März: Differential-algebraic equationsand their numerical treatment. Teubner, Leipzig, 1986.

[Kun.Meh] P.Kunkel und V.Mehrmann: Analysis und Numerik linearer differentiell-lgebraischer Gleichungen. Technische Universität Chemnitz-Zwickau, Fakultät für Mathematik, Preprint Nr: SPG 94-27.

[R.Mä] Roswitha März: Canonical Projectors for Linear Differential Algebraic Equations. Computers. Math. Applic. Vol. 31, No 4/5, pp. 121-135, 1996.

[R.Mär] Roswitha März: A matrix chain for analyzing differential-algebraic equations. Preprint Nr 162. Humbold Universität zu Berlin, sektion Mathematik, 1987

[Hig,Mä] Inmaculada Higuras und Roswitha März: Formulating differential algebraic equations properly. Preprint Nr. 2000-20. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultt II. Institut für Mathematik.

[Est] Diana Estévez-Schwarz. Dissertation: Consistent initialization for index-2 differential algebraic equations and its application for circuit simulation. Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II, Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik, 13 Juli 2000.