

Untersuchungen zur Walshtransformation verschiedener Standardfunktionen

Beate Meffert und Thomas Pätzold

Das frühe Stadium der Nachrichtentechnik war durch die Anwendung binärer und analoger Signale gekennzeichnet. Die gute Realisierbarkeit passiver und aktiver Bauelemente, wie Spulen, Kondensatoren, Widerstände und Elektronenröhren, brachte einen raschen Aufschwung der Analogtechnik, die bald die dominierende Rolle spielte. Diese exponierte Stellung wurde noch verstärkt, als das wichtigste mathematische Hilfsmittel zur Beschreibung derartiger Schaltungen und zur Transformation von Zeitfunktionen in entsprechende Frequenzfunktionen, die Fourieranalyse, weiter vervollkommen werden konnte. Erst die Entwicklung steuerbarer Halbleiter, raumsparender und zuverlässiger Schaltkreise und integrierter Baugruppen führte zu einem Übergang von zeitinvarianten zu zeitvarianten Schaltungen und Systemen und damit zu einer Zunahme der digitalen Signalverarbeitung. Infolgedessen intensivierte sich die Suche nach geeigneten analytischen Methoden zur Beschreibung digitaler Signale.

Die elektronische Datenverarbeitung konnte zur weiteren Verbesserung der mathematischen Hilfsmittel erheblich beitragen. So brachten beispielsweise die Arbeiten von Cooley und Tukey eine bedeutende Zeitersparnis bei der Fourieranalyse. Trotzdem entstand die Frage, ob die Fourieranalyse das geeignete Mittel auch zur Beschreibung digitaler Systeme sei bzw. ob sich noch auf andere als harmonische Funktionen eine Theorie ähnlich der Frequenztheorie aufbauen läßt, die ebenfalls zu einer entsprechenden Systemtechnik führt.

So kam es Mitte der 60er Jahre zur Wiederentdeckung der Walshfunktionen, die schon um 1900 von J. A. Barrett verwendet und 1923 von J. L. Walsh in die Mathematik eingeführt worden waren.

Die ingenieurmäßige Nutzung dieses vollständigen Orthonormalsystems hat Harmuth als erster beschrieben und auf der Frequenztechnik basierende nachrichtentechnische Prinzipien so verallgemeinert, daß sie auf alle vollständigen orthonormalen Funktionssysteme übertragbar sind. Die Anwendung der Walshfunktionen hat die Leistungsfähigkeit elektronischer Systeme erhöht, die Signaldarstellung im Sequenzbereich hat Vereinfachungen bei der Informationsverarbeitung gebracht, und nicht zuletzt liegt heute eine umfassende Theorie der Walshanalyse vor.

In dieser Arbeit sollen die Eigenschaften der Signalanalyse und -synthese mit dem vollständigen orthonormalen System der Walshfunktionen anhand der Transformation von Standardfunktionen untersucht werden.

1. Mathematische Grundlagen der Walshfunktionen

Neben der ursprünglich von Walsh angegebenen Definition haben sich im Laufe der Zeit auch viele andere als möglich erwiesen. Zu ihnen gehören die Definition der Walshfunktionen als Produkte der Rademacherfunktionen, die rekursive Definition nach Harmuth, die Definition über die trigonometrischen Funktionen und die Definition nach Pichler. Hier sei die Definition über das Vorzeichen des Produktes der trigonometrischen Funktionen

angegeben [1]. Danach berechnet sich die Funktion $wal(i, \theta)$ nach folgender Gleichung:

$$wal(i, \theta) = \text{sign} \left[(\sin 2\pi\theta)^{i_0} \prod_{k=1}^n (\cos 2^k \pi\theta)^{i_k} \right] \quad (1)$$

Dabei ist θ die auf die Zeitbasis bezogene Zeit t , $\theta = \frac{t}{T_0} i$ gibt bei den geraden Funktionen, die mit cal bezeichnet werden, die Zahl der Nulldurchgänge im Orthogonalitätsintervall an; bei den ungeraden Funktionen, die mit sal bezeichnet werden, ist die Zahl der Nulldurchgänge gleich $i + 1$. Als Sequenz wird die mittlere halbe Anzahl der Nulldurchgänge im Einheitsintervall bezeichnet.

Der Index k ergibt sich aus der binären Darstellung von

$$i = \sum_{k=0}^n 2^k i_k \quad (2)$$

wobei i_k den Wert 0 oder 1 entsprechend der binären Darstellung annimmt, n gibt die Anzahl der Ziffern für i in der binären Darstellung an. Als Beispiel ist auf Abb. 1 die Erzeugung der Funktion $wal(5, \theta)$ dargestellt.

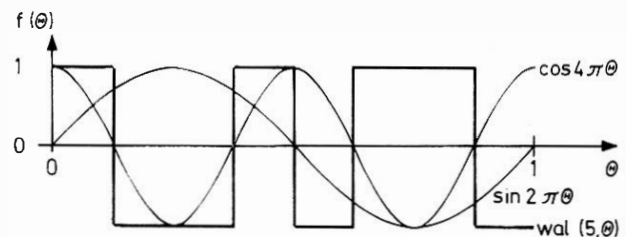


Abb. 1. Erzeugung der Funktion $wal(5, \theta)$ über das Produkt der trigonometrischen Funktionen

Es gilt: $i = 5 = 101$, damit folgt aus Gl. (1)

$$wal(5, \theta) = \text{sign} (\sin 2\pi\theta \cdot \cos 4\pi\theta) \quad (3)$$

Die wichtigsten Eigenschaften, die das Walshfunktionssystem überhaupt für eine praktische Anwendung brauchbar machen, sind seine Orthonormalität und Vollständigkeit. Die Orthogonalitätsbedingung für die normierten Walsh-Funktionen lautet:

$$\int_0^1 wal(i, \theta) wal(k, \theta) d\theta = \delta_{ik} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases} \quad (4)$$

Als Orthogonalitätsintervall wird das Intervall $[0, 1)$ gewählt. Die Vollständigkeitsrelation, die auch unter der Bezeichnung Parsevalsche Gleichung bekannt ist, besagt, daß jedes quadratisch integrierbare Zeitsignal mit beliebiger Genauigkeit in einer Walshreihe dargestellt werden kann.

Die verschiedenen Definitionsmöglichkeiten der Walshfunktionen brachten auch verschiedene Ordnungsprinzipien mit sich. In der ursprünglich von Walsh angegebenen rekursiven Definition werden die Funktionen entsprechend der Anzahl ihrer Vorzeichenwechsel im Orthogonalitätsintervall geordnet. Diese

Reihenfolge wird sequentielle Anordnung genannt, Bezeichnung $\text{swal}(i, \theta)$. Die zuerst von Paley [2] 1932 angegebene Definition als Produkt der Rademacherfunktionen liefert die Walshfunktionen in einer binären Ordnung, da von der binären Darstellung des Index ausgegangen wird, $\text{bwal}(i, \theta)$. Eine weitere Möglichkeit der Definition der Walshfunktionen ist mit Hilfe der Hadamard-Matrizen möglich. Die in dieser Weise ermittelten Walshfunktionen liegen in der sog. Kronecker-Ordnung vor, $\text{kwal}(i, \theta)$. Kremer [3] hat Gleichungen entwickelt, die eine beliebige Umrechnung innerhalb der verschiedenen Ordnungsprinzipien ermöglichen. Die Abb. 2 zeigt die ersten 16 Walshfunktionen und ihre Reihenfolge in den verschiedenen Ordnungssystemen.

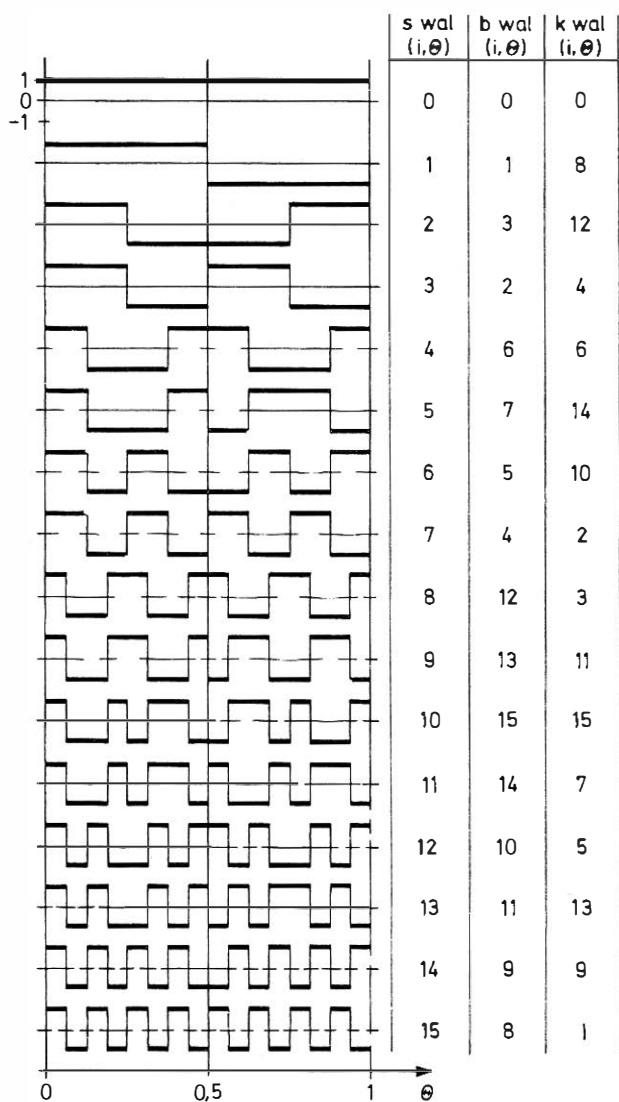


Abb. 2. Die ersten 16 Walshfunktionen und ihre Reihenfolge in den verschiedenen Ordnungssystemen

2. Die verallgemeinerte Fouriertransformation

Geht man nicht von den speziellen trigonometrischen Funktionen, sondern von einem beliebigen Funktionssystem $\{g(i, \theta)\}$ aus, für das die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^1 g(i, \theta) g(j, \theta) d\theta = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (5)$$

gilt, so kann man folgende Gleichung ansetzen:

$$f(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} a(i) g(i, \theta) \quad (6)$$

bzw.

$$a(i) = \int_0^1 f(\theta) g(i, \theta) d\theta \quad (7)$$

Die Koeffizienten $a(i)$ werden als verallgemeinerte Fourierkoeffizienten der Funktion $f(\theta)$ in bezug auf das Funktionssystem $\{g(i, \theta)\}$ bezeichnet. Werden für (6) die Werte der Koeffizienten nach (7) berechnet, ergibt sich die verallgemeinerte Fourierreihe der Funktion $f(\theta)$. Auch für nichtperiodische Funktionen existiert diese verallgemeinerte Form:

$$F(\theta) = \int_0^{\infty} A(\mu) g(\mu, \theta) d\mu \quad (8)$$

bzw.

$$A(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) g(\mu, \theta) d\theta \quad (9)$$

Dabei ist $A(\mu)$ die verallgemeinerte Fouriertransformierte von $F(\theta)$ für die Funktionen $g(\mu, \theta)$. Eine Aussage über die Existenz des Integrals ist ohne Spezifizierung der Funktionen $g(\mu, \theta)$ nicht möglich [4]. Nach Harmuth [5] wird μ verallgemeinerte Frequenz genannt.

Die Gl. (6) bis (8) können also durch spezielle Wahl eines orthonormalen Funktionssystems in die Gleichungen der Walsh- bzw. speziellen Fouriertransformation überführt werden.

3. Die Walshtransformation

Setzt man in Gl. (6) bzw. (7) für $\{g(i, \theta)\}$ das orthogonale System der Walshfunktionen ein, so ergibt sich

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i) \text{wal}(i, \theta) \quad (10)$$

Wird in (10) der Gleichanteil abgetrennt und werden die Walshfunktionen in ihre geraden und ungeraden Bestandteile zerlegt, nimmt die Gleichung der Walshreihe eine der Fourierreihe äquivalente Form an:

$$f(\theta) = a(0) \text{wal}(0, \theta) + \sum_{i=1}^{\infty} [a_c(i) \text{cal}(i, \theta) + a_s(i) \text{sal}(i, \theta)] \quad (11)$$

Die Koeffizienten berechnen sich nach den folgenden Gleichungen:

$$a(0) = \int_0^1 f(\theta) d\theta \quad a_s(i) = \int_0^1 f(\theta) \text{sal}(i, \theta) d\theta \quad (12)$$

$$a_c(i) = \int_0^1 f(\theta) \text{cal}(i, \theta) d\theta \quad (13)$$

Für nichtperiodische Funktionen gilt das Walshintegral

$$F(\theta) = \int_0^{\infty} [A(\mu) \text{cal}(\mu, \theta) + B(\mu) \text{sal}(\mu, \theta)] d\mu \quad (14)$$

mit

$$A(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) \text{cal}(\mu, \theta) d\theta \quad (15)$$

$$B(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\theta) \text{sal}(\mu, \theta) d\theta \quad (16)$$

Liegt das Zeitsignal nicht in Form eines analytischen Ausdrucks, sondern z. B. in Tabellen vor, d. h. also, sind nur diskrete Werte der Funktion bekannt, so muß eine diskrete Transformation angewendet werden. Sowohl für die Fourier- als auch für die Walshtransformation kann eine diskrete Darstellung angegeben werden.

Die diskrete Transformation basiert auf einer Zeitquantisierung des Signals. Das Einheitsintervall wird in N Teilintervalle $\Delta\theta = 1/N$ zerlegt. Die Zeitfunktion nimmt dann die diskreten Werte an

$$f_k = f(k\Delta\theta)$$

mit

$$k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Daraus folgt für die Transformationsgleichung

$$a(i) = 1/N \sum_{k=0}^{N-1} \text{wal}(i, k\Delta\theta) f_k \quad (17)$$

mit

$$i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Die inverse Transformation ergibt eine Treppenkurve

$$f'(\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} a(i) \text{wal}(i, \theta) \quad (18)$$

Einfacher läßt sich dieser Zusammenhang mit der Matrixschreibweise formulieren.

Wird das Signal $f(\theta)$ mit $N = 2^n$ Abtastwerten digitalisiert, dann gilt

$$\mathbf{a} = 1/N \mathbf{W}_N \mathbf{f} \quad (19)$$

mit

$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ Spaltenvektor des diskreten Walshspektrums

$\mathbf{W}_N =$ Walshmatrix des Ranges N , zu einem der drei Ordnungssysteme gehörig

$\mathbf{f} = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ Spaltenvektor des reellen Signals $f(\theta)$.

Auf Grund der Orthogonalität und Symmetrie der Walsh-Matrix gilt für die inverse Transformation

$$\mathbf{f} = \mathbf{W}_N \mathbf{a}. \quad (20)$$

Ähnliche Beziehungen können auch für die zweidimensionale Transformation angegeben werden [3].

Die Gln. (17) bis (20) stellen die Grundlage für die lineare Signalverarbeitung in der Sequenztechnik dar.

4. Die schnelle Transformation

Aussagen über eine Approximation von Zeitfunktionen mit den Walshfunktionen sind nur möglich, wenn die Walshanalyse und -synthese schnell und ökonomisch erfolgen kann. Ein Weg dazu ist die Programmierung geeigneter Algorithmen.

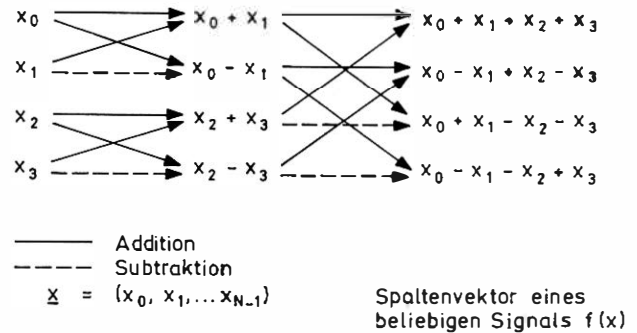
Aus der Literatur sind bereits zahlreiche Berechnungsverfahren bekannt. Die meisten arbeiten nach dem Prinzip der schnellen Transformation, das auch für die Fouriertransformation angewendet wird. Wie Kremer [3] zeigt, existiert eine systematische Methode zur Entwicklung einer beliebigen Zahl schneller Walshalgorithmen.

Bei der gewöhnlichen Matrixmultiplikation sind nach den Gln. (19) und (20) zur Berechnung der Walshtransformation $N(N - 1)$ Additionen und Subtraktionen nötig. Die Anwendung der schnellen Transformation reduziert diese Zahl erheblich. Auch die diskrete Fouriertransformation benötigt dieselbe Zahl an Operationen, hier müssen jedoch statt Additionen und Subtraktionen komplexe Multiplikationen ausgeführt werden.

Um die zur Durchführung der schnellen Walshtransformation (FWT) notwendige Matrixmultiplikation zu vereinfachen, können verschiedene Methoden angewandt werden. Es besteht z. B. die Möglichkeit, die Walsh-Matrix so in Faktoren zu zerlegen, daß in einer Spalte bzw. Zeile nur noch wenige Elemente ungleich Null stehenbleiben.

Werden die zur Berechnung notwendigen Additionen und Subtraktionen in einem Flußdiagramm dargestellt, ergibt sich z. B. folgende Struktur:

(21)



Damit reduziert sich die Operationszahl auf $N \lg N$. Bei $N = 1024 = 2^{10}$ benötigt die direkte Transformation z. B. 10^6 Operationen, die schnelle Transformation 10^4 Operationen, das bedeutet eine Reduzierung um den Faktor 100. In Abhängigkeit davon, in welcher Weise die Walsh-Matrix in einzelne Faktoren zerlegt wird, haben die entstehenden Flußdiagramme unterschiedliche Struktur. Grundsätzlich entsprechen die Algorithmen in ihrem Aufbau den schon von der schnellen Fouriertransformation bekannten Verfahren. Es werden deshalb die dort angewendeten Bezeichnungen auch für die Walshtransformation übernommen.

Die Algorithmen zur schnellen Walshtransformation sind von Kremer [3] in ALGOL 60 programmiert worden. Im Organisations- und Rechenzentrum der Humboldt-Universität Berlin entstanden in Anlehnung an diese ALGOL-Programme drei Varianten zur Berechnung der FWT. Sie wurden aus Gründen der universellen Einsetzbarkeit in FORTRAN aufgestellt. Zur Charakterisierung der drei Programme ist neben ihrem Speicherplatzbedarf die Rechengeschwindigkeit in Betracht zu ziehen. Um sie exakt anzugeben, wurde ein speziell für die BESM-6 zur Verfügung stehendes Unterprogramm zur Ermittlung der Rechenzeiten benutzt. Auf Abb. 4 ist für die drei Algorithmen die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der berechneten Koeffizientenzahl dargestellt.

Es ist ersichtlich, daß der Cooley-Tukey-Algorithmus den anderen beiden überlegen ist. Dem steht der Nachteil der nicht-sequentiellen Anordnung der Koeffizienten gegenüber. Durch Rechenzeit [s]

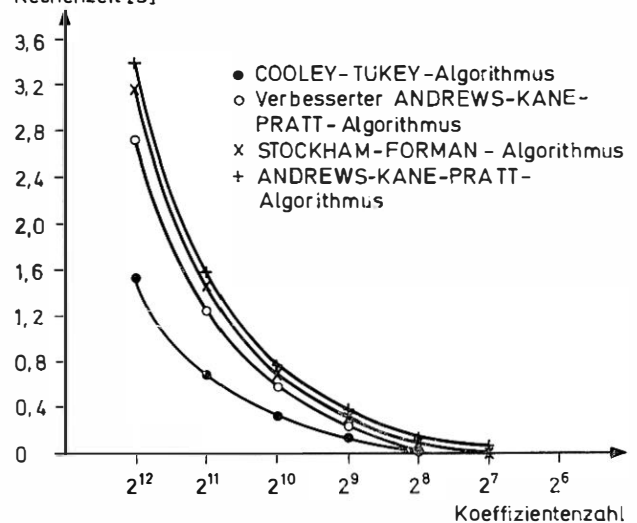


Abb. 4. Rechengeschwindigkeit der verwendeten Algorithmen in Abhängigkeit von der Koeffizientenzahl

einige Änderungen der von Kremer angegebenen Variante ist der sequentielle Algorithmus nicht weiter verbessert worden. Bei der Auswahl eines bestimmten Programms muß also immer eine Entscheidung dahingehend getroffen werden, ob eine höhere Geschwindigkeit oder eine günstigere Anordnung der Koeffizienten vorzuziehen ist.

5. Analyse von Standardfunktionen

Um die Eigenschaften der Walshtransformation umfassend untersuchen zu können, sind wichtige Standardfunktionen zur Berechnung ausgewählt worden. Dazu gehören: Kosinusfunktionen mit positiver und negativer Dämpfung, Übergangs-, Rechteck-, Sägezahn-, Sinus-, Potenz- und Trapezfunktionen sowie die Normalverteilung. Im folgenden soll unter *Originalfunktion* stets die analoge Zeitfunktion verstanden werden, unter *Ausgangsfunktion* die zur Analyse verwendete diskrete Zeitfunktion.

Zur Auswertung der Sequenzanalysen kann allgemein folgendes gesagt werden: Der Einfluß der Abtastrate auf das Spektrum ist vom Charakter der Funktion abhängig. Da bei den diskreten Transformationen immer die Anzahl der Abtastwerte $N = 2^n$ gleich der Anzahl der berechneten Koeffizienten ist, hat die approximierende Treppenfunktion eine Stufenbreite von $\Delta\theta = 1/2^n$. Mit größer werdendem n wird der Unterschied zwischen Original- und Ausgangsfunktion kleiner. Dies gilt für alle Funktionen, eine Ausnahme bilden die diskreten Funktionen, die im Zeitraster der Walshfunktionen liegen.

Weiterhin nimmt bei allen Spektren die Größe der Koeffizienten im Mittel deutlich ab, d. h., die Walshreihe konvergiert relativ schnell gegen das Signal. Bereits bei 16 berechneten Koeffizienten ist diese Tendenz klar erkennbar.

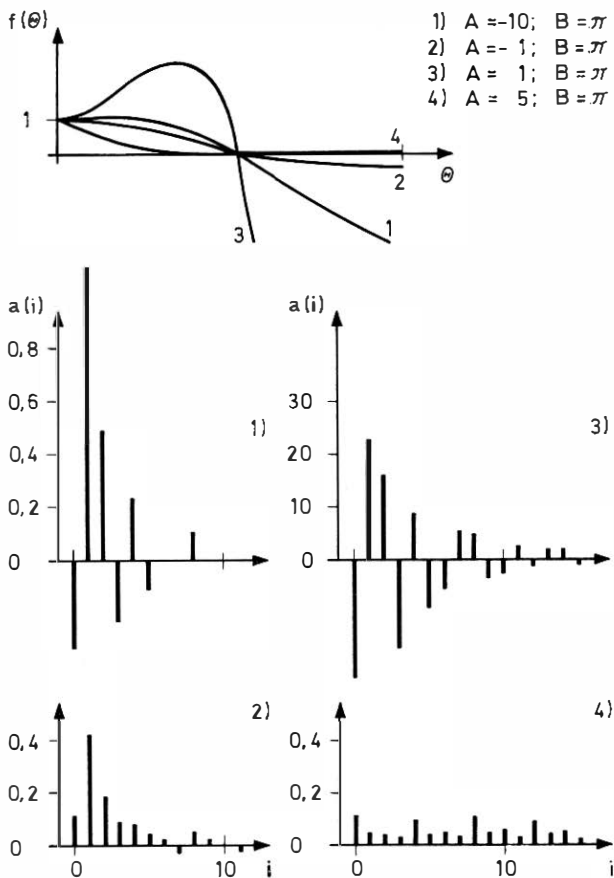


Abb. 5. Sequenzspektren der Funktionen $\exp(A\theta) \cdot \cos(B\theta)$ bei verschiedener Dämpfung

Die Konvergenz und Größe der Spektren sind für die einzelnen Funktionen sehr unterschiedlich, sie schwanken aber auch für eine spezielle Funktion in Abhängigkeit von den Parametern. Relativ schnell klingen die Spektren einiger Übergangsfunktionen und die der Normalverteilung ab. Sehr langsam abklingende Spektren haben die Potenzfunktionen und die stark gedämpften Kosinusfunktionen. Als Beispiel sind auf Abb. 5 die Spektren einer harmonischen Schwingung mit unterschiedlichen Dämpfungen dargestellt, $f(\theta) = \exp(A\theta) \cos(B\theta)$. Den Haupteinfluß auf das Spektrum dieser Funktionen hat der Betrag der Dämpfung $|A|$. Aus Abb. 5 geht deutlich hervor, daß die Koeffizientenwerte bei geringen Dämpfungen schneller abnehmen als bei größeren.

6. Synthese von Standardfunktionen

Neben der Analyse wurden für die meisten Daten auch gleich Synthesen berechnet. Durch ihre Auswertung konnten wesentlich mehr wichtige Schlußfolgerungen gezogen werden. Auch die bei der Auswertung der Analyse erzielten Resultate werden teilweise erst durch die zusätzliche Synthese gesichert.

Das Ergebnis aller Synthesen ist eine treppenförmige Funktion, die die Originalfunktion in bestimmtem Maße approximiert. Für die Normalverteilung

$$f(\theta) = \left\{ \frac{1}{A} \sqrt{2\pi} \right\} \exp \left[-(\theta - B)^2 / 2 A^2 \right]$$

sind auf Abb. 6 Synthesen mit verschiedenen Koeffizientenzahlen angegeben.

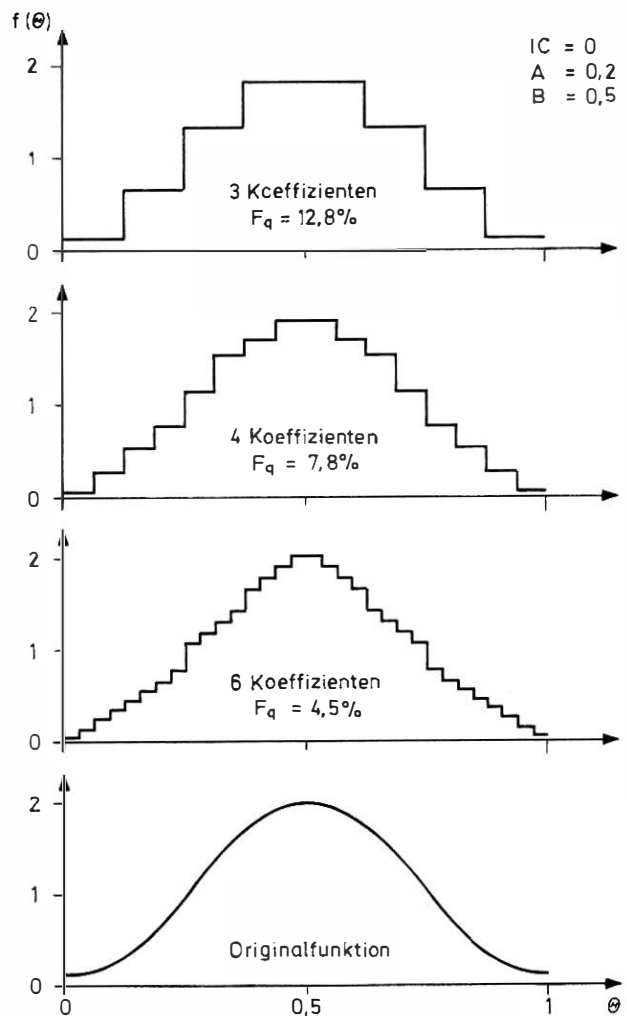


Abb. 6. Walshsynthese einer Normalverteilung. $A = 0,2; B = 0,5$

Man erhält nur dann die Originalfunktion, wenn entweder unendlich viele Koeffizienten zur Berechnung verwendet wurden oder die Originalfunktion sequenzbandbegrenzt ist. Um den Grad der Approximation zu bestimmen, mit dem die synthetisierte Funktion die Originalfunktion annähert, und einen quantitativen Vergleich der Synthesergebnisse möglich zu machen, ist in das Syntheseprogramm die Ermittlung eines Fehlers aufgenommen worden. Bei Festlegung einer Fehlergrenze gibt das Auskunft darüber, wieviel Koeffizienten zur Darstellung der Zeitfunktion im Sequenzbereich ausreichen.

Als besonders günstig erwies sich die Methode der kleinsten Fehlerquadrate nach Gauß. Auf die gegebene Problematik zugeschnitten, lautet die Gleichung:

$$F_q = \int_0^1 [f(\theta) - f'(\theta)]^2 d\theta \quad (22)$$

$f'(\theta)$ ist die durch die Walsh-Koeffizienten synthetisierte Funktion.

Unter Berücksichtigung der Zahl der Stützpunkte $N = 2^n$ und des Abstandes zweier Stützstellen $\Delta\theta = 1/2^n$ ergeben sich als untere und obere Grenze eines Teilintervalls $(k-1)/2^n$ bzw. $k/2^n$. Für ein Teilintervall gilt damit

$$F_q = \int_{\frac{k-1}{N}}^{\frac{k}{N}} [f(\theta) - f'(\theta)]^2 d\theta \quad (23)$$

Abhängigkeit des Approximationsfehlers von den verschiedenen Konstanten der Standardfunktion

Für alle Standardfunktionen gilt, daß ihre Anstiegssteilheit auf den Approximationsfehler einen wesentlichen Einfluß hat. Bei steil ansteigenden Funktionen sind im allgemeinen bei vorgegebener Fehlergrenze immer Koeffizienten höherer Ordnung für die Synthese zu verwenden. Außerdem ist für die Größe des Fehlers eine Übereinstimmung der Standardfunktion mit dem Raster der synthetisierenden Walshfunktionen ausschlaggebend. Dies zeigt sich besonders deutlich bei der Synthese der Rechteck- und Trapezfunktionen. Die Amplitude als Funktionsparameter beeinflusst die Größe des Fehlers nicht.

Für die gedämpften Kosinusschwingungen wächst mit steigender Dämpfung der Fehler. Eine höhere Frequenz der Kosinusschwingung hat bei konstanter Koeffizientenzahl einen größeren Approximationsfehler zur Folge. Auf Abb. 7 und 8 ist die Abhängigkeit des Fehlers von den Funktionsparametern für die Normalverteilung und die Übergangsfunktion dargestellt.

Bei der Übergangsfunktion ist der Fehler für positives A und $B = 0$ stärker von A abhängig als bei $B = 1$. Bei der Normalverteilung sinkt der Fehler mit größer werdendem A , da der Kurvenverlauf dann flacher wird. Die Unabhängigkeit des Fehlers von der Amplitude zeigt sich bei der Dreieck- und der

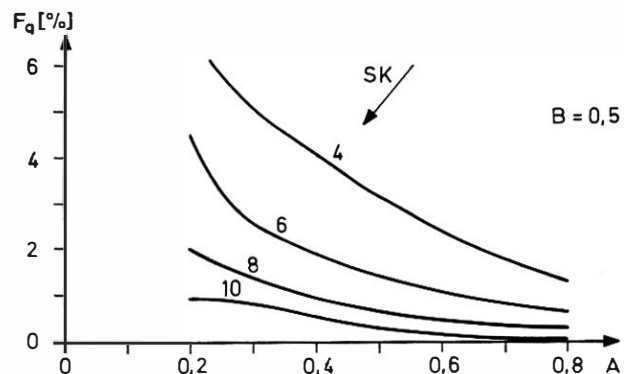


Abb. 7. Abhängigkeit der mittleren quadratischen Abweichung von den Funktionsparametern bei der Normalverteilung

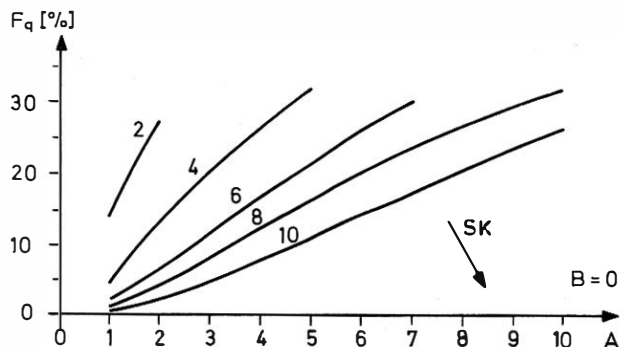


Abb. 8. Abhängigkeit der mittleren quadratischen Abweichung von den Funktionsparametern bei der Übergangsfunktion $B = \exp(-AT)$

Sägezahnfunktion. Bei der Sinuskurve wächst der Fehler mit der Frequenz, die Phasenverschiebung hat keinen Einfluß. Die Abhängigkeit des Fehlers von der Steilheit der Zeitfunktion zeigt sich bei der Potenzfunktion deutlich, das Anwachsen des Exponenten ist hier mit zunehmender Steilheit verbunden.

Abhängigkeit des Approximationsfehlers von der Anzahl der Synthesekoeffizienten

Für alle Funktionen gilt, daß mit steigender Koeffizientenzahl der Fehler exponentiell abfällt. Abb. 9 zeigt diesen Zusammenhang für die Normalverteilung.

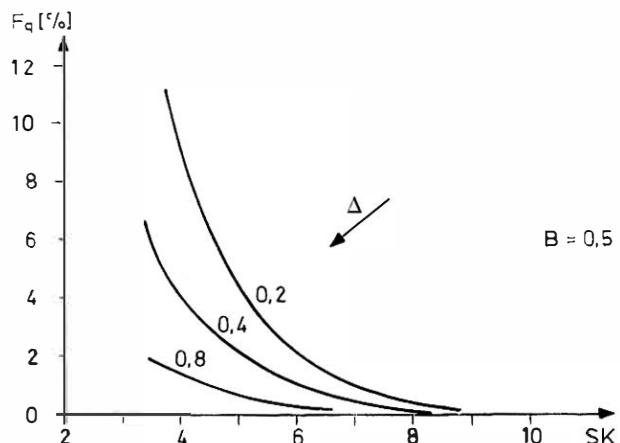


Abb. 9. Mittlere quadratische Abweichung in Abhängigkeit von der Synthesekoeffizientenzahl für die Normalverteilung

Die Stärke des Abfalls ist von den einzelnen Funktionen und ihren Parametern abhängig. Als wesentliches Ergebnis dieses Vergleichs ist anzusehen, daß es durch die Auswertung der Synthesen möglich ist, für die untersuchten Standardfunktionen für jede Fehlergrenze die zur Synthese notwendige Koeffizientenzahl sofort ablesen zu können.

Abhängigkeit des Approximationsfehlers von der Abtastrate

Eine graphische Darstellung dieser Abhängigkeit für die Normalverteilung zeigt Abb. 10.

Wird der Fehler gegen eine feiner geteilte Standardfunktion berechnet, steigt er bei größeren Koeffizientenzahlen leicht an; werden weniger als 5 Synthesekoeffizienten verwendet, ist der Fehler nahezu konstant.

Nach dieser Auswertung soll noch zu der von einigen Autoren geäußerten Ansicht Stellung genommen werden, daß man mehr Walshfunktionen benötigt, um analoge Signale darzustellen, im Vergleich zur Synthese unter Verwendung von harmonischen Funktionen und umgekehrt [6, 7].

Anhand der Ergebnisse der Walshanalyse von Standardfunktionen muß festgestellt werden, daß bei Verwendung der mittleren quadratischen Abweichung als Kriterium für die Approximationsgüte ein derart allgemeines Urteil nicht gerechtfertigt ist. Nichtharmonische Funktionen, wie z. B. Rechteck- oder Trapezfunktionen, lassen sich dann besser mit Walshfunktionen annähern, wenn ihre Periodenlänge mit einem möglichst großen Teilverhältnis der Zeitbasis der Walshfunktionen

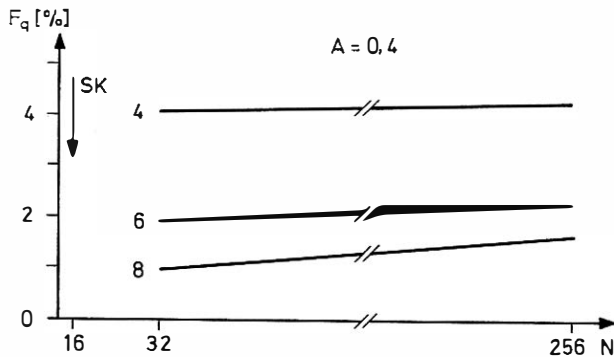


Abb. 10. Abhängigkeit der mittleren quadratischen Abweichung von der Abtastrate

übereinstimmt, andernfalls ist die benötigte Zahl von Synthesekoeffizienten möglicherweise höher als bei der Synthese von Funktionen mit harmonischem Charakter.

Ein Urteil darüber, ob die Walshanalyse vorteilhafter als die Fourieranalyse ist, hängt nicht nur vom Signal selbst (analog oder diskret), sondern auch von dem zur Beurteilung herangezogenen Fehlermaß ab.

7. Anwendungskriterien der Walshtransformation

Für die Anwendung der orthogonalen Transformation zur Signalverarbeitung gibt es zwei grundsätzliche Möglichkeiten: Erstens kann das zu verarbeitende Signal in den Bildbereich transformiert und nach einer Bearbeitung die Rücktransformation vorgenommen werden. Zweitens kann, wenn die Daten nicht unbedingt im Zeitbereich vorliegen müssen, eine Auswertung im Bildbereich anhand des Spektrums erfolgen. In beiden Fällen kommt der Problematik der Datenreduktion bei der digitalen Signalverarbeitung große Bedeutung zu. Bei der Signaldarstellung mit Hilfe orthogonaler Transformationen erfolgt die Datenreduktion dadurch, daß nur ein bestimmter Teil des Spektrums zur weiteren Verarbeitung ausgewählt wird. Dabei ist es wichtig, das für den speziellen Anwendungsfall am besten geeignete Fehlerkriterium zu finden, auf Grund dessen ein Teil der Koeffizienten vernachlässigt werden soll. Wird beispielsweise bei der Bildübertragung eine Transformation zur Bandbreitenreduktion eingesetzt, so kommt es darauf an, das Bild am Empfangsort ohne bedeutenden Informationsverlust zurückzugewinnen. Das von der menschlichen Sinneswahrnehmung angewendete Kriterium über den Informationsgehalt eines Bildes muß nicht mit der minimalen quadratischen Abweichung übereinstimmen [8].

Am meisten wird der Vergleich der Walshtransformation mit der Fouriertransformation diskutiert [7, 9, 10, 11]. Bei diesen beiden Transformationen erfolgt die Datenreduktion durch Begrenzung des Frequenz- bzw. Sequenzbandes.

Die Bevorzugung der einen oder anderen Variante hängt neben den genannten von noch anderen Randbedingungen ab. Hier sollen drei wesentliche genannt und erläutert werden:

- Charakter der zu analysierenden Zeitfunktion
- Integration des Analysesystems in ein evtl. schon vorhandenes, bewährtes Gerätesystem
- gerätetechnische oder rechentechnische Realisierung der Analyse.

Aus den im Abschnitt 6 beschriebenen Ergebnissen kann der Fehler, der bei der Approximation einer Zeitfunktion mit einer endlichen Koeffizientenzahl entsteht, bereits abgeschätzt werden. Soll die Analyse digital erfolgen, muß die Zahl der für die Erfassung der wesentlichen Merkmale notwendigen Abtastungen berücksichtigt werden, da der Rechenaufwand bzw. der Bauelementeaufwand bei den beiden Transformationen nicht in gleichem Maße steigt.

Abb. 11 zeigt die Rechenzeiten der Walsh- und Fouriertransformation bei Verwendung des Cooley-Tukey-Algorithmus für den sowjetischen Elektronenrechner BESM-6. Es ist ersichtlich, daß für große Koeffizientenzahlen die Rechenzeit für die Fouriertransformation schneller ansteigt als die für die Walshtransformation. Für 4096 Koeffizienten ist das Verhältnis schon fast 1:2. Ferner wird es nur dann sinnvoll sein, die Walshanalyse zur Signalverarbeitung heranzuziehen, wenn das Einsatzgebiet abgegrenzt ist und nicht, wie es häufig vorkommt, schon mit einer umfangreichen Systemtechnik arbeitet, die der Frequenztechnik optimal angepaßt ist.

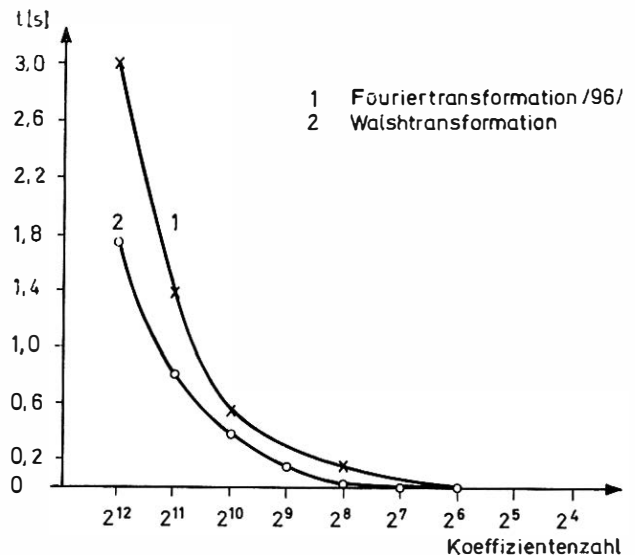


Abb. 11. Rechenzeiten des Cooley-Tukey-Algorithmus für die Walsh- und Fouriertransformation

Soll die Analyse einer Funktion rechentechnisch durchgeführt werden, wird man der Walshanalyse den Vorzug geben, da einmal kleinere Rechner diese Aufgabe lösen können und zum anderen die Rechenzeit erheblich kürzer ist. Hinsichtlich der gerätetechnischen Realisierung liegt ein Vorteil der Fourieranalyse darin, daß Frequenzanalytoren seit Jahren handelsüblich sind. Dagegen sind Walshanalytoren dann zu bevorzugen, wenn Schaltkreise mit hohem Integrationsgrad eingesetzt werden können.

Der Aufbau eines universellen Funktionsgenerators als technische Realisierung der Walshsynthese ist möglich und besonders vorteilhaft für analytisch nicht beschreibbare Funktionen [12]

Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. Beate Meffert, Dipl.-Ing. Thomas Pätzold, Sektion Elektronik der Humboldt-Universität zu Berlin, 1136 Berlin, Hans-Loch-Str. 349

Literatur

- [1] Ross, I.; Kelly, J.: A new method for representing Walsh functions. Proc. of the 1972 Symposium on Applications of Walsh Functions, Washington. S. 359–361.
- [2] Paley, R. E. A. C.: A remarkable series of orthogonal functions. Proc. of the London Mathematical Society 34 (1932) S. 241–279.
- [3] Kremer, H.: On the representation of Walsh functions and fast Walsh transforms algorithms. Angewandte Informatik 12 (1973) S. 7–20.
- [4] Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil II. Berlin: Dt. Verlag der Wissenschaften 1954.
- [5] Harmuth, H. F.: Verallgemeinerung des Fourier-Integrals und des Begriffes Frequenz. AEÜ 18 (1967) S. 439–451.
- [6] Beauchamp, K. G.: The use of Walsh functions in the computer processing data. Reprints Section 1, IMEKO VI Dresden (1972) S. 67–76.
- [7] Blachman, N. M.: Sinusoids versus Walsh functions. Proc. IEEE 62 (1974) S. 346–354.
- [8] Harmuth, H. F.; Kamal, J.; Murthy, S. S. R.: Two-dimensional spatial hardware filters for acoustic imaging. Proc. of the 1974 Symposium on Applications of Walsh Functions, Washington. S. 94–126.
- [9] Beauchamp, K. G.: Waveform synthesis using Fourier and Walsh series. Colloquium (1973) Hatfield Polytechnic, Hertfordshire.
- [10] Campanella, S. J.; Robinson, G. S.: A comparison of Walsh and Fourier transformations for application to speech. Proc. of the 1971 Symposium on Applications of Walsh Functions, Washington. S. 199–202.
- [11] Pearl, J.: Comparison of Fourier and Walsh transforms in radar signal processing. Proc. of the 1973 Symposium on Applications of Walsh Functions, Washington. S. 237–241.
- [12] Pahnke, W.; Koch, K.-H.: Universeller Generator für bandbegrenzte Zeitfunktionen. rfe 24 (1975) S. 229–235.

Zusammenfassung

Beate Meffert und Thomas Pätzold

Untersuchungen zur Walsh-Transformation verschiedener Standardfunktionen

Die Vollständigkeit und Orthonormalität des Systems der Walshfunktionen gestatten die Ableitung der Walshtransformation aus der verallgemeinerten Fouriertransformation. Die schnellen Algorithmen sichern eine Berechnung des Sequenzspektrums mit geringem Rechenzeit- und Speicherplatzaufwand. Die Analyse- und Syntheserergebnisse von Standardfunktionen zeigen die Unterschiede zwischen den Funktionsarten und die Abhängigkeit von den Funktionsparametern.

Беате Мефферт и Томас Петцольд

Исследования к трансформации Вейлша различных стандартных функций

Совершенство и ортонормальность системы функций Вейлша позволяет вывод трансформации Вейлша из обобщенной трансформации Фурьера. Быстрые алгоритмы обеспечивают вычисление последовательного спектра при малой затрате счетного времени и места накопления. Итоги анализа и синтеза стандартных функций показывают разницы между видами функций и зависимость от параметров функций.

Beate Meffert and Thomas Pätzold

Investigations of the Walsh Transformation of Various Standard Functions

The completeness and orthonormality of the system of Walsh functions permits the derivation of the Walsh transformation from the generalized Fourier transformation. Fast algorithms guarantee the calculation of the sequence spectrum with little expenditure of computing time and storage location. The results of the analysis and synthesis of standard functions reveal differences between the types of functions and the dependence on function parameters.

Beate Meffert et Thomas Pätzold

Etudes portant sur la transformation de Walsh, appliquée à différentes fonctions standard

L'intégralité et l'orthonormalité du système des fonctions de Walsh permettent de dériver la transformation de Walsh de la transformation généralisée de Fourier. Les algorithmes rapides assurent le calcul du spectre de séquences avec un petit investissement de temps de calcul et de positions de mémoire. Les résultats d'analyse et de synthèse de fonctions standard montrent les différences entre les espèces de fonction ainsi que la dépendance, à l'égard des paramètres de fonction.