Die *zeitliche* Differenzierung

von

Babu Thaliath

Das Tangentenproblem[1]

Die Infinitesimalrechnung als mathematisches Instrumentarium baute bekanntlich auf dem tradierten Problem des unendlich Kleinen auf, das seit der Antike eher im Rahmen der Philosophie erörtert wurde. Die Erfindung der mathematischen Methode der Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz setzte stillschweigend voraus, dass die in der Antike und im Mittelalter vorherrschte Vorstellung vom potentiell-unendlich Kleinen *pragmatisch* in eine diskrete Entität, nämlich ins aktual-unendlich Kleine, umgesetzt werden kann. Das Unendliche wurde von Aristoteles als potentiell-unendlich Kleine bzw. als eine sich im Prozess der unendlichen Verkleinerung oder Verminderung befindende Größe vorgestellt. Thomas von Aquin, der die Renaissance der Aristotelischen Philosophie im Mittelalter zuwege brachte, vertrat dieselbe Ansicht. Auch bei der *tendenziell neuplatonischen* Vorstellungsweise von Cusanus (Nikolaus von Kues) tauchte das unendlich Kleine eher in einem potentiellen Charakter oder im Prozessmodus auf. Das berühmte geometrische Gedankenexperiment in *De docta ignorantia*, nämlich die prozessuale Unendlichkeit der Begradigung einer Kreisperipherie (die sich erstaunlicherweise dem propädeutischen geometrischen Verfahren der Differentialrechnung ähnelt), verdeutlicht im Grunde eine geometrische Darstellung des potentiell-unendlich Kleinen, obwohl Cusanus dazu neigte, sich eine Finalität dieses Prozesses im Rahmen seiner Lehre von *coincidentia oppositorum* metaphysisch vorzustellen.

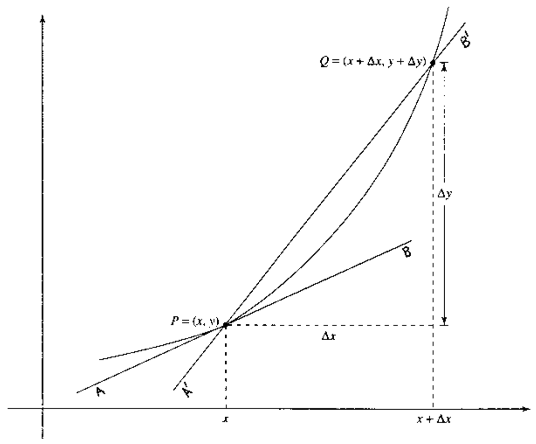
Das ursprüngliche geometrische Verfahren der Differenzierung, das sich insbesondere bei Leibniz ableiten lässt und als solche überhaupt zur Propädeutik zur mathematischen Lehre der Infinitesimalrechnung wurde, führte im Kartesischen Koordinatensystem ein bisher unbekanntes Faktum ein, nämlich die *Bewegung*. Das propädeutische geometrische Verfahren der Differenzierung, das in vielen Schulbüchern dargestellt ist, zeigt die Bewegung eines Punktes zu einem anderen entlang einer Kurve:

---

[1] Folgende Abhandlung basiert u. a. auf meiner Dissertation und einer früheren Untersuchung, die ich im Rahmen meiner postdoctoral Forschung veröffentlicht habe. Da in der Abhandlung sich mehrmals auf diese Werke bezogen wird, verwende ich folgende Abkürzungen:

PMS: *Perspektivierung als Modalität der Symbolisierung*. Erwin Panofskys Unternehmung zur Ausweitung und Präzisierung des Symbolisierungsprozesses in der *Philosophie der symbolischen Formen* von Ernst Cassirer (Dissertation); Verlag Königshausen & Neumann, Würzburg 2005.

NSK: Natur und Struktur der Kräfte. Verlag Königshausen & Neumann, Würzburg 2010.



Figur 1[2]

Der Zuwachs der Kurve von P zu Q wird auf der Abszissenachse als Δx und auf der Ordinatenachse als Δy dargestellt. Wenn sich der Punkt Q zu Punkt P zurück bewegt, tendieren die kleinen Zuwächse, Δx und Δy, gegen Null. Im Prinzip sollte die Bewegung des Punktes Q zu Punkt P entlang einer Kurve eine unendliche Bewegung und die Tendenz des Punktes Q demnach eine unendliche Annäherung an den Punkt P sein. In dieser unendlichen Bewegung tendiert das Quantum Δx unendlich gegen Null. $\Delta x \to 0$ ist die Formel, die das im unendlichen Prozess des Tendierens konzipierte unendlich Kleine, das im Prinzip aus dem Verfahren $\Delta x \to 0$ nicht zu beseitigen ist, arithmetisch-algebraisch darstellt. Die geometrische Darstellung dieser Formel ($\Delta x \to 0$) sollte in diesem Bild durch eine unendliche Annäherung der Sekante A´B´ an die Tangente AB – in einer ebenso unendlichen Drehung dieser Linie um den Punkt P – gekennzeichnet werden. Die Tangente AB *bildet* in diesem unendlichen Verfahren der Differenzierung den Grenzwert des oben erläuterten geometrischen Prozesses. Ein dritter Modus dieses Prozesses – neben der Bewegung des Punktes Q zu P und der Drehung der Sekante A´B´ um den Punkt P –, indem wir allein von dem bewegenden und die Kurve gestaltenden Punkt P ausgehen, wäre das unendliche Tendieren dieses dynamischen bzw. bewegenden Punktes von einer Richtungsvariabilität, die die Gestaltung einer Kurve zur Folge hat, zu einer Richtungskonstanz in der Gestaltung der Tangente. In diesem Prozessmodus zeigt sich das oben dargestellte geometrische Verfahren der Differenzierung als eine unendliche Begradigung der Kurve zu einem Grenzwert der Tangente (AB), also als ein unendlicher Prozess, der im Wesentlichen zu dem vorher erörterten Gedankenexperiment von Cusanus analog ist. Die arithmetisch-algebraische Formel $\Delta x \to 0$ scheint in diesem Prozessmodus einen adäquaten geometrischen Ausdruck zu finden, nämlich die unendliche

[2] Vgl. PMS, S. 68.

Verminderung einer unendlich kleinen Differenz zwischen der Richtungsvariabilität und der Richtungskonstanz des Punktes P in seiner Bewegungstendenz.

Aber in dem Verfahren der Differenzierung wurde sowohl bei Leibniz als auch bei Newton das *im Prinzip unendlich fortexistierende* Faktum des unendlich Kleinen, dargestellt durch die arithmetisch-algebraische Formel $\Delta x \to 0$, eliminiert, indem der unendlich kleine aber *variable* Zuwachs Δx letztendlich *annulliert* bzw. ihm der Wert Null zugeschrieben wird. Bei der Eliminierung oder Annullierung von Δx und Δy koinzidiert der Punkt Q mit dem Punkt P, infolge dessen der Sekante A´B´ zur Tangente AB am Punkt P wird. Die Steigung dieser Tangente soll demnach die Richtungstendenz des Punktes P, der durch seine Bewegung die Kurve *erzeugt,* darstellen. Hier kommt das ursprüngliche geometrische Verfahren der Infinitesimalrechnung mit dem alten und tradierten Tangentenproblem in Berührung. In seinem Hauptwerk „Das Prinzip der Infinitesimalrechnung und seine Geschichte" erörtert Hermann Cohen das Tangentenproblem in Bezug auf die Entwicklungsgeschichte der Infinitesimalrechnung:

„*Das Tangentenproblem*.- Cavalieri hatte die Ausmessung krummlinig begrenzter Flächen durch Vergleichung mit geradlinigen unternommen. Der Fortschritt, den das Tangentenproblem bildet, möchte darin bestehen, dass mit demselben die Aufgabe entstand, *die Kurve aus ihrem Begriffe zu erzeugen*, und mittels des Begriffs der Kurve sodann zum Gedanken der *Integralrechnung* vorzudringen. Auf diesem neuen Gebiete arbeiten und begegnen sich Roberval, Descartes und Fermat, welche jedoch hierin sämtlich den Spuren Keplers folgen.

Descartes' Methode beschränkt sich nun darauf, die beiden Punkte, in denen die Kurve von einem Kreise geschnitten wird, in *einen* berührenden Punkt *zusammenfallen* zu lassen. Und als Fermats Vorzug wird sein Festhalten an der Strenge der Alten gepriesen. Indem er, wie Archimedes, die Tangente zur Subtangente in Beziehung setzt und aus derselben zu bestimmen sucht, bleibt auch er bei dem negativen Begriffe der Grenze stehen, indem er durch die Annäherung der beiden Punkte der Tangente zwei ungleiche Verhältnisse zur *Gleichheit* der ‚*Beinahegleichheit*' zusammenfallen läßt. So bildet die Grenze auch hier nur den Terminus ad quem.

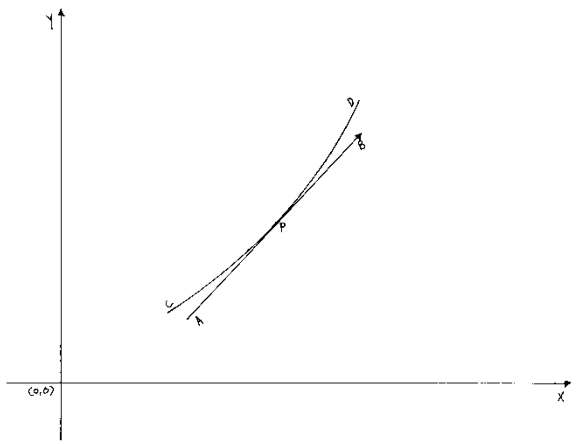
Roberval, der um *philosophische* Fixierung der methodischen Grundbegriffe bemüht war, scheint auch hier eine positive Wendung zu nehmen, gleichwie er von der Methodus Indivisibilium einen ihm eigentümlichen Gebrauch macht. Nach Roberval begrenzt sich nicht bloß die Linie in Punkten, sondern die Unendlichkeit der Punkte setzt die Linie zusammen. Er bestimmt dahin seinen Unterschied von Cavalieri, daß nach ihm die Linie aus unendlich kleinen Linien bestehe (constet), und aus denselben zusammengesetzt werde (componi). Dies ist der Keplersche Gesichtspunkt, und derselbe waltet auch in Robervals Tangentenmethode. Gemäß derselben bildet die Tangente in der Tat den *Begriff der Kurve*. Denn Roberval geht, durch Mersennes Aufgabe der Zykloide angeregt, von dem ‚Axiom' aus, daß jede Kurve durch die Bewegung eines nach zwei oder mehreren Richtungen angetriebenen Punktes beschrieben werden könne und daß die Richtung des Punktes zugleich die Tangente des Kurvenpunktes sei. Mithin ist die Richtung, welche die Bedeutung der Tangente hat, *das* *erzeugende Motiv der Kurve*. Der Punkt der Tangente und der Punkt der Kurve können ferner nicht als zwei Punkte gelten, die zusammenfallen, sondern sie sind *ein* Punkt, in Rücksicht auf die Erzeugung der Kurve.“[3]

Die Tangente als die Bestimmung der Richtung des Punktes, der durch seine Bewegung in einer *stetigen* Variation der Richtung jene Kurve gestaltet, ist nach Robervals Tangenten-Methode das Grundprinzip der Erzeugung der Kurve. Worin unterscheidet sich aber die Erzeugung einer Kurve von jener der Gerade, bzw. der Tangente? Die Kurve wird nicht durch *eine* Richtung des Punktes, sondern durch die reine Variation der Richtung des Punktes in der Bewegung erzeugt, wogegen die Tangente als gerade Linie eine einzige Richtung zeigt. Das Prinzip der Erzeugung der Kurve ist bei näherer Betrachtung nicht die kontinuierliche Bestimmung der *tangentialen* Richtung des sich bewegenden Punktes, sondern die Bestimmung der *reinen Variation seiner Richtung* in der Bewegung. Deshalb vermag allein die algebraische Formel einer Kurve, die die Gestaltung dieser Kurve in einem Koordinatensystem „durch die Bewegung eines nach zwei oder mehreren Richtungen angetriebenen Punktes“ beschreiben kann, diese die Kurve erzeugende Variation der Richtung des Punktes zu bestimmen. Die *Richtung* ist zwar das *erzeugende Motiv der Kurve*, aber die Annahme, dass diese Richtung des bewegenden Punktes durch die Tangente dargestellt werden kann, scheint hier fragwürdig.

Nur als ein Punkt in der Tangente AB hat P (Fig. 2), der erzeugende oder gestaltende Punkt, eine *lineare* Richtung. Als der die Kurve CD erzeugende Punkt zeigt P dagegen keine Sukzession linearer Richtungen, sondern die reine Variabilität der Richtung. Diese *Richtungsvariabilität* des Punktes lässt sich nicht durch unendlich viele Tangenten darstellen, sie hat im Vergleich zu der *Linearität* der Tangente eine andere Modalität. In der Dynamik der Gestaltung zeigt P als der erzeugende Punkt keine lineare Richtung der Tangente AB, denn die Kurve trennt sich von der Tangente an dem Punkt P in dem unendlich kleinen Zuwachs der Kurve durch die Bewegung dieses Punktes. Um eine *lineare*, d. h. tangentiale Bewegung am P anzudeuten, benötigen wir mindestens einen *nächsten* zweiten Punkt in der Richtung der Bewegung dieses Punktes. Aber jeder zweite Punkt vor oder nach dem Punkt P liegt nicht in der Tangente, sondern in der Kurve. Als der bewegende Punkt – „in Rücksicht auf die Erzeugung der Kurve“ – ist der Punkt der Tangente von dem Punkt der Kurve streng zu differenzieren. Wenn dem Punkt eine lineare Richtung der Tangente zugeschrieben wird, erzeugt dieser Punkt durch die Bewegung keine Kurve, sondern eine Gerade. Die *örtliche*

[3] Cohen, Hermann: Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte, Frankfurt/M 1968, S. 89-90. Vgl. auch PMS, S. 102ff.

Identität des Punktes P, der zugleich Teil einer Kurve und einer Tangente ist, ist nur in einer *statischen Ordnung des Gestalteten* möglich. Als der bewegende Punkt hat P in der Erzeugung der Tangente und der Kurve verschiedene Prinzipien, sogar Modalitäten. Die unendlich kleine Differenz in der Richtung desselben erzeugenden Punktes zwischen der Tangente und der Kurve, die sich unserer Einbildungskraft entzieht, bildet den Anfang der Differenzialrechnung.



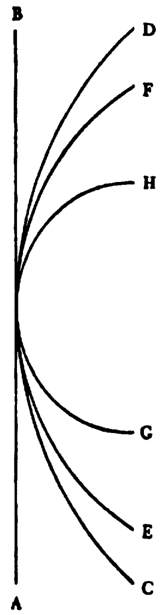
Figur 2[4]

Der Kern der Operation der Differenzierung liegt in der *modalen Differenz* des Punktes zwischen der Erzeugung der Kurve und jener der Tangente. Das Grundmotiv dieses Verfahrens ist es, diese Differenz zu überwinden und dadurch dem die Kurve erzeugenden Punkt die *Richtungseinheit* der Tangente zu verleihen. Wenn das Tangenten-Problem aus dem geometrischen Verfahren der Differenzialrechnung isoliert wird, ist es deutlich zu sehen, wie die Auffassung der Identität des erzeugenden Punktes zwischen Tangente und Kurve dem Motiv der Eliminierung des Δx als Null analog ist. Die Operation der Verkleinerung des Δx, der Abszisse des Zuwachses PQ (Fig. 1), vollendet sich, wenn der Punkt Q in einer Rückbewegung die Kurve entlang mit dem Punkt P zusammenfällt. Die Tangente AB entsteht als die Steigung der Kurve am P aus diesem Zusammenfallen von Punkten P und Q, ein Vorgang, der mit der Methode der Erzeugung der Tangente bei Descartes identisch ist.

Wenn das geometrische Verfahren der Differenzierung, das in der Figur 1 dargestellt ist, nicht von der Rückbewegung des Punktes Q zum Punkt P, sondern von der ursprünglichen und die Kurve gestaltenden *Bewegung* des Punktes P aus betrachtet wird, lässt sich der *Prozess* der Differenzierung als eine unendliche Begradigung der Kurve zu der Tangente A´B´ am Punkt P, die den Limes oder Grenzwert dieses Prozesses bildet, darstellen. Das Prinzip einer derart

[4] PMS, S. 104.

geometrisch darzustellenden Differenzierung wäre die unendliche Verkleinerung der Differenz zwischen der unendlich kleinen Richtungsvariabilität des Punktes P bei seiner Gestaltung der Kurve und seiner Richtungskonstanz, durch die er die Tangente A´B´ gestaltet.



Figur 3

Bei der Umdrehung des ursprünglichen geometrischen Verfahrens der Differenzierung erblicken wir deutlich das oben kurz erwähnte Gedankenexperiment Cusanus', das mit Grund für den Prototyp des ursprünglichen geometrischen Verfahrens der Differenzierung zu halten ist. In *De docta ignorantia* versucht Cusanus anhand verschiedener Beispiele die Entstehung der geometrischen Grundformen *in einem Prozess* darzustellen und dadurch seine Grundvorstellung vom Zusammenfallen der Gegensätze – dem *coincidentia oppositorum* – zu demonstrieren. Eins davon ist die unendliche Vergrößerung eines Kreises, in der sich die kurvige Kreisperipherie einer tangentialen Geraden *förmlich* unendlich bzw. in einer unendlichen Prozessualität nähert. Figur 3 stellt diesen Prozess der unendlichen Vergrößerung des Kreises dar, die im Grunde eine unendlich fortdauernde Begradigung der Kreisperipherie zur Schau stellt.[5] Diese Darstellung aus der Philosophie Cusanus *veranschaulicht* zum Einen die in dem unendlichen Prozess der Vergrößerung des Kreises (oder der Begradigung der Kreisperipherie) ebenso ewig fortexistierende *unendlich kleine* Differenz zwischen der Form der Geraden und jener der Kurve (bzw. der Kreisperipherie), und zum Anderen eine unendlich

[5] Kues, Nikolaus von: De docta ignorantia, Philosophisch-Theologische Werke, Bd. I, Hamburg 2002, S. 49.

kleine Differenz zwischen der Statik der tangentialen Geraden – also der Statik des Grenzwertes – und der Dynamik der Begradigung der Kreisperipherie, die im Verlauf dieses unendlichen Prozesses den Modus einer unendlich kleinen Dynamik erlangt. Das Zusammenfallen der Gegensätze – der Geraden und der kurvigen Kreisperipherie –, das hier *potentiell* bzw. in einer unendlichen Prozessualität vorgestellt ist, verweist auf zwei grundlegende Vorstellungen, die in der Cusanischen Schlussfolgerung eines *coincidentia oppositorum* implizit sind: erstens die Gleichheit zwischen der tangentialen Geraden und der kurvigen, sich aber in einem unendlichen Prozess der Begradigung befindenden Kreisperipherie als eine *unendlich kleine Ungleichheit*, und zweitens die Statik der tangentialen Geraden als die *unendlich kleine Dynamik* der Kreisperipherie, die förmlich im Prozess der kontinuierlichen Begradigung zu einem Grenzwert, nämlich zu der Statik der tangentialen Geraden, unendlich *tendiert*.

Die Koinzidenz zwischen den Punkten Q und P in Figur 1, wobei die unendlich kleinen Zuwächse Δx und Δy als Null eliminiert werden, führt im Prinzip zu der Koinzidenz zwischen der Kurve und der Tangente an dem Punkt P, dessen unendlich kleine Richtungsvariabilität in seiner Richtungskonstanz (bei der Erzeugung der Tangente) aufgehoben wird. Diese Koinzidenz in dem ursprünglichen geometrischen Verfahren der Differenzierung ist der oben dargestellten Koinzidenz in dem Cusanischen Gleichnis zwischen der sich unendlich begradigenden Kreisperipherie und der *geraden* Tangente an ihrem Berührungspunkt mit dem Kreis durchaus analog. Aber das Cusanische Beispiel verdeutlicht *in Wirklichkeit* die Unmöglichkeit der Koinzidenz zwischen der Kreisperipherie und der geraden Tangente; das *coincidentia oppositorum* ist demnach kein physisches, sondern ein metaphysisches Prinzip. Aber *philosophisch* vertritt Leibniz ein *unendliches* Prinzip des u*nendlich Kleinen*, dargestellt am ehesten durch sein Prinzip der Kontinuität. Nach diesem Prinzip geschieht in der Natur nichts sprunghaft; dem Naturphänomen liegt eine lückenlose Kontinuität, die keine unendlich kleine Diskretion der Statik zulässt, zugrunde. *Continuitas* autem in temporare, extensione, qualitatibus, motibus, omnique *naturae transitus*, reperitus, qui nunquam fit per saltum. „*Kontinuität* zeigt sich aber in der Zeit, der Ausdehnung, den Qualitäten, den Bewegungen, überhaupt in jedem *Vorgang in der Natur*, der niemals sprungweise geschieht“.[6] In der Leibnizschen Ablehnung eines sprunghaften Geschehens der natürlichen Phänomene ist sein Gesetz der Kontinuität, nämlich „Ruhe als unendlich kleine Bewegung“ (oder wie von

[6] Leibniz, G. W.: Schriften zur Logik und zur philosophischen Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaft, Darmstadt 1992, S. 367. Vgl. auch NSK, S. 147ff.

Leibniz anders formuliert: „das Gesetz für die ruhenden Körper ist nur ein Sonderfall des Gesetzes für die bewegten Dinge")[7] implizit. Indem Ruhe das Kennzeichen der *körperlichen* Statik und Bewegung das der körperlichen Dynamik ist, lässt sich aus dem Leibnizschen Kontinuitätsprinzip folgern, dass der Zustand der Statik in der Natur bzw. in der rein physikalischen Phänomenalität der Körper ein Zustand unendlich kleiner Dynamik ist; oder in anderen Worten, das statische Phänomen in der Natur der *Grenzfall* eines dynamischen Phänomens ist. Hier bestimmen wir den statischen Zustand als *Grenzwert* eines unendlich fortdauernden dynamischen Prozesses. „Ruhe als unendlich kleine Bewegung" ist eine Vorstellung, durch die Leibniz die gewöhnliche Vorstellung vom *vollkommenen* Ruhezustand eines statischen Phänomens problematisiert. Ebenso definiert Leibniz das Gesetz der Gleichheit als einen Sonderfall des Gesetzes der Ungleichheit (oder in anderen Worten: Gleichheit als unendlich kleine Ungleichheit). Diese Leibnizsche Vorstellung von Gleichheit bezieht sich primär auf die materielle Formhaftigkeit, und die Vorstellung *Ruhe als unendlich kleine Bewegung* auf den mechanischen Modus der Phänomene *in der Natur*. Beide Vorstellungen basieren auf seinem Kontinuitätsprinzip, das Leibniz den Naturphänomenen und -prozessen zuschreibt.

Das potentiell-unendlich Kleine

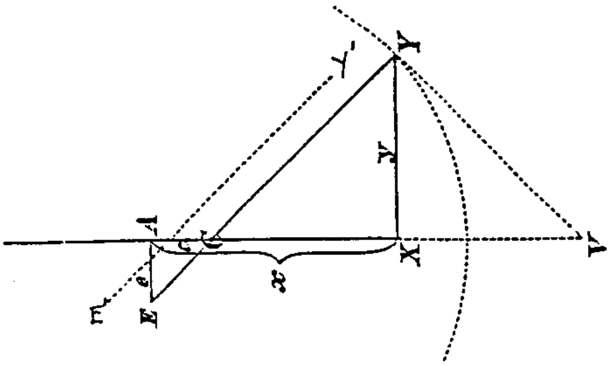
Das Kontinuitätsprinzip Leibnizens wäre ein treffender Beleg dafür, dass Leibniz in seiner *philosophia naturalis* stillschweigend das von Aristoteles vorgestellte und seitdem tradierte potentiell-unendlich Kleine, also die *Existenz* des unendlich Kleinen im unaufhörlichen Prozessmodus, legitimierte. Die Vorstellung von Statik als unendlich kleine Dynamik lässt sich als die Verteidigung des potentiell-unendlich Kleinen gegenüber dem aktual-unendlich Kleinen *im Bereich der Mechanik* betrachten. Denn das aktual-unendlich Kleine, vorgestellt sowohl als räumlich-geometrisch- als auch als arithmetisch-diskretes Quantum, verweist auf ein statisches Faktum, das streng genommen als ein Überbleibsel des aufgehörten Prozesses der Verkleinerung oder Verminderung konzipiert ist. Dagegen verweist das potentiell-unendlich Kleine auf eine unendlich kleine Dynamik, indem das unendlich Kleine als kein statisch-diskretes Quantum, sondern im reinen Prozessmodus – also als sich in einem unendlichen Prozess der Verkleinerung befindend – vorgestellt wird. „Die Gleichheit als unendlich kleine Ungleichheit" belegt dieses Motivs Leibnizens deutlich. Hier ist Gleichheit offensichtlich der Grenzwert – der Limes – *zu dem* die unendlich kleine Ungleichheit

[7] Ebd.

unendlich tendiert. Die unendlich kleine Ungleichheit ist hier gegenüber der *statischen* Diskretheit der Gleichheit im Prozessmodus – als sich im unendlichen Prozess des Gleichwerdens befindend – vorgestellt. Im Vergleich zu dem oben erörterten *mechanischen* Kraftprinzip bezieht sich diese Betrachtungsweise Leibnizens eher auf die diskreten Formen der Natur und der Geometrie. Dieses Prinzip lag auch zahlreichen Unternehmungen seit der Antike, die kurvigen und irregulären Flächen und Volumen geometrisch zu messen (was auch für den Prototyp für die später von Newton und Leibniz erfundene Infinitesimalrechnung gehalten wird) zugrunde. Bereits bei der Messung der Kreisoberfläche in der Antike wurde das Kontinuitätsprinzip Leibnizens im Bereich der Geometrie angewandt. Der Kreis wurde in unendlich vielen Dreiecken mit unendlich kleinen aber geraden Basen und derselben Höhe – die der Radius des Kreises ist – eingeteilt. Die Fläche des Dreiecks lässt sich geometrisch exakt kalkulieren; die Fläche des Kreises ist dann die *Integration* aller *gleichen* einzelnen Flächen der unendlich vielen Dreiecke. Allerdings besteht eine unendlich kleine Differenz zwischen der rein kurvigen Form der Kreisperipherie und der geraden Base des Dreiecks, was in der finalen Formel πr^2 (r = Radius) durch die Approximation des Wertes π *unterdrückt* wurde. In Wirklichkeit *verleiht* die unendlich kleine und nicht zu beseitigende Differenz zwischen der Form der Kreisperipherie und jener der geraden Base des Dreiecks dem tradierten Verfahren der Messung der Kreisoberfläche einen Prozesscharakter und zwar den Charakter eines unaufhörlichen Prozesses. Wiederum war es Cusanus, der die Unendlichkeit dieses Prozesses und demnach die unendlich-potentielle Fortexistenz der oben erwähnten unendlich kleinen Differenz durch seine geometrischen Gedankenexperimente verdeutlichte. In einem analogen Gedankenexperiment demonstriert Cusanus, wie die Peripherie eines in einem Kreis eingeschriebenen Vielecks bei der *unendlichen* Vervielfältigung seiner Saiten der kurvigen Kreisperipherie *unendlich nähert*. Das Zusammenfallen von Kreis und Vieleck in diesem unaufhörlichen Prozess bildet nach Cusanus wiederum das Prinzip des *coincidentia oppositorum*, das allerdings kein bloß physisches bzw. physisch realisierbares, sondern ein metaphysisches Prinzip ist.

Die Vorstellung vom potentiell-unendlich Kleinen tritt auch ganz *subtil* in einer geometrischen Demonstration von Leibniz, durch die er die Existenz des unendlich Kleinen zu beweisen sucht, in Erscheinung:

„Zwei Geraden AX und EY mögen sich im Punkte C schneiden; von den Punkten E und Y seien zwei Geraden EA und YX senkrecht zu AX gezogen. Nennen wir AC c, AE e, AX x und XY y. Dann verhält sich, da die Dreiecke CAE und CXY einander ähnlich sind, x – c : y = c : e. Wenn nunmehr die Gerade EY sich mehr und



Figur 4

mehr dem Punkt A nähert, dabei jedoch in dem variablen Punkte C immer denselben Winkel mit AX bildet, so werden offenbar die Strecken c und e immer kleiner werden, ihr Verhältnis jedoch wird ungeändert bleiben. Wir wollen annehmen, daß es von der Gleichheit verschieden, der betreffende Winkel also nicht = 45° ist. Setzen wir nun den Fall, daß die Gerade EY schließlich durch den Punkt A hindurchgeht, so werden offenbar C und E in diesem einen Punkte zusammenfallen, die Geraden AC und AE oder c und e werden also verschwinden. Das Verhältnis oder die Gleichung $\frac{x-c}{y} = \frac{c}{e}$ gestaltet sich also zu $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ um. In dem vorliegenden Falle wird also, vorausgesetzt, daß auch er unter die allgemeine Regel fällt, x – c = x sein. Dennoch aber werden c und e nicht im absoluten Sinne ‚Nichts' sein, da sie ja zueinander stets das Verhältnis von CX: XY bewahren, oder, mit anderen Worten: das Verhältnis zwischen dem Sinus von 90° oder dem Radius, und der Tangente des Winkels in C, den wir bei der Annäherung von EY an A als konstant angenommen haben. Wären nämlich c und e in diesem Kalkül für den Fall des Zusammenfallens der Punkte C, E, A im absoluten Sinne Nichts, so würden sie, da ein Nichts denselben Wert hat, wie ein anderes, einander gleich sein, und aus der Gleichung oder dem Verhältnis $\frac{x}{y} = \frac{c}{e}$ ergäbe sich $\frac{x}{y} = \frac{0}{0} = 1$, d. h. es wäre x gleich y, was ein offenbarer Widersinn ist, da unserer Annahme nach der Winkel nicht = 45° sein sollte. Die Größen c und e werden also in diesem algebraischen Kalkül nur vergleichsweise, mit Bezug auf x und y, als Nichts gerechnet, besitzen jedoch untereinander ein algebraisches Verhältnis und werden als Infinitesimale behandelt, wie die Elemente, die wir in unserem Differential-Kalkül bei den Koordinaten der Kurven annehmen, d. h. wie momentane Zuwüchse oder Abnahmen. So findet man schon in dem Kalkül der gewöhnlichen Algebra die Spuren des transcendenten Kalküls der Differenzen und dieselben Eigentümlichkeiten, an denen manche Gelehrte hier Anstoß nehmen."[8]

[8] Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, übersetzt von A. Buchenau, hrsg. von Ernst Cassirer, Hamburg 1966, S. 101-103. Vgl. auch PMS, S. 65.

Zwischen dieser geometrischen Demonstration und dem in der Figur (1) dargestellten ursprünglichen geometrischen Verfahren der Differenzierung eine klare Analogie aufweisen. Die Bewegung der Linie EY zu dem Punkt A ist im Prinzip der Bewegung des Punktes Q zu P – demnach der ständigen Verkleinerung des Dreiecks $\Delta x \Delta y A'B'$ bis zu seinem Verschwinden am Punkt P – durchaus analog. Wenn aber durch diese Bewegung die unendlich kleinen Größen zustande kommen, kann diese Bewegung keine gewöhnliche Bewegung sein; d. h. sie kann keine gleichförmige oder ggf. beschleunigende Bewegung sein, durch welche sich die Linie (EY) dem Punkt (A) bloß nähert und durch ihn hindurchgeht, sondern sie ist unbedingt *eine besondere Form der Retardation*, indem sich die Linie (EY) dem Punkt (A) unendlich nähert.[9] Leibniz zeigt, dass wenn die sich bewegende Linie den Punkt A erreicht, verschwinden die unendlich kleinen Größen und damit ihre ursprüngliche Proportion, nämlich $\frac{c}{e} \neq 1$. Denn am Punkt A entsteht die Proportion $\frac{c}{e} = \frac{0}{0} = 1$ (nach Leibniz), die der ursprünglichen und in der Bewegung der Linie durchaus erhaltenen Proportion ($\frac{c}{e} \neq 1$) widerspricht. Allerdings ist $\frac{0}{0} = 1$ und damit die Gleichsetzung zweier Größen, die nicht existieren, eine von vornherein ungereimte Annahme. Der Kern des Leibnizschen Arguments ist – abgesehen von einer solchen Ungereimtheit –, dass, damit die ursprüngliche Proportion der Größen (c und e) erhalten bleibt, diese Größen als unendlich Kleinen existent sein und als solche behandelt werden müssen. Aber eine derartige Existenz ist eine ewige Existenz, die sich nur aus der unendlichen Annäherung der Linie zu dem Punkt (A), der den Grenzwert oder Limes dieser Bewegung bildet, ergeben kann. Der Modus dieser unendlichen oder unaufhörlichen Existenz des unendlich Kleinen, worauf Leibniz durch diese geometrische Demonstration verweist, ist offensichtlich ein Prozessmodus. Demnach ist hier keine aktual-unendlich Kleine, die eine diskrete Finalität erlangt, sondern notwendig eine potentiell-unendlich Kleine – bzw. eine sich im *unendlichen* Prozess der Verkleinerung oder Verminderung *realisierende* unendlich kleine Größe – vorgestellt. Diese geometrische Beweisführung des unendlich Kleinen ist ein treffender Beleg dafür, dass Leibniz

[9] Bei einer gewöhnlichen Bewegung ist leicht zu sehen, wie die Verkleinerung der Strecken c (AC) und e (AE) gemäß dem Winkel ACE (oder XCY) ungleich sind. Wenn $\angle$ ACE < 45° ist, wird die Strecke AC (c) bei der Bewegung der Linie *schneller* kleiner als die Strecke AE (e); in diesem Fall bewegt sich der Kreuzungspunkt der Linie EY mit AX schneller als der Kreuzungspunkt derselben Linie mit EA. Daraus lässt sich leicht nachvollziehen, wie die Größen c und e verschwinden, wenn die Linie (EY) den Punkt A erreicht, obwohl bis dahin das Verhältnis $\frac{c}{e} > 1$ erhalten bleibt. Aber wenn wir eine *letzte* Instanz dieses Verschwindens vorzustellen suchen, taucht das Problem des unendlich Kleinen auf – aufgrund der ursprünglichen Ungleichheit zwischen den Größen c und e, wie Leibniz es darstellte.

philosophisch und mathematisch die Lehre des potentiell-unendlich Kleinen vertrat. Sie belegt auch eine potentielle Vorstellung vom Grenzwert oder Limes bei Leibniz, obwohl er später von Bernoulli und vor allem von Cauchy in der Entwicklungsgeschichte der Infinitesimalrechnung konzeptuell und operational etabliert wurde.

Aber in dem Verfahren der Differenzierung wurde sowohl bei Leibniz als auch bei Newton das im Prinzip unendlich fortbestehende Faktum des unendlich Kleinen, dargestellt in der arithmetisch-algebraisch etablierten Formel $\Delta x \rightarrow 0$, eliminiert, indem der unendlich kleine aber *variable* Zuwachs Δx letztendlich annulliert bzw. ihm der Wert Null zugeschrieben wurde.[10] Dadurch eliminiert man nicht nur Δx, sondern auch eine unendliche Prozessualität $\Delta x \rightarrow 0$ (das Tendieren des sich verkleinernden unendlich kleinen Zuwachs zu Null) aus dem Verfahren der Differenzierung. Eine derartige Eliminierung des unendlich Kleinen verweist eindeutig auf eine logische Ungereimtheit, die man *absichtlich* in diesem ursprünglichen

[10] Gerade dieser problematische Schritt im ursprünglichen Verfahren der Differenzialrechnung bei Newton und Leibniz wurde von dem Philosophen Bischof Georg Berkeley in seiner Streitschrift *The Analyst* (1734) in Frage gestellt. George Berkeleys Polemik gegen die Fluxionslehre Newtons richtet sich auf die durchaus problematische Annahme des unendlich Kleinen, deren Einfügung in dem Verfahren der Infinitesimalrechnung nicht nur durch eine einmalige Operation, sondern auch in sukzessiven Fluxionen geschehen kann, und auf eine fehlerhafte Logik des Verfahrens, indem man eine wahre Konklusion aus falschen Prämissen durch deren Ausgleich, sogar gegenseitige Kompensierung, abzuleiten sucht: „Wie nun die Wahrnehmung äußerst kleiner Gegenstände unseren Sinnen Anstrengung und Verlegenheit bereitet, so gerät auch die Einbildungskraft, eine Fähigkeit, die ja auf den Sinnen beruht, bei dem Versuch, klare Ideen von den kleinsten Zeitteilchen oder den kleinsten darin erzeugten Inkrementen zu bilden, in große Anstrengung und Verlegenheit; und noch viel mehr bei dem Versuch, Momente oder jene Inkremente von fließenden Größen in *status nascendi*, im allerersten Ursprung oder Anfang ihrer Existenz, bevor sie endliche Teilchen werden, zu begreifen. Und es scheint noch schwieriger, die abstrakten Geschwindigkeiten dieser entstehenden, unvollständigen Entitäten zu begreifen, doch die Geschwindigkeiten der Geschwindigkeiten – die zweiten, dritten, vierten und fünften Geschwindigkeiten usw. – übersteigen, wenn ich nicht irre, jedes menschliche Verständnis. [...] Eine zweite oder dritte Fluxion ist wohl gewiß in jeder Hinsicht ein dunkles Geheimnis. Die Anfangsgeschwindigkeit einer Anfangsgeschwindigkeit, die entstehende Zunahme einer entstehenden Zunahme, d. h. von etwas, was keine Größe besitzt, – nehmen sie es, in welcher Hinsicht Sie wollen, die klare Vorstellung davon wird, wenn ich nicht irre, als unmöglich erkannt werden. Ich fordere jeden denkenden Leser auf, zu prüfen, ob es sich so verhält oder nicht. Und wenn schon eine zweite Fluxion unbegreiflich ist, was sollen wir von dritten, vierten, fünften Fluxionen usw. ohne Ende denken? [...] Leibniz und seine Nachfolger machen sich bei ihrem »Differentialkalkül« (*calculus differentialis*) keinerlei Sorge, unendlich kleine Größen erst vorauszusetzen und dann wieder zu beseitigen. [...] Dieser umgekehrte Weg, Ihre Prinzipien durch Ihre Konklusionen zu beweisen, wäre für Sie eigentümlich, mein Herr, und geht ebenso gegen die Regeln der Logik. Die Wahrheit der Konklusion wird weder die Form noch den Inhalt eines Schlusses als wahr erweisen; es könnte nämlich trotz fehlerhafter Folgerung oder falscher Prämissen die Konklusion wahr sein, wenn auch nicht aufgrund dieser Folgerung oder dieser Prämissen. Ich meine, in jeder anderen Wissenschaft beweisen die Leute ihre Konklusionen mit ihren Prinzipien und nicht ihre Prinzipien mit den Konklusionen. [...] Ich streite mich nicht über Ihre Konklusionen, sondern nur über Ihre Logik und Ihre Methode." Berkeley, Georg: Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik, Frankfurt 1969, S. 89-103. Das gänzliche Verschwinden der ursprünglich eingeführten unendlich kleinen Größen wird geometrisch – bei Newton und bei Leibniz – als eine Koinzidenz zwischen einem Punkt und einem unendlich kleinen Dreieck (dessen Seiten die unendlich kleinen Strecken bilden) dargestellt. Diese Koinzidenz, in der ein ausgedehntes Dreieck in einem ausdehnungslosen Punkt vorgestellt wird, entzieht sich unserem Erkenntnisvermögen, wie Berkeley es kritisiert: „Also wird ein Punkt als ein Dreieck betrachtet, oder es wird angenommen, in einem Punkt sei ein Dreieck gebildet, was zu begreifen ganz unmöglich erscheint." Berkeley, a.a.O., S. 120. Vgl. auch PMS, S. 60.

Verfahren der Differenzierung zuließ. Hier könnte man zwei bestimmte Beweggründe erkennen, die Leibniz zu diesem Schritt – und folglich zum Absehen der oben erörterten logischen Ungereimtheit des Verfahrens – veranlasst hätten. Erstens setzt die Fortexistenz des unendlich kleinen Zuwachs Δx eine unendliche Prozessualität oder *Dynamik* seines Verschwindens ($\Delta x \to 0$) voraus, die im Gebiet der (Euklidisch-Kartesischen) Geometrie, in dem man mit statischen Strukturen operiert, kaum einzubeziehen ist. $\Delta x \to 0$ als eine unendliche Prozessualität würde es erheblich erschweren, dass man aus diesem Verfahren der Differenzierung ($\text{Lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$,) eine mehr oder weniger endliche Formel $\frac{dy}{dx}$ erlangen und sie weiterhin verwenden kann. Man zielt hier offensichtlich auf eine Formel ab, die zwar aus der unendlichen Dynamik des Prozesses ($\Delta x \to 0$) zustande kommt, die aber das *potentiell* – im Prozess realisierende – unendlich Kleine (Δx) in einer diskreten und als solche *aktualen* Entität des dx *begräbt*. Zweitens setzt die Integralrechnung, die der Differenzialrechnung folgt, die aktuale Diskretion des unendlich Kleinen voraus. Falls das unendlich Kleine als potentiell-unendlich Kleine vorgestellt wird und demnach die Finalität einer diskreten Größe nie erlangt, kann eine Integralrechnung, in der man von den diskret *vorhandenen* Infinitesimalen ausgeht, nicht durchgeführt werden. Erst muss das sich Befinden des Infinitesimalen im unendlichen Prozessmodus aufhören, um mit der inversen Operation der Infinitesimalrechnung, nämlich der Integration, beginnen zu können. Die unendliche Prozessualität in der Vorstellung vom Potentiell-Unendlichen verhindert es, diesen Prozessmodus umzudrehen und damit die diskreten Größen zu erzeugen.

Ein historisch tradierter Beweggrund für die *strategische* Annullierung des unendlich Kleinen in dem ursprünglichen geometrischen Verfahren der Differenzierung bei Newton und Leibniz scheint der allgemeine Gebrauch der Infinitesimalrechnung in ihrer Entstehungsgeschichte zu sein, nämlich die Messung der kurvigen und irregulären diskreten Flächen und Volumen. Die Messung der Fläche eines Kreises oder einer irregulären kurvigen Form sowie die Messung der Volumen einer Kugel, eines Zylinders usw. bedingt die *differentiale Teilung* dieser Formen zu unendlich kleinen diskret-finalen Größen und ihre Integration bzw. integrale Synthetisierung. Zur Integralrechnung, dargestellt in ihrer elementaren Form als $\int dx = x$, sollten demnach die aktualen bzw. diskret-final unendlich kleinen Größen – als dx –, die sich aus dem anfänglichen Verfahren der Differenzierung ergeben sollen, zur Verfügung stehen. Obwohl die Infinitesimalrechnung sich bloß arithmetisch vorstellen lässt, beherrschte das geometrische Verfahren die gesamte Entwicklungsgeschichte der Infinitesimalrechnung – von der ägyptischen und griechischen Antike bis in die Moderne. Die charakteristisch diskrete Formhaftigkeit in der Geometrie lässt sich auf den Grundzug dieser Wissenschaft, nämlich die Räumlichkeit, zurückführen. Geometrie ist im Grunde eine Raumwissenschaft. Die Einführung der *mechanischen* Bewegung im Kartesisch-geometrischen Koordinatensystem fügt ein der Geometrie bis dahin unbekanntes Faktum, nämlich die *Zeit* und ihre Darstellung in der mechanischen Bewegung, zu dem ursprünglichen geometrischen Verfahren der Infinitesimalrechnung hinzu.

Das Faktum der Zeit

Besonders in Newtons Methode der Fluxionen tritt das Faktum der Zeit viel deutlicher in Erscheinung. Denn der Untersuchungsgegenstand selbst ist ein rein mechanisches Phänomen, nämlich die momentane Bewegung, die ein treffendes Beispiel für die Infinitesimalen bzw. für die in der *infinitesimalen Zeitgröße* entstehende Geschwindigkeit (im Rahmen der Mechanik) ist. Newton schien *rein intuitiv* festzustellen, dass man sich die momentane oder augenblickliche Bewegung, aus der ein sich bewegender Körper zum Ruhestand kommt, notwendigerweise als eine infinitesimale und als solche als eine verschwindende *Bewegungsgröße* vorzustellen hat. Es war offensichtlich kein bloßes geometrisches Konstrukt, sondern das Faktum der rein mechanischen Bewegung – wie es in der physischen Welt zutage tritt –, das der Fluxionslehre Newtons zugrunde lag. Als Wissenschaftler der Mechanik schien Newton in erster Linie die *Phänomenalität* des Infinitesimalen aus einem mechanischen Phänomen, nämlich aus der momentanen Bewegung, zu vereinzeln. Dank dieses Untersuchungsgegenstands stellte Newton die infinitesimale Variation im *zeitlichen* Rahmen vor:

> “For by the ultimate velocity is meant that, with which the body is moved, neither before it arrives at its last place, when the motion ceases nor after but at the very instant when it arrives... the ultimate ratio of evanescent quantities is to be understood, the ratio of quantities not before they vanish, not after, but with which they vanish”[11]

Bewegung ist kein bloß zeitliches, sondern ein räumlich-zeitliches Phänomen; die Geschwindigkeit und ihre Variation – Beschleunigung und Retardation – ist demnach in räumlich-zeitlichen Verhältnissen zu beobachten sowie sich vorzustellen. Allerdings betont

[11] Newton, Isaac: The Principia (Book 1: Of the motion of bodies, Section 1), übersetzt von I. Bernard Cohen und Anne Whitman, University of California Press, Berkeley 1999.

Newton in dieser Betrachtung den zeitlichen Rahmen des Infinitesimalen in der momentanen Bewegung. Die verschwindenden Größen (evanescent quantities) als verschwindende oder infinitesimale Geschwindigkeitsgrößen werden vielmehr im zeitlichen Rahmen zu fixieren versucht. Nicht *vorher* oder *nachher* der *Instanz*, in welcher der Körper zur Ruhe kommt, sondern die Instanz selbst ist es, die den *Prozess* des Infinitesimalen bzw. des Verschwindens der infinitesimalen Geschwindigkeitsgröße *einverleibt*.

Infinitesimalrechnung im Prozessmodus wurde bekanntlich in verschiedenen mathematisch-wissenschaftlichen Kontexten vorgestellt. Das ursprüngliche Verfahren der Infinitesimalrechnung, in dem beliebig mit dem potentiell-unendlich Kleinen operiert wurde, ließe sich in arithmetisch-algebraischer, geometrischer und mechanischer Darstellungsweise vorstellen. Leibniz stellte die Differenzierung zunächst als ein arithmetisch-algebraisches Verfahren vor, bevor er zu den geometrischen Vorstellungs- und Darstellungsweisen kam. Newtons Fluxionslehre war offensichtlich das Ergebnis einer rein mechanischen bzw. dynamischen Vorstellungsweise der Infinitesimalen. Allerdings ist der Prozessmodus der Differenzialrechnung – der Prozesse des unendlich-klein-Werdens einer Größe – sowohl in der arithmetisch-algebraischen als auch in den geometrischen Vorstellungs- und Darstellungsweisen ein mechanischer. Wenn wir versuchen, uns den Prozess des unendlich Klein-Werdens arithmetisch in einer Reihe, z. B: $1 - ½ - ¼ - 1/8 - 1/16 - \ldots \to 0$, oder in der oben erörterten Bewegung eines Punktes entlang einer Kurve zu einem anderen Punkt (oder in der Begradigung einer Kurve zu dem Grenzwert einer geraden Tangente) vorzustellen, *visualisieren* wir letztendlich eine unendlich-klein werdende Geschwindigkeit bzw. eine sich unendlich retardierende Bewegung zu einem diskreten Grenzwert. Die rein arithmetische Vorstellung der Infinitesimalen lässt sich algebraisch sowie visuell-geometrisch darstellen (und umgekehrt). Das allgemeine Faktum einer derartigen transdisziplinären Darstellung ist die Bewegung, die den Prozesscharakter der Differenzierung ausmacht. Daher können wir annehmen, dass in der Infinitesimalrechnung die mechanische Vorstellungsweise überhaupt einen Vorrang vor der geometrischen und arithmetisch-algebraischen Vorstellungsweise hat. Denn das *Faktum der Zeit* ist unmittelbar in die Vorstellung von mechanischer Bewegung einbezogen. Was Newton beschreibt – also das Verschwinden der infinitesimalen Geschwindigkeitsgrößen, wenn der Körper zum Stillstand kommt – ist eigentlich der Prototyp des geometrischen und arithmetisch-algebraischen Verfahrens der Differenzierung.

Die ursprüngliche Newtonsche *Intuition* der Differenzierung war eine rein mechanische bzw. dynamisch-strukturelle Intuition, in der nicht mit geometrischen Formen oder abstrakt-algebraischen oder arithmetischen Entitäten, sondern mit den realen Naturgegenständen gedacht wurde. Newton entwickelte das Instrumentarium der Infinitesimalrechnung, um bekanntlich das Prinzip bestimmter mechanischer Prozesse in der Natur – auf der Erde und im All – zu studieren und verwendete sie zielgerichtet bei seiner Lösung des Keplerschen Flächensatzes (der Planetenbewegung auf elliptischen Bahnen). Die Korrelation zwischen der ursprünglichen *intuitiven* Vorstellung und der geometrisch-mathematischen Darstellung scheint bei den meisten mechanischen Axiomen, die Newton in *Principia* einführt, ein durch das Phänomen vorausgesetztes Charakteristikum zu sein. Allerdings erlangt diese mechanische Intuition bzw. dynamische Vorstellbarkeit bei Newton – in seinem ursprünglichen Verfahren der Differenzierung – einen klaren Vorrang vor der geometrischen Darstellung. Bei der Auslegung des Infinitesimalen – der verschwindenden Größen – wird jene Diskretheit des geometrisch oder arithmetisch darzustellenden Quantums durch die reine Kontinuität der Bewegung abgebaut. Newton schien gerade zu diesem Zweck ein mechanisches Phänomen wie Bewegung als den primären Untersuchungsgegenstand zu wählen, wie vorher angedeutet wurde:

„It is objected, that there is no ultimate proportion of evanescent quantities; because the proportion, before the quantities have vanished, is not ultimate; and, when they have vanished, is none. But, by the same argument, it might as well be maintained, that there is no ultimate velocity of a body arriving at a certain place, when its motion is ended: because the velocity, before the body arrives at the place, is not its ultimate velocity; when it has arrived, is none. But the answer is easy: for by the ultimate velocity is meant that, with which the body is moved, neither before it arrives at its last place, when the motion ceases, nor after; but at the very instant when it arrives; that is, that very velocity with which the body arrives at its last place, when the motion ceases. And, in like manner, by the ultimate ratio of evanescent quantities is to be understood the ratio of the quantities, not before they vanish, nor after, but that with which they vanish. In like manner, the first ratio of nascent quantities is that with which they begin to be: and the first or last sum is that, with which they begin to cease to be, or to be augmented or diminished. There is a limit, which the velocity at the end of the motion may attain, but cannot exceed. This is the ultimate velocity. And there is a like limit in all quantities and proportions that begin and cease to be. And since such limits are certain and definite, to determine the same is a problem strictly geometrical. But whatever is geometrical we may be allowed to use in determining and demonstrating any other thing that is likewise geometrical.“[12]

[12] Cajori, Florian: A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain. From Newton to Woodhouse, Chicago 1919, S. 9-10.

Newton bekämpfte zugunsten seiner *mechanischen Intuition* des Infinitesimalen die *charakteristische* Diskretion in der geometrischen Darstellung. Die Einführung der Bewegung in Geometrie setzt ein anderes Prinzip der Erzeugung voraus, nach dem die geometrischen Grundformen nicht durch die Zusammensetzung diskreter Entitäten, sondern in einer lückenlosen mechanischen bzw. dynamischen Kontinuität der Bewegung entstehen. Demnach sind die Fluxionen im Newtonschen System der Differenzierung keine unendlich-diskreten Quanten, sondern die unendlich-kleine und -kontinuierliche Geschwindigkeit der Bewegung selbst:

„I consider mathematical quantities in this place not as consisting of very small parts; but as described by a continued motion. Lines are described, and thereby generated not by the apposition of parts, but by the continued motion of points; superficieses by the motion of lines; solids by the motion of superficieses; angles by the rotation of the sides; portions of time by a continual flux: and so in other quantities. These geneses really take place in the nature of things, and are daily seen in the motion of bodies. And after this manner the ancients, by drawing moveable right lines along immoveable right lines, taught the genesis of rectangles.

Therefore considering that quantities, which increase in equal times, and by increasing are generated, become greater or less according to the greater or less velocity with which they increase and are generated; I sought a method of determining quantities from the velocities of the motions or increments, with which they are generated; and calling these velocities of the motions or increments *Fluxions*, and the generated quantities *Fluents*, I fell by degree upon the Method of Fluxions, which I have made use of here in the Quadrature of Curves, in the year 1665 and 1666.“ [13]

Es scheint, dass Fluxionen gegenüber Fluents, die durch Fluxion erzeugte Quanten sind, eher durch das Faktum der Zeit in der Bewegung bestimmt ist. *Fluxionen* als *augments of the fluents* sind demnach im strengen Prozess- bzw. Bewegungsmodus gedacht und wurden in unendlichen Zeitgrößen (particles of time) *erzeugt*:

„Fluxions are very nearly as the augments of the fluents generated in equal but very small particles of time, and, to speak accurately, they are in the *first ratio* of the nascent augments.“[14]

Das *Augment* in der Newtonschen Vorstellung von Fluxionen kann eine Vermehrung oder eine Verminderung, bzw. eine unendlich kleine Beschleunigung oder Retardation der Geschwindigkeit, andeuten. Diese Zweideutigkeit scheint auch aus einer rein mechanischen Vorstellungsweise zu entstehen. Vorher haben wir erörtert, wie Newton die Vorstellung von Fluxionen aus einem mechanischen Model der unendlich kleinen Retardation eines Körpers,

---

[13] Ebd., S. 21.
[14] Ebd., S. 22.

wenn er zum Ruhezustand kommt, entwickelt. Im umgekehrten Fall – d. h. wenn der Körper *beginnt* sich zu bewegen – ist dann eine momentane unendlich kleine Beschleunigung im unendlich kleinen Zeitraum nachzuvollziehen. In beiden möglichen Fällen zielt Newton nicht auf ein diskretes Quantum als unendlich kleine Größe und deren Verhältnisse (ratios) zu einem ähnlichen Quantum, sondern auf eine verschwindende Geschwindigkeit, die diese unendlich kleinen *Fluents* in einem unendlich kleinen Zeitraum zustande bringt. Gerade in diesem Leitmotiv sieht Florian Cajori den Unterschied der Newtonschen Fluxionslehre von der Methode der Differenzialrechnung Leibnizens:

„At first Newton used infinitesimals (infinitely small quantities), as did Leibniz and other mathematicians of that age. As early as 1665, when Newton was a young man of twenty-three, he used them and speaks of "blotting them out". He uses infinitesimals in the *Principia* of 1687 and in his account of the quadrature of curves in Wallis´s *Algebra* of 1693, where Newton speaks of himself in the third person. It is worthy of emphasis, in contrast to Leibniz, that Newton uses only infinitesimal of the *first* order. Moreover, as De Morgan remarked long ago, "the early distinction between the systems of the two is this, that Newton, holding to the conception of the *velocity* or *fluxion*, used the infinitely small increment as a means of determining it; while, with Leibniz, the relation of the infinitely small increments is itself the object of determination."[15]

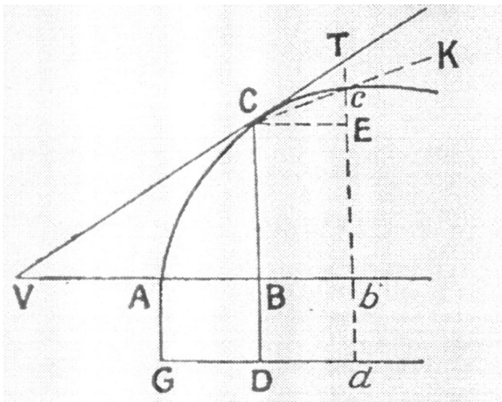
Cajori bemerkt zusätzlich, dass der Gebrauch des Begriffs *moment* in der Newtonschen Erörterung des Infinitesimalen sich auf eine Zeitbestimmung bezieht und des Weiteren auf den allgemeinen Gebrauch des Begriffs „momentus" in *Principia* – in einem mechanischen Kontext – zurückzuführen ist:

„As early as 1665, Newton speaks of describing an „infinitely little line" in "one moment", and then uses the expression "in the next" moment. Here the "moment" cannot mean a point of time, destitute of duration; it means an infinitely small duration, an infinitesimal of time. Doubtless this use of "moment" with reference to time suggested the more extended and general use of the term "momentum" or "momenta" as found in the *Principia* and later publications."[16]

Indem die Fluxionen unendlich kleine Geschwindigkeitsvariationen in gleichen unendlich kleinen Zeitintervallen sind, sollen sie eine sehr subtil variierende Bewegung bzw. eine unendlich kleine Beschleunigung oder Retardation darstellen. Daher ist eine gleichförmige Bewegung, die Erzeugungsmomente der Fluxionen zustande zu bringen, von vornherein unangemessen. Die Beschleunigung und Retardation lassen sich leicht als ein Prozess von oder zu einem Grenzwert vorstellen. Aber die gleichförmige Bewegung kann, obwohl sie sich

[15] Ebd., S. 32-33.
[16] Ebd., S. 33.

in unendlich kleine Raum- und Zeitgrößen einteilen lässt, die *prozessuale* Erzeugung des unendlich Kleinen als Fluxionen kaum hinreichend realisieren. Denn die gleichförmige Bewegung, die weder Beschleunigung noch Retardation ist, bildet im Grunde eine Zwischenphase der Bewegung zwischen einer Anfangsphase der unendlich kleinen Beschleunigung, in der ein Körper sich zu bewegen beginnt, und einer Endphase der unendlich kleinen Verlangsamung, in der der Körper zum Ruhezustand kommt. Dies scheint bei Newton bloß übersehen zu werden, indem er sich die einzuführende Bewegung in seiner geometrischen Demonstration der Fluxionen als eine gleichförmige Bewegung vorstellt:



Figur 5

„Thus if the area's ABC, ABDG (in Figur 5, a. d. Verf.) be described by the ordinates BC, BD moving along the base AB with an uniform motion, the fluxions of these area's shall be to one another as the describing ordinates BC and BD, and may be expounded by these ordinates, because that these ordinates are as the nascent augments of the area's.

Let the ordinate BC advance from it's place into any new place *bc*. Complete the parallelogram BCE*b*, and draw the right line VTH touching the curve in C, and meeting the two lines *bc* and BA produc'd in T and V: and B*b*, E*c* and C*c* will be the augments now generated of the absciss AB, the ordinate BC and the curve line A*c*; and the sides of the triangle CET are in the *first ratio* of these augments considered as nascent, therefore the fluxions of AB, BC and AC are as the sides CE, ET and CT of that triangle CET, and may be expounded by these same sides, or, which is the same thing, by the side of the triangle VBC, which is similar to the triangle CET.

It comes to the same purpose to take the fluxions in the *ultimate ratio* of the evanescent parts. Draw the line C*c*, and produce it to K. Let the ordinate *bc* return into it's former place BC, and when the points C and *c* coalesce, the right line CK will coincide with the tangent CH, and the evanescent triangle CE*c* in it's ultimate form will become similar to the triangle CET, and it's evanescent sides CE, E*c* and C*c* will be *ultimately* among themselves as the sides CE, ET and CT of the other triangle CET, are, and therefore the fluxions of the line AB, BC and AC are in the same ratio. If the points C and *c* are distant from one another by any small distance, the right line CK will likewise be distant from the tangent CH by a small distance. That the right line CK may coincide with the tangent CH, and the ultimate ratios of the lines CE, E*c*, and C*c* may be found, the points C and *c* ought to coalesce and exactly coincide. The very smallest errors in mathematical matters are not to be neglected."[17]

Dieses geometrische Verfahren der Differenzierung lässt sich der vorher erörterten konventionellen geometrischen Darstellung der Differenzierung (Figur 1, die in vielen Schulbüchern zu finden ist) leicht analogisieren. Hier verschwinden die unendlich kleinen Größen durch die Bewegung – der Linie und der Punkte. Das verschwindende (evanescent) Dreieck CEc und seine *endgültige* Koinzidenz mit dem Dreieck CET ereignet sich *eigentlich* in einem unendlichen Prozess der Verminderung der Größen, dargestellt durch die Verminderung der linearen Strecken (CE, Ec, ET oder CT), der Kurve Cc sowie der Flächen der Dreiecke CET und CEc. Die finale Form des sich verkleinernden Dreiecks CEc, in der es dem Dreieck CET ähnlich oder sogar mit ihm identisch wird, kann aber nicht existieren, denn die endgültige Koinzidenz zwischen diesen Dreiecken *liegt* in einem Punkt (mit dem alle bewegenden Punkte, E, c und T, koinzidieren), der keine Ausdehnung hat.[18] Dasselbe Problem taucht in der geläufigen Darstellung der Differenzierung (Figur 1) auf, wenn der bewegende Punkt Q mit dem Limes bzw. dem Punkt P koinzidiert. Daher kann die Bewegung der Linien und Punkte in diesen ursprünglichen und propädeutischen Darstellungen der Differenzierung keine gleichförmige, sondern notwendigerweise nur eine unendlich retardierende Bewegung sein. D. h. das dynamische Tendieren der sich bewegenden Punkte und der sich verkleinernden Größen, dargestellt in dem oben erörterten Newtonschen Modell als c → E, CE → Cc, Cc → CT usw. und in dem geläufigen geometrischen Verfahren als Δx oder $\Delta y \rightarrow 0$ oder Q → P, ist eine besondere Form der unendlichen Verlangsamung einer Bewegung zu einem *unbewegten* und *diskreten* Limes, also zu einem Grenzwert, der in Wirklichkeit nie erreicht wird. Allerdings führt Newton in diesem seinem geometrischen Verfahren eher eine gleichförmige Bewegung ein, dargestellt durch die Ausdrücke: „moving along the base AB with an uniform motion" oder „Let the ordinate *bc* return into it's former place BC".

Hierauf merken wir, dass es Newton trotz seiner charakteristischen Neigung zu einer ursprünglich *mechanischen* Vorstellung der Differenzierung im Prozessmodus kaum gelang, die wahre Natur der Dynamik bzw. der dynamischen Bewegung, die das Infinitesimale erzeugt, zu bestimmen. Zwar stellte Newton das unendlich Kleine im Prozessmodus und demnach primär im *zeitlichen* Rahmen vor, aber er schien neben dem Faktum der Zeit den

[17] Ebd., S. 22-23.
[18] Vgl. Barkeleys Kritik in der Anmerkung 10.

besonderen mechanischen Charakter der Bewegung, die eine unendliche Verlangsamung zu einem Limes ist, kaum hinreichend zu berücksichtigen. Bei den weiteren mathematischen Untersuchungen der Infinitesimalrechnung in ihrer Entwicklungsgeschichte schien demnach dieser Mangel an dem Newtonschen und Leibnizschen Verfahren immer wieder Resonanz zu finden; die Mathematiker Bernoulli und Cauchy behandelten im Rahmen der Infinitesimalrechnung vorzüglich das Grenzwertverfahren. Die Vorstellung vom Grenzwert setzt unmittelbar die unendliche Tendenz zum Grenzwert im Modus einer unendlichen Bewegung voraus, deren mechanischer Wesenszug die unendliche Verlangsamung ist.

Die *prozessuale Erzeugung* des Grenzwertes

Wie vorher erörtert wurde, lässt sich das Grenzwertverfahren in seiner fundamentalen Form verschiedenartig – d. h. arithmetisch, algebraisch und geometrisch – darstellen. Das unendlich Klein-Werden eines Wertes bzw. die Tendenz dieses Wertes gegen Null lassen sich wiederum in verschiedenen arithmetischen Reihen darstellen:

½ , ¼ , 1/8 , 1/16 …… → 0
oder
⅓, 1/9 , 1/27… → 0
oder
¼, 1/16, 1/64 … → 0 etc.

Wenn aber ein anfänglicher arithmetischer Wert angenommen wird, aus dem diese Quanten in einer Reihe kontinuierlich subtrahiert werden, entfaltet sich daraus ein anderes Bild des Grenzwertverfahrens:

1 – 1/n

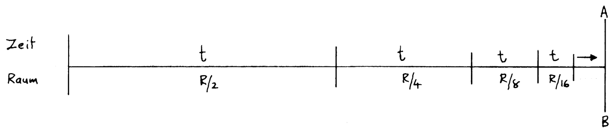
1 – ½ – ¼ – 1/8 – 1/16 – ………………
1 – ⅓ – 1/9 – 1/27 – ………………….
1 – ¼ – 1/16 – 1/64 – ……………………

All diese verschiedenen arithmetischen Reihen stellen das Grenzwertverfahren dar. Worin liegt aber der Unterschied zwischen ihnen? Wenn wir die oben dargestellten arithmetischen

Operationen durchführen, erkennen wir, dass nur die Reihe 1 – ½ – ¼ – 1/8 – 1/16 – 1/32 … (i.e. $1 - 1/2^n - \ldots$, indem *n* die Werte 1, 2, 3, 4… nimmt) die unendliche Tendenz des sich unendlich verkleinernden Wertes gegen Null – zum Limes – demonstriert. Die beiden anderen Reihen stellen dagegen einen anderen arithmetischen Prozessmodus dar, in dem die Verkleinerung des arithmetischen Quantums *schneller* wird und folglich zu einem anderen Grenzwert > 0 (größer als oder *vor* Null) zu tendieren scheint. Bei der geometrischen Darstellung dieser Reihen würde diese schnellere Verkleinerung des Quantums als eine *schnellere Verlangsamung* erscheinen. Hier sehen wir, dass es im Grunde das Faktum der Zeit ist, das, dargestellt im Modus einer *mechanischen* Bewegung, das *Tendieren* im Grenzwertverfahren am ehesten kennzeichnet.

Die geometrische Darstellung der Reihe 1 – ½ – ¼ – 1/8 – 1/16 – …→ 0 als das Grenzwertverfahren bildet mehr oder weniger einen Prototyp der in dem geläufigen Verfahren der Differenzierung (in Fig. 1) dargestellten Bewegung des Punktes Q zu P. Hier können wir dieses Verfahren als eine bloß räumliche Einteilung einer gegebenen Strecke kaum betrachten; d. h. wir können in diesem Verfahren von dem Faktum der Zeit und der Bewegung nicht absehen. Denn die Erzeugung des unendlich Kleinen wird hier in einem *prozessualen Tendieren* eines unendlich klein-werdenden räumlichen Quantums gegen Null realisiert, dargestellt durch die *unendliche* Annäherung eines sich bewegenden Punktes an einen unbewegten bzw. räumlich fixierten Punkt. Eine derartige Realisation des unendlich Kleinen ist nicht nur ein bloß räumlicher Prozess – nämlich die unendliche Einteilung einer gegebenen Strecke –, sondern auch und zwar notwendigerweise ein zeitlicher, genauer, ein räumlich-zeitlicher Prozess der unendlichen Bewegung bzw. Retardation. Es ist der unendlich retardierende Punkt, der gegenüber einem Fixpunkt – also dem Grenzwert, zu dem er unendlich tendiert – das unendlich kleine Quantum *prozessual* erzeugt. Die Entstehung des unendlich kleinen Quantums ist demnach zugleich eine unendliche *Erzeugung* des unendlich Kleinen in einer unendlichen Retardation eines Punktes gegenüber einem Grenzwert; die Prozessualität einer derartigen Retardation ist prinzipiell eine zeitliche Bestimmung.

Obwohl wir hier den Grenzwert als geometrischen Fixpunkt *vorher* bestimmen, ist es letztendlich der Modus der Bewegung bzw. der Retardation des sich bewegenden Punktes, die *ihren Grenzwert*, zu dem der sich bewegende Punkt unendlich tendiert, *erzeugt*. D. h. für einen bereits gegebenen Grenzwert kann es *nur eine* bestimmte Retardation der Bewegung geben, damit der sich zum Grenzwert bewegende Punkt unendlich tendieren und dabei das unendlich Kleine – in einem Prozessmodus – erzeugen kann. Bei jeder Variation bzw. bei jeder Abweichung von diesem bestimmten Modus der Retardation entsteht ein *neuer Grenzwert*, zu dem die unendlich retardierende Bewegung *unendlich tendiert*. Was kann dann dieser bestimmte Modus der Retardation sein, die das unendliche Tendieren des sich bewegenden Punktes zu einem *vorgegebenen* Grenzwert bzw. Fixpunkt und damit die Erzeugung des unendlich Kleinen – gegenüber diesem Grenzwert – realisiert? Diese bestimmte Art der Bewegung lässt sich bei genauerer Betrachtung nur in einem einzigen Modus der Retardation darstellen, in der sich der bewegende Punkt in gleichen Zeitstecken immer die Hälfte der hinterlassenen Strecke bahnt (wie in der oben erörterten arithmetischen Reihe angedeutet ist). Figur (6) zeigt diesen *einzigen Modus* der Retardation in einer geometrisch-mechanischen Repräsentation:[19]



Figur 6

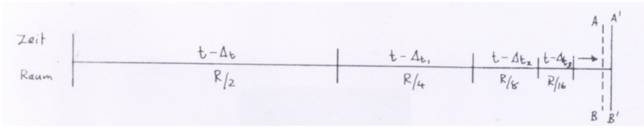
R = Raumstrecke

t = gleiche Zeitintervallen

Nur bei diesem Bewegungsmodus kann der sich bewegende Punkt zu einem vorgegebenen Grenzwert (AB) *unendlich* tendieren. Bei jeder Abweichung von diesem einzigen Verlangsamungsmodus *entsteht* ein neuer Grenzwert, zu dem der retardierende Punkt unendlich *tendiert*.

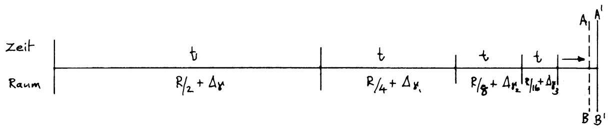
Wenn sich die Retardation des bewegenden Punktes vermindert, schiebt sich der Grenzwert – der Fixpunkt – nach hinten. Die Verschiebung des Grenzwertes gemäß dem Retardierungsmodus des sich bewegenden Punktes lässt sich im Allgemeinen folgendermaßen darstellen. Figur 6 ist eine geometrische Darstellung des Grenzwertverfahrens, in dem der sich bewegende bzw. retardierende Punkt zu einem Limes (AB) unendlich tendiert. Falls dieser einzige Modus der Retardation *weniger* wird, schiebt sich die Grenze – damit der Grenzwert – nach hinten (A´ B´). Dies kann im Rahmen der Zeit oder des Raumes dargestellt werden:

[19] Vgl. NSK, S. 172-174.



Figur 7

oder



Figur 8

Im umgekehrten Fall, in dem die Retardation mehr wird, schiebt sich die Grenze AB nach vorne. Das Prinzip dieses Grenzwertverfahrens, das sich aus diesem Phänomen der Grenzwertverschiebung ableiten lässt, besagt, dass es *primär* die Art der dynamischen Bewegung bzw. Retardation ist, die ihren Grenzwert, zu dem sie unendlich tendiert, *erzeugt*. Nun können wir dieses Prinzip auf das vorher erörterte geläufige geometrische Verfahren der Differenzierung, dargestellt in der Figur 1, übertragen. Der Rückgang des Punktes Q zu dem Fixpunkt P (dem Limes) ist zu dem oben dargestellten Darstellungsmodus analog. Der einzige Unterschied besteht darin, dass sich der Punkt Q (in der Figur 1) nicht auf einer geraden, sondern auf einer kurvigen Bahn bewegt bzw. unendlich retardiert. Die sich retardierende Bewegung des Punktes Q *bestimmt* letztendlich den Grenzwert, also der Punkt P, zu dem der Punkt Q unendlich tendiert. Gemäß den Abweichungen des Punktes Q von einem *bestimmten* Retardierungsmodus kann der Grenzpunkt P nach vorne oder nach hinten verschoben werden.

Bei der Übertragung des in den oben erörterten Modellen (Figuren 6, 7 und 8) demonstrierten Prinzips des Grenzwertverfahrens auf das geläufige geometrische Verfahren der Differenzierung werden wir mit einigen Problemen (einer solchen Analogie) konfrontiert. In dem geometrischen Verfahren der Differenzierung wird zunächst der Fixpunkt (P) auf der Kurve bestimmt und das Wachstum der Kurve zu dem Punkt Q für unendlich klein gehalten, dargestellt durch dessen unendlich kleines Wachstum auf Abszisse (Δx) und Ordinate (Δy). Es scheint einigermaßen ungereimt zu sein, dass wir einen bereits vorher bestimmten Fixpunkt im Verlauf des Verfahrens *flexibilisieren* und den oben erörterten bestimmten Retardierungsmodus auf eine unendlich kleine aber kurvige Strecke zu realisieren suchen. Allerdings kann das Problem des ursprünglichen unendlich kleinen Wachstums der Kurve (von P zum Q) gelöst werden, indem wir von der Bewegung des Punktes P (der die Kurve *erzeugt*) ausgehen. Denn das in dem gebräuchlichen Verfahren der Differenzierung dargestellte Grenzwertverfahren kann umgedreht werden. Die unendliche Annäherung des Punktes Q an den Punkt P, indem der Sekante A´ B´ zu seiner *Identität* mit der Tangente AB unendlich tendiert, lässt sich dann – gemäß dieser Umdrehung – als die unendliche *Tendenz* des sich bewegenden und die Kurve erzeugenden Punktes P von seiner Richtungsvariabilität zu seiner Richtungskonstanz betrachten. Denn der Punkt P *erzeugt* eine Kurve durch seine Richtungsvariabilität und eine Tangente durch seine Richtungskonstanz. Das Grenzwertverfahren, das von dem sich bewegenden Punkt ausgeht, wäre dann die unendliche und prozessual-kontinuierliche Verminderung der – ebenso unendlich kleinen – Disparität zwischen der Richtungsvariabilität des Punktes, die die Kurve erzeugt, und seiner Richtungskonstanz, dargestellt in seiner Erzeugung der Tangente (AB).[20]

Diese Improvisation im ursprünglichen Verfahren der Differenzierung bedingt in erster Linie eine unmittelbare Einbeziehung der Bewegung, die nicht bloß im Raum, sondern notwendigerweise in einem räumlich-zeitlichen Verhältnis zustande kommt. Im Ausdruck des unendlichen Tendierens gegen Null, $\Delta x \rightarrow 0$, impliziert das Zeichen $\rightarrow$ primär eine Bewegung bzw. eine unendliche Retardierung eines sich bewegenden Punktes, was neben dem Raum das Faktum der Zeit in sich einschließt. Der von Newton betonte Moment des Verschwindens (evanescent) ist *primär* eine zeitliche Bestimmung. Wenn dieser Moment ein unendlich kleiner *Zeitraum* ist, soll er als Δt in diesem Verfahren einbezogen werden. Das $\Delta x \rightarrow 0$ könnte demnach einer ebenso mathematisch-mechanischen Operation $\Delta t \rightarrow 0$ analogisiert werden.

In der Formel $\frac{dy}{dx} = \text{Lim}_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, die sich aus dem ursprünglichen geometrischen Verfahren der Differenzierung ableiten lässt, wird das rein operativ-kontinuierliche durch d/dx (den Operator) und durch $\Delta x \rightarrow 0$ (die Operation) dargestellt.[21] Wenn im Kontext der Differenzierung die Operation der unendlichen Verkleinerung räumlicher Extension, nämlich $\Delta x \rightarrow 0$, der Operation der unendlichen Verkleinerung der zeitlichen Dauer, nämlich $\Delta t \rightarrow 0$, analog ist, kann das hier eingeführte Faktum der *variierenden* Zeit die Variable x (die in dem ursprünglichen geometrischen Verfahren der Differenzierung die Variation der räumlichen

[20] Vgl. PMS., S. 104-106.
[21] Folgender Teil der Abhandlung ist ein Auszug aus NSK, S. 169-175.

Extension darstellt) entweder ersetzen, oder bloß supplementieren. Demnach lässt sich die ursprüngliche algebraische Formel der Differenzierung folgendermaßen umformulieren:

$$\frac{dy}{dt} = \text{Lim}_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

oder $$\frac{dy}{dxdt} = \text{Lim}_{\Delta x \to 0, \Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta t}$$

$$= \text{Lim}_{(\Delta x, \Delta t) \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - fx}{\Delta x \Delta t}$$

Hier bildet $\frac{d}{dt}$ den Operator einer *zeitlichen Differenzierung* und „dt" demgemäß ein *differentiale temporis*. In einem Prozess der unendlichen Differenzierung, in der die unendlich kleinen Größen Δx und Δt nicht eliminiert werden können, ist auch die hier eingeführte unendlich kleine Zeitdauer, Δt, unendlich bzw. *infinit* existent. Daraus lässt sich folgern, dass die Operation $\Delta t \to 0$ im Kontext der unendlichen Differenzierung der Operation $\Delta t \to \infty$ analog ist. Im Fall der Operation der unendlichen Verkleinerung der räumlichen Größe ($\Delta x \to 0$) kann der Wert Null als Grenzwert dieses unendlichen Prozesses angenommen werden. Ebenso bildet Null in der Operation $\Delta t \to 0$ – das prozessuale Verschwinden einer unendlich kleinen Zeitdauer – den Grenzwert der zeitlichen Differenzierung. Aber die unendliche Fortdauer der Zeit ist im Prinzip eine Dauer zur Infinität. Wenn der unendlich fortdauernde Prozess der zeitlichen Differenzierung im Rahmen der Infinitesimalrechnung, die die Differenzial- und Integralrechnung in sich einschließt, bearbeitet wird, erreichen wir die Formel: $\int dt = t = \infty$; d. h. der Integral des *differentiale temporis* ist die unendlich fortdauernde oder die infinite Zeit.

Das *differentiale temporis* vermögen wir in dieser Weise nur konzeptuell in das Verfahren der Differenzierung einzufügen. In der Praxis aber muss die zeitliche (temporale) Differenzierung als eine mathematische Operation ausgearbeitet werden. Im Rahmen der Kartesischen Koordinatengeometrie, in der das ursprüngliche Verfahren der Differenzierung zustande kam, ist eine temporale Variable oder eine *Zeitvariable* offensichtlich ein fremdes Element. Wir werden hierbei mit einem Problem konfrontiert, nämlich die Hinzufügung einer Zeitvariablen zu einem *Raum*koordinatensystem. x und y als Koordinaten eines Punktes in einem Raumkoordinatensystem stellen die *räumliche* Entfernung dieses Punktes von den zwei Achsen, Abszisse und Ordinate, dar, wogegen t die Zeitdauer der *gestaltenden* Operation in dem Raumkoordinatensystem ist. Wie kann die Zeitvariable „t“[22] in die *Domäne* der Raumvariablen, x und y, integriert werden? Die Hinzufügung der Zeitvariablen scheint hier den Status der Differenzierung als eine ursprünglich mathematische bzw. geometrisch-algebraische Operation maßgeblich zu verändern. Um die Zeit unmittelbar in dieses Verfahren der Differenzierung einzubeziehen – oder, in anderen Worten, um die Zeitvariable „t“ mit den Raumvariablen x und y kompatibel zu machen –, muss man hier eine einheitliche Operation, die die Elemente des Raumes und der Zeit *unzertrennlich* in sich einschließt, annehmen. Diese einheitliche Operation ist nicht anders als die rein kontinuierliche Bewegung, die wir im Rahmen der Differenzialrechnung als einen unendlich-kontinuierlichen und sich einem Grenzwert unendlich nähernden Prozess bestimmen. Durch diese Legitimierung einer derart kontinuierlichen Bewegung (die in einem einheitlichen Raum-Zeit-Kontinuum zustande kommt) in einer mathematischen Operation befreien wir das Verfahren der temporalen Differenzierung von der Domäne der rein theoretischen Wissenschaft (a priori) und versetzen ihn folglich in die Sphäre der physikalischen Phänomenalität.

„dt“ als *differentiale temporis* führen wir als ein notwendiges Element in dem Verfahren der Differenzierung ein, die wir hinsichtlich der unabdingbaren *dynamischen* Fortexistenz des räumlichen und zeitlichen Infinitesimalen, Δx und Δt, als einen Prozess der *unendlichen Differenzierung* umdenken. Das *differentiale temporis* schließt sowohl die Komponente der Zeit als auch die der Dynamik in sich ein, die zusammen die unendliche Prozessualität der Differenzierung ausmachen. Die temporale Differenzierung ist im Prinzip jener Diskretheit des unendlich Kleinen entgegengesetzt; d. h. sie würdigt den wahren Modus der Infinitesimalen, nämlich das sich im unendlichen Prozess realisierende unendlich Kleine. Als solche wird sie zu einem mathematischen Instrumentarium, das die Grenze der rein theoretischen Mathematik überschreitet und sich auf die Domäne der physikalischen

[22] Als Zeitvariable lässt sich „t“ mit den Raumvariablen x und y *modal* kaum gleichsetzen. Denn x und y sind reine algebraische Abstraktionen, wogegen t streng genommen eine phänomenale Entität ist. Zeit kann nicht konstant sein, sie muss stets *fließen*. D. h. man braucht „t“ nicht erneut als Variable zu bezeichnen, denn t an sich ist eine Variable – eine stets variierende Entität. Um die x oder y als räumliche Variablen zu bestimmen, muss man sich auf eine kontinuierliche *Operation* – als kontinuierliches Zählen oder die kontinuierliche Bewegung eines Punktes etc. – stützen, wogegen die Zeitvariable t keine solche Operation benötigt. Die Variabilität dieser zeitlichen Variablen ist das *eher autonome* Fließen der Zeit selbst.

Phänomenalität erstreckt, in der das Leibnizsche Prinzip der Kontinuität einen adäquaten Anwendungsbereich findet. Als Wissenschaft ist die temporale Differenzierung demnach kaum der Kategorie der geläufigen angewandten Mathematik, sondern eher einer *physikalischen* Mathematik angehörig zu betrachten.

Bibliographie

Berkeley, Georg: Schriften über die Grundlagen der Mathematik und Physik, Frankfurt/M 1969.

Cajori, Florian: A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain. From Newton to Woodhouse, Chicago 1919.

Cohen, Hermann: Das Prinzip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte, Frankfurt/M 1968.

Kues, Nikolaus von: De docta ignorantia, Philosophisch-Theologische Werke, Bd. I, Hamburg 2002.

Leibniz, G. W.: Schriften zur Logik und zur philosophischen Grundlegung von Mathematik und Naturwissenschaft, Darmstadt 1992.

Leibniz, Gottfried Wilhelm: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, übersetzt von A. Buchenau, hrsg. von Ernst Cassirer, Hamburg 1966.

Newton, Isaac: The Principia (Book 1: Of the motion of bodies, Section 1), übersetzt von I. Bernard Cohen und Anne Whitman, University of California Press, Berkeley 1999.

Thaliath, Babu: Perspektivierung als Modalität der Symbolisierung. Erwin Panofskys Unternehmung zur Ausweitung und Präzisierung des Symbolisierungsprozesses in der *Philosophie der symbolischen Formen* von Ernst Cassirer (Dissertation), Königshausen & Neumann, Würzburg 2005.

Thaliath, Babu: Natur und Struktur der Kräfte, Königshausen & Neumann, Würzburg 2010.