Die Abtasttheoreme der Sequenztechnik

Henry Langer und Beate Meffert

1. Einleitung

Ausgehend vom System der Walshfunktionen, das die signaltheoretische Basis der Sequenztechnik bildet, nahm Harmuth 1964 mit dem Begriff „Sequenz" eine Verallgemeinerung des Begriffes „Frequenz" vor [1, 2]. Er definierte die Sequenz einer Funktion als die mittlere halbe Anzahl der Nulldurchgänge (Vorzeichenwechsel) im halb offenen Intervall $\theta \in [0, 1)$ mit $\theta = t/T$, T Periodendauer [3, 4]. Damit wird es möglich, die auf der Fourieranalysis beruhenden Abtasttheoreme der Frequenztechnik zu verallgemeinern. Es soll gezeigt werden, daß ein Abtasttheorem der Sequenztechnik für spektral begrenzte und eins für zeitbegrenzte Signale existieren.

2. Das Abtasttheorem für spektral begrenzte Signale

Es lautet [5]:

Wenn das Sequenzamplitudenspektrum $C(\mu)$ einer kontinuierlich verlaufenden Zeitfunktion $f(\theta)$ nur Sequenzen im Bereich $0 \leqq \mu < 2\mu_g$, $\mu_g = 2^k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ enthält, also sequenzbandbegrenzt ist, so ist der durch die Zeitfunktion repräsentierte Vorgang vollständig bestimmt, wenn man die Wertefolge der Amplituden $f(v\Delta\theta)$ in allen Punkten $v\Delta\theta$ im Abstand $\Delta\theta \leqq 1/2\,\mu_g$ kennt (μ Sequenz, μ_g Grenzsequenz).

Dieses Theorem läßt sich wie folgt beweisen.

Aus der Sequenzbandbegrenzung ergibt sich:

$$C(\mu) = 0 \quad \text{für} \quad \mu < 0 \quad \text{und} \quad \mu \geqq 2\mu_g. \tag{1}$$

Für den sequenzbegrenzten Zeitvorgang gilt:

$$f(\theta) = \int_0^{2\mu_g} C(\mu)\,\mathrm{wal}\,(\mu, \theta)\,d\mu, \tag{2}$$

wal (μ, θ) Walshfunktion.

Da das Integral nicht den restlichen Sequenzbereich umfaßt, kann man an Stelle $C(\mu) = 0$ einen beliebigen Verlauf von $C(\mu)$ annehmen, d. h., man kann das Spektrum $C(\mu)$ mit der Periode $2\mu_g$ periodisch fortsetzen. Es soll mit $C_{\mathrm{per}}(\mu)$ bezeichnet werden. Dann gilt:

$$f(\theta) = \int_0^{2\mu_g} C_{\mathrm{per}}(\mu)\,\mathrm{wal}\,(\mu, \theta)\,d\mu. \tag{3}$$

$C_{\mathrm{per}}(\mu)$ kann in eine Walshreihe entwickelt werden, die zu einem diskreten Spektrum führt, dessen zugehöriger Bildbereich hier der Zeitbereich ist.

Die Walshreihendarstellung der periodischen Funktion $C_{\mathrm{per}}(\mu)$ ergibt:

$$C_{\mathrm{per}}(\mu) = \sum_{\infty}^{v=0} A(v)\,\mathrm{wal}\,(v, \mu). \tag{4}$$

$A(v)$ sind die Walshkoeffizienten der Funktion $C_{\mathrm{per}}(\mu)$. Da sie im Zeitbereich liegen (Abtastpunkte), d. h. der Sequenzbereich mit dem Zeitbereich vertauscht ist, vertauschen sich auch μ und θ in der Walshfunktion. θ nimmt ganzzahlig diskrete Werte v an.

Das Bestimmungsintegral für die Koeffizienten (Walshtransformation) ergibt:

$$A(v) = 1/2\mu_g \int_0^{2\mu_g} C_{\mathrm{per}}(\mu)\,\mathrm{wal}\,(v, \mu)\,d\mu. \tag{5}$$

Tastet man die Zeitfunktion $f(\theta)$ in Abständen von $\Delta\theta = 1/2\,\mu_g$ ab, erhält man für die Abtastwerte entsprechend Gl. (3)

$$f(v\Delta\theta) = f(v/2\mu_g) = \int_0^{2\mu_g} C_{\mathrm{per}}(\mu)\,\mathrm{wal}\,(\mu, v/2\mu_g)\,d\mu. \tag{6}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaft der Walshfunktionen

$$\mathrm{wal}\,(v, \mu) = \mathrm{wal}\,(\mu, v)$$

folgt aus Gl. (5) und (6)

$$f(v/2\mu_g) = 2\mu_g\,A(v/2\mu_g) \qquad \Delta\theta = \frac{1}{2\mu_g}, \tag{7}$$

Diese Gleichung besagt, daß die Koeffizienten $A(v)$ der in eine Walshreihe entwickelten periodischen Funktion $C_{\mathrm{per}}(\mu)$ über den Proportionalitätsfaktor $2\mu_g$ den Abtastwerten der Zeitfunktion in den Abständen $v/2\mu_g$, d. h. bei $\theta = 0$; $1/2\mu_g$; $2/2\mu_g$; $3/2\mu_g$ gleich sind.

Es muß noch bewiesen werden, daß die Werte der

kontinuierlichen Zeitfunktion zwischen den Abtastpunkten $v\Delta\theta$ durch Überlagerung benachbarter Funktionen eindeutig bestimmt sind.
Ausgehend von Gl. (4) erhält man mit Gl. (7):

$$C_{\text{per}}(\mu) = \sum_{v=0}^{\infty} [1/2\mu_g] f(v/2\mu_g) \operatorname{wal}(v, \mu), \tag{8}$$

wenn $C_{\text{per}}(\mu)$ allein durch die Abtastwerte im Zeitbereich bestimmt sein soll. Mit dem $C_{\text{per}}(\mu)$ der Gl. (8) muß der kontinuierliche Zeitvorgang $f(\theta)$ vollständig beschreibbar sein. Dazu wird Gl. (8) in Gl. (3) eingesetzt:

$$f(\theta) = \int_0^{2\mu_g} [1/2\mu_g] \left[\sum_{v=0}^{\infty} f(v/2\mu_g) \operatorname{wal}(v, \mu) \right] \operatorname{wal}(\mu, \theta)\, d\mu \tag{9}$$

oder

$$f(\theta) = [1/2\mu_g] \sum_{v=0}^{\infty} f(v/2\mu_g) \int_0^{2\mu_g} \operatorname{wal}(v, \mu) \operatorname{wal}(\mu, \theta)\, d\mu. \tag{10}$$

Die beiden Walshfunktionen in Gl. (9) lassen sich unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaft zusammenfassen:

$$f(\theta) = [1/2\mu_g] \sum_{v=0}^{\infty} f(v/2\mu_g) \int_0^{2\mu_g} \operatorname{wal}(m, \mu)\, d\mu, \tag{11}$$
$$m = v \oplus \theta.$$

Das Integral der Gl. (11) spielt beim Beweis des Abtasttheorems sequenzbandbegrenzter Signale die analoge Rolle wie das Integral beim Beweis des Abtasttheorems frequenzbandbegrenzter Signale, dessen Lösung zur Spaltfunktion führt (s. Abb. 1).

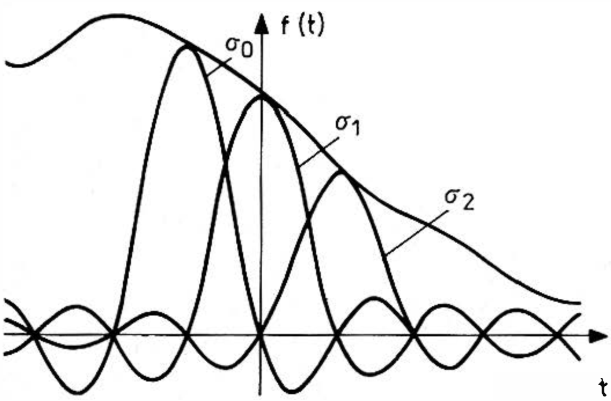

Abb. 1. Erzeugung der frequenzbandbegrenzten Funktion $f(t)$ durch Überlagerung der bewerteten Spaltfunktion σ_v

Die Lösung des Integrals in Gl. (11) ergibt das Orthogonalsystem der Blockimpulse $J(\theta, 2\mu_g)$ [5].

Damit geht Gl. (11) über in

$$f(\theta) = [1/2\mu_g] \sum_{v=0}^{\infty} f(v/2\mu_g)\, J(\theta, 2\mu_g) \tag{12}$$

$$J(\theta, 2\mu_g) = \begin{cases} 2\mu_g & \text{für } \dfrac{v}{2\mu_g} \le \theta < \dfrac{v+1}{2\mu_g} \\ 0 & \text{sonst überall} \end{cases} \tag{13}$$

$f(\theta)$ kann damit als Überlagerung von Blockimpulsen, durch $f(v/2\mu_g)\,[1/2\mu_g]$ bewertet, dargestellt werden.
Die Erzeugung der Funktion $f(\theta)$ gemäß Gl. (12) wird durch die Betrachtung eines einzelnen Summanden deutlich:

$$f_v(\theta) = [1/2\mu_g] f(v/2\mu_g)\, J(\theta, 2\mu_g). \tag{14}$$

An der Stelle $\theta = v/2\mu_g$ stimmt der Summand wegen Gl. (13) mit der Funktion $f(\theta)$ überein. Für $\theta = (v + l)/2\mu_g$, $l = \pm 1, \pm 2, \ldots$ wird dieser Summand gleich Null. Somit entsteht die Funktion $f(\theta)$ nach Gl. (12) dadurch, daß für $\theta = v/2\mu_g$ der Summand $f_v(\theta)$ den Funktionswert $f(\theta)$ ergibt, alle anderen Summanden sind Null.
Zwischen den Abtastpunkten $[v/2\mu_g < \theta < (v + 1)/2\mu_g]$ wird der Funktionswert $f(\theta)$ durch Überlagerung der Summanden erreicht. Abb. 2 zeigt eine sequenzbandbegrenzte Funktion ($2\mu_g = 8$) und ihre Erzeugung durch die Blockimpulse $[1/2\mu_g]\, J(\theta, 2\mu_g)$, die noch mit $f(v/2\mu_g)$ zu bewerten sind.

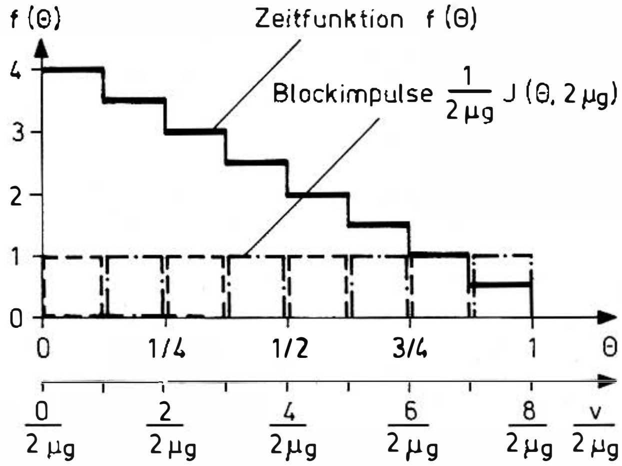

Abb. 2. Erzeugung der sequenzbegrenzten Funktion $f(\theta)$ mit $\mu_g = 4$ durch Überlagerung der bewerteten Blocksignale

Diese Betrachtungen zur Ableitung des Abtasttheorems für sequenzbandbegrenzte Signale machen die Analogie zum Abtasttheorem für frequenzbandbegrenzte Signale deutlich. Die für digitale Signalverarbeitung im Sequenzbereich erforderliche Diskretisierung einer kontinuierlichen Zeitfunktion muß dem Abtasttheorem der Sequenztechnik genügen, wenn kein Informationsverlust auftreten soll. Wird die Bedingung $\theta \leqq 1/2\mu_g$ nicht eingehalten, so treten wie in der Frequenztechnik spektrale „Überlappungen“ auf, die es verhindern, $f(\theta)$ verzerrungsfrei aus den Abtastwerten zurückzugewinnen.

Ist $f(\theta)$ nicht notwendigerweise sequenzbandbegrenzt, so kann man bei einer willkürlich festgelegten Sequenz μ_g mit Hilfe der Abtastwerte von $f(\theta)$ an den Stellen $\theta = v/2\mu_g$ analog zu Gl. (12) die Reihe bilden:

$$f_i(\theta) = [1/2\mu_g] \sum_{v=0}^{\infty} f(v/2\mu_g)\, J(\theta, 2\mu_g). \tag{15}$$

Sie stimmt jedoch nur an den Abtastpunkten mit der Funktion $f(\theta)$ überein. Die Reihe $f_i(\theta)$ interpoliert also bezüglich der Abtastpunkte die Funktion $f(\theta)$. Da das Spektrum von $f_i(\theta)$ begrenzt ist, führt dies zu einer sequenzbandbegrenzten Interpolation von $f(\theta)$ durch $f_i(\theta)$ (s. Abb. 3).

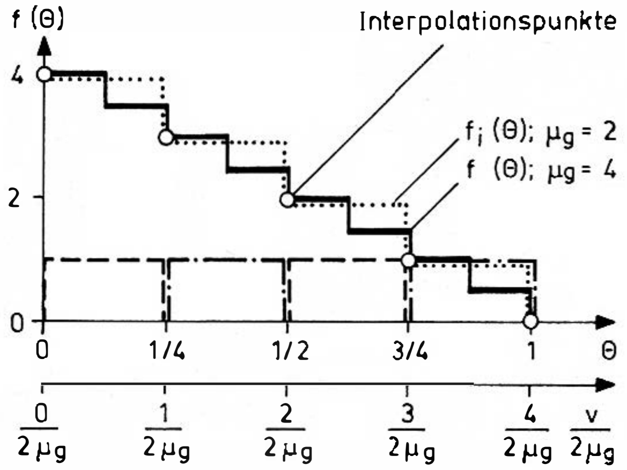

Abb. 3. Bandbegrenzte Interpolation von $f(\theta)$ durch $f_i(\theta)$

Für das Sequenzspektrum von $f_i(\theta)$ gilt:

$$C_i(\mu) = \sum_{v=0}^{\infty} [1/2\mu_g] f(v/2\mu_g)\, \mathrm{wal}\,(v, \mu). \tag{16}$$

Der Wert $f(v/2\mu_g)$ läßt sich entsprechend Gl. (6) mit Hilfe des Spektrums von $f(\theta)$ ausdrücken:

$$f(v/2\mu_g) = \int_0^{2\mu_g} C_{\mathrm{per}}(\mu)\, \mathrm{wal}\,(\mu, v/2\mu_g)\, d\mu \tag{17}$$

Gl. (17) in Gl. (16) eingesetzt, ergibt:

$$C_i(\mu) = \sum_{v=0}^{\infty} [1/2\mu_g] \left[\int_0^{2\mu_g} C_{\mathrm{per}}(\mu)\, \mathrm{wal}(\mu, v/2\mu_g)\, d\mu\right] \times \mathrm{wal}\,(v, \mu). \tag{18}$$

3. Das Abtasttheorem für zeitbegrenzte Signale

Es lautet [5]:

Ist die Zeitfunktion $f(\theta)$ im Bereich $0 \leqq \theta < 2\theta_g$ ($\theta_g = 2^k$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) definiert und außerhalb dieses Bereichs identisch Null, besitzt sie ein kontinuierliches Sequenzspektrum, das vollständig bestimmt ist, wenn man die Werte des Spektrums $C(\mu)$ nur bei den diskreten Sequenzen $v\Delta\mu$ im Abstand von $\Delta\mu < 1/2\theta_g$ kennt.

Dieses Abtasttheorem für zeitbegrenzte Signale läßt sich analog zum vorigen Abschnitt beweisen. Aus der Zeitbegrenzung folgt:

$$f(\theta) = 0 \quad \text{für} \quad \theta < 0 \quad \text{und} \quad \theta > 2\theta_g. \tag{19}$$

Für das Spektrum des zeitbegrenzten Signals gilt:

$$C(\mu) = \int_0^{2\theta_g} f(\theta)\, \mathrm{wal}\,(\mu, \theta)\, d\theta. \tag{20}$$

Da das Integral den Zeitbereich $\theta > 2\theta_g$ und $\theta < 0$ nicht einschließt, kann man sich die Zeitfunktion $f(\theta)$ mit der Periode $2\theta_g$ periodisch fortgesetzt denken, $f_{\mathrm{per}}(\theta)$.

Dann gilt:

$$C(\mu) = \int_0^{2\theta_g} f_{\mathrm{per}}(\theta)\, \mathrm{wal}\,(\mu, \theta)\, d\mu. \tag{21}$$

$f_{\mathrm{per}}(\theta)$ kann in eine Walshreihe entwickelt werden, deren Koeffizienten ein diskretes Sequenzspektrum bilden:

$$f_{\mathrm{per}}(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} C(i)\, \mathrm{wal}\,(i, \theta). \tag{22}$$

Das Bestimmungsintegral für die Koeffizienten (Walshtransformation) ergibt:

$$C(i) = [1/2\theta_g] \int_0^{2\theta_g} f_{\mathrm{per}}(\theta)\, \mathrm{wal}\,(i, \theta)\, d\theta. \tag{23}$$

Tastet man das Spektrum $C(\mu)$ im Abstand $\Delta\mu = 1/2\theta_g$ ab, erhält man entsprechend Gl. (21) für die Abtastwerte:

$$C(i\Delta\mu) = C(i/2\theta_g) = \int_0^{2\theta_g} f_{\mathrm{per}}(\theta)\, \mathrm{wal}\,(i/2\theta_g, \theta)\, d\theta. \tag{24}$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Walshfunktionen folgt aus Gl. (23) und Gl. (24):

$$C(i/2\theta_g) = 2\theta_g C(i). \tag{25}$$

Die Gleichung besagt, daß die Koeffizienten $C(i)$ der in eine Walshreihe entwickelten Funktion $f_{\mathrm{per}}(\theta)$ über den Proportionalitätsfaktor $2\theta_g$ den Abtastwerten des Spektrums in den Abständen $i/2\theta_g$, d. h. bei $\mu = 0$; $1/2\theta_g$; $2/2\theta_g$, ... gleich sind.

Die Werte des kontinuierlichen Spektrums zwischen den Abtastpunkten müssen sich wieder aus der Überlagerung benachbarter Funktionen ergeben. Ausgehend von Gl. (22), ergibt sich mit Gl. (25):

$$f_{per}(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} [1/2\theta_g]\, C(i/2\theta_g)\, \mathrm{wal}\,(i, \theta), \qquad (26)$$

wenn $f_{per}(\theta)$ allein durch die Abtastwerte im Spektralbereich bestimmt sein soll. Mit $f_{per}(\theta)$ entsprechend Gl. (26) muß das kontinuierliche Spektrum $C(\mu)$ vollständig beschreibbar sein, d. h., es muß mit Gl. (20) und (26) gelten:

$$C(\mu) = \int_0^{2\theta_g} [1/2\theta_g] \left[\sum_{i=0}^{\infty} C(i/2\theta_g)\, \mathrm{wal}\,(i, \theta)\right] \times \mathrm{wal}(\mu, \theta)\, d\theta \qquad (27)$$

oder

$$C(\mu) = [1/2\theta_g] \sum_{i=0}^{\infty} C(i/2\theta_g) \int_0^{2\theta_g} \mathrm{wal}\,(i, \theta) \times \mathrm{wal}\,(\mu, \theta)\, d\theta. \qquad (28)$$

Die beiden Walshfunktionen lassen sich zusammenfassen:

$$C(\mu) = [1/2\theta_g] \sum_{i=0}^{\infty} C(i/2\theta_g) \int_0^{2\theta_g} \mathrm{wal}\,(h, \theta)\, d\theta \qquad (29)$$

oder

$$C(\mu) = [1/2\theta_g] \sum_{i=0}^{\infty} C(i/2\theta_g)\, J(\mu, 2\theta_g), \qquad (30)$$

da die Lösung des Integrals in Gl. (29) wieder zum Orthogonalsystem der Blockimpulse $J(\mu, 2\theta_g)$ führt:

$$J(\mu, 2\theta_g) = \begin{cases} 2\theta_g & \text{für } i/2\theta_g \leqslant \mu < (i+1)/2\theta_g \\ 0 & \text{sonst überall} \end{cases}. \qquad (31)$$

Abb. 4 zeigt das kontinuierliche Sequenzspektrum einer zeitbegrenzten Funktion $f(\theta)$ und seine Erzeugung gemäß Gl. (30) durch die Blockimpulse $[1/2\theta_g]$ $J(\mu, 2\theta_g)$, die noch mit den Abtastwerten zu multiplizieren sind.

Das Integral in Gl. (29) spielt beim Beweis des spektralen Abtasttheorems der Sequenztechnik wieder die ähnliche Rolle wie das Integral beim Beweis des spektralen Abtasttheorems der Frequenztechnik, dessen Lösung zum Orthogonalsystem der Spaltfunktionen führt.

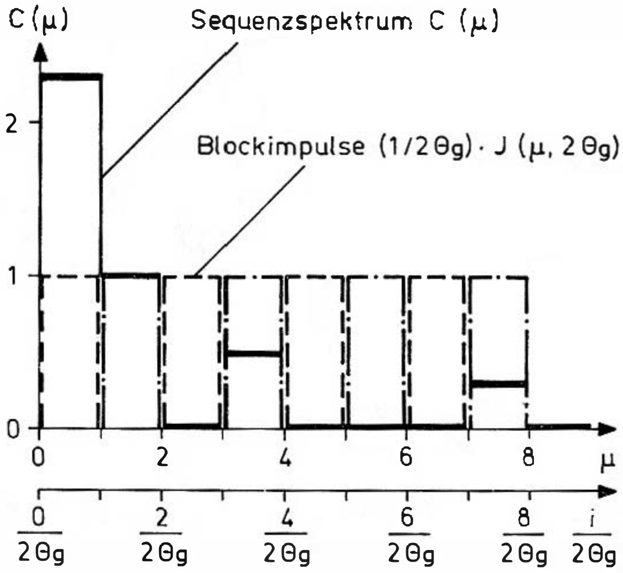

Abb. 4. Erzeugung des kontinuierlichen Sequenzspektrums einer zeitbegrenzten Funktion $f(\theta)$ durch Überlagerung der bewerteten Blockimpulse

Zusammenfassung

Das Abtasttheorem für sequenzbandbegrenzte Zeitfunktionen und das spektrale Abtasttheorem der Sequenztechnik wurden in methodischer Analogie zur klassischen Fourieranalysis abgeleitet und bewiesen. Es konnte gezeigt werden, daß das orthogonale Funktionssystem der Blockimpulse die adäquate Rolle spielt wie die Spaltfunktionen beim Beweis der Abtasttheoreme der Frequenztechnik, d. h. daß an die Stelle der Superposition von Spaltfunktionen in der Sequenztechnik die Überlagerung der orthonormalen Blockimpulse tritt. Unter dem Aspekt der zunehmenden digitalen Signalverarbeitung haben diese Zusammenhänge im Hinblick auf die Vermeidung von Informationsverlusten eine besondere Bedeutung.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. *Henry Langer*, Dr. *Beate Meffert*, Sektion Elektronik der Humboldt-Universität zu Berlin, 1040 Berlin, Invalidenstr. 110