Zur Konstruktion einfacher Charaktere und der Fortsetzungen ihrer Heisenbergdarstellungen für lokale zentral-einfache Algebren

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herrn Diplom-Mathematiker Martin Grabitz
geboren am 18.03.1969 in Göttingen

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Dr. h.c. Hans Meyer

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Prof. Dr. Bodo Krause

Gutachter:

1. Prof. Dr. E.-W. Zink
2. Prof. Dr. G. Henniart
3. Prof. Dr. C. J. Bushnell

eingereicht am:	März 2000
Tag der mündlichen Prüfung:	5. Juli 2000

Abstract

In this thesis, we try to explain how simple characters for arbitrary central simple algebras over a non-archimedian local field F can be constructed. Moreover, we introduce a kind of matching of simple characters between different algebras of fixed reduced degree. If the index of the algebra A is odd or $A = M_l(D)$, where l is an arbitrary prime number and D a central division algebra over F, we can extend the Heisenberg representations associated to the simple characters to level-0 and obtain a hypothetical list of simple types.

For $A = M_l(D)$ and if the residual field of F is not the field with two elements, we can proof that all so-called maximal simple types in our list are simple types in the sense of [CJB98] and their extensions to their stabelizers induce supercupidal representations of $G_l(D)$.

Using the the heuristical relation via the abstract matching theorem of [JNB84] to the cases of a division algebra due to [Zin92b] and to the split case due to [CJB93], we conjecture that all supercuspidal representations of $Gl_l(D)$ can be obtained by this way.

Keywords:
Number Theory (11F85), Representation Theory (11F70), Local Simple Algebras (22E50), Langlands Program (11R39)

Zusammenfassung

In dieser Dissertationsschrift soll erklärt werden, wie auf der Grundlage von einfachen Strata, wie sie in einer gemeinsamen Arbeit mit Broussous [PB99a] betrachtet wurden, einfache Charaktere für lokale einfache Algebren konstruiert werden können, wobei die Konstruktion den Vorbildern von Bushnell und Kutzko im zerfallenden Fall [CJB93] und von Zink [Zin90] im Falle eines Schiefkörpers folgt. Der Begriff des einfachen Charakters geht auf die Arbeit [CJB93] zurück und bezeichnet eine ausgezeichnete Auswahl von Heisenbergcharakteren, die zu einem stabilen Darstellungsfilter gehören, der gemäss [Zin88](Hauptsatz 1.4) einem Darstellungsfilter zugeordnet wird, der zu einer absteigenden Normalreihe

$$1 + \mathfrak{P} \supset 1 + \mathfrak{P}^2 \supset \dots$$

gehört, wobei $\mathfrak{P}$ das Jacobsonradikal einer erblichen Ordnung bezeichnet. Wir werden hier nur von Hauptordnungen ausgehen, d.h. von dem Fall, dass $\mathfrak{P}$ und seine Potenzen gebrochene Hauptideale sind. Diese Vorgehensweise und auch die besondere Auswahl der Heisenbergcharaktere in Form von einfachen Charakteren, wird durch die Konstruktion im Falle eines Schiefkörpers [Zin90] und durch den abstrakten Matchingsatz [JNB84] gerechtfertigt.

Im Falle eines lokalen zentralen Schiefkörpers ist nämlich der Bewertungsring die einzige erbliche Ordnung und die einfachen Charaktere sind alle Heisenbergcharaktere die zu einem stabilen Darstellungsfilter gehören, der gemäss [Zin88](Hauptsatz 1.4) einem Darstellungsfilter, der zur absteigenden Normalreihe

$$1 + \mathfrak{p}_D \supset 1 + \mathfrak{p}_D^2 \supset \dots$$

gehört, zugeordnet wird, wobei $\mathfrak{p}_D$ das Bewertungsideal des Schiefkörpers D bezeichnet. Der abstrakte Matchingsatz liefert nun die Existenz einer Bijektion zwischen den irreduziblen glatten Darstellungen der multiplikativen Gruppe des lokalen zentralen Schiefkörpers D und den irreduziblen quadratintegrierbaren glatten Darstellungen einer beliebigen anderen lokalen zentraleinfachen Algebra vom selben reduzierten Grad über demselben nicht-archimedischen Grundkörper F, welche den Charakter einer Darstellung in dem Sinne erhält, dass die Charakterwerte auf den Konjugationsklassen elliptischer Elemente der verschiedenen Algebren, welche mithilfe ihrer Minimalpolynome identifiziert werden können, bis auf ein Vorzeichen übereinstimmen.

Wir werden hier kanonische Bijektionen zwischen den einfachen Charakteren für verschiedene zentraleinfache Algebren vom selben reduzierten Grad über demselben Grundkörper angeben, von denen wir erwarten, dass sie mit der Abbildung des abstrakten Matchingsatzes verträglich sind. Das dieses in der Tat der Fall ist, wurde bisher nur in einfachen Fällen wie [Hen91] und [CJB] gezeigt, jedoch wurde in der Arbeit [Zin93] bereits mithilfe der Konstruktionen von [Zin90] und [CJB94] eine Bijektion zwischen den irreduziblen glatten Darstellungen der multiplikativen Gruppe des lokalen zentralen

Schiefkörpers D vom Index N über einem Grundkörper F und den irreduziblen essentiell quadratintegrierbaren glatten Darstellungen von $Gl_N(F)$ konstruiert, welche den Artinführer und den formalen Grad einer Darstellung erhält. Da die Abbildung des abstrakten Matchingsatzes dieselben Forderungen erfüllt, kommt dies der gewünschten Verträglichkeit schon sehr nahe und wir erfüllen mit unserer Konstruktion insbesondere die in der Arbeit [Zin93] gemachte Forderung die dort im Bezug auf die einfachen Charaktere getroffen Auswahlen noch unabhängiger von den jeweiligen Algebren zu gestalten. Die hier getroffene Auswahl wird durch die Verwendung sogenannter spezieller approximierender Folgen getroffen, welche sich aus einer Verallgemeinerung der in [PB99a] gemachten Überlegungen ergeben.

Im Anschluss an die Konstruktion und den Vergleich einfacher Charaktere werden wir in einer grossen Anzahl von Fällen zeigen, dass sich die Heisenbergdarstellungen, die wir zu den einfachen Charakteren erhalten, in kanonischer Weise fortsetzen lassen und wir erwarten von diesen Fortsetzungen, dass sie analoge Eigenschaften besitzen, wie die sogenannten "β-Fortsetzungen" von [CJB93](5.2.1) im zerfallenden Fall. Damit können wir in diesen Fällen eine Liste von hypothetischen einfachen Typen angeben, von denen wir vermuten, dass sie alle Bernsteinkomponenten parametrisieren, welche irreduzible essentiell quadratintegrierbare Darstellungen enthalten. Insbesondere vermuten wir, dass sich die supercuspidalen Darstellungen mittels kompakter Induktion aus Fortsetzungen solcher einfacher Typen auf eine kompakt modulo Zentrum Untergruppe gewinnen lassen. Um die Vollständigkeit dieser Konstruktion zu demonstrieren, hätten wir allerdings noch die Eigenschaft "Verkettung impliziert Konjugation" zu zeigen, welche wir ebenfalls auf eine Folgearbeit verschieben müssen. Beabsichtig wäre dann ein Vollständigkeitsbeweis mit dem abstrakten Matchingsatz wie bei L. Corwin [Cor93] oder in [Zin93].

Wir weisen hier nur in Spezialfällen nach, dass die Typendarstellungen, welche wir hier angegeben haben, tatsächlich Typen im Sinne von [CJB98](4.1)(4.2) sind. Insbesondere sind es auch unsere Berechnungen in der Arbeit [MG00], welche dem von uns im Geiste von [Zin90] und [CJB93] gemachten Ansätzen hohe Evidenz geben.

Schlagwörter:
Zahlentheorie (11F85), Darstellungstheorie (11F70), Lokale einfache Algebren (22E50), Langlandsprogram (11R39)

Danksagung

Ich danke meinem Lehrer Ernst-Wilhem Zink, der mich in die Darstellungstheorie der lokalen zentralen Algebren eingeführt hat, der mich durch zahlreiche anregende Diskussionen unterstützte, die Beweise zur Korrektur las und mich dabei auf Lücken hinwies. Besonderen Dank möchte ich auch an G. Henniart richten, welcher einen Fehler in einer vorrangegangenen Version fand und an P. Broussous für seinen Hinweis zu Hilfssatz (7.7), welcher die dadurch entstandene Lücke zu schliessen half. Auch danke ich C. Bushnell, G. Faltings, G. Harder und G. Henniart für ihre Einladungen zu Gastaufenthalten und Gastvorträgen. Ich möchte hier kurz darauf hinweisen, dass wärend der Zeit meiner Dissertation neben dieser Arbeit ein gemeinsames Papier mit Broussous [PB99a] und ein gemeinsames Papier mit Silberger und Zink [MG00] entstanden sind, welche ich hier nur zitiere, die ich aber als Teil meiner Dissertation ansehen möchte. Im Papier [PB99a] habe ich mich in Anlehnung an meine Diplomarbeit im wesentlichen mit den Einbettungen und den reinen Elementen befasst und im Papier [MG00] habe ich mich um die Vereinfachung eines Beweises des Heckealgebraisomorphismus von Silberger bemüht, welcher nun in Anlehnung an den Beweis von Bushnell und Kutzko vollzogen werden kann. Da es sinnlos ist, die Gemeinschaftsleistung hier wieder auseinander zu dividieren und eine Dissertation eine eigenständige Arbeit sein soll, verzichte ich hier auf eine Wiederholung einzelner Ergebnisse und zitiere nur die hier notwendigen Sätze.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Grundlegende Notation und Vorbereitungen

Sei F ein nicht-archimedischer lokaler Körper und A eine endlichdimensionale zentraleinfache Algebra über F. Sei V ein einfacher Links-A-modul. V ist dann ein Rechts-$D = \mathrm{End}_A(V)$-vektorraum und

$$A \simeq \mathrm{End}_D(V) \simeq M_m(D)$$

(wobei $M_m(D)$ den Ring der $m \times m$ Matrizen mit Einträgen in D bezeichnet). Wir bezeichnen mit d den Index des Schiefkörpers D (d.h. $\dim_F(D) = d^2$), wir fixieren eine Isomorphie $A \simeq M_m(D)$ und identifizieren A mit dem Matrizenring $M_m(D)$. Wie üblich bezeichnen auch $\mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{o}_D$, ... die Bewertungsringe von F, D, ..., $\mathfrak{p}_F$, $\mathfrak{p}_D$, ... die zugehörigen Primideale, sowie $\mathfrak{k}_F$, $\mathfrak{k}_D$, ... die resultierenden endlichen Restkörper.

(0.1) *Eine $\mathfrak{o}_F$-Ordnung $\mathfrak{A}$ in A ist ein Teilring mit demselben Einselement wie A, welches ein vollständiges $\mathfrak{o}_F$-Gitter in A ist. Dabei ist mit einem vollständigen $\mathfrak{o}_F$-Gitter $\mathfrak{A}$, ein endlich erzeugter freier $\mathfrak{o}_F$-Modul gemeint, welcher eine F-Basis des F-Vektorraumes A enthält. Sei $\mathfrak{A}$ eine erbliche $\mathfrak{o}_F$-Ordnung in A, d.h. eine $\mathfrak{o}_F$-Ordnung, welche als Ring betrachtet (links- oder rechts-) erblich ist. Wir bezeichnen durch $\mathfrak{P}$ ihr Jacobsonradikal und durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ ihren Normalisator. Es gehört zu den Standardfakten (siehe z.B.* [Rei75](39.12)*), dass $\mathfrak{A}$ dann und nur dann erblich ist, wenn $\mathfrak{P}$ ein projektiver links oder rechts $\mathfrak{A}$-Modul ist, welches auch dann und nur dann der Fall ist, wenn $\mathfrak{P}$ ein gebrochenes invertierbares Ideal von $\mathfrak{A}$ ist, d.h. es existiert ein $(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$-Biteilmodul $\mathfrak{P}^{-1}$ von A, welcher ein vollständiges $\mathfrak{o}_F$-Gitter in A ist, so dass $\mathfrak{P}\mathfrak{P}^{-1} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$.*

Zu einer erbliche Ordnung $\mathfrak{A}$ definieren wir die Einseinheitengruppen $U^j(\mathfrak{A}) := 1 + \mathfrak{P}^j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Diese Gruppen führen zu einer Filtration $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A}^\times \supset U^1(\mathfrak{A}) \supset U^2(\mathfrak{A}) \supset ...$, wobei durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ der $A^\times$-Normalisator von $\mathfrak{A}$ bezeichnet wird.

Eine $\mathfrak{o}_D$-Gitterkette in V ist eine Familie $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ von vollständigen $\mathfrak{o}_F$-Gittern in V, welche Rechts-$\mathfrak{o}_D$-moduln sind und folgende Bedingungen erfüllen:

a) $\forall j \in \mathbb{Z} : X_j \supsetneq X_{j+1}$ und

b) $\exists r \in \mathbb{N} : \forall j \in \mathbb{Z} : X_j\mathfrak{p}_D = X_{j+r}$.

(0.2) *Es ist ebenfalls ein Standardergebnis (siehe* [CJB85]*), dass* $\mathfrak{A}$ *auch dann und nur dann erblich ist, wenn eine (bis auf eine Translation des Indexes eindeutige)* $\mathfrak{o}_D$*-Gitterkette* $\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *in* V *existiert, so dass*

$$\mathfrak{A} = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}_D}\{X_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \{x \in A \mid \forall k \in \mathbb{Z}, xX_k \subseteq X_k\}.$$

(0.3) *Es besteht eine Isomorphie*

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{P} \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{End}_{\mathfrak{k}_D}(X_{i-1}/X_i) \simeq M_{n_1}(\mathfrak{k}_D) \times \ldots \times M_{n_r}(\mathfrak{k}_D)$$

und die auftretenden geordneten Zahlen $n_1, \ldots, n_r$ *liefern uns numerische Invarianten der Konjugationsklasse von* $\mathfrak{A}$*, welche durch diese eindeutig bis auf zyklische Vertauschung bestimmt sind. Umgekehrt liefern diese Zahlen die Konjugationsklasse, weil eine Normalform*

$$g\mathfrak{A}g^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathfrak{o}_D), (\mathfrak{p}_D) & \cdots, (\mathfrak{p}_D) \\ (\mathfrak{o}_D), (\mathfrak{o}_D) & \cdots, \cdots \\ \cdots, \cdots & \cdots, (\mathfrak{p}_D) \\ (\mathfrak{o}_D), \cdots & \cdots, (\mathfrak{o}_D) \end{pmatrix}^{\{n_1,\ldots,n_r\}}$$

existiert (siehe [Rei75] 39.14), wobei die Schreibweise $(\mathfrak{o}_D)$ *(bzw.* $(\mathfrak{p}_D)$*) einen* $n_i \times n_j$*-Matrixblockeintrag bedeutet, wobei die Blöcke unterhalb und auf der Blockdiagonalen Einträge in* $\mathfrak{o}_D$ *und die Blöcke oberhalb der Blockdiagonalen Einträge in* $\mathfrak{p}_D$ *haben. Dabei beachten wir, dass* $n_1 + \ldots + n_r = m$ *gilt und* g *ein geeignet gewähltes Element aus* $A^\times$ *ist. Die Zahl* r *ist eindeutig bestimmt und wird die Periode von* $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *genannt.*

Es besteht dann mit der analogen Bedeutung der Schreibweise auch die Relation

$$g\mathfrak{P}g^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathfrak{p}_D), (\mathfrak{p}_D), \cdots, (\mathfrak{p}_D), (\mathfrak{p}_D) \\ (\mathfrak{o}_D), (\mathfrak{p}_D), \cdots, \cdots, \cdots \\ \cdots, (\mathfrak{o}_D), \cdots, \cdots, \cdots \\ (\mathfrak{o}_D), \cdots, \cdots, (\mathfrak{p}_D), \cdots \\ (\mathfrak{o}_D), \cdots, \cdots, (\mathfrak{o}_D), (\mathfrak{p}_D) \end{pmatrix}^{\{n_1,\ldots,n_r\}}.$$

Wenn $\mathfrak{A}$ in Normalform 0.3 gegeben ist, dann können wir die Gitterkette im einfachen A-Modul $V := D^m$ (als Spaltenvektoren) explizit angeben. Bei geeigneter Nummerierung der Moduln können wir eine Gitterkette $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ von $\mathfrak{A}$ in V wählen, so dass $\forall j \in \mathbb{Z}$, ${}^tX_j = \mathfrak{p}_D^l((\bigoplus_{i=1}^{k}(\bigoplus_{\mu=1}^{n_i}\mathfrak{p}_D))\bigoplus(\bigoplus_{i=k+1}^{r}(\bigoplus_{\mu=1}^{n_j}\mathfrak{o}_D)))$, wobei $k, l \in \mathbb{Z}$ derart gewählt sind, dass $j = lr + k$, $0 \leq k < r$, und die Schreibweise ${}^t(.)$ bedeutet die Menge der transponierten Vektoren.

Eine Ordnung $\mathfrak{A}$ wird Hauptordnung genannt, wenn ihr Jacobson Radical $\mathfrak{P}$ ein Hauptideal ist. Nach 0.1 ist eine solche Ordnung $\mathfrak{A}$ dann auch erblich.

(0.4) *Wegen* [CJB85](1.3.2) *wissen wir, dass eine erbliche Ordnung mit Invarianten* $n_1, \ldots, n_r$ *dann und nur dann eine Hauptordnung ist, wenn die Gleichheiten* $n_1 = \ldots = n_r =: s$ *bestehen. In dieser Situation nennen wir* s *einfach nur die Invariante der Hauptordnung* $\mathfrak{A}$*.*

Kapitel 1

Strata und Dualität

Sei ψ_F ein Charakter von F^+ mit dem Führer $\mathfrak{p}_F$ und sei $\psi_A := \psi_F \circ Trd_{A/F}$, wobei Trd die reduzierte Spur bezeichnet. Aus [CJB85] entnehmen wir, dass die Paarung $A \times A \to \mathbb{C}^\times$, $(x, y) \mapsto \psi_A(xy)$ uns erlaubt, A mit seinem Pontrjagindual zu identifizieren. Wir definieren die zu einer Teilmenge S von A duale Menge durch

(1.1) $S^* := \{a \in A \mid \psi_A(sa) = 1, \textit{für alle } s \in S\}.$

Für $u \in \mathbb{Z}$, gilt die Relation

(1.2) $(\mathfrak{P}^u)^* = \mathfrak{P}^{1-u}$

(dies folgt aus [CJB85](2.1.9), wenn wir beachten, dass ψ_F den Führer $\mathfrak{p}_F$ hat). Für jede ganze Zahl $n \geq 1$ und $n > q > [\frac{n}{2}]$, wobei $[.]$ die Gaussklammer bezeichnet, erhalten wir eine kanonische Gruppenisomorphie:

(1.3) $U^{q+1}(\mathfrak{A})/U^{n+1}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{P}^{q+1}/\mathfrak{P}^{n+1},$

welche durch die Abbildung $1 + x \mapsto x$ gegeben wird. Insbesondere ist der Quotient $U^{q+1}(\mathfrak{A})/U^{n+1}(\mathfrak{A})$ eine endliche abelsche Gruppe. Sein Pontrjagindual ist isomorph zu $\mathfrak{P}^{-n}/\mathfrak{P}^{-q}$ durch die Abbildung:

(1.4) $b + \mathfrak{P}^{-q} \mapsto \psi_b^\times \in U^{q+1}\widehat{(\mathfrak{A})/U}^{n+1}(\mathfrak{A}), \psi_b^\times(1 + x) := \psi_A(bx).$

Darüber hinaus haben wir für $n > q \geq 0$ eine kanonische Isomorphie von Gruppen

(1.5) $\mathfrak{P}^{-n}/\mathfrak{P}^{-q} \to \mathfrak{P}^{\widehat{q+1}/\mathfrak{P}}{}^{n+1},$

welche durch die Abbildung

(1.6) $b + \mathfrak{P}^{-q} \mapsto \psi_b^+, \psi_b^+(x) := \psi_A(bx)$

vermittelt wird.

(1.7) Notation *Für spätere Zwecke setzen wir noch* $S^{\perp_b} := \{x \in \mathfrak{P} \mid \forall s \in S : \psi_b^+(xs - sx) = 1\}$ *für jede Teilmenge* S *von* $\mathfrak{P}$.

Wie in [P.B99b](1.1.3) definieren wir:

(1.8) Definitions

(i) Ein Stratum in A *ist ein Quadrupel* $[\mathfrak{A}, n, q, b]$, *wobei*
(a) $\mathfrak{A}$ *eine erbliche* $\mathfrak{o}_F$*-Ordnung in* A *ist,*
(b) n *und* q *ganze Zahlen mit* $q \leq n$, *also* $\mathfrak{P}^{-q} \subseteq \mathfrak{P}^{-n}$ *sind und*
(c) $b \in \mathfrak{P}^{-n}$.
(ii) Zwei Strata $[\mathfrak{A}, n, q, b_i]$, $i = 1, 2$, *werden äquivalent genannt, wenn* $b_1 - b_2 \in \mathfrak{P}^{-q}$.

Aufgrund der Isomorphie (1.4), ist klar, dass die Äquivalenzklassen der Stata der Form $[\mathfrak{A}, n, q, b]$ das Pontrjagindual von $U^{q+1}(\mathfrak{A})/U^{n+1}(\mathfrak{A})$ parametrisieren, wenn $n \geq 1$ und $n > q > [\frac{n}{2}]$. Zu einem Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, b]$ definieren wir die formale $A^\times$-Verkettung als die Menge $\mathcal{I}_{A^\times}[\mathfrak{A}, n, q, b] := \{x \in A^\times \mid x^{-1}(b + \mathfrak{P}^{-q})x \cap (b + \mathfrak{P}^{-q}) \neq \emptyset\}$, welche im Falle von $n > q > [\frac{n}{2}]$ nichts anderes ist als die $A^\times$-Verkettung $I_{A^\times}(\psi_b^\times)$ unseres Charakters $\psi_b^\times$. Die Verkettung von Charakteren wird uns im weiteren noch interessieren, doch zunächst brauchen wir noch einen Hilfssatz.

(1.9) Hilfssatz *Sei* ψ_F *ein additiver Charakter von* F *mit dem Führer* $\mathfrak{p}_F$ *und* L/F *eine unverzweigte Erweiterung, dann existiert eine Fortsetzung* ψ_L *von* ψ_F *nach* L^+ *welche den Führer* $\mathfrak{p}_L$ *besitzt.*

Beweis:
Weil die Erweiterung L/F unverzweigt ist, haben wir die Inklusion $\mathfrak{p}_F \subset \mathfrak{p}_L$ und zusammen mit der Inklusion $F \subset L$ führt dies zu einer natürlichen Einbettung $F^+/\mathfrak{p}_F \hookrightarrow L^+/\mathfrak{p}_L$ von topologischen Gruppen, wobei wir beachten, dass $\mathfrak{p}_F$ abgeschlossen in F ist, dass $\mathfrak{p}_L$ abgeschlossen in L ist und dass die Topologie, welche durch die Vektorraumstruktur von L/F und durch die Topologie von F induziert wird, wieder die ursprüngliche Topologie auf L liefert.
Unsere Behauptung folgt nun aus der Pontrjagin Dualität [Pon57](Kap. VI, 40,Satz 56), welche in diesem Falle besagt, dass die Restriktionsabbildung von Charakteren eine Surjektion $\widehat{L^+/\mathfrak{p}_L} \twoheadrightarrow \widehat{F^+/\mathfrak{p}_F}$ der zugehörigen Charaktergruppen liefert.
□
Wir brauchen den folgenden wichtigen Hilfssatz, welcher [CJB93](2.4.11) verallgemeinert:

(1.10) Hilfssatz

Wir betrachten ein Stratum $[\mathfrak{A}, n, n-1, b]$ *und setzen voraus, dass* $\mathcal{I}_{A^\times}[\mathfrak{A}, n, n-1, b] = A^\times$ *gilt, dann gilt sogar* $(b + \mathfrak{P}^{1-n}) \cap F \neq \emptyset$.

Darüberhinaus faktorisiert jeder stetige Charakter χ *von* $U^{\nu+1}(\mathfrak{A})$ *für* $\nu \geq 0$, *welcher von ganz* $A^\times$ *verkettet wird, durch die reduzierte Norm* $Nrd_{A|F} : A^\times \to F^\times$.

Beweis:
Weil unsere erste Behauptung invariant unter Konjugation ist, können wir voraussetzen, dass unsere erbliche Ordnung $\mathfrak{A}$ in der Normalform (0.3) gegeben ist, wobei wir A wieder mit $M_m(D)$ identifizieren. Beachten wir nun die daraus resultierenden expliziten Beschreibungen der Potenzen von $\mathfrak{P}$, so können wir voraussetzen, dass eine ganze Zahl t existiert mit $0 \leq t \leq r-1$ und

(1.11)

$$b \equiv \begin{pmatrix} 0 & ,\cdots, & \cdots, & \cdots & , & 0 & , b_{r-t+1}, & 0 & ,\cdots, & \cdots & , 0 \\ 0 & ,\cdots, & \cdots, & \cdots & , & \cdots, & 0 & , b_{r-t+2}, & 0 & , \cdots & , 0 \\ \cdots & ,\cdots, & \cdots, & \cdots & , & \cdots, & \cdots & , & \cdots & ,\cdots, & \cdots & ,\cdots \\ 0 & ,\cdots, & \cdots, & \cdots & , & \cdots, & \cdots & , & \cdots & , 0 & , b_{r-1}, & 0 \\ 0 & ,\cdots, & \cdots, & \cdots & , & \cdots, & \cdots & , & \cdots & ,\cdots, & 0 & , b_r \\ b_1 & , 0 & ,\cdots, & \cdots & , & \cdots, & \cdots & , & \cdots & ,\cdots, & \cdots & , 0 \\ 0 & , b_2 & , 0 & , \cdots & , & \cdots, & \cdots & , & \cdots & ,\cdots, & \cdots & , 0 \\ \cdots & ,\cdots, & \cdots, & \cdots & , & \cdots, & \cdots & , & \cdots & ,\cdots, & \cdots & , \\ 0 & ,\cdots, & 0 & , b_{r-t-1}, & 0 & , & \cdots & , & \cdots & ,\cdots, & \cdots & , 0 \\ 0 & ,\cdots, & \cdots, & 0 & , b_{r-t}, & 0 & , & \cdots & ,\cdots, & \cdots & , 0 \end{pmatrix} \ mod\ \mathfrak{P}^{1-n},$$

wobei r die Periode von $\mathfrak{A}$ ist und wir die Blockbeschreibung wie in (0.3) verwenden. Genauer gesagt ist t die eindeutig bestimmte Zahl mit $-n = kr + t$ und $0 \leq t \leq r-1$, wobei k die geeignet gewählte ganze Zahl ist. Die b_j sind $n_{\tau_r^t(j)} \times n_j$-Matrizen, wobei τ_r die zyklische Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, r\}$ bedeutet und die Einträge der b_j aus einem Repräsentantensystem der Klassen $\mathfrak{p}_D^k/\mathfrak{p}_D^{k+1}$ gewählt werden können, wenn der Block unterhalb oder auf der Blockdiagonalen liegt und aus einem Repräsentantensystem der Klassen $\mathfrak{p}_D^{k+1}/\mathfrak{p}_D^{k+2}$ wenn sie über der Blockdiagonalen liegen.

Liegt b bereits in $\mathfrak{P}^{1-n}$, so ist $0 \in (b + \mathfrak{P}^{1-n}) \cap F$ und es bleibt nichts zu zeigen für die erste Aussage des Hilfssatzes. Daher setzen wir voraus, dass eines der b_j von 0 verschieden ist. Fixieren wir ein solches j mit $b_j \neq 0$ und ist $x := \mathrm{diag}(I_{n_1}, \ldots, I_{n_{j-1}}, \pi_F^2 I_{n_j}, I_{n_{j+1}}, \ldots, I_{n_r})$, wobei $\mathrm{diag}(., \ldots, .)$ eine Blockdiagonalmatrix bezeichnet und I_n die $n \times n$ Einheitsmatrix, dann gilt nach Voraussetzung $x(b + \mathfrak{P}^{1-n}) \cap (b + \mathfrak{P}^{1-n})x \neq \emptyset$. Für $t \neq 0$ haben die Elemente in der ersten Menge einen Eintrag im $(\tau_r^t(j), j)$-ten Block welcher in $\mathfrak{p}_D^k \backslash \mathfrak{p}_D^{k+2}$ liegt, aber die Einträge im selben Block in der zweiten Menge liegen in $\mathfrak{p}_D^{k+2d}$, was unter unserer Voraussetzung an b_j unmöglich ist.

Demnach können wir voraussetzen, dass

(1.12) $b \equiv \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_r)\ mod\ \mathfrak{P}^{1-n}$,

und insbesondere $-n = kr$. Sei $b' := \mathrm{diag}(b'_1, \ldots, b'_r)$ eine Matrix mit $b \equiv \pi_D^k b' \bmod \mathfrak{P}^{1-n}$, wobei die Matrizen $b'_1, \ldots, b'_r$ Einträge in einem Repräsentatntensystem von $\mathfrak{o}_D/\mathfrak{p}_D \simeq \mathfrak{k}_D$ haben sollen.

Betrachte $x \in \mathfrak{o}_D^\times I_m \subset \mathfrak{A}^\times$, dann gilt nach Voraussetzung $x(b + \mathfrak{P}^{1-n})x^{-1} \cap (b + \mathfrak{P}^{1-n}) \neq \emptyset$, was nichts anderes aussagt als

(1.13) $\pi_D^{-k} x \pi_D^k b' x^{-1} \equiv b'\ mod\ \mathfrak{P}$,

weil $\mathfrak{A}$ von π_D (nach (0.3)) normalisiert wird. Wir wählen dabei die Primelemente π_D, π_F derart, dass $\pi_F = \pi_D^d$ und beachten auch $\pi_F \mathfrak{A} = \mathfrak{P}^{rd}$.

Sei $\bar{x} := (x(mod\ \mathfrak{P}))$ und $\bar{b} := (b'(mod\ \mathfrak{P}))$, dann können wir $\bar{x}$ als ein Element von $\mathfrak{k}_D^\times$ ansehen und $\bar{b}$ als ein Element von $M_{n_1}(\mathfrak{k}_D) \times \ldots \times M_{n_r}(\mathfrak{k}_D)$, wobei $\mathfrak{k}_D$ als diagonal in das Zentrum der letzteren Algebra eingebettet angesehen wird. Die Gleichung (1.13) sagt uns jetzt, dass $\sigma^k(\bar{x})\bar{b}\bar{x}^{-1} = \bar{b}$, wobei σ das Erzeugende der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_D/\mathfrak{k}_F)$ ist, welches durch die adjungierte Aktion von π_D auf einer geeigneten maximal unverzweigten Erweiterung L/F in D induziert wird (dabei beachten wir, dass für geeignetes L auch $\mathfrak{o}_D = \mathfrak{o}_L + \mathfrak{o}_L\pi_D + \ldots + \mathfrak{o}_L\pi_D^{d-1}$ und $\mathfrak{p}_D = \mathfrak{p}_L + \mathfrak{o}_L\pi_D + \ldots + \mathfrak{o}_L\pi_D^{d-1}$ gilt), also erhalten wir wegen $\bar{b} \neq 0$ und weil $\bar{x}$ das Element $\bar{b}$ zentralisiert, die Gleichung $\sigma^k(\bar{x}) = \bar{x}$. Weil $\bar{x} \in \mathfrak{k}_D^\times$ beliebig gewählt war, können wir schlussfolgern, dass d ein Teiler von k sein muss. Wegen

$\pi_D^k = \pi_F^{\frac{k}{d}} \in F^\times$, können wir also b um das Vielfache eines zentralen Elementes aus A (nämlich $\pi_F^{-\frac{k}{d}}$) abändern und es genügt jetzt unsere Behauptung unter der Voraussetzung $n = 0$ und $b = b'$ zu beweisen.

Betrachten wir nun $x = \pi_D^\nu I_m$ für eine beliebige ganze Zahl ν. Wiederum impliziert unsere Voraussetzung über die Verkettung eine Gleichung $\sigma^\nu(\bar{b}) = \bar{b}$, wobei σ auf jeden Eintrag der Matrix $\bar{b} \in M_{n_1}(\mathfrak{k}_D) \times \ldots \times M_{n_r}(\mathfrak{k}_D)$ wirkt. Demnach können die $b_1, \ldots, b_r$ aus einem Repräsentantensystem von $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ gewählt werden.

Ist x ein invertierbares Element von derselben Art wie b, dann flogern wir $\bar{x}^{-1}\bar{b}\bar{x} = \bar{b}$ und wir können die b_i offenbar in der Form $b_i = a_i I_{n_i}$ mit Skalaren a_i aus einem Repräsentantensystem aus $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ annehmen. Schliesslich kann x eine beliebige Permutationsmatrix aus $A = M_m(D)$ sein und wir folgern, dass die Gleichheiten $a_1 = a_2 = \ldots = a_r =: a$ gelten müssen. Wir erhalten $(b + \mathfrak{P}) = (a + \mathfrak{P})$ und haben also wie verlangt $(b + \mathfrak{P}^{1-n}) \cap F \neq \emptyset$ gezeigt.

Um die zweite Behauptung zu beweisen, können wir die erste Behauptung in der vollen Allgemeinheit voraussetzen. Sei also χ ein stetiger Charakter von $U^{\nu+1}(\mathfrak{A})$, welcher durch ganz $A^\times$ verkettet wird, dann wird auch $\chi_{|U^n(\mathfrak{A})}$ für alle $n \geq \nu + 1$ durch ganz $A^\times$ verkettet. Sei n die kleinste ganze Zahl, so dass $\chi_{|U^{n+1}(\mathfrak{A})} \equiv 1$, dann existiert ein Stratum $[\mathfrak{A}, n, n-1, b]$, so dass $\chi_{|U^n(\mathfrak{A})} = \psi_b^\times$ und gemäss des ersten Teiles können wir $b \in F$ wählen. Folgen wir den einzelnen Schritten des Beweises, so können wir auch darauf schliessen, dass dr ein Teiler von n ist.

Ist L/F eine unverzweigte Erweiterung, welche A zerfällt, dann wird das Stratum $[\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L, n, n-1, b \otimes 1]$ durch ganz $(A \otimes_F L)^\times$ verkettet und wir erhalten vom zerfallenden Fall [CJB93](2.4.11) und dem dortigen Beweis die Form $\psi_{b\otimes 1}^\times = \psi_{L,b}^\times \circ \det_{A\otimes_F L/L}$, wobei $\psi_{L,b}^\times(x) := \psi_L(b(x-1))$ für $x \in U^{\frac{n}{rd}}(\mathfrak{o}_L)$ und ψ_L (wie in 1.9) ein additiver Charakter von L mit Führer $\mathfrak{p}_L$ ist, welcher die Einschränkung ψ_F nach F haben soll. Es soll also $\psi_{b\otimes 1}^\times$ analog bezüglich ψ_L definiert sein, wie $\psi_b^\times$ durch ψ_F. Demnach faktorisiert also $\psi_b^\times = \psi_{F,b}^\times \circ Nrd_{A/F}$ nach Definition durch die reduzierte Norm, weil $\psi_{F,b}$ die Einschränkung von $\psi_{L,b\otimes 1}$ auf $U^{\frac{n}{rd}}(\mathfrak{o}_F)$ ist. Setzen wir nun $\chi_0 := \psi_{F,b}^\times \circ Nrd_{A/F}$, dann ist $\chi' := \chi_0^{-1}\chi$ ein Charakter von $U^{\nu+1}(\mathfrak{A})$ welcher durch ganz G verkettet wird und trivial auf $U^n(\mathfrak{A})$ wird.

Schliesslich haben wir natürlich $\chi = \chi'\chi_0$ und durch Induktion über n können wir χ als ein Produkt von Charakteren realisieren, welche jeweils durch die reduzierte Norm faktorisieren. Damit faktorisiert auch χ.

□

Kapitel 2

Soundelemente und die dazugehörigen kanonischen Abbildungen

Wir wollen hier kurz den Zusammenhang zwischen der allgemeinen Definition des reinen Elementes und der Einbettungen im Sinne von [PB99a] erklären und den Soundeinbettungen wie sie in der Arbeit [Frö87] eingeführt werden. Zu diesen Zwecken studiere ich Einbettungsdaten wie sie in [PB99a](2.3.1) definiert wurden, im besonderen Fall einer Soundeinbettung.

Um die Aussagen etwas zu vereinfachen führen wir folgende Notation ein, welche wir schon in [PB99a] über [PB99a](2.1.2) verwendet haben:

(2.1) Notation *Sei $\mathfrak{A}$ eine erbliche $\mathfrak{o}_F$-Ordnung in A und E/F eine Erweiterung in A, so dass $E^\times \subset \mathcal{K}_\mathfrak{A}$, dann wird das Paar $(E, \mathfrak{A})$ eine Einbettung (im Bezug auf $\mathfrak{A}$) genannt.*

(2.2) Satz *Wenn $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung ist mit Invarianter s und Periode r in $A = M_m(D)$, welche in Normalform (0.3) gegeben ist und $(L, \mathfrak{A})$ eine Einbettung ist, wobei L/F eine unverzweigte Erweiterung vom Grade f ist, wobei f ein Teiler von d ist, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ ist eine Hauptordnung in $C_A(L)$, welche von $\mathfrak{A}$ im Sinne [Gra99a](0.6) fortgesetzt wird, (d.h. $\mathcal{K}_\mathfrak{A} \cap C_A(L) = \mathcal{K}_{\mathfrak{A}\cap C_A(L)}$).

(ii) Es existiert ein Teiler d_1 von f welcher prim zu r ist, so dass $\lambda[d_1] := ((\lambda_1^1, \ldots, \lambda_f^1), \ldots, (\lambda_1^r, \ldots, \lambda_f^r))$ mit

$$\lambda_j^i := \begin{cases} \frac{sd_1}{f} & \text{falls } n \in \mathbb{Z} \text{ existiert, so dass } i \equiv 1 + nd_1 \pmod r \text{ und } j \equiv 1 + [\frac{nd_1}{r}] \pmod f \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein Einbettungsdatum im Sinne von [PB99a](2.3.1) darstellt (insbesondere ist $\frac{f}{d_1}$ ein Teiler von s), so dass die Einbettung $(L, \mathfrak{A})$ äquivalent im Sinne von [PB99a](2.2.1) zur Standardeinbettung $(\lambda[d_1])$ gemäss [PB99a](2.3.1) ist.

Wenn die äquivalenten Bedingungen (i),(ii) erfüllt sind, ist die Einbettung $L^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ sound im Sinne von [Frö87](2.11a)(2.11b) mit der Invarianten $d_1 = d^{(1)}$ wie sie in [Frö87](2.12) definiert wurde und $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ hat die Invariante $\frac{sd_1}{f}$ und die Periode $\frac{rf}{d_1}$. Die Invarianten d_1 und f bestimmen die Einbettung $(L, \mathfrak{A})$ bis auf die Äquivalenzrelation in [PB99a](2.2.1). Falls f ein Teiler von d ist und d_1 ein Teiler von f, welcher prim zu r ist, mit $\frac{f}{d_1} \mid s$, dann ist $\lambda[d_1]$ wie in (ii) auch immer ein Einbettungsdatum im Sinne von [PB99a](2.3.1).

Beweis:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Natürlich existiert ein Einbettungsdatum $\lambda = ((\lambda_1^1, \ldots, \lambda_f^1), \ldots, (\lambda_1^r, \ldots, \lambda_f^r))$ vom Grade f, so dass $(L, \mathfrak{A})$ äquivalent ist zu der Standardperleneinbettung (λ). Ist nun $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ eine Hauptordnung welche von $\mathfrak{A}$ fortgesetzt wird, so sind alle λ_j^i entweder gleich 0 oder gleich der Invariante s' von $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$. Wegen

$$\sum_{j=1}^{f} \lambda_j^i = s, \tag{2.1}$$

folgern wir, dass $s' \mid s$ und wegen $sr = m = s'r'$, muss auch $\frac{s}{s'} = \frac{r'}{r}$ gelten. Weil $\mathfrak{A}$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ ist, sind die Voraussetzungen für die Anwendung von [PB99a](2.4.4) erfüllt und λ muss 1-null-periodisch im Sinne von [PB99a](2.4.1) sein (d.h. in der unendlichen Folge von Zahlen $\ldots, \lambda_f^r, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^r, \ldots, \lambda_f^1, \ldots, \lambda_f^r, \lambda_1^1, \ldots$ soll die Anzahl der Nullen zwischen zwei verschiedenen von Null verschiedenen Zahlen stets dieselbe sein). Weil in der Folge genau r' von Null verschiedene Zahlen in jedem Teilstück

$$\lambda_1^1, \ldots, \lambda_1^r, \ldots, \lambda_f^1, \ldots, \lambda_f^r \tag{2.2}$$

aus rf Zahlen auftritt, können wir Schlussfolgern, dass r' ein Teiler von rf sein muss und folglich auch $\frac{r'}{r}$ ein Teiler von f.

Mit der Setzung $d_1 := \frac{f}{(\frac{r'}{r})} = \frac{f}{(\frac{s}{s'})}$ bekommen wir die Relationen $s' = \frac{sd_1}{f}$ und $r' = \frac{rf}{d_1}$. Bis auf Äquivalenz könnnen wir daher annehmen, dass $\lambda_1^1 = \frac{sd_1}{f}$ und weil zwischen zwei von Null verschiedenen Zahlen in der Folge (2.2) nun jeweils $d_1 - 1$ Nullen liegen, sind die von Null verschiedenen Zahlen dann gerade die $\lambda^{\tau_r^{nd_1 - [\frac{nd_1}{r}]r}(1)}_{\tau_f^{[\frac{nd_1}{r}]}(1)} = \lambda^{\tau_r^{nd_1}(1)}_{\tau_f^{[\frac{nd_1}{r}]}(1)}$ für $n \in \mathbb{Z}$, wobei $\tau_r \in S_r$ die zyklische Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, r\}$ bezeichnet und $\tau_f \in S_f$ die zyklische Permutation der Zahlen $\{1, \ldots, f\}$. Schliesslich erhalten wir wieder mit (2.1), dass genau $\frac{f}{d_1}$ von Null verschiedene Zahlen in in jeder kurzen Teilfolge $\lambda_1^i, \ldots, \lambda_f^i$ auftreten müssen. Für $i = 1$ erhalten wir, dass λ_j^1 genau dann und nur dann von Null verschiedenen ist, wenn $\frac{r}{\langle d_1, r\rangle} \mid n$ und $j \equiv [\frac{nd_1}{r}] \pmod f$, also $j = k\frac{d_1}{\langle d_1, r\rangle}$ für $k \in \{1, \ldots, \frac{f\langle d_1, r\rangle}{d_1}\}$ und mit vorrangegangener Bemerkung sehen wir, dass dies nur der Fall sein kann, wenn $\langle d_1, r\rangle = 1$ gilt. Damit beenden wir den Beweis der ersten Richtung.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Diese Richtung folgt sofort mit [PB99a](2.4.4) und derselbe Satz liefert auch, dass $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ die Invariante $\frac{sd_1}{f}$ hat und die Periode $\frac{rf}{d_1}$.

Sind die Bedingungen (i)(ii) erfüllt, dann folgen die erste der letzten beiden Aussagen aus [Frö87](Hauptsatz 2). Für die ganz letzte Aussage brauchen wir nur zu zeigen, dass unter den angegebenen Voraussetzungen $\sum_{j=1}^{f} \lambda_j^i = s$ gilt für $i = 1, \ldots, r$, d.h., dass genau $\frac{f}{d_1}$ verschiedene ganze Zahlen $j \in \{1, \ldots, f\}$ existieren, so dass eine ganze Zahl n existiert mit $j \equiv 1 + [\frac{nd_1}{r}] \pmod f$ und $i \equiv 1 + nd_1 \pmod r$ für festes i. Weil d_1 prim zu r ist, hat die letztere Kongruenz eine Lösung n'

und natürlich erfüllen gerade alle um Vielfache von r verschobene Zahlen dieselbe Kongruenz. Demnach ergeben sich für die zweite Kongruenz gerade die Repräsentatenten $j \in \{1, \dots, f\}$ der Klassen $1 + [\frac{n' d_1}{r}] + k d_1 \pmod f$ mit $k \in \mathbb{Z}$ als Lösungen und offensichtlich gibt es davon gerade $\frac{f}{d_1}$ verschiedene.

□

Bemerkung: Es ist klar, dass alle Soundeinbettungen $M^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$, wobei M/L eine unverzweigte Erweiterung ist, welche einen Grad hat, der prim zu $\frac{d}{f}$ ist, gerade in derselben Äquivalenzklasse liegen wie $(L, \mathfrak{A})$ und die Invariante $d^{(1)} = d_1$ im Sinne von [Frö87](2.12) haben. Diese Aussage liefert uns den Zusammenhang zwischen allen Soundeinbettungen im Sinne von [Frö87](2.11a)(2.11b) und allen sound Perleneinbettungen. □

(2.3) Satz *Sei $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung in A, $(E, \mathfrak{A})$ eine Einbettung und $B := C_A(E)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathcal{K}_{\mathfrak{A}} \cap B = \mathcal{K}_{\mathfrak{A} \cap B}$ und $\mathfrak{A} \cap B$ ist eine Hauptordnung;

(ii) die maximal unverzweigte Teilerweiterung K/F in E/F liefert eine Soundeinbettung $(K, \mathfrak{A})$ im Sinne von [Frö87](2.11a)(2.11b);

(iii) zu der maximal unverzweigten Teilerweiterung L/F in E/F deren Grad d teilt (d.h. $[L:F] = \langle f(E/F), d \rangle$) existiert ein Teiler d_1 von $[L:F]$ welcher prim zur Periode von $\mathfrak{A}$ ist, so dass das Einbettungsdatum $\lambda[d_1]$ wie in (2.2) eine Standardperleneinbettung $(\lambda[d_1])$ liefert, welche äquivalent zu $(L, \mathfrak{A})$ im Sinne von [PB99a](2.2.1) ist;

(iv) es existiert eine Einbettung $(M, \mathfrak{A})$, so dass M/E eine maximale Erweiterung in B, also M/F eine maximale Erweiterung in A ist (d.h. die Einbettung $(E, \mathfrak{A})$ erweitert sich zu einer Einbettung eines Maximalkörpers).

Proof:

$(i) \Rightarrow (ii)$: Wenn $\mathfrak{A} \cap B$ eine Hauptordnung ist, dann existiert nach [Frö87](Korollar 1) eine Einbettung $(M, \mathfrak{A} \cap B)$ so dass die Erweiterung M/E maximal in B ist. Nach Definition und (i) ist $(M, \mathfrak{A})$ eine maximale Einbettung welche die Einbettung $(K, \mathfrak{A})$ erweitert und wegen [Frö87](Hauptsatz 2(i)) ist daher die Einbettung $(K, \mathfrak{A})$ sound.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Die Erweiterung L/F ist eine Teilerweiterung von K/F wie in (ii) und die Einbettung $(L, \mathfrak{A})$ ist eine Einschränkung der Einbettung $(K, \mathfrak{A})$ und wieder folgt mit [Frö87](Hauptsatz 2(i)), dass die Einbettung $(L, \mathfrak{A})$ sound ist und die Ordung $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ eine Hauptordnung ist, welche durch $\mathfrak{A}$ fortgesetzt wird. Demnach ist die Einbettung $(L, \mathfrak{A})$ nach (2.2) äquivalent zu einer Standardperleneinbettung $(\lambda[d_1])$ für einen geeigneten Teiler d_1 von d.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Nach (2.2) ist $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ eine Hauptordnung welche durch $\mathfrak{A}$ fortgesetzt wird. Für $f := [L:F]$ hat $C_A(L)$ den Index $\frac{d}{f}$ und es gilt $\langle f(E/L), \frac{d}{f} \rangle = 1$. Mit [Gra99a](Hauptsatz 2.2(ii)) folgern wir, dass die Ordnung $\mathfrak{A} \cap B$ eine Hauptordnung ist, welche von $\mathfrak{A} \cap C_A(L)$ und damit von $\mathfrak{A}$ fortgesetzt wird. Wiederum nach [Frö87](Korollar 1) existiert eine Einbettung $(M, \mathfrak{A} \cap B)$, so dass die Einbettung M/E maximal in B ist, also ist nach Definition und weil $\mathfrak{A}$ die Hauptordnung $\mathfrak{A} \cap B$ von B nach A fortsetzt die Einbettung $(M, \mathfrak{A})$ wohldefiniert und eine Einbettung eines Maximalkörpers welche die Einbettung $(E, \mathfrak{A})$ erweitert.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Wie vorher bemerken wir, dass die Körpererweiterung M/E maximal in B ist und [Zin96](Hauptsatz 2) impliziert die gewünschte Folgerung.

□

Setze nun wieder voraus, dass $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung mit Invariante s und Periode r ($sr = m$) ist, dann legt uns der letzte Satz nahe, die Definition der Soundeinbettung aus [Frö87] von unverzweigten Erweiterungen auf beliebige Erweiterungen auszudehnen.

(2.4) Definition *(i) Eine Einbettung $(E, \mathfrak{A})$ wird sound genannt, falls sie die äquivalenten Bedingungen aus (2.3) erfüllt.*

(ii) Analog wie in [PB99a] wird $\beta \in A$ als $\mathfrak{A}$-rein bezeichnet, wenn $E := F[\beta]$ ein Körper ist, dessen multiplikative Gruppe $E^\times$ die Hauptordnung $\mathfrak{A}$ normalisiert (also $E^\times \subset \mathcal{K}_\mathfrak{A}$).

(iii) Darüber hinaus wird β wie in (ii) als $\mathfrak{A}$-sound bezeichnet, wenn die Einbettung $(F[\beta], \mathfrak{A})$ sound ist im Sinne von (i).

Seien β und E wie in Definition (2.4)(iii), dann existiert nach (2.3) eine Körpererweiterung M/E, so dass die Erweiterung M/F maximal in A/F ist und $M^\times \subset \mathcal{K}_\mathfrak{A}$. Sei $B := C_A(E)$ der Zentralisator von E in A und $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap B$. Wegen [Zin96](Hauptsatz 2) ist $\mathfrak{B}$ eine Hauptordnung und β ist $(e(M/F), f(M/F))$-rein im Sinne von [Zin96](Definition 4). Sei $\mathfrak{Q}$ das Jacobson Radikal von $\mathfrak{B}$, dann gilt nach [Zin96](Hauptsatz 2) für alle $j \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $\mathfrak{P}^j \cap B = \mathfrak{Q}^{[\frac{j+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}]}$, wobei wir $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}} := \langle f(E/F), \frac{f(M/F)}{s} \rangle$ setzen. Natürlich hängt $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}$ nur von der Einbettung von E ab und nicht von der speziellen Wahl von M.

(2.5) Notation

Wir nennen $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}$ den Verzweigungsindex von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{B}$ und definieren eine Funktion $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j) := [\frac{j+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}]$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

(2.6) Hilfssatz *(i) Für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(1-j) = 1 - \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j)$.*

(ii) Für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}} \mid j$, gilt $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{j}{2}]+1) = [\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j)}{2}] + 1$.

(iii) Wenn r' die Periode von $\mathfrak{B}$ ist, r die Periode von $\mathfrak{A}$ und d' der Index von B, dann gilt $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}} = \frac{rd}{r'd'e(E/F)}$.

<u>Beweis:</u>

(i) Wir schreiben zunächst j in der Form $j = e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}k - t$, wobei $0 \le t < e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}$, dann ist $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(1-j) = [\frac{1-e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}k+t+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}] = [\frac{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(1-k)+t}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}] = 1 - k = 1 - [\frac{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}k-t+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}] = 1 - \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j)$.

(ii) Wir schreiben zunächst j in der Form $j = e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}k$, dann haben wir zwei Fälle zu beachten:

(a) Es gilt $2 \mid k$, wir schreiben $k = 2l$ und erhalten wie verlangt $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{j}{2}]+1) = [\frac{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}l+1+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}] = l+1 = [\frac{(\frac{j}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}})}{2}] + 1 = [\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j)}{2}] + 1$.

(b) Es gilt $2 \nmid k$, wir schreiben $k = 2l+1$ und erhalten $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{j}{2}]+1) = [\frac{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}l+[\frac{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}{2}]+1+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}}] = l+1 = [\frac{(\frac{j}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}})}{2}] + 1 = [\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j)}{2}] + 1$.

(iii) Der Beweis ist vom Prinzip her derselbe wie für [PB99a](4.3.4), wobei wir nur die Voraussetzung, dass E/F unverzweigt ist, aufgeben und dann die Gleichung $\nu_\mathfrak{B}(\pi_F) = r'd'e(E/F)$ zu beachten haben.

□

Wie in [CJB93](1.3)(1.4) definieren wir nun die zahme Korestriktion und die adjungierte Abbildung zu β:

(2.7) Definition *Sei β ein Element, welches eine Körpererweiterung E/F in A erzeugt und sei $B := C_A(E)$, dann vereinbaren wir:*

(i) Für alle $x \in A$ sei $a_\beta(x) := \beta x - x\beta$ und wir nennen die Abbildung $a_\beta : A \to A$ die adjungierte Abbildung, welche zu β gehört.

(ii) Eine zahme Korestriktion $\mathfrak{s}_\beta$ für A im Bezug zu β ist ein (B,B)-Bimodulhomomorphismus $\mathfrak{s}_\beta : A \to B$, so dass für jede Hauptordnung, für die das Element β $\mathfrak{A}$-sound ist, die Beziehung $\mathfrak{s}_\beta(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap B$ gilt.

Unter Verwendung von Hilfssatz (2.6)(i) und (1.2) können wir wie in [CJB93](1.3.4) beweisen, dass:

(2.8) Satz*(i) Seien ψ_E und ψ_F stetige Charaktere von E bzw. von F mit den Führern $\mathfrak{p}_E$ bzw. $\mathfrak{p}_F$ (wiederum sei dabei $E := F[\beta]$). Wir definieren additive Charaktere ψ_B, ψ_A von B, A wie im Abschnitt (1) für A. Es existiert dann eine eindeutige Abbildung $\mathfrak{s}_\beta : A \to B$, so dass für alle $a \in A$ und $b \in B$ die Gleichung $\psi_A(ab) = \psi_B(\mathfrak{s}_\beta(a)b)$ erfüllt ist und diese Abbildung ist eine zahme Korestriktion im Bezug zu β.*

(ii) Für eine Hauptordnung $\mathfrak{A}$, β $\mathfrak{A}$-sound und alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt $\mathfrak{s}_\beta(\mathfrak{P}^j) = \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j)}$.

□

Darüber hinaus erhalten wir wie in [CJB93] eine unendliche exakte Sequenz:

(2.9) $\ldots \xrightarrow{\mathfrak{s}_\beta} A \xrightarrow{a_\beta} A \xrightarrow{\mathfrak{s}_\beta} A \xrightarrow{a_\beta} \ldots$

Kapitel 3

Einfache Strata

Wir wollen nun einen einfachen Links-A-modul V fixieren und identifizieren A mit $End_D(V)$, dann wird V ein Rechts-$D \simeq End_A(V)$-vektorraum. Wieder sei auch $\mathfrak{A}$ eine Hauptordung in A. Sei $\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ die Gitterkette zu $\mathfrak{A}$ in V wie in (0.2), was bedeutet, dass $\mathfrak{A} = End_{\mathfrak{o}_D}(\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}})$. Sei $\tilde{A} := End_F(V)$ und $\tilde{\mathfrak{A}} := End_{\mathfrak{o}_F}(\{X_j\}_{j\in\mathbb{Z}})$, dann ergeben sich kanonische Einbettungen $A \hookrightarrow \tilde{A}$ und $\mathfrak{A} \hookrightarrow \tilde{\mathfrak{A}}$. Analog wie in [P.B99b](1.1.7) definieren wir:

(3.1) Definitions
(i) Ein Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ wird rein genannt, falls β $\mathfrak{A}$-rein ist und $n = -\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)$.
(ii) Ein reines Stratum wie in (i) wird sound genannt, falls β $\mathfrak{A}$-sound ist.
(iii) Ein sound Stratum wie in (ii) wird einfach genannt, falls das zugehörige Stratum $[\tilde{\mathfrak{A}}, n, q, \beta]$ einfach ist im Sinne von [CJB93](1.5.5).

Faktisch kann ein einfaches Stratum auf dieselbe Weise wie in [CJB93](1.5.5) definiert werden, wenn wir den kritischen Exponenten $k_0(\beta, \mathfrak{A})$ verallgemeinern:

(3.2) Definition
(i) Für alle $j \in \mathbb{Z}$ setzen wir (analog zu [CJB93](1.4.3)) $\mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A}) := \{x \in \mathfrak{A} \mid a_\beta(x) \in \mathfrak{P}^j\}$ und
(ii) zu einem $\mathfrak{A}$-sound Element β setzen wir $k_0(\beta, \mathfrak{A}) := max\{k \in \mathbb{Z} \mid \mathfrak{N}_k(\beta, \mathfrak{A}) \nsubseteq \mathfrak{B} + \mathfrak{P}\}$, wobei $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(E)$.

Um zu zeigen, dass unsere Verallgemeinerung einen Sinn ergibt, müssen wir erst noch den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$ genauer beleuchten. Zu diesem Zweck setzen wir $\tilde{B} := C_{\tilde{A}}(E)$ und $\tilde{\mathfrak{B}} := \tilde{\mathfrak{A}} \cap \tilde{B}$. Darüber hinaus bezeichnen wir mit $\tilde{\mathfrak{Q}}$ das Jacobson Radikal von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Der folgende Hilfssatz ist eine Reformulierung von [Bro](I,4.2):

(3.3) Hilfssatz *Sei $A = M_m(D)$ und $V = D^m$ (Spaltenvektoren) der einfache A-Modul, welcher sich in natürlicher Weise aus unserer fixierten Isomorphie $A \simeq M_m(D)$ ergibt, dann ermöglicht uns der fixierte Isomorphismus $M_m(D) \simeq End_D(V)$ die Algebra A mit ihrem Bild unter der kanonischen Einbettung in $\tilde{A} = End_F(V)$ zu identifizieren und mittels der kanonischen Isomorphie $\tilde{A} = End_F(V) \simeq End_D(V) \otimes_F D^{op}$ (wobei $(.)^{op}$ die entgegengesetzte Algebrastruktur zu einer gegebenen Algebrastruktur bezeichnet) mit der Teilalgebra $A \otimes 1$ von $A \otimes_F D^{op}$. Analog gilt*

$\tilde{B} = End_E(V) \simeq B \otimes D^{op}$ und wir können B mit der Teilmenge $B \otimes 1$ von $B \otimes D^{op}$ identifizieren. Diese kanonischen Isomorphien schränken sich für alle $j \in \mathbb{Z}$ zu $(\mathfrak{B}, \mathfrak{o}_L)$-Bimodulisomorphismen

(i) $\tilde{\mathfrak{P}}^j \simeq \oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{P}^{j+kr} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L$ und

(ii) $\tilde{\mathfrak{Q}}^j \simeq \oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(j+kr)} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L$ ein,

wobei L/F eine unverzweigte Erweiterung in D vom Grade d (d.h. L zerfällt D) und π ein Primelement von D ist.

(3.4) Hilfssatz *In der Notation von (3.3) gilt $\mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) = \oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{P}^{kr} \cap \mathfrak{N}_{j+kr}(\beta, \mathfrak{A}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L$.*

Beweis:

Sei $x \in \tilde{\mathfrak{A}}$, dann gilt nach (3.3) $x = \oplus_{k=0}^{d-1} x_k \otimes \pi_D^{-k} l_k$ mit $x_k \in \mathfrak{P}^{kr}$ und $l_k \in \mathfrak{o}_L$ für $k = 0, \ldots, d-1$ und $\tilde{\mathfrak{P}}^j = \oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{P}^{j+kr} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L$. Demnach ist $a_{\beta \otimes 1}(x) \in \tilde{\mathfrak{P}}^j$ genau dann, wenn $a_\beta(x_k) \in \mathfrak{P}^{j+kr}$ für $k = 0, \ldots, d-1$ und damit $x \in \mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$ dann und nur dann, wenn $x_k \in \mathfrak{P}^{kr} \cap \mathfrak{N}_{j+kr}(\beta, \mathfrak{A})$, was zu zeigen war.

□

Wir brauchen auch noch einen Hilfssatz, welcher [CJB93](2.1.1) verallgemeinert:

(3.5) Hilfssatz *Wenn $\nu, j \in \mathbb{Z}$ sind, dann gilt $\mathfrak{P}^\nu \cap \mathfrak{N}_{\nu+j}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(\nu)} \mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A})$.*

Beweis:

Es ist leicht zu sehen, dass die rechte Seite in der linken Seite enthalten ist. Nach [CJB93](2.1.1) gilt $\tilde{\mathfrak{P}}^\nu \cap \mathfrak{N}_{\nu+j}(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) = \tilde{\mathfrak{Q}}^\nu \mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$. Wenn wir also wie angekündigt die Vereinbarungen und Notationen von (3.3) benutzen und A mit seinem Bild $A \otimes 1$ identifizieren, können wir $\mathfrak{P}^\nu \cap \mathfrak{N}_{\nu+j}(\beta, \mathfrak{A}) = \tilde{\mathfrak{P}}^\nu \cap \mathfrak{N}_{\nu+j}(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) \cap A = (\tilde{\mathfrak{Q}}^\nu \mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})) \cap A =$ (3.3(ii)+3.4) $\mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(\nu)} \mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A}) + \pi_F^{-1} \sum_{k=1}^{d-1} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(\nu+kr)} \mathfrak{N}_{j+(d-k)r}(\beta, \mathfrak{A}) = \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(\nu)} \mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A})$, folgern, wobei die letzte Gleichung aus dem Umstand folgt, dass die letzten Summanden alle im ersten enthalten sind.

□

Die Verwendung der zwei verschiedenen kritischen Exponenten führt, wie sich nun zeigt auf dasselbe Ergebnis, welches unter Umständen auch in einem älteren Papier von Broussous auftaucht:

(3.6) Satz

Es gilt $k_0(\beta, \mathfrak{A}) = k_0(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$.

Beweis:

In der Schreibweise von (3.3) und aufgrund der Definition der kritischen Exponenten, genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A}) \subset (\mathfrak{B} + \mathfrak{P})$ dann und nur dann der Fall sein kann, wenn $\mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) \subset (\tilde{\mathfrak{B}} + \tilde{\mathfrak{P}})$.

Um nacheinander beide Richtungen dieser Äquivalenz zu zeigen, nehmen wir zuerst an, dass $\mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A}) \subset (\mathfrak{B} + \mathfrak{P})$, dann ist $\mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) =$ (3.4) $\oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{P}^{kr} \cap \mathfrak{N}_{j+kr}(\beta, \mathfrak{A}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L =$ (Hilfssatz 3.5) $\oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(kr)} \mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L \subset$ (nach Voraussetzung) $\oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(kr)} (\mathfrak{B} + \mathfrak{P}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L \subset \oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(kr)} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L + \oplus_{k=0}^{d-1} \mathfrak{P}^{1+kr} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \pi_D^{-k} \mathfrak{o}_L =$ (3.3((ii)+(i))) $\tilde{\mathfrak{B}} + \tilde{\mathfrak{P}}$.

Setzen wir umgekehrt die Inklusion $\mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) \subset (\tilde{\mathfrak{B}} + \tilde{\mathfrak{P}})$ voraus, dann folgt $\mathfrak{N}_j(\beta, \mathfrak{A}) =$ (3.4) $\mathfrak{N}_j(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) \cap A \subset$ (nach Voraussetzung) $(\tilde{\mathfrak{B}} + \tilde{\mathfrak{P}}) \cap A =$ (3.3((ii)+(i))) $\mathfrak{B} + \mathfrak{P}$.

Damit sind wir fertig.

□

Damit sind wir in der Lage wie in [CJB96a](1.5) den Begriff des einfachen Paares einzuführen:

(3.7) Definition *Ein einfaches Paar ist ein Paar* $[q^0, \beta']$ *aus einer ganzen Zahl* q^0 *und einem Element* β' *aus einem algebraischen Abschluss von* F*, so dass* $q^0 < \min\{-\nu_E(\beta'), -k_0(\beta', \mathfrak{A}(E))\}$*, wobei* $E := F[\beta']$ *eine endliche Erweiterung von* F *sein soll und* $\mathfrak{A}(E)$ *die Hauptordnung in* $A(E) := End_F(E)$ *sein soll mit der* $\mathfrak{o}_F$*-Gitterkette* $\{\mathfrak{p}_E^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *im einfachen* $A(E)$*-Modul* E*.*

Wie im zerfallenden Fall ist das Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ einfach für alle $\mathfrak{A}$-sound Einbettungen β von β' in A (natürlich muss jetzt vorausgesetzt werden $[E : F] \mid md$) und alle $q \in \mathbb{Z}$ mit $q^0 = [\frac{e(E/F)q}{rd}]$, wobei $n = -\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)$ und r die Periode von $\mathfrak{A}$ ist. Umgekehrt führt ein einfaches Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ zu einem einfachen Paar $[[\frac{e(E/F)q}{rd}], \beta]$. Wir bemerken auch, dass wir aus [CJB93](1.4.13)(ii) die Gleichheit $k_0(\beta, \mathfrak{A}) = k_0(\beta, \mathfrak{A}(E))\frac{rd}{e(E/F)}$ bekommen und natürlich gilt auch die Gleichheit $\nu_{\mathfrak{A}}(\beta) = \nu_E(\beta')\frac{rd}{e(E/F)}$.

Mit [PB99a](5.1) und seinem Beweis ist leicht zu sehen, dass jedes sound Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ äquivalent zu einem einfachen Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ im Sinne von (3.1) ist. Faktisch kann aber aus dem Beweis von [PB99a](5.1)(5.4) entnommen werden, dass:

(3.8) Satz *Sei* $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ *ein sound Stratum und* K/F *die maximal unverzweigte Erweiterung in der Erweiterung* E/F*. Sei auch* M/K *eine unverzweigte Erweiterung in* A*, so dass* $M[\beta]$ *ein Körper ist und* $M^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ *eine sound Einbettung ist im Sinne von (2.4). Sei nun* $\mathfrak{C} := \mathfrak{A} \cap C_A(M)$*, dann existiert sogar ein* $\mathfrak{C}$*-sound Element* γ*, so dass das Stratum* $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ *einfach und äquivalent zu* $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ *ist. Darüber hinaus gilt* $F[\gamma]^{ur} \subseteq K$ *und schliesslich ist das Stratum* $[\mathfrak{C}, n', q', \gamma]$ *ebenfalls einfach und äquivalent zu* $[\mathfrak{C}, n', q', \beta]$*, wobei* $n' := \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n)$ *und* $q' := \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(q)$*.*

Beweis:

Weil $\mathfrak{o}_E \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{o}_M \subset \mathfrak{A}$ und weil eine Ganzheitsbasis $\mathfrak{o}_{M[\beta]} \mid \mathfrak{o}_M$ welche in $\mathfrak{o}_{F[\beta]}$ enthalten ist existiert, gilt auch $\mathfrak{o}_{M[\beta]} \subset \mathfrak{A}$. Weil die Erweiterung $M[\beta]/F[\beta]$ unverzweigt ist, folgern wir $M[\beta]^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$. Natürlich gilt dann auch $M[\beta]^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{C}}$ und das Stratum $[\mathfrak{C}, n', q', \beta]$ ist sound.

Wie zu Beginn des Beweises von [PB99a](5.1) können wir uns auf den Fall $\frac{rd}{e(E/F)} \mid q$ beschränken und dann gilt nach (2.6)(iii) $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(q) = q\frac{\bar{r}\bar{d}}{rd}$, wobei $\bar{r}$ die Periode von $\mathfrak{C}$ ist und $\bar{d}$ der Index von $C_A(M)$.

Wenn wir nun der geänderten Notation Rechnung tragen und dem Beweis von [PB99a](5.1) folgen, so können wir, indem wir K durch M ersetzen, ein $\mathfrak{C}$-sound Element γ finden, so dass das Stratum $[\mathfrak{C}, n', q', \gamma]$ (in [PB99a] mit $[\mathfrak{B}, n', q', \gamma_1]$ bezeichnet) einfach und äquivalent zu $[\mathfrak{C}, n', q', \beta]$ ist (in [PB99a] mit $[\mathfrak{B}, n', q', \beta]$ bezeichnet). Das Argument $F[\beta] = K[\beta]$, welches hinter [PB99a](5.5) verwendet wurde, ist hier nicht notwendig, um die Enthaltensrelation $F[\gamma]^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ (in der Notation von [PB99a] $F[\gamma_1]^\times \subset \mathcal{K}$) zu zeigen, weil γ $\mathfrak{C}$-sound und $\mathfrak{A}$ eine Fortsetzung von $\mathfrak{C}$ ist. Demnach können wir den Beweis von [PB99a](5.1) weiter verfolgen und zeigen, dass das Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ (in [PB99a] mit $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma_1]$ bezeichnet) $\mathfrak{A}$-rein im Sinne von [PB99a] und äquivalent zu $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ ist. Darüber hinaus ist $[\tilde{\mathfrak{A}}, n, q, \gamma]$ einfach im Sinne von [CJB93](1.5.5) und äquivalent zu $[\tilde{\mathfrak{A}}, n, q, \gamma]$. Nach [CJB93](2.4.1) gilt $f(F[\gamma]/F) \mid f(E/F)$ und demnach folgt wegen $F[\gamma]^{ur} \subseteq M[\gamma]^{ur} = M$, dass $F[\gamma]^{ur} \subseteq K$. Durch Anwendung von (2.3), können wir schliessen, dass es sound und damit einfach in unserem Sinne ist.

□

Bemerkung: (i) Aus [PB99a](5.1)(ii) folgern wir, dass alle reinen Strata $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$, welche äquivalent zu $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ sind und so dass $[F[\gamma] : F]$ minimalen Grad hat unter allen einfachen Strata mit derselben Eigenschaft, notwendig einfach sind. Auch gilt in dieser Situation $f(F[\gamma]/F) \mid f(F[\beta]/F)$ und $e(F[\gamma]/F) \mid e(F[\beta]/F)$.

(ii) Aus (2.6)(iii) und in der Schreibweise von (2.5),(3.8) folgern wir, dass im Falle $\frac{rd}{e(E/F)} \mid q$ die Gleichheit $q' = \frac{q}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}}$ gilt. □

Der letzte Satz bzw. [PB99a](Hauptsatz (5.1)(ii)) ermöglicht es nun den Begriff der Approximationsfolge einzuführen:

(3.9) Definition

(A) Sei $[\mathfrak{A}, n, l, \beta]$ ein sound Stratum, dann wird die kleinste ganze Zahl q zwischen l und n, so dass ein äquivalentes einfaches Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ existiert mit $[F[\gamma] : F] < [F[\beta] : F]$, als der letzte Sprung des Stratums bezeichnet.

(B) Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum, dann finden wir zu jeder ganzen Zahl q zwischen 0 und n ein einfaches Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma^{(q)}]$, welches äquivalent zu $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ ist und natürlich ist $[\mathfrak{A}, n, q_2, \gamma^{(q_2)}]$ äquivalent zu $[\mathfrak{A}, n, q_2, \gamma^{(q_1)}]$, falls $q_2 \geq q_1$. Eine Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ist eine Folge von einfachen Strata $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, wobei

(i) $q_0 = 1$ und $\gamma_0 = \beta$,

(ii) $q_\mu = n$ und $\gamma_\mu = 0$,

(iii) $q_{i+1} > q_i$ ist der letzte Sprung für das Stratum $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$ im Sinne (A) für $i = 1, \ldots, \mu - 2$ bzw. $q_1 \geq 1$ der letzte Sprung für das Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ und schliesslich,

(iv) ist $[\mathfrak{A}, n, q_{i+1}, \gamma_{i+1}]$ ein einfaches Stratum welches äquivalent zu $[\mathfrak{A}, n, q_{i+1}, \gamma_i]$ ist für $i = 0, \ldots, \mu - 2$.

Die Zahlen $q_1, \ldots, q_\mu$ werden die Sprünge der Approximationsfolge genannt.

(C) Eine Folge $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$, mit $q_1 < q_2 < \ldots < q_\mu$, $\mu \in \mathbb{N}$, mit $\frac{rd}{e(F[\gamma_{i-1}]/F)} \mid q_i$ für $i = 1, \ldots, \mu$, welche die Bedingungen (A)(i)(ii)(iv) erfüllt und eine Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ im Sinne von (B) enthält, wird eine schwache Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ genannt. Die Zahlen $q_1, \ldots, q_\mu$ werden dann ebenfalls als Sprünge der schwachen Approximationsfolge bezeichnet.

Bemerkung: Aufgrund von [PB99a](Hauptsatz (5.1)(ii)), nach Konstruktion und für $n > 0$ ist klar, dass eine Approximationsfolge für ein einfaches Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ immer existiert und dass die Folge der Zahlen $q_1, \ldots, q_\mu$ immer dieselbe ist. Faktisch gilt $q_{i+1} = -k_0(\gamma_i, \mathfrak{A}) = -k_0(\gamma_i, \mathfrak{A}(F[\gamma_i]))\frac{rd}{e(F[\gamma_i]/F)}$ für $i = 0, \ldots, \mu{-}2$. Insbesondere sind alle Approximationsfolgen auch schwache Approximationsfolgen. Die Sprünge einer schwachen Approximationsfolge müssen jedoch keine echten Sprünge im Sinne von (3.9)(A) sein.

(3.10) Definition *Ein einfaches Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ mit $n > 0$, welches eine Approximationsfolge der Länge $\mu = 1$ hat, wird minimal über F genannt.*

Wenn $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$, mit $n > 0$ eine Approximationsfolge des einfachen Stratums $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ist, dann ist leicht zu sehen, dass jedes $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma_j]$ die Approximationsfolge $[\mathfrak{A}, n, 1, \gamma_j]$, $[\mathfrak{A}, n, q_k, \gamma_k]$, $k = j + 1, \ldots, \mu$ für $j = 1, \ldots, \mu - 1$ hat. Insbesondere ist das Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma_{\mu-1}]$ minimal über F. Dies ermöglicht uns die Verwendung von Induktionsargumenten entlang einer Approximationsfolge, wie sie auch in [CJB93] oder [Zin90] verwendet werden.

Das Hauptresultat dieses Abschnittes liefert uns eine Verschärfung des Begriffes der Approximationsfolge:

(3.11) Hauptsatz

Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum und K der maximal unverzweigte Teil der Erweiterung E/F, wobei $E := F[\beta]$. Sei $C := C_A(K)$ der Zentralisator von K in A und sei $\mathfrak{C} := \mathfrak{A} \cap C$. Nach Voraussetzung ist die Einbettung $K^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ sound und demnach $\mathfrak{C}$ eine Hauptordnung. Auch ist das Stratum $[\mathfrak{C}, \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n), 0, \beta]$ einfach und in dieser Situation existiert eine Approximationsfolge $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$, für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $K = F[\gamma_0]^{ur} \supseteq F[\gamma_1]^{ur} \supseteq \ldots \supseteq F[\gamma_\mu]^{ur}$, *wobei* $F[\gamma_i]^{ur}$ *jeweils den maximal unverzweigten Teil der Erweiterung* $F[\gamma_i]/F$ *für* $i = 0, \ldots, \mu$ *bezeichnet und*

(ii) $[\mathfrak{C}, \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n), \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(q_i), \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$, *eine schwache Approximationsfolge für* $[\mathfrak{C}, \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n), 0, \beta]$ *ist.*

Beweis:

Zuerst wählen wir eine beliebige Approximationsfolge mit Sprungstellen $q_1 < \ldots < q_\mu$, wenden dann (3.8) auf das Stratum $[\mathfrak{A}, n, q_1, \beta]$ mit $M = K$ an und erhalten die letzten beiden Approximationen $[\mathfrak{A}, n, q_0, \gamma_0] = [\mathfrak{A}, n, 1, \beta]$ und $[\mathfrak{A}, n, q_1, \gamma_1] = [\mathfrak{A}, n, q_1, \gamma]$. Natürlich ist $K[\gamma_1]$ ein Körper, $F[\gamma_1]^{ur} \subseteq K$ und die letzte Sprungstelle für das Stratum $[\mathfrak{A}, n, q_1, \gamma_1]$ ist q_2. Induktiv können wir damit weiter (3.8) anwenden.

Nach μ-facher Anwendung von (3.8) erhalten wir die gewünschte Approximationsfolge mit den Sprungstellen $q_1 < \ldots < q_\mu$.

□

Diese besondere Art der Approximationsfolge ist nicht notwendig um einfache Charaktere zu konstruieren, kann aber z.B. verwendet werden, um einfache Charaktere für verschiedene einfache Algebren zu vergleichen.

(3.12) Definition

Eine Approximationsfolge wie in (3.11) wird speziell genannt.

Kapitel 4

Orbitfilter von additiven Charakteren und ihre Stabilisatoren

Sei $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung und $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum. Darüber hinaus verwenden wir die Bezeichungsweisen für E, B und $\mathfrak{B}$ aus Abschnitt (2). Wir definieren ψ_β^+ wie in Abschnitt (1). Im nächsten Abschnitt (5) wollen wir die Grundlage schaffen, um aus dem gegebenem Stratum gewisse zulässige Paare im Sinne von [Zin88](2.1) für die absteigende Normalreihe $U^1(\mathfrak{A}) \supset U^2(\mathfrak{A}) \supset U^3(\mathfrak{A}) \supset \ldots$ zu konstruieren. Nach [Zin88](5.5) müssen diese zulässigen Paare Heisenbergdarstellungen sein. In diesem Abschnitt werden wir zu unserem fixierten einfachen Stratum Gruppen $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ und $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ konstruieren. Im nächsten Abschnitt konstruieren wir dann eine zugehörige Menge $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$ von Heisenbergcharakteren der Gruppe $H^1(\beta, \mathfrak{A})$, deren Heisenbergdarstellungen dann auf $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ leben werden. Wie in [CJB93] bezeichnen wir diese Auswahl von Heisenbergcharakteren als 'einfache Charaktere' und in Abschnitt (6) wollen wir diese Charaktere, welche wir für verschiedene zentral-einfache Algebren vom selben reduzierten Grad über F konstruiert haben, miteinander vergleichen, um damit die Verallgemeinerung von Resultaten aus [Zin92a] und [Zin93] zu ermöglichen. Die zulässigen Paare erzeugen stabile Darstellungsfilter und wie in [Zin92b] (oder [Zin90]), wollen wir die zugehörigen Gruppen als Stabilisatoren von gewissen Orbitfiltern, welche wir aus ψ_β^+ gewinnen, konstruieren. Wie in [Bro98] können wir durch ähnliche Verfahren und mithilfe der kanonischen Zerfällungen $\tilde{A}$ und $\tilde{\mathfrak{A}}$, wie schon in Abschnitt (3) verwendet, einige wichtige Resultate des zerfallenden Falles übernehmen.

Betrachten wir nun eine Familie von Orbits $\mathcal{F}(\psi_\beta^+) := \{(U^j(\mathfrak{A})) \circ \psi^+_{\beta|\mathfrak{P}^j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, wobei $U^j(\mathfrak{A}) \circ \psi^+_{\beta|\mathfrak{P}^j}$ den Charakterorbit von $\psi^+_{\beta|\mathfrak{P}^j}$ unter der adjungierten Aktion von $U^j(\mathfrak{A})$ bezeichnet und $\psi^+_{\beta|\mathfrak{P}^j}$ die Einschränkung von ψ_β^+ auf $\mathfrak{P}^j$.

Wir fixieren nun eine schwache Approximationsfolge $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$ für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$.

(4.1) Definition *(i) Wir setzen* $J^1(\psi_\beta^+) := Stab_{U^1(\mathfrak{A})}(\mathcal{F}(\psi_\beta^+))$, *wobei* $U^1(\mathfrak{A})$ *wiederum durch Konjugation wirkt,*

(ii) auch sei $1 + \mathfrak{J}^1(\psi_\beta^+) := J^1(\psi_\beta^+)$,

(iii) $\mathfrak{H}^1(\psi_\beta^+) := \mathfrak{J}^1(\psi_\beta^+)^{\perp_\beta}$,

(iv) $H^1(\beta, \mathfrak{A}) := 1 + \mathfrak{H}^1(\psi_\beta^+)$,

(v) $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) := \sum_{i=0}^{\mu} \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i)$,
(vi) $J^1(\beta,\mathfrak{A}) := 1 + \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ *und schliesslich sei*
(vii) $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) := \sum_{i=0}^{\mu} \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)$.

Natürlich ergibt sich aus ihrer Definition, dass $\mathfrak{J}^1(\psi_\beta^+)$ und $\mathfrak{H}^1(\psi_\beta^+)$ Ringe sind, welche durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert werden. Aus (1.2) folgern wir, dass $(\mathfrak{P}^i)^{\perp_\beta} = \{x \in \mathfrak{P} \mid \forall y \in \mathfrak{P}^i : \psi_\beta^+(xy - yx) = \psi_{a_\beta(x)}^+(y) = 1\} = \{x \in \mathfrak{P} \mid a_\beta(x) \in \mathfrak{P}^{-i+1}\} = \mathfrak{P} \cap \mathfrak{N}_{-i+1}(\beta,\mathfrak{A})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und mithilfe von [Zin90](1.8) erhalten wir daher:

(4.2) Hilfssatz *(i)* $\mathfrak{J}^1(\psi_\beta^+) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{P}^i \cap \mathfrak{N}_{-i}(\beta,\mathfrak{A})$ *und*
(ii) $\mathfrak{H}^1(\psi_\beta^+) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{P}^i \cap \mathfrak{N}_{-i+1}(\beta,\mathfrak{A})$.

□

Aufgrund dieser Beschreibungen der Ringe $\mathfrak{J}^1(\psi_\beta^+)$, $\mathfrak{H}^1(\psi_\beta^+)$ und der Definition der schwachen Approximationfolge ($(\beta - \gamma_i) \in \mathfrak{P}^{-q_i}$ und $-a_{\gamma_i}(C_A(\gamma_i)) = \{0\}$ für $i = 0,\dots,\mu$) erhalten wir leicht die Enthaltensrelationen $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{J}^1(\psi_\beta^+)$ und $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{H}^1(\psi_\beta^+)$.

Um die umgekehrte Enthaltensrelation zu sehen, betrachten wir dieselbe Situation in der zerfallenden Algebra $\tilde{A}$. Zu diesem Zwecke verwenden wir den Charakter $\tilde{\psi}_\beta^+$, welcher der additive Charakter des Jacobsonradikals $\tilde{\mathfrak{P}}$ von $\tilde{\mathfrak{A}}$ sein soll und genauso definiert wird wie ψ_β^+ von $\mathfrak{P}$. Nach Hilfssatz (4.2)(ii) und [CJB93]((3.1.9)(i), seinem Beweis mit $t = 2i - 1$ für $i = 1, 2, \dots$, sowie per Induktion über die schwache Approximationsfolge und (3.1.2)) erhalten wir $\mathfrak{H}^1(\beta,\tilde{\mathfrak{A}}) \supseteq \mathfrak{H}^1(\tilde{\psi}_\beta^+)$. Nach Hilfssatz (4.2)(i) und [CJB93]((3.1.10)(i), seinem Beweis mit $t = 2i$ für $i = 1, 2, \dots$, sowie per Induktion über die schwache Approximationsfolge und (3.1.2)) erhalten wir $\mathfrak{J}^1(\beta,\tilde{\mathfrak{A}}) \supseteq \mathfrak{J}^1(\tilde{\psi}_\beta^+)$. Weil die umgekehrten Inklusionen aus dem schon genannten Grunde gelten, folgern wir, dass $\mathfrak{H}^1(\beta,\tilde{\mathfrak{A}}) \cap A = \mathfrak{H}^1(\tilde{\psi}_\beta^+) \cap A$ und $\mathfrak{J}^1(\beta,\tilde{\mathfrak{A}}) \cap A = \mathfrak{J}^1(\tilde{\psi}_\beta^+) \cap A$. Ähnlich wie in [Bro98] erhalten wir:

(4.3) Satz *Es gelten* $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) = \mathfrak{H}^1(\psi_\beta^+)$ *und* $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) = \mathfrak{J}^1(\psi_\beta^+)$. *Insbesondere sind* $H^1(\beta,\mathfrak{A})$ *und* $J^1(\beta,\mathfrak{A})$ *Gruppen, welche durch* $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ *normalisiert werden. Darüber hinaus sind die Definitionen der letzteren Gruppen faktisch unabhängig von der besonderen Auswahl der schwachen Approximationsfolge* $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0,\dots,\mu$ *für* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$.

Zwei andere wichtige Eigenschaften der eingeführten Ringe ergeben sich ebenfalls aus der expliziten Beschreibung von Hilfssatz (4.2):

(4.4) Hilfssatz *(i)* $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$ *ist ein zweiseitiges Ideal in* $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ *und*
(ii) $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$, $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ *sind* $(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$*-Bimoduln.*

□

Als weiteres Beispiel für ein Induktionsargument entlang der schwachen Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, können wir nun die Sätze [CJB93](3.1.16) und [CJB93](3.1.22) verallgemeinern. Dies geschieht in dem wir den Beweisen in [CJB93] Schritt für Schritt folgen und die dabei erforderlichen Enthaltensrelationen für Untergruppen von A aus den entsprechenden Relationen für Untergruppen von $\tilde{A}$ herleiten. Dabei werden Argumente wie in [Bro98] verwendet. Wir erhalten schliesslich:

(4.5) Satz *Sei* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *ein einfaches Stratum mit schwacher Approximationsfolge* $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$, *wobei* $\mu > 1$, *dann gilt:*

(i) Für $0 \leq \nu \leq q_1 - 1$ *besteht eine exakte Sequenz*

$$\mathfrak{P}^{q_1-\nu} \cap \mathfrak{N}_{-\nu}(\beta, \mathfrak{A}) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_1+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A}) \xrightarrow{a_\beta} (\mathfrak{P}^{\nu+1} \cap \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}))^* \xrightarrow{s_\beta} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(-\nu)} \to 0.$$

(ii) Für $1 \leq \nu \leq q_1$ *besteht eine exakte Sequenz*

$$\mathfrak{P}^{1+q_1-\nu} \cap \mathfrak{N}_{1-\nu}(\beta, \mathfrak{A}) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_1}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}) \xrightarrow{a_\beta} (\mathfrak{J}^\nu(\beta, \mathfrak{A}))^* \xrightarrow{s_\beta} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(1-\nu)} \to 0.$$

(iii) Insbesondere besteht für $1 \leq \nu \leq [\frac{q_1+1}{2}]$ *die exakte Sequenz*

$$0 \to \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{q_1}{2}]+1)} \to \mathfrak{P}^{[\frac{q_1}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}) \xrightarrow{a_\beta} (\mathfrak{J}^\nu(\beta, \mathfrak{A}))^* \xrightarrow{s_\beta} \mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(1-\nu)} \to 0.$$

□

Im Rahmen des Beweises von (4.5) erhalten wir auch die entsprechende Verallgemeinerung von [CJB93](3.1.19):

(4.6) Hilfssatz *Für* $m \geq 0$ *gilt:*
$(\mathfrak{H}^{m+1}(\beta, \mathfrak{A}))^* = a_\beta(\mathfrak{J}^{[\frac{q_1+1}{2}]}(\beta, \mathfrak{A})) + \mathfrak{P}^{-m}$.

□

Kapitel 5

Einfache Charaktere für Hauptordnungen

In diesem Abschnitt wollen wir nun einen $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}J^1(\beta,\mathfrak{A})$-stabilen Charakter θ_β von $H^1(\beta,\mathfrak{A})$ konstruieren, welcher die Eigenschaft hat, dass $\theta_\beta((1+x)(1+y)(1+x)^{-1}(1+y)^{-1}) = \psi_\beta^+(xy-yx)$ für alle $1+x, 1+y \in J^1(\beta,\mathfrak{A})$ gilt. Nach Definition von $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$, $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$ und nach Konstruktion ist klar, dass die rechte Seite der Gleichung eine nichtausgeartete Form $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})/\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})\times\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})/\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}^\times$ liefert, also die linke Seite eine nicht-ausgeartete Form $J^1(\beta,\mathfrak{A})/H^1(\beta,\mathfrak{A})\times J^1(\beta,\mathfrak{A})/H^1(\beta,\mathfrak{A}) \to \mathbb{C}^\times$. Demnach bestimmt θ_β dann eine $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}J^1(\beta,\mathfrak{A})$-stabile Heisenbergdarstellung η_β von $J^1(\beta,\mathfrak{A})$, welche uns ein zulässiges Paar liefert, von der Art, welches wir zu Beginn von Abschnitt (4) erwähnten.

Wollen wir nun konkreter werden. Sei $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ wieder ein einfaches Stratum und sei eine Approximationsfolge $[\mathfrak{A},n,q_i,\gamma_i]$, $i=0,\ldots,\mu$ fixiert. Darüber hinaus benutzen wir die Schreibweisen für $\mathfrak{P}$, E, B, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{Q}$ wie oben. Für $n=0$ setzen wir $\eta_\beta=\theta_\beta\equiv 1$. Sonst ist $\mu\geq 1$ und wir können unseren einfachen Charakter rekursiv entlang der schwachen Approximationsfolge konstruieren.

Zu diesem Zweck setzen wir zunächst voraus, dass $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ minimal über F ist. In diesem Falle gilt dann $H^1(\beta,\mathfrak{A}) = 1+\mathfrak{Q}+\mathfrak{P}^{[\frac{n}{2}]+1} = U^1(\mathfrak{B})U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})$ und $\psi_\beta^\times$ ist ein Charakter von $U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})/U^{n+1}(\mathfrak{A})$. Natürlich können wir $\psi_\beta^\times$ auf $U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap B = U^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{n}{2}]+1)}(\mathfrak{B})$ einschränken und mit der Dualität (1.4) und Hilfssatz (1.10) sehen wir, dass diese Einschränkung von $\psi_\beta^\times$ durch die reduzierte Norm $Nrd_{B/E}$ faktorisiert. Folgende Definition ist daher sinnvoll:

(5.1) Definition *Wenn das Stratum $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ minimal über F ist, dann soll ein einfacher Charakter θ_β auf $U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})$ durch $\psi_\beta^\times$ gegeben sein und auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch $\lambda_\beta\circ Nrd_{B/E}$, wobei λ_β ein Charakter von $U^1(\mathfrak{o}_E)$ ist, so dass $(\lambda_\beta\circ Nrd_{B/E})_{|U^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{n}{2}]+1)}(\mathfrak{B})} = (\psi_\beta^\times)_{|U^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{n}{2}]+1)}(\mathfrak{B})}$.*

Aufgrund der letzten Definition ist klar, dass θ_β im minimalen Fall durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert wird.

Nun sei $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ ein beliebiges einfaches Stratum und wiederum $n>0$. Wir können einen einfachen Charakter $\theta_{\gamma_{\mu-1}}$ für das minimale Stratum $[\mathfrak{A},n,0,\gamma_{\mu-1}]$ wählen und definieren einen einfachen Charakter θ_β mithilfe einer rekursiven Prozedur entlang einer schwachen Approximationsfolge für $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$, wobei wir bereits alle einfachen Charaktere für alle minimalen Strata als gegeben voraussetzen dürfen.

Natürlich büsst unsere Argumentation nichts an Allgemeinheit ein, wenn wir voraussetzen, dass für $\gamma_1, \dots \gamma_{\mu-1}$ einfache Charaktere gegeben sind und wir defininieren θ_β nun auf der Basis eines einfachen Charakters θ_γ, wobei $\gamma := \gamma_1$. Wir setzen nun $q := q_1$ und beachten, dass $\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1(\gamma, \mathfrak{A})$ ein $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-Bimodul ist, welcher durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert wird. Wegen Hilfssatz (4.2), erhalten wir $H^1(\beta, \mathfrak{A}) = U^1(\mathfrak{B})(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A}))$ und beide Faktoren auf der rechten Seite werden durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert. Für unsere Konstruktion benötigen wir folgenden von E.-W. Zink vermuteten Hilfssatz:

(5.2) Hilfssatz *Für jeden einfachen Charakter θ_γ von $H^1(\gamma, \mathfrak{A})$ wird der Charakter $\psi^{\times}_{\beta-\gamma}(\theta_\gamma)_{|U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A})}$ durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert und wenn wir letzteren Charakter auf $U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A}) \cap B$ einschränken, faktorisiert er durch die reduzierte Norm $Nrd_{B/E}$.*

Wir bemerken zunächst, dass nach (1.10) Hilfssatz (5.2) wahr ist, wenn das Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ minimal über F ist, falls wir in diesem Falle $\theta_{\gamma_\mu} \equiv 1$ und $H^1(\gamma_\mu, \mathfrak{A}) := U^1(\mathfrak{A})$ setzen, wobei dann bereits nach Definition $q_1 = q_\mu = n$ und $\gamma = \gamma_\mu = 0$ gelten. Wenn nun im Einklang mit folgender Definition, Hilfssatz (5.2) allgemein zutrifft, dann macht eben folgende Definition auch im allgemeinen Sinn:

(5.3) Definition *(i) Angenommen, ein einfacher Charakter θ_γ wäre für das einfache Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma]$ bereits wohldefiniert und ausgewählt, dann soll ein einfacher Charakter θ_β für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein Charakter sein, welcher auf $U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A})$ durch $\psi^{\times}_{\beta-\gamma}(\theta_\gamma)_{|U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A})}$ gegeben ist und auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch $\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E}$, wobei λ_β ein Charakter von $U^1(\mathfrak{o}_E)$ ist, so dass $(\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E})_{|U^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{q}{2}]+1)}(\mathfrak{B})} = (\psi^{\times}_{\beta-\gamma}\theta_\gamma)_{|U^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{q}{2}]+1)}(\mathfrak{B})}$. Wir erwarten von einem einfachen Charakter auch, dass er von der Gruppe $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert wird.*

(ii) Wir bezeichnen die Menge aller möglichen einfachen Charaktere für das einfache Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ (wobei wir auch die Wahl der letzten Approximation $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ und des zugehörigen einfachen Charakters θ_γ variieren) mit $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$.

Bei jedem Schritt der rekursiven Definition eines einfachen Charakters θ_β entlang einer schwachen Approximationsfolge $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \dots, \mu$ erhalten wir einen durch den jeweiligen einfachen Charakter eindeutig bestimmten Charakter λ_{γ_i} von $U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})$ für $i = 0, \dots, \mu$ und umgekehrt kann die entsprechende Folge $\theta_{\gamma_\mu}, \dots, \theta_{\gamma_1}$ von einfachen Charakteren und insbesondere $\theta_{\gamma_0} = \theta_\beta$ aus der Folge $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i})\}_{i=0,\dots,\mu}$ zurückgewonnen werden.

(5.4) Definition *(i) Eine Folge $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i})\}_{i=0\dots,\mu}$, wie wir sie aus der rekursiven Definition des einfachen Charakters θ_β erhalten haben, nennen wir eine definierende Folge für θ_β.*

(ii) Wir bezeichnen durch $\mathcal{D}(\beta, \mathfrak{A})$ die Menge aller definierenden Folgen für alle möglichen einfachen Charaktere für ein gegebenes einfaches Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, wobei wir ebenfalls über alle möglichen Approximationsfolgen variieren.

Natürlich ist eine definierende Folge für einen einfachen Charakter genauso wenig eindeutig, wie eine schwache Approximationsfolge für ein einfaches Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$. Bis zum Beweis der Korollare (5.13)(5.14) müssen wir aber zunächst eine schwache Approximationsfolge fixiert lassen.

Um unser Hauptlemma (5.2) zu beweisen, brauchen wir zunächst ein Resultat über die Verkettung des bereits gegebenen Charakters θ_γ. Um die Schreibweisen zu vereinfachen, nehmen wir zuweilen an, dass ein einfacher Charakter für das einfache Stratum $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ bereits existiert, sofern es entsprechend unseres Induktionsargumentes erlaubt ist. Im eigentlichen Beweis wird dann nur die Existenz eines einfachen Charakters θ_γ für die letzte Approximation $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ gebraucht. Die im folgenden bewiesenen Eigenschaften dienen dann dazu, zu zeigen, dass $\psi^\times_{\beta-\gamma}(\theta_\gamma)_{|U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\gamma,\mathfrak{A})}$ durch ganz $B^\times$ verkettet wird, um die Anwendung von Hilfssatz (1.10) zu ermöglichen.

(5.5) Notation *Für $x, y \in \mathfrak{P}$ setzen wir* $[1+x, 1+y] := (1+x)(1+y)(1+x)^{-1}(1+y)^{-1}$.

Zuerst beweisen wir die Haupteigenschaft eines einfachen Charakters welche eine Verallgemeinerung von [Zin90](4.3 miii) ist:

(5.6) Satz *Sei θ_β ein einfacher Charakter, dann gilt für alle $x, y \in \mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ die Identität*

$$\theta_\beta([1+x, 1+y]) = \psi^+_\beta(xy - yx).$$

Beweis:

Zunächst setzen wir voraus, dass $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ minimal über F ist. Wir schreiben $1+x, 1+y \in J^1(\beta, \mathfrak{A})$ in der Form $(1+x) = (1+x_1)(1+x_2)$ und $(1+y) = (1+y_1)(1+y_2)$, wobei $1+x_1, 1+y_1 \in U^1(\mathfrak{B})$ und $1+x_2, 1+y_2 \in U^{[\frac{n+1}{2}]}(\mathfrak{A})$. Unter diesen Bedingungen gilt nun $\theta_\beta([1+x, 1+y]) = \theta_\beta([(1+x_1)(1+x_2), (1+y_1)(1+y_2)]) = \theta_\beta({}^{(1+x_1)}[1+x_2, 1+y])\theta_\beta([1+x_1, 1+y]) = \theta_\beta([1+x_2, 1+y])\theta_\beta([1+x_1, 1+y])$, weil θ_β nach Konstruktion invariant unter der adjungierten Aktion von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ ist. Darüber hinaus gilt $[1+x_1, 1+y] = 1 + (x_1y - yx_1)(1+x_1)^{-1}(1+y)^{-1} \in U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})$ und daher auch $\theta_\beta([1+x_1, 1+y]) = \psi^\times_\beta([1+x_1, 1+y]) = \psi^+_\beta((x_1y - yx_1)(1+x_1)^{-1}(1+y)^{-1}) = \psi^+_\beta(x_1y - yx_1) = 1$, weil ψ^+_β trivial auf $\mathfrak{P}^{n+1}$ ist und β mit x_1 kommutiert. Mit derselben Art von Argumenten erhalten wir $\theta_\beta([1+x_2, 1+y]) = \theta_\beta([1+x_2, 1+y_1])\theta_\beta({}^{(1+y_1)}[1+x_2, 1+y_2]) = \theta_\beta([1+x_2, 1+y_2]) = \psi^\times_\beta(1 + (x_2y_2 - y_2x_2)(1+x_2)^{-1}(1+y_2)^{-1}) = \psi^+_\beta(x_2y_2 - y_2x_2) = \psi^+_\beta(xy - yx)$, wobei die letzte Gleichung gilt, weil x_1, y_1 mit β kommutieren und wegen $2[\frac{n+1}{2}] + 1 \geq n+1$.

Betrachten wir nun also den allgemeinen Fall und nehmen wir an unsere Aussage wäre schon wahr für θ_γ. Auch setzen wir in Analogie zum minimalen Fall $1+x = (1+x_1)(1+x_2)$ und $1+y = (1+y_1)(1+y_2)$, wobei $x_1, y_1 \in \mathfrak{Q}$ und $x_2, y_2 \in \mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$. Wie im minimalen Fall erhalten wir damit

$$\begin{gathered}\theta_\beta([1+x, 1+y]) = \\ \theta_\beta({}^{(1+x_1)}[1+x_2, 1+y])\theta_\beta([1+x_1, 1+y]) = \\ \theta_\beta([1+x_2, 1+y])\theta_\beta([1+x_1, 1+y]) = \\ \theta_\beta([1+x_2, 1+y_1])\theta_\beta({}^{(1+y_1)}[1+x_2, 1+y_2])\theta_\beta([1+x_1, 1+y]) = \\ \theta_\beta([1+x_2, 1+y_1])\theta_\beta([1+x_2, 1+y_2])\theta_\beta([1+x_1, 1+y]).\end{gathered}$$

Wieder führen ähnliche Argumente auf die Trivialität von $\theta_\beta([1+x_2, 1+y_1])$ und $\theta_\beta([1+x_1, 1+y])$. Wir beschränken uns darauf $\theta_\beta([1+x_2, 1+y_1]) = 1$ zu zeigen. Nach Hilfssatz (4.4) gilt $[1+x_2, 1+y_1] = 1 + (x_2y_1 - y_1x_2)(1+x_2)^{-1}(1+y_1)^{-1} \in (\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A})) = (\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1(\gamma, \mathfrak{A}))$ und daher erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung $\theta_\beta([1+x_2, 1+y_1]) = \psi^\times_{\beta-\gamma}(1 + (x_2y_1 - y_1x_2)(1+x_2)^{-1}(1+y_1)^{-1})\theta_\gamma([1+x_2, 1+y_1]) = \psi^+_{\beta-\gamma}(x_2y_1 - y_1x_2)\psi^+_\gamma(x_2y_1 - y_1x_2) = \psi^+_\beta(x_2y_1 - y_1x_2) = 1$, Wobei wir hier zu beachten haben, dass $\psi^+_{\beta-\gamma}$ trivial auf $\mathfrak{P}^{q+1}$ ist. Zuletzt erhalten wir $\theta_\beta([1+x_2, 1+y_2]) = \psi^+_{\beta-\gamma}(x_2y_2 - y_2x_2)\psi^+_\gamma(x_2y_2 - y_2x_2) = \psi^+_\beta(xy - yx)$, wobei die letzte Gleichung wegen

$x_1 + x_2 + x_1x_2 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})}$, $y_1 + y_2 + y_1y_2 \equiv y_2 \pmod{\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})}$ und nach Definition (4.1)(i)(ii)(iii) richtig ist.

□

Schliesslich können wir ebenfalls mit Induktion entlang der schwachen Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ die Sätze [CJB93](3.2.6) und [CJB93](3.2.8)(3.2.11) bzw. [Zin90](II,4.3(mii)) verallgemeinern. Indem wir also den Beweisen in [CJB93] Schritt für Schritt folgen, können wir, unter Verwendung von Argumenten wie in [Bro98], um Enthaltensrelationen für Untergruppen von A vom zerfallenden Fall in $\tilde{A}$ zu bekommen, die folgenden Verallgemeinerungen erzielen:

(5.7) Satz *Sei θ_β ein einfacher Charakter und $[\frac{q}{2}] \le \nu \le q-1$. Seien $k, l \ge 1$ ganze Zahlen, so dass $k + l \ge \nu + 1$ und $k + 2l \ge q + 1$. Wenn darüber hinaus $x \in \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{N}_{-q+k}(\beta, \mathfrak{A})$ liegt und $y \in \mathfrak{P}^l \cap \mathfrak{N}_{-q+l}(\beta, \mathfrak{A})$, dann liegt der Kommutator $[1 + x, 1 + y]$ in $U^{\nu+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A})$ und es gilt $\theta_\beta([1 + x, 1 + y]) = \psi^\times_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta}(1 + y)$.*

□

(5.8) Satz *Sei $[\frac{q}{2}] \le \nu \le q-1$ und θ_β ein einfacher Charakter. Seien $k, l \ge 1$ ganze Zahlen, so dass $k + l \ge \nu + 1$ und $k + 2l \ge q + 1$. Wenn darüber hinaus $x \in \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{N}_{-r+k}(\beta, \mathfrak{A})$ und $y \in \mathfrak{P}^l \cap \mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ liegen, dann liegt $[1 + x, 1 + y]$ in $U^{\nu+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A})$ und es gilt $\theta_\beta([1 + x, 1 + y]) = \psi^\times_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta}(1 + y)$.*

□

(5.9) Korollar *Sei $[\frac{q}{2}] \le \nu \le q-1$ und θ_β ein einfacher Charakter. Seien $k, l \ge 1$ ganze Zahlen, so dass $k + l \ge \nu + 1$ und $k + 2l \ge q + 1$. Wenn darüber hinaus $x \in \mathfrak{P}^k \cap \mathfrak{N}_{-r+k}(\beta, \mathfrak{A})$ und $y \in \mathfrak{P}^l \cap \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$ liegen, dann liegt $[1 + x, 1 + y]$ in $U^{\nu+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A})$ und es gilt $\theta_\beta([1 + x, 1 + y]) = \psi^\times_{(1+x)^{-1}\beta(1+x)-\beta}(1 + y)$.*

□

(5.10) Satz *Sei θ_β ein einfacher Charakter für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ und $0 \le \nu \le q-1$, dann wird $(\theta_\beta)_{|U^{\nu+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\beta,\mathfrak{A})}$ von der Gruppe $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ normalisiert.*

Beweis:
Weil $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ die Gruppe $U^{\nu+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A})$ normalisiert folgt unsere Behauptung aus Satz (5.6) und den Definitionen von $\mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ und $\mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$.

□

Das Resultat über die Verkettung eines einfachen Charakters, welches wir zum Beweis unseres Hauptlemmas (5.2) benötigen, ist eine Verallgemeinerung von [CJB93](3.3.2) und [Zin90](4.5):

(5.11) Hauptsatz *Sei θ_β ein einfacher Charakter und $0 \le \nu \le q-1$, dann besteht die Verkettung von $(\theta_\beta)_{|U^{\nu+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\beta,\mathfrak{A})}$ aus der Vereinigung aller Doppelnebenklassen*

$$B^\times//(1 + \mathfrak{P}^{q-\nu} \cap \mathfrak{N}_{-\nu}(\beta, \mathfrak{A}) + \mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A})).$$

Beweis:

Der Beweis ist faktisch derselbe wie für [CJB93](3.3.2). Dabei müssen wir jedoch [P.B99b](4.1.1) anstelle von [CJB93](1.5.8), [P.B99b](4.3.3) anstelle von [CJB93](1.4.16), Satz (4.5)(i) anstelle von [CJB93](3.1.16), Satz (5.7) anstelle von [CJB93](3.2.6), Satz (5.8) anstelle von [CJB93](3.2.8) und Satz (5.10) anstelle von [CJB93](3.3.1) verwenden. Darüber müssen wir Argumente wie in [Bro98] verwenden, um Enthaltensrelationen für Teilringe von A aus solchen des zerfallenden Falles in $\tilde{A}$ zu gewinnen. Zum Beispiel können wir zur Verallgemeinerung von Hilfssatz [CJB93](3.3.16) das Resultat [CJB93](1.3.16) des zerfallenden Falles verwenden und erhalten für $x \in B^{\times}$: $(\mathfrak{P}^{\nu+1}+x^{-1}\mathfrak{P}^{\nu+1}x)\cap B = (\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu+1} + x^{-1}\tilde{\mathfrak{P}}^{\nu+1}x) \cap \tilde{B} \cap A =$ [CJB93](1.3.6) $(\tilde{\mathfrak{Q}}^{\nu+1} + x^{-1}\tilde{\mathfrak{Q}}^{\nu+1}x) \cap A =$ (3.3(ii)) $\mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(\nu+1)} + x^{-1}\mathfrak{Q}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(\nu+1)}x$, wobei wir die Bezeichnungen $\tilde{B} := C_{\tilde{A}}(E)$ und $\tilde{\mathfrak{Q}} := \tilde{\mathfrak{P}} \cap \tilde{B}$ verwendeten.

Im Rahmen des Beweises erhalten wir auch eine Verallgemeinerung von [CJB93](3.3.9):

(5.12) Satz *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches nicht minimales Stratum und für fixiertes l, $0 \leq l \leq q = q_1$ (wie oben sei q der letzte Sprung unserer schwachen Approximationsfolge), sei $[\mathfrak{A}, n, l, \gamma]$ einfach und äquivalent zu $[\mathfrak{A}, n, l, \beta]$. Darüber hinaus sei t der letzte Sprung unserer schwachen Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma]$ und schliesslich $[\frac{l}{2}] \leq \nu \leq q-1$. Wenn nun θ_β ein einfacher Charakter für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ist, welcher rekursiv mittels des einfachen Charakters θ_γ für $[\mathfrak{A}, n, 0, \gamma]$ wie in (5.3) definiert wurde und wenn x ein Element der Doppelnebenklasse $\bar{x} \in C_A(\gamma)^{\times}//(1 + \mathfrak{P}^{-t-l} \cap \mathfrak{N}_{-l}(\beta, \mathfrak{A}) + \mathfrak{P}^{[\frac{t+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1(\gamma, \mathfrak{A}))$ ist, dann gelten für alle $h \in (x^{-1}(U^{\nu+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A}))x \cap (U^{\nu+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A})))$ die Gleichheiten*

$$\theta^x_\beta(h) = \theta_\beta(h)\psi^{\times}_{x^{-1}\beta x - \beta}(h)$$

und

$$\theta^x_\gamma(h) = \theta_\gamma(h)\psi^{\times}_{x^{-1}\gamma x - \gamma}(h).$$

Beweis:

Im zerfallenden Fall (siehe [CJB93](3.3.9)) wurde der Satz lediglich für $l = q$ formuliert, wo die Notation $q = r$ benutzt wurde. In jedem Falle wird aber im Beweis von [CJB93](3.3.20) auch der Fall $l < q$ benötigt, welcher aber impliziet in den Beweisen von [CJB93](3.3.5) und [CJB93](3.3.9) steckt. Analog benötigen wir später zum Beweis von (5.13) (unten) den allgemeinen Fall (5.12) für jedes $l \leq q$. Wir erhalten das gewünschte Ergebnis also indem wir dem Beweis in [CJB93] folgen und lediglich anstelle von [CJB93](3.1.16) unsere Verallgemeinerung (4.5)(i) verwenden.

□

□

Als Korollar ergibt sich unser Hauptlemma:

Beweis von Hilfssatz (5.2):

Sei $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ die letzte Approximation des Stratums $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$. Da wir schon oben bemerkt haben, dass unser Hauptlemma im minimalen Falle stimmt, können wir als Induktionsvorraussetzung annehmen, dass die Menge $\mathcal{C}(\gamma, \mathfrak{A})$ existiert und nicht leer ist. Wegen $\gamma + \mathfrak{P}^{-q} = \beta + \mathfrak{P}^{-q}$ gilt für das formale Intertwining der letzten Approximation $B^{\times} \subset I_{A^{\times}}[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$ und nach [P.B99b](4.1.1) ist dies nichts anderes als die Vereinigung der Doppelnebenklassen $C_A(\gamma)^{\times}//(1 + \mathfrak{P}^{-q-k_0} \cap \mathfrak{N}_{-q}(\gamma, \mathfrak{A}))$. Insbesondere ist (5.12) auf $\theta_\gamma \in \mathcal{C}(\gamma, \mathfrak{A})$ anwendbar und demnach sind für $x \in B^{\times}$ und alle $h \in (x^{-1}(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A}))x \cap (U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\beta, \mathfrak{A})))$ die Gleichungen

$$(\theta_\gamma\psi^{+}_{\beta-\gamma})^x(h) =$$

(5.12)

$$\theta_\gamma(h)\psi^{+}_{x^{-1}\gamma x-\gamma}(h)\psi^{+}_{x^{-1}(\beta-\gamma)x}(h) =$$

$$(\theta_\gamma\psi^+_{\beta-\gamma})(h)\psi^+_{x^{-1}\beta x-\beta}(h) = (\theta_\gamma\psi^+_{\beta-\gamma})(h)$$

gültig, wobei die letzte Gleichung natürlich deshalb gilt, weil x und β miteinander kommutieren.

Damit haben wir aber insbesondere gezeigt, dass

$$(\theta_\gamma\psi^+_{\beta-\gamma})_{|U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\beta,\mathfrak{A})}$$

durch $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert wird und $(\theta_\gamma\psi^+_{\beta-\gamma})_{|U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\beta,\mathfrak{A})\cap B}$ durch ganz $B^\times$ verkettet wird.

Mit (1.10) sehen wir nun, dass $(\theta_\gamma\psi^+_{\beta-\gamma})_{|U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\beta,\mathfrak{A})\cap B}$ durch die reduzierte Norm $Nrd_{B/E}$ faktorisiert und damit ist alles gezeigt.

□

Folgen wir nun weiter den Argumenten von [CJB93], wobei wir Satz (5.12) anstelle von [CJB93](3.3.9) und [P.B99b](4.1.1) anstelle von [CJB93](1.5.8) benutzen, dann können wir [CJB93](Korollar (3.3.20)) verallgemeinern und erhalten ohne grosse Veränderungen vornehmen zu müssen:

(5.13) Korollar *(i) Die Definition der Menge $\mathcal{C}(\beta,\mathfrak{A})$ ist faktisch unabhängig von der besonderen Auswahl der speziellen Approximationsfolge für $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$.*

(ii) Sei $0 \leq l \leq q-1$ und $[\mathfrak{A},n,l,\beta']$ ein einfaches Stratum welches äquivalent zu $[\mathfrak{A},n,l,\beta]$ ist, dann ist $\mathcal{C}(\beta',\mathfrak{A})_{|U^{[\frac{l}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^{[\frac{l}{2}]+1}(\beta',\mathfrak{A})} = \mathcal{C}(\beta,\mathfrak{A})_{|U^{[\frac{l}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^{[\frac{l}{2}]+1}(\beta,\mathfrak{A})}\psi^\times_{\beta'-\beta}$, wobei $\mathcal{C}(\beta',\mathfrak{A})_{|U^{[\frac{l}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^{[\frac{l}{2}]+1}(\beta',\mathfrak{A})}$, $\mathcal{C}(\beta,\mathfrak{A})_{|U^{[\frac{l}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^{[\frac{l}{2}]+1}(\beta,\mathfrak{A})}$ die jeweiligen Mengen eingeschränkter Charaktere bezeichnen.

□

Hier bemerken wir, dass im Falle $l = 0$, d.h. $\beta-\beta' \in \mathfrak{A}$, die Identität $\psi^\times_{\beta'-\beta} \equiv 1$ gilt. Insbesondere hängt die Menge $\mathcal{C}(\beta,\mathfrak{A})$ also nur von der Äquivalenzklasse des einfachen Stratums $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ ab! Als Reformulierung des letzten Korollars erhalten wir:

(5.14) Korollar *(i) Sei θ_β ein fester einfacher Charakter für das einfache Stratum $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$, dann finden wir für jede schwache approximierende Folge $[\mathfrak{A},n,q_i,\gamma_i]$, $i = 0,\ldots,\mu$, eine definierende Folge $\{(\gamma_i,\lambda_{\gamma_i})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ für θ_β.*

(ii) Die obige rekursive Prozedur einen einfachen Charakter zu definieren wie in (5.1)(5.3) liefert uns eine wohldefinierte surjektive Abbildung $\mathcal{D}(\beta,\mathfrak{A}) \to \mathcal{C}(\beta,\mathfrak{A})$.

Für spätere Zwecke brauchen wir eine Satz aus [CJB85] welche mit einem Druckfehler veröffentlicht wurde. Die Version aus [CJB85](2.8.3) welche wir hier verwenden wollen ist:

(5.15) Hilfssatz *Sei $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung in A mit Periode r in einer einfachen Algebra A vom Index d. Sei auch $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F} := rd$ und wir definieren $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F}(j) := [\frac{j+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F}}]$ für alle $j \in \mathbb{Z}$, dann induziert die Einschränkung der reduzierten Normabbildung $Nrd_{A/F}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ surjektive Abbildungen $U^j(\mathfrak{A}) \to U^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F}(j)}(\mathfrak{o}_F)$.*

□

(5.16) Notation *Sind E/F, B und $\mathfrak{B}$ wie in (2.5), dann definieren wir einen gemischten Verzweigungsindex $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E} = e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}e_{\mathfrak{B}/\mathfrak{o}_E}$ und die entsprechende Funktion $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ durch $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E} = [\frac{j+e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E}-1}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E}}]$.*

Bemerkung: Weil die Definitionen von $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_F}$, $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}$ und $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E}$ analog sind, sind auch das Analoga der Aussagen von Hilfssatz (2.6)(i)(ii) erfüllt! Darüber hinaus gilt für alle $j \in \mathbb{Z}$ mit $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E} \mid j$ die Relation $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E}([\frac{j}{2}]+1) = \sigma_{\mathfrak{B}/\mathfrak{o}_E} \circ \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}([\frac{j}{2}]+1)$. □

Der folgende Satz macht den Zusammenhang zwischen definierenden Folgen und einfachen Charakteren noch offenkundiger:

(5.17) Satz *Wenn $\{\lambda_{\gamma_i}\}_{i=0,\dots,\mu}$ eine definierende Folge für einen einfachen Charakter $\theta_\beta \in \mathcal{C}(\beta,\mathfrak{A})$ ist, dann bestimmt θ_β den Charakter λ_{γ_i} auf der Gruppe $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]}}(q_i)}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})$ für $i = 0,\dots,\mu$ eindeutig und umgekehrt bestimmen die Einschränkungen der Charaktere λ_{γ_i} auf die letzteren Gruppen mit $i = 0,\dots,\mu$ den Charakter θ_β. Darüber hinaus liefert jede Folge von Fortsetzungen $\{\lambda'_{\gamma_i}\}_{i=0,\dots,\mu}$ dieser Einschränkungen auf die vollen Gruppen $U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})$ für $i = 0,\dots,\mu$ eine definierende Folge für θ_β.*

Beweis:

Im minimalen Fall ist nichts zu zeigen, weil $q_0 = 1$, $\lambda_{\gamma_0} = \lambda_\beta$, $q_1 = n$ und $\lambda_{\gamma_1} \equiv 1$. In der Tat bestimmt der Charakter θ_β in diesem Falle in eindeutiger Weise seine definierende Folge, welche hier nur aus einem einzigen Folgenglied besteht. Nehmen wir jetzt an, dass die Aussage des Satzes für alle $\theta_\gamma \in \mathcal{C}(\gamma,\mathfrak{A})$ bewiesen ist, wobei $\gamma = \gamma_1$ die letzte Approximation des einfachen Stratums $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ in unserer gegebenen schwachen Approximationsfolge ist.

Gemäss unserer rekursiven Definition mittels Hilfssatz (5.2) bestimmt der Charakter θ_γ im Rahmen der rekursiven Definition den Charakter θ_β eindeutig auf $U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma,\mathfrak{A})$, wobei wiederum $q = q_1$ gesetzt sein soll. Wegen $H^1(\gamma,\mathfrak{A}) = U^1(\mathfrak{A} \cap C_A(\gamma))(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma,\mathfrak{A}))$ und weil θ_γ auf $U^1(\mathfrak{A} \cap C_A(\gamma))$ durch $\lambda_\gamma \circ Nrd_{A\cap C_A(\gamma)/F[\gamma]}$ gegeben ist, folgern wir aus (5.15), dass λ_γ durch θ_β eindeutig bestimmt wird auf $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_{F[\gamma]}}(q)}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{F[\gamma]})$, wohingegen ein Abänderung von λ_γ durch einen beliebigen Charakter von $U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma]})/U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_{F[\gamma]}}(q)}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{F[\gamma]})$ den Charakter θ_γ in der Menge $\mathcal{C}(\gamma,\mathfrak{A})$ verschiebt, ohne dabei irgend einen Einfluss auf θ_β auszuüben. Unsere Aussage folgt daher mit Induktion entlang der Approximationsfolge.

□

Kapitel 6

Der Vergleich von einfachen Charakteren für verschiedene Algebren

In diesem Abschnitt setzen wir wieder $n > 0$ voraus. Um das Hauptresultat dieses Abschnittes zu beweisen, benötigen wir wiederum zwei Sätze:

(6.1) Satz *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum in der zentral-einfachen Algebra A/F und $E := F[\beta]$. Sei K/F die maximal unverzweigte Teilerweiterung der Erweiterung E/F, $C := C_A(K)$ und $\mathfrak{C} := \mathfrak{A} \cap C$, dann ist das Stratum $[\mathfrak{C}, \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n), 0, \beta]$ einfach und $H^1(\beta, \mathfrak{A}) \cap C \supseteq H^1(\beta, \mathfrak{C})$. Darüber hinaus, können wir annehmen, dass die Menge der einfachen Charactere $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{C})$ auf der Grundlage des einfachen Characters $\psi_K := \psi_F \circ Tr_{K/F}$ (welcher den Führer $\mathfrak{p}_K$ hat) definiert wurde. Die Abbildung $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}) \to \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{C})$ welche durch die Einschränkung gegeben sein soll, ist dann wohldefiniert zwischen den angegebenen Mengen und sogar injektiv. Wenn $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$ die zugrunde liegende spezielle Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ist und $\theta_{\beta,\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$ die definierende Folge $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ hat, dann ist $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i} \circ N_{K[\gamma_i]/F[\gamma_i]})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ die definierende Folge für die Einschränkung $\theta_{\beta,\mathfrak{C}} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{C})$ von $\theta_{\beta,\mathfrak{A}}$. Schliesslich lässt sich das Bild der Abbildung durch die Eigenschaft charakterisieren, dass für jede definierende Folge $\{(\gamma_i, \lambda'_{\gamma_i})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ eines Elementes aus dem Bild, die Charaktere λ'_{γ_i} durch die Norm $N_{K[\gamma_i]/F[\gamma_i]}$ für $i = 0, \ldots, \mu$ faktorisieren.*

Beweis:

Gemäss unserer Bemerkung hinter (3.8) wissen wir, dass $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}} \mid q_i$ für $i = 1, \ldots, \mu$ und demnach folgt aus (4.1)(vii) und (2.6)(ii) die verlangte Relation $\mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}) \cap C = (\sum_{i=0}^{\mu} \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)) \cap C \supset \sum_{i=0}^{\mu} (\mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i) \cap C) = \sum_{i=0}^{\mu} \mathfrak{R}^{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}([\frac{q_i}{2}]+1)} \cap C_C(\gamma_i) = \sum_{i=0}^{\mu} \mathfrak{R}^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(q_i)}{2}]+1} \cap C_C(\gamma_i) = \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{C})$, wobei $\mathfrak{R}$ das Jacobson Radikal von $\mathfrak{C}$ ist. Sei also $\theta_{\beta,\mathfrak{A}}$ ein einfacher Charakter von $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ und $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ seine Einschränkung auf $H^1(\beta, \mathfrak{C})$.

Um die Aussagen über einfache Charaktere zu beweisen, argumentieren wir wiederum mit Induktion entlang der Approximationsfolge:

Um die Induktion richtig zu beginnen, müssen wir dieselben Voraussetzungen an β stellen, wie sie in Wahrheit für $\gamma_{\mu-1}$ in unserer eigentlichen Folge gelten. Wir setzen also voraus, dass $K \supseteq F[\beta]^{ur}$, wobei $F[\beta]^{ur}$ die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $F[\beta]/F$ ist und dass $K[\beta]$ ein Körper ist welcher nicht unbedingt mit E übereinstimmen muss. Schliesslich soll aber die Einbettung $K[\beta]^{\times} \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}}$ noch immer als sound vorausgesetzt werden (d.h. β ist $\mathfrak{C}$-sound). Wenn $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ minimal über F ist, gelten $H^1(\beta, \mathfrak{A}) = U^1(\mathfrak{B})U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})$ und $H^1(\beta, \mathfrak{C}) = U^1(\mathfrak{B} \cap C_B(K[\beta]))U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{C})$. Ist nun $\theta_{\beta,\mathfrak{A}}$ auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch $\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E}$ gegeben, dann ist $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ auf $U^1(\mathfrak{B} \cap C_B(K[\beta]))$ durch $(\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E})_{|C_B(K[\beta])} = \lambda_\beta \circ Nr_{K[\beta]/E} \circ Nrd_{C_B(K[\beta])/K[\beta]}$ gegeben. Darüber hinaus gilt Aufgrund der Gleichheit $(Trd_{A/F})_{|C} = Tr_{K/F} \circ Trd_{C/K}$ und $\psi_K = \psi_F \circ Tr_{K/F}$, dass $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ auf $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{C})$ durch $\psi^{\times}_{\beta,K}$ gegeben ist, wobei $\psi^{\times}_{\beta,K}$ mit Hilfe von ψ_K in derselben Weise definiert wird wie $\psi^{\times}_{\beta}$ durch ψ_F. Damit haben wir also gezeigt, dass $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ ein einfacher Charakter ist. Weil die Normabbildung $N_{K[\beta]/E} : U^1(\mathfrak{o}_{K[\beta]}) \to U^1(\mathfrak{o}_E)$ surjektiv ist (siehe z.B. [Ser79](V,3,Prop. 3)), weil die reduzierte Normabbildung $Nrd_{B/E} : U^1(\mathfrak{B}) \to U^1(\mathfrak{o}_E)$ surjektiv ist (siehe (5.15)) und weil (wieder wegen (5.15)) auch die reduzierte Normabbildung $Nrd_{C_B(K[\beta])/K[\beta]} : U^1(\mathfrak{B} \cap C_B(K[\beta])) \to U^1(\mathfrak{o}_{K[\beta]})$ surjektiv ist, können wir den Charakter $\theta_{\beta,\mathfrak{A}}$ aus $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ zurückgewinnen.

Starten wir umgekehrt von einem einfachen Charakter $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ mit definierender Folge $\{(\beta, \lambda'_\beta)\}$ und setzen wir voraus, dass eine Gleichheit der Art $\lambda'_\beta = \lambda_\beta \circ N_{K[\beta]/F[\beta]}$ besteht, dann gilt nach Hilfssatz 1.10, dass $\psi^{\times}_{\beta}$ ein Charakter ist, welcher auf $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{B})$ durch die reduzierte Norm $Nrd_{B/E}$ faktorisiert, seine Einschränkung auf $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\cap C_B(K[\beta])}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{C} \cap C_A(K[\beta]))$ stimmt mit $\psi^{\times}_{\beta,K}$ überein und demnach auch mit $\lambda_\beta \circ N_{K[\beta]/F[\beta]} \circ Nrd_{C_A(K[\beta])/K[\beta]}$.

Wiederum gilt $(Nrd_{B/E})_{|C_B(K[\beta])} = N_{K[\beta]/E} \circ Nrd_{C_B(K[\beta])/K[\beta]}$, $(Trd_{A/F})_{|C} = Tr_{K/F} \circ Trd_{C/K}$ und die Abbildungen $N_{K[\beta]/E} : U^i(\mathfrak{o}_{K[\beta]}) \to U^i(\mathfrak{o}_E)$ sind für alle $i \geq 1$ surjektiv (siehe [Ser79](V, 3, Prop. 3)). Nach (5.15), der darauf folgenden Bemerkung, $e_{\mathfrak{B}\cap C_B(K[\beta])/\mathfrak{o}_{K[\beta]}} \mid \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\cap C_B(K[\beta])}(n)$ (nach (2.6)(ii)) und $e_{\mathfrak{B}/\mathfrak{o}_E} \mid \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(n)$ (wieder nach (2.6)(ii)), erhalten wir surjektive Abbildungen $Nrd_{C_B(K[\beta])/K[\beta]} : U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\cap C_B(K[\beta])}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{B} \cap C_A(K[\beta])) \to U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_{K[\beta]}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{K[\beta]})$ und $Nrd_{B/E} : U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{B}) \to U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{o}_E)$. Wegen $\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_{K[\beta]}}(n) = -\nu_{K[\beta]}(\beta) = -\nu_{F[\beta]}(\beta) = \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E}(n)$ und $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{B}) \cap C_B(K[\beta]) = U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\cap C_B(K[\beta])}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{B} \cap C_B(K[\beta]))$, folgern wir, dass $\psi^{\times}_{\beta}$ auf $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}(n)}{2}]+1}(\mathfrak{B})$ nur durch die Einschränkung von $\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E}$ gegeben sein kann nd folglich lässt sich $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$, wie verlangt, zu einem einfachen Charakter $\theta_{\beta,\mathfrak{A}}$ von $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ mit definierender Folge $\{(\beta, \lambda_\beta)\}$ fortsetzen. Damit sind unsere Behauptungen im minimalen Fall gezeigt.

Um den Induktionsschritt zu vollziehen, bezeichnen wir der Einfachheit halber mit $\gamma := \gamma_1$ die letzte Approximation von β und mit $q := q_1$ die letzte Sprungstelle. Darüber hinaus müssen wir wiederum dieselben Voraussetzungen an β stellen wie an die anderen Approximationen entlang der Folge, d.h. wir setzen nur voraus, dass $K \supseteq F[\beta]^{ur}$ und dass $K[\beta]$ ein Körper ist, welcher nicht unbedingt mit $E := F[\beta]$ übereinstimmen muss. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung können wir annehmen, dass die Einschränkung $\theta_{\gamma,\mathfrak{C}}$ des einfachen Charakters $\theta_{\gamma,\mathfrak{A}}$ von $H^1(\gamma, \mathfrak{A})$ auf $H^1(\gamma, \mathfrak{C})$ wieder ein einfacher Charakter ist und wir $\theta_{\gamma,\mathfrak{A}}$ aus $\theta_{\gamma,\mathfrak{C}}$ zurückgewinnen können. Es gilt $H^1(\beta, \mathfrak{A}) = U^1(\mathfrak{B})(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A}))$ und $H^1(\beta, \mathfrak{C}) = U^1(\mathfrak{B} \cap C_B(K[\beta]))(U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(q)}{2}]+1}(\mathfrak{C}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{C}))$. Wiederum ist $\theta_{\beta,\mathfrak{A}}$ wie im minimalen Fall auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch einen Charakter $\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E}$ und folglich $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ auf $U^1(\mathfrak{B} \cap C_B(K[\beta]))$ durch $\lambda_\beta \circ N_{K[\beta]/E} \circ Nrd_{C_B(K[\beta])/K[\beta]}$. Also ist $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ auf $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(q)}{2}]+1}(\mathfrak{C}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{C})$ durch $\psi^{\times}_{\beta-\gamma,K}\theta_{\gamma,\mathfrak{C}}$ gegeben und demnach $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$ ein einfacher Charakter. Nach Induktion und wegen demselben Argument wie im minimalen Fall, können wir $\theta_{\beta,\mathfrak{A}}$ aus $\theta_{\beta,\mathfrak{C}}$

zurückgewinnen und erhalten eine wohldefinierte injektive Abbildung. Setzen wir nun die Gleichung

$$\sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_{K[\beta]}}(q) = \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{o}_E}(q) \tag{6.1}$$

voraus, dann folgt auch die Charakterisierung des Bildes wie im minimalen Fall, wenn wir (5.2) und die Induktionsvoraussetzung anwenden, welche hier besagt, dass ein einfacher Charakter $\theta_{\gamma,\mathfrak{C}}$ mit definierender Folge $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i} \circ N_{K[\gamma_i]/F[\gamma_i]})\}_{i=1,\ldots,\mu}$ sich zu einem einfachen Charakter $\theta_{\gamma,\mathfrak{A}}$ mit definierender Folge $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i})\}_{i=1,\ldots,\mu}$ fortsetzt.

Um die nötige Gleichung (6.1) zu zeigen, müssen wir nur bemerken, dass nach (2.6)(iii) und wegen $e(K[\beta]/F) = e(E/F)$ die Gleichheit $e_{\mathfrak{B}\cap C_B(K[\beta])/\mathfrak{o}_{K[\beta]}} e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}\cap C_B(K[\beta])} = \frac{rd}{e(E/F)} = e_{\mathfrak{B}/\mathfrak{o}_E} e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}}$ gilt und damit sind wir fertig.

□

(6.2) Hilfssatz *Sei $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ ein sound Stratum in der zentral-einfachen Algebra A/F und $E := F[\beta]$. Sei L/F eine unverzweigte Erweiterung, so dass $E \otimes_F L$ wieder ein Körper ist, dann ist $\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ eine Hauptordnung mit dem Jacobsonradikal $\mathfrak{P} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ und das Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ für A ist dann und nur dann einfach, wenn das Stratum $[\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L, n, q, \beta \otimes 1]$ in $A \otimes_F L$ einfach ist.*

Beweis:

Nach [FB84](4.4) ist $\mathfrak{P} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ das Jacobsonradikal von $\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ und demnach ist die letztere Ordnung eine Hauptordnung mit der Uniformisierenden $h \otimes 1$, wenn h eine Uniformisierende von $\mathfrak{A}$ ist. Nach Definition (3.1)(iii) und [CJB93](1.5.5) ist das Stratum $[\mathfrak{A}, n, q, \beta]$ dann und nur dann einfach, wenn $-k_0(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) > q$, wobei $\tilde{\mathfrak{A}}$ eine Hauptordnung ist, welche zur selben Gitterkette in einem einfachen A-Modul gehört, welcher auch ein einfacher $\tilde{A}$-Modul sein soll und wobei $\tilde{A}$ das kanonische Splitting von A ist, wie es zu Beginn des Abschnittes (3) eingeführt wurde. Nach Satz (3.6) gilt $k_0(\beta, \mathfrak{A}) = k_0(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$ und in analoger Bedeutung der Notation gilt $k_0(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L) = k_0(\beta \otimes 1, \widetilde{\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L})$. Nun folgt unsere Aussage natürlich aus $k_0(\beta, \mathfrak{A}) = k_0(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L)$, welches analog zum Beweis von (3.6) mithilfe der Gleichungen $\mathfrak{N}(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L) = \mathfrak{N}(\beta, \mathfrak{A}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ und $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L + \mathfrak{P} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L = (\mathfrak{B} + \mathfrak{P}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ gezeigt werden kann.

□

(6.3) Satz *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum in der zentral-einfachen Algebra A/F und $E := F[\beta]$. Wir setzen voraus, dass E/F total verzweigt ist. Sei L/F ein unverzweigter Zerfällungskörper von A, dann ist das Stratum $[\mathfrak{A} \otimes_{o_F} o_L, n, 0, \beta \otimes 1]$ einfach und $\mathfrak{H}^1(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L) = \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$. Darüber hinaus setzen wir voraus, dass die einfachen Charaktere aus $\mathcal{C}(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L)$ mit Hilfe eines additiven Charakters ψ_L mit dem Führer $\mathfrak{p}_L$ von L definiert wurden, welcher ψ_F fortsetzt und wegen Hilfssatz (1.9) existiert. Die Abbildung $\mathcal{C}(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L) \to \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$, welche durch die Einschränkung eines Charakters von $H^1(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L)$ auf die Untergruppe $1 \otimes 1 + \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}) \otimes 1 \simeq H^1(\beta, \mathfrak{A})$ induziert wird, ist zwischen diesen Mengen wohldefiniert und surjektiv. Ist $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$ eine schwache Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, dann ist $[\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L, n, q_i, \gamma_i \otimes 1]$, $i = 0, \ldots, \mu$ auch eine schwache Approximationsfolge für $[\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L, n, 0, \beta \otimes 1]$ und ist $\{(\gamma_i \otimes 1, \lambda_{\gamma_i \otimes 1})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ eine gemäss (5.14) existierende definierende Folge für $\theta_{\beta \otimes 1} \in \mathcal{C}(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L)$, so ist entsprechend $\{(\gamma_i, (\lambda_{\gamma_i \otimes 1})_{|U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ eine definierende Folge für die entsprechende Einschränkung $\theta_\beta \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$ von $\theta_{\beta \otimes 1}$. Darüber hinaus existiert zu jedem einfachen Charakter $\theta_\beta \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$, jeder festen definierenden Folge $\{\lambda_{\gamma_i}\}_{i=0,\ldots,\mu}$ von θ_β und jedem festen Urbild $\theta_{\beta \otimes 1}$ eine definierende Folge $\{\lambda_{\gamma_i \otimes 1}\}_{i=0,\ldots,\mu}$ von $\theta_{\beta \otimes 1}$, so dass $\{(\lambda_{\gamma_i \otimes 1})_{|U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})}\}_{i=0,\ldots,\mu} = \{\lambda_{\gamma_i}\}_{i=0,\ldots,\mu}$.*

Beweis:

Weil E/F total verzweigt ist, $E \otimes_F L$ ein Körper ist, sind die Voraussetzungen für Hilfssatz (6.2) im Bezug auf unsere Approximationsfolgen für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ und für $[\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L, n, 0, \beta \otimes 1]$ anwendbar. Nach (4.1)(vii) und weil $\mathfrak{P} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ das Jacobsonradikal von $\mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ ist, gilt die Gleichheit $\mathfrak{H}^1(\beta \otimes 1, \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L) = \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$. Sei nun $\bar{A} := A \otimes_F L$, $\bar{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$, $\bar{B} := C_{\bar{A}}(E \otimes_F L)$ und $\bar{\mathfrak{B}} := \bar{\mathfrak{A}} \cap \bar{B}$.

Wir führen den Beweis wiederum per Induktion. Zunächst setzen wir also wieder voraus, dass $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ minimal über F ist. Es gilt $H^1(\beta \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}}) = U^1(\bar{\mathfrak{B}})U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}})$ und $H^1(\beta, \mathfrak{A}) = U^1(\mathfrak{B})U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})$. Wenn $\theta_{\beta\otimes 1}$ ein einfacher Charakter von $H^1(\beta \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}})$ ist, dann ist er auf $U^1(\bar{\mathfrak{B}})$ durch den Charakter $\lambda_{\beta\otimes 1} \circ det_{\bar{B}/E\otimes_F L}$ gegeben und auf $U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}})$ durch den Charakter $\bar{\psi}^{\times}_{\beta\otimes 1}$, wobei letzterer Charakter für alle $x \in U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}})$ durch die Formel $\bar{\psi}^{\times}_{\beta\otimes 1}(x) := \psi_L \circ Tr_{\bar{A}/L}(\beta \otimes 1(x-1))$ gegeben ist. Gemäss der Definition der reduzierten Norm ist die Einschränkung von $\theta_{\beta\otimes 1}$ nach $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch $(\lambda_{\beta\otimes 1})_{|U^1(\mathfrak{o}_E)} \circ Nrd_{B/E}$ gegeben und auf $U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})$ durch $(\bar{\psi}^{\times}_{\beta\otimes 1})_{|U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})} = \psi^{\times}_{\beta}$. Also ist die Einschränkung von $\theta_{\beta\otimes 1}$ in der Tat ein einfacher Charakter.

Ist umgekehrt θ_β ein einfacher Charakter von $H^1(\beta, \mathfrak{A})$, welcher auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch $\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E}$ gegeben ist und auf $U^{[\frac{n}{2}]+1}(\mathfrak{A})$ durch $\psi^{\times}_{\beta}$, dann kann er natürlich auf $U^1(\mathfrak{B})U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}})$ fortgesetzt werden, indem wir ihn durch $\bar{\psi}^{\times}_{\beta\otimes 1}$ nach $U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}})$ fortsetzen. Weil aber nach Hilfssatz 1.10 der Charakter $(\bar{\psi}^{\times}_{\beta\otimes 1})_{|U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}})\cap \bar{B}}$ durch die Determinantenabbildung $det_{\bar{B}|E\otimes_F L}$ faktorisiert, können wir aufgrund der Definition der reduzierten Norm, den Charakter λ_β zu einem Charakter $\bar{\lambda}_{\beta\otimes 1}$ von $U^1(\mathfrak{o}_{E\otimes_F L})$ fortsetzen, so dass $(\bar{\lambda}_{\beta\otimes 1} \circ det_{\bar{B}/(E\otimes_F L)})_{|U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{B}})} = (\bar{\psi}^{\times}_{\beta\otimes 1})_{|U^{[\frac{n}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{B}})}$. Daher erweitert sich θ_β zu einem einfachen Charakter von $H^1(\beta \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}})$ und damit haben wir die Surjektivität unserer Abbildung im minimalen Fall gezeigt.

Setzen wir also jetzt voraus, dass $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ eine schwache Approximationsfolge hat mit der letzten Approximation $[\mathfrak{A}, n, q, \gamma]$. Es ist wohl bekannt aus [PB99a], dass in dieser Situation die Relationen $f(F[\gamma]/F) \mid f(E/F)$ und $e(F[\gamma]/F) \mid e(E/F)$ gelten und damit ist auch die Erweiterung $F[\gamma]/F$ total verzweigt. Es gelten auch $H^1(\beta \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}}) = U^1(\bar{\mathfrak{B}})(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}}) \cap H^1(\gamma \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}}))$ und $H^1(\beta, \mathfrak{A}) = U^1(\mathfrak{B})(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A}))$. Wenn $\theta_{\beta\otimes 1}$ ein einfacher Charakter von $H^1(\beta \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}})$ ist, dann wird er auf $U^1(\bar{\mathfrak{B}})$ durch $\lambda_{\beta\otimes 1} \circ det_{\bar{B}/E\otimes_F L}$ gegeben und durch $\bar{\psi}^{\times}_{(\beta-\gamma)\otimes 1}\theta_{\gamma\otimes 1}$ auf $(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}}) \cap H^1(\gamma \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}}))$, wobei $\theta_{\gamma\otimes 1}$ ein einfacher Charakter von $H^1(\gamma \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}})$ ist und $\bar{\psi}^{\times}_{(\beta-\gamma)\otimes 1}$ wie im minimalen Falle definiert wird. Nach Induktionsvoraussetzung können wir voraus setzen, dass die Einschränkung θ_γ von $\theta_{\gamma\otimes 1}$ nach $H^1(\gamma, \mathfrak{A})$ wieder ein einfacher Charakter ist und unsere Behauptung über die definierenden Folgen erfüllt. Die Einschränkung von $\theta_{\beta\otimes 1}$ nach $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ wird auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch $(\lambda_{\beta\otimes 1})_{|U^1(\mathfrak{o}_E)} \circ Nrd_{B/E}$ bestimmt und auf $(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A}))$ durch $(\bar{\psi}^{\times}_{(\beta-\gamma)\otimes 1}\theta_{\gamma\otimes 1})_{|(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\gamma,\mathfrak{A}))} = (\psi^{\times}_{\beta-\gamma}\theta_\gamma)_{|(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A})\cap H^1(\gamma,\mathfrak{A}))}$. Daher ist die Einschränkung von $\theta_{\beta\otimes 1}$ in der Tat ein einfacher Charakter.

Wenn umgekehrt θ_β ein einfacher Charakter von $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ ist, welcher durch $\lambda_\beta \circ Nrd_{B/E}$ auf $U^1(\mathfrak{B})$ bestimmt wird und durch $\psi^{\times}_{\beta-\gamma}\theta_\gamma$ auf $(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1(\gamma, \mathfrak{A}))$, wobei θ_γ ein einfacher Charakter von $H^1(\gamma, \mathfrak{A})$ ist, dann kann dieser natürlich nach $U^1(\mathfrak{B})(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}}) \cap H^1(\gamma \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}}))$ fortgesetzt werden. Dabei wird er durch $\bar{\psi}^{\times}_{(\beta-\gamma)\otimes 1}\theta_{\gamma\otimes 1}$ auf $(U^{[\frac{q}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{A}}) \cap H^1(\gamma \otimes 1, \bar{\mathfrak{A}}))$ bestimmt, wobei $\theta_{\gamma\otimes 1}$ eine, gemäss Induktionsvoraussetzung existierende, Fortsetzung von θ_γ ist. Nach Hilfssatz 5.2 faktorisiert der Charakter $(\bar{\psi}^{\times}_{(\beta-\gamma)\otimes 1}\theta_{\gamma\otimes 1})_{|U^{[\frac{q}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{B}})}$ durch die Determinantenabbildung $det_{\bar{B}|E\otimes_F L}$ und aufgrund der Definition der reduzierten Norm setzt sich λ_β zu einem Charakter $\bar{\lambda}_{\beta\otimes 1}$ von $U^1(\mathfrak{o}_{E\otimes_F L})$ fort, so dass

$(\bar{\lambda}_{\beta\otimes 1} \circ det_{\bar{B}/(E\otimes_F L)})_{U^{[\frac{q}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{B}})} = (\bar{\psi}^{\times}_{(\beta-\gamma)\otimes 1}\theta_{\gamma\otimes 1})_{U^{[\frac{q}{2}]+1}(\bar{\mathfrak{B}})}$. In der Tat setzt sich also θ_β zu einem Charakter von $H^1(\beta\otimes 1, \bar{\mathfrak{A}})$ fort und damit haben wir durch Induktion die Surjektivität unserer Abbildung im allgemeinen Fall gezeigt.

Wenn $\theta_{\beta\otimes 1}$ nun ein beliebiges aber festes Urbild von θ_β ist und $\{\lambda_{\gamma_i}\}_{i=0,\ldots,\mu}$ eine feste definierende Folge von θ_β bezüglich unserer gegebenen schwachen Approximationsfolge $[\mathfrak{A}\otimes_{\mathfrak{o}_F}\mathfrak{o}_L, n, q_i, \gamma_i\otimes 1]$ $i = 0,\ldots,\mu$, dann sind die Charaktere $\lambda'_{\gamma_i\otimes 1}$ nach (5.17) und wegen $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_A(\gamma_i)} = 1$ (siehe [Gra99a] Hauptsatz 2.2(i)) jeweils auf den Gruppen $U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}\cap C_A(\gamma_i)\otimes_{\mathfrak{o}_F}\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L}}^{(q_i)}}{2}]}(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L})$ eindeutig bestimmt und umgekehrt bestimmen diese Einschränkungen unseren einfachen Charakter $\theta_{\beta\otimes 1}$. Weil $\theta_{\beta\otimes 1}$ ein Urbild von θ_β ist, gelten die Gleichungen $(\lambda'_{\gamma_i\otimes 1})_{|U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}\cap C_A(\gamma_i)/\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]}}^{(q_i)}}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})} = (\lambda_{\gamma_i})_{|U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}\cap C_A(\gamma_i)/\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]}}^{(q_i)}}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})}$ für $i = 0,\ldots,\mu$. Daher ist es möglich die Charaktere $(\lambda'_{\gamma_i\otimes 1})_{|U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}\cap C_A(\gamma_i)\otimes_{\mathfrak{o}_F}\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L}}^{(q_i)}}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L})}$, so, zunächst nach $U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})U^{[\frac{\sigma_{\mathfrak{A}\cap C_A(\gamma_i)\otimes_{\mathfrak{o}_F}\mathfrak{o}_L/\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L}}^{(q_i)}}{2}]+1}(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L})$ und schliesslich zu Charakteren $\lambda_{\gamma_i\otimes 1}$ von $U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L})$ fortzusetzen, dass sie mit den λ_{γ_i} auf $U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})$ für $i = 0,\ldots,\mu$ übereinstimmen. Wiederum folgt aus (5.17), dass die so gewonnene Folge $\{\lambda_{\gamma_i\otimes 1}\}_{i=0,\ldots,\mu}$ eine definierende Folge für $\theta_{\beta\otimes 1}$ ist. Damit ist also auch der Zusatz gezeigt.

□

Bis zum Ende dieses Abschnittes bezeichne β ein Element aus dem algebraischen Abschluss von F und für $E := F[\beta]$ setzen wir voraus, dass E/F eine endliche Körpererweiterung ist. Wir übernehmen die Bezeichnungsweisen $A(E) := End_F(E)$ und $\mathfrak{A}(E) := End_{\mathfrak{o}_F}(\{\mathfrak{p}_E^j\}_{j\in\mathbb{Z}})$ aus [CJB93]. Wir stellen nun als weitere Bedingung an β, dass $[0,\beta]$ ein einfaches Paar ist, d.h. $0 > \nu_E(\beta), k_0(\beta,\mathfrak{A}(E))$. Sei nun K/F die maximal unverzweigte Teilerweiterung von E/F, sei $C(E) := End_K(E) = C_{A(E)}(K)$ und $\mathfrak{C}(E) := End_{\mathfrak{o}_K}(\{\mathfrak{p}_E^j\}_{j\in\mathbb{Z}}) = \mathfrak{A}(E)\cap C(E)$. Ist $n_0 := -\nu_E(\beta)$, dann sind die Strata $[\mathfrak{A}(E), n_0, 0, \beta]$ und $[\mathfrak{C}(E), n_0, 0, \beta]$ einfach. Das Hauptresultat dieses Abschnittes ist eine Verallgemeinerung von [CJB93](3.6.13):

(6.4) Hauptsatz *Sei A eine zentral-einfache Algebra über F, so dass $[E:F] \mid N$, wobei $N := \sqrt{\dim_F(A)}$ der reduzierte Grad von A ist. Wir bezeichnen mit d den Index von A und schreiben N in der Form $N = md$. Sei $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung in A mit Invariante s und Periode r, so dass $e(E/F) \mid rd$ und $f(E/F) \mid \ddot{d}s$, wobei $\ddot{d}$ der grösste Teiler von d ist, welcher prim zu r ist, d.h., E/F lässt sich $\mathfrak{A}$-sound in A/F einbetten (siehe [Gra99a](1.9)(iii) mit $t = 1$).*

(i) Sei $\iota : E \hookrightarrow A$ eine F-Einbettung welche $\mathfrak{A}$-sound ist. Wir setzen $n = n_0\frac{rd}{e(E/F)}$ und wenn $q_{0,i}$, $i = 0,\ldots,\mu$, die eindeutigen Zahlen sind, welche von einer speziellen Approximationsfolge $[\mathfrak{A}(E), n_0, q_{0,i}, \gamma_i]$, $i = 0,\ldots,\mu$ für $[\mathfrak{A}(E), n_0, 0, \beta]$ stammen, dann setzen wir auch $q_i := q_{0,i}\frac{rd}{e(E/F)}$ für $i = 0,\ldots,\mu$. Unter dieser Voraussetzung existieren Einbettungen $\iota_0,\ldots,\iota_\mu$, so dass $[\mathfrak{A}, n, q_i, \iota_i(\gamma_i)]$, $i = 0,\ldots,\mu$, eine <u>spezielle</u> Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}, n, 0, \iota(\beta)]$ ist und $\iota_0 = \iota$.

(ii) Es existiert eine eindeutige Bijektion $\tau_{\mathfrak{A}(E),\mathfrak{A},\beta,\iota} : \mathcal{C}(\beta,\mathfrak{A}(E)) \to \mathcal{C}(\iota(\beta),\mathfrak{A}))$, welche folgende Eigenschaften hat:

Fixieren wir zu einem gegebenen einfachen Charakter θ_β von $H^1(\beta,\mathfrak{A}(E))$ eine definierende Folge $\{(\gamma_i,\lambda_{\gamma_i})\}_{i=0,\ldots,\mu}$, welche auf einer <u>speziellen</u> Approximationsfolge $[\mathfrak{A}(E), n_0, q_{0,i}, \gamma_i]$, $i = 0,\ldots,\mu$ für $[\mathfrak{A}(E), n_0, 0, \beta]$ begründet ist und <u>fixieren wir</u> gemäss (i) Einbettungen $\iota_i : F[\gamma_i] \to A$, $i = 0,\ldots,\mu$, dann ist $\tau_{\mathfrak{A}(E),\mathfrak{A},\beta,\iota}(\theta_\beta)$ der einfache Charakter mit der definierenden Folge $\{(\iota_i(\gamma_i), \lambda_{\gamma_i}\circ\iota_i^{-1})\}_{i=0,\ldots,\mu}$.

Beweis:

(i) Nach [PB99a]((5.1) und seinem Beweis) bzw. Hauptsatz (3.11), können wir eine spezielle Approximationsfolge $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i']$, $i = 0, \ldots, \mu$ für $[\mathfrak{A}, n, 0, \iota(\beta)]$ finden. Der Argumentation des Beweises von [PB99a](5.1) zwischen [PB99a](5.2) und [PB99a](5.3) folgend, können wir unter Verwendung einer (W, E)-Zerlegung für $\tilde{\mathfrak{B}}$ wie in [CJB93](1.2.8) und unter Benutzung der Eigenschaft "Verkettung impliziert Konjugation" schliessen, dass die erste Approximation γ_2' derart gewählt werden kann, dass sie dasselbe Minimalpolynom über F hat wie γ_2. Folgen wir nun induktiv der Approximationsfolge, so finden wir also $\gamma_0', \ldots, \gamma_\mu'$ mit denselben Minimalpolynomen wie $\gamma_0, \ldots, \gamma_\mu$ über F. Die Abbildungen welche jeweils dadurch gegeben werden, dass γ_i auf γ_i' abgebildet wird, führen also gerade auf die gesuchten Einbettungen $\iota_0, \ldots, \iota_\mu$.

(ii) Wenn die Abbildung existiert, dann ist sie offensichtlich durch ihre Eigenschaften eindeutig bestimmt. Um die Existenz zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass nach Satz (6.1) eine Abbildung $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}(E)) \to \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{C}(E))$ existiert welche injektiv ist und die in der Terminologie der definierenden Folgen vollständig beschrieben werden kann. Nach Satz (6.3) existiert eine surjektive Abbildung $\mathcal{C}(\beta \otimes 1, \mathfrak{C}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L) \to \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{C}(E))$, wobei L/K ein unverzweigter Zerfällungskörper von C ist. Die letztere Abbildung erlaubt es uns dabei genau wie die erste, aus einer definierenden Folge für das Bild, eine definierende Folge für das Urbild zu erzeugen.

Wählen wir nun zu jedem Bild unter der ersten Abbildung ein beliebiges aber festes Urbild unter der zweiten Abbildung, dann erhalten wir eine injektive Abbildung $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}(E)) \to \mathcal{C}(\beta \otimes 1, \mathfrak{C}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L)$ mit der Eigenschaft, dass zu jeder definierenden Folge $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ eines Urbildes eine entsprechende definierende Folge $\{(\gamma_i \otimes 1, \lambda_{\gamma_i \otimes 1})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ des Bildes gehört, so dass $(\lambda_{\gamma_i \otimes 1})_{|U^1(\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]})} = \lambda_{\gamma_i} \circ N_{K[\gamma_i]/F[\gamma_i]}$ für $i = 0, \ldots, \mu$.

Die Einbettungen $\iota_0, \ldots, \iota_\mu$ induzieren nun in natürlicher Weise Einbettungen $\iota_0', \ldots, \iota_\mu'$ von $K[\gamma_0 \otimes 1]/K, \ldots, K[\gamma_\mu \otimes 1]/K$, so dass $[\mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L, \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n), \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(q_i), \iota_i'(\gamma_i \otimes 1)]$, $i = 0, \ldots, \mu$, eine schwache Approximationsfolge für $[\mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L, \sigma_{\mathfrak{A}/\mathfrak{C}}(n), 0, \iota_0'(\beta \otimes 1)]$ liefert.

Nach [CJB93](3.6.13) haben wir eine kanonische Bijektion

$$\tau_{\mathfrak{C}(E)\otimes_{\mathfrak{o}_K}\mathfrak{o}_L, \mathfrak{C}\otimes_{\mathfrak{o}_K}\mathfrak{o}_L, \beta, 0} : \mathcal{C}(\beta \otimes 1, \mathfrak{C}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L) \to \mathcal{C}(\iota(\beta) \otimes 1, \mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L)$$

so dass für jede definierende Folge $\{(\gamma_i \otimes 1, \lambda_{\gamma_i \otimes 1})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ eines fixierten Urbildes, das zugehörige Bild durch die definierende Folge $\{(\gamma_i \otimes 1, \lambda_{\gamma_i \otimes 1} \circ \iota_i'^{-1})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ beschrieben wird.

Benutzen wir wieder Satz (6.3), dann erhalten wir einen einfachen Charakter von $H^1(\beta, \mathfrak{C})$ mit definierender Folge $\{(\gamma_i, (\lambda_{\gamma_i \otimes 1} \circ N_{K[\gamma_i \otimes 1]/F[\gamma_i \otimes 1]} \circ \iota_i'^{-1})_{|U^1(\mathfrak{o}_{K[\gamma_i]})})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ und weil $(\lambda_{\gamma_i \otimes 1} \circ N_{K[\gamma_i \otimes 1]/F[\gamma_i \otimes 1]} \circ \iota_i'^{-1})_{|U^1(\mathfrak{o}_{K[\gamma_i]})}) = \lambda_{\gamma_i} \circ \iota_i^{-1} \circ N_{K[\iota_i(\gamma_i)]/F[\iota_i(\gamma_i)]}$ für $i = 0, \ldots, \mu$ und Satz (6.1) kann wieder angewendet werden. Indem wir nun also das eindeutige Urbild unter der Abbildung $\mathcal{C}(\iota(\beta), \mathfrak{A}) \to \mathcal{C}(\iota(\beta), \mathfrak{C})$ nehmen, erhalten wir schliesslich den verlangten Charakter $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ mit definierender Folge $\{(\iota_i(\gamma_i), \lambda_{\gamma_i} \circ \iota_i^{-1})\}_{i=0,\ldots,\mu}$.

Wieder hängen die letzten Schritte weder von der speziellen Wahl der Einbettungen noch der definierenden Folgen ab, weil wir in allen Schritten nur kanonische Restriktionsabbildungen angewendet haben. Folgen wir also dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}(E)) & \overset{\text{res}(6.1)}{\hookrightarrow} & \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{C}(E)) & \overset{\text{res}(6.3)}{\twoheadleftarrow} & \mathcal{C}(\beta \otimes 1, \mathfrak{C}(E) \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L) \\
 & & & & \updownarrow [\text{CJB93}] \\
\mathcal{C}(\iota(\beta), \mathfrak{A}) & \overset{\text{res}(6.1)}{\hookrightarrow} & \mathcal{C}(\iota(\beta), \mathfrak{C}) & \overset{\text{res}(6.3)}{\twoheadleftarrow} & \mathcal{C}(\iota(\beta) \otimes 1, \mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L),
\end{array}$$

dann erhalten wir eine Abbildung $\tau_{\mathfrak{A}(E), \mathfrak{A}, \beta, \iota}$ welche die behaupteten Eigenschaften im Bezug auf die Einbettungen und die definierenden Folgen hat. Weil die Situation völlig symmetrisch ist können wir die Bijektivität dadurch zeigen, dass wir einfach die inverse Abbildung konstruieren. Fixieren wir nun einmal besondere definierende Folgen und Einbettungen, dann sehen wir mit die der letzten Aussage von (6.3), dass die Abbildung auch nicht von der besonderen Wahl der Urbilder der waagerechten surjektiven Abbildungen abhängen kann und damit sind wir fertig.

□

Das letzte Resultat ermöglicht es uns nun die Definition [CJB96a](8.2...) zu verallgemeinern:

(6.5) Definition *Zu jedem einfachen Paar $[0, \beta]$ können wir nun sogenannte "PS-Charaktere" (potentially simple characters) definieren. Ein PS-Charakter wird dabei definiert als ein Paar (θ, β), wobei $\theta = \{(A, \iota, \mathfrak{A}) \mapsto \theta(A, \iota, \mathfrak{A}) \in \mathcal{C}(\iota(\beta), \mathfrak{A})\}$ eine charakterwertige Funktion ist, welche jedem Tripel $(A, \iota, \mathfrak{A})$, welches die Voraussetzungen des Hauptsatzes (6.4) erfüllt, einen einfachen Charakter von $H^1(\iota(\beta), \mathfrak{A})$ zuordnet, so dass $\tau_{\mathfrak{A}(E), \mathfrak{A}, \beta}(\theta(A(E), \kappa, \mathfrak{A}(E))) = \theta(A, \iota, \mathfrak{A})$, wobei κ die kanonische Einbettung von E nach $A(E) = End_F(E)$ bezeichnet.*

Natürlich wird ein PS-Charakter eindeutig durch seinen Wert auf nur einem beliebigen aber festen Tripel bestimmt und es gilt:

(6.6) Korollar *Sei θ_β ein einfacher Charakter von $H^1(\beta, \mathfrak{A}(E))$, dann existiert ein eindeutiger "PS-Charakter" (θ, β), so dass $\theta(A(E), \kappa, \mathfrak{A}(E)) = \theta_\beta$, wobei κ wiederum die kanonische Einbettung von E nach $A(E) = End_F(E)$ ist.*

□

Kapitel 7

Gemischte Gruppen und einige Gruppenidentitäten

Wir wollen nun zur allgemeinen Notation aus Abschnitt (0) zurückkehren.

Sei aber $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung in A mit dem Jacobson Radikal $\mathfrak{P}$ und β ein $\mathfrak{A}$-sound Element im Sinne von Definition (2.4)(iii) und $[0,\beta]$ ein einfaches Paar im Sinne von Definition (3.7).

Insbesondere ist $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum und wie im Abschnitt (5) gehört zu diesem Stratum eine Menge $\mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$ von einfachen Charakteren. Jedem fixierten einfachen Charakter $\theta_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$ kann ein eindeutiger PS-Charakter (θ, β) im Sinne von Definition (6.5) zugeordnet werden, welcher durch die Gleichung $\theta(A, id_A, \mathfrak{A}) = \theta_{\mathfrak{A}}$ eindeutig bestimmt wird. Wenden wir $\theta_{\mathfrak{A}}$ auf Kommutatoren der Gruppe $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ an, so wird dadurch eine nicht ausgeartete Form $J^1(\beta, \mathfrak{A})/H^1(\beta, \mathfrak{A}) \times J^1(\beta, \mathfrak{A})/H^1(\beta, \mathfrak{A}) \to \mathbb{C}^\times$ bestimmt. Daher ist $\theta_{\mathfrak{A}}$ ein Heisenbergcharakter und bestimmt eine irreduzible Heisenbergdarstellung $\eta_{\mathfrak{A}}$ von $J^1(\beta, \mathfrak{A})$. Weil $\theta_{\mathfrak{A}}$ stabil unter der adjungierten Aktion von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} J^1(\beta, \mathfrak{A})$ ist, ist auch $\eta_{\mathfrak{A}}$ stabil unter der adjungierten Aktion von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} J^1(\beta, \mathfrak{A})$.

Dabei sei $E := F[\beta]$, $B := C_A(E)$, $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap B$ und $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ der $B^\times$-Normalisator von $\mathfrak{B}$. Die Ordnung $\mathfrak{B}$ ist wieder eine Hauptordnung und jeder Hauptordnung $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}$ können wir ein einfaches Stratum $[\mathfrak{A}_m, n_m, 0, \beta]$ zuordnen, wobei $\mathfrak{A}_m$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$ nach A ist und $n_m := -\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta)$.

Wir wollen die Darstellung $\eta_{\mathfrak{A}}$ zu einer Darstellung $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ von $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1(\beta, \mathfrak{A})$ fortsetzen. Wenn $\mathfrak{B}_m$ eine Minimalordnung ist, dann ist letztere Gruppe eine Pro-p-Sylowuntergruppe von $J(\beta, \mathfrak{A}) := \mathfrak{B}^\times J^1(\beta, \mathfrak{A})$. Zu diesem Zwecke werden wir in den folgenden Abschnitten gemischte Charaktere von gemischten Gruppen konstruieren um in gewissem Sinne den Mechanismus der Konstruktion einer Heisenbergdarstellung zu $J^1(\beta, \mathfrak{A})$ aus einem Heisenbergcharakter von $H^1(\beta, \mathfrak{A})$ auf die etwas veränderte Situation zwischen den Gruppen $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1(\beta, \mathfrak{A})$ und $U^1(\mathfrak{B}_m)H^1(\beta, \mathfrak{A})$ übertragen zu können. Ist dann auch noch $\mathfrak{B}_m$ eine Minimalordnung, so folgt mit einem Standardargument für Pro-p-Sylowuntergruppen, dass wir $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ zu einer Darstellung $\kappa_{\mathfrak{A}}$ von $J(\beta, \mathfrak{A})$ fortsetzen können. Die Darstellung $\kappa_{\mathfrak{A}}$ wird dann einen Tensorfaktor der Darstellung bilden, von der wir vermuten, dass es sich um einen einfachen Typen handeln wird.

Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $H^1 := H^1(\beta, \mathfrak{A})$, $J^1 := J^1(\beta, \mathfrak{A})$, $H^1_m := H^1(\beta, \mathfrak{A}_m)$ und $J^1_m := J^1(\beta, \mathfrak{A}_m)$.

Wir definieren gemischte Gruppen $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} := U^1(\mathfrak{B}_m)(J^1 \cap J^1_m)H^1$ und $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} := U^1(\mathfrak{B}_m)(J^1 \cap H^1_m)H^1$. Weil $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} = (H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap H^1_m)H^1$ und weil mit $\theta_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$

auch $\theta_{\mathfrak{A}_m} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}_m)$ gegeben ist, erhalten wir in (9.1) einen eindeutig bestimmten Charakter $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ von $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ der sich aus $\theta_{\mathfrak{A}}$ und $\theta_{\mathfrak{A}_m}$ zusammen setzt. Ist darüber hinaus das Paar $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ nicht ausgeartet (vgl. (9.5)), dann bestimmt $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ eine Heisenberg Darstellung $\hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ der Gruppe $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$, weil die Eigenschaften von [Zin88](4.2) erfüllt sind. Die gesuchte Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A}}$ ist dann die induzierte Darstellung $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} = Ind_{J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}(\hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})$. Wir brauchen nun folgenden Hilfssatz:

(7.1) Hilfssatz *Die Mengen $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ und $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ sind Gruppen und $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ist ein Normalteiler in $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$. Die Faktorgruppe ist abelsch und isomorph zu $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1 / H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1$.*

Beweis:
Dass die Mengen $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ und $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ Gruppen sind, folgt sofort aus den Eigenschaften der Gruppen H^1, J^1, H^1_m und J^1_m, wie sie in Abschnitt (4) beschrieben wurden.

Es gilt $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} = U^1(\mathfrak{B}_m)(J^1 \cap H^1_m)H^1$ und $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} = U^1(\mathfrak{B}_m)(J^1 \cap J^1_m)H^1$. Natürlich normalisiert H^1 sich selbst und der Kommutator von $(J^1 \cap H^1_m)$ und H^1 ist in H^1 enthalten. Demnach normalisiert H^1 die Gruppe $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1$. Wiederum normalisiert $(J^1 \cap J^1_m)$ die Gruppe H^1 und der Kommutator von $(J^1 \cap J^1_m)$ und $(J^1 \cap H^1_m)$ ist enthalten in H^1. Demnach normalisiert auch $(J^1 \cap J^1_m)$ die Gruppe $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1$. Schliesslich normalisiert $U^1(\mathfrak{B}_m) \subset (\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} \cap \mathcal{K}_{\mathfrak{B}_m})$ die Gruppen H^1, J^1, H^1_m und J^1_m, also auch die Gruppe $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ Normalteiler in $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ist.

Weil J^1/H^1 abelsch ist und $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} = (J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1)H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$, folgt auch die zweite Aussage des Satzes.

□

(7.2) Hilfssatz *Sei $A = M_m(D)$ eine beliebige zentral-einfache Algebra über F und K/F eine unverzweigte Erweiterung in D. Sei $\mathfrak{B}$ eine Hauptordung in $B = C_A(K) = M_m(C_D(K))$ welche in Normalform (0.3) gegeben ist und die Periode r' sowie die Invariante $s' = \frac{m}{r'}$ hat. Dann hat die eindeutige Fortsetzung $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ die Periode $r = \frac{r'}{\langle [K:F], r' \rangle}$ und es existiert eine $r' \times r'$-$(s' \times s')$ Blockmonomialmatrix g (d.h. $g = PM$ wobei P eine invertierbare $r' \times r'$-$(s' \times s')$ Blockpermutationsmatrix ist, also eine Blockmonomialmatrix deren Blockeinträge entweder die 0-Matrix oder die $s' \times s'$-Einheitsmatrix $I_{s'}$ sind und $M = diag(d_1 I_{s'}, \ldots, d_{r'} I_{s'})$, wobei $d_1, \ldots, d_{r'}$ Potenzen in einem fixierten Primelement π von $\mathfrak{o}_D$ sind), so dass $g\mathfrak{A}g^{-1}$ ebenfalls in Normalform (0.3) gegeben ist.*

Beweis:
Der Beweis ist enthalten in den Beweisen von [Gra99a](3.2, 3.3).

□

(7.3) Hilfssatz *Sei E/F eine Erweiterung in A, $B := C_A(E)$ und $\mathfrak{B}$ eine Hauptordnung in B mit der Periode r'. Auch sei $\mathfrak{A}$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}$ nach A, dann gilt in der Notation von Definition (2.3) die Gleichung $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}} = \frac{\langle [E:F], d \rangle}{\langle \langle [E:F], d \rangle, e(E/F) r' \rangle}$. Insbesondere ist die Fortsetzung $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ dann und nur dann unverzweigt, wenn $\langle [E:F], d \rangle \mid e(E/F) r'$.*

Beweis:
Dies bleibt als Aufgabe für den Leser oder kann in [Gra98](2.1.5) gefunden werden.

□

(7.4) Hilfssatz *Sei E/F eine Erweiterung in A, $B = C_A(E)$ und $\mathfrak{B}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ Hauptordnungen in B mit Perioden r', bzw. $\tilde{r}'$, so dass $\tilde{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{B}$. Darüber hinaus seien $\mathfrak{A}$,$\tilde{\mathfrak{A}}$ die Fortsetzungen von $\mathfrak{B}$, bzw. $\tilde{\mathfrak{B}}$ und setze voraus, dass $\langle [E:F], d\rangle \mid e(E/F)r'$ d.h. $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{B}} = 1$, dann gilt auch $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$.*

<u>Beweis:</u>
Sei K/F die maximal unverzweigte Teilerweiterung von E/F, so dass $[K:F] \mid Ind(A) = d$, dann gilt $\langle f(E/K), \bar{d}\rangle = 1$, wobei $\bar{d} := \frac{d}{[K:F]}$ der Index von $C := C_A(K)$ ist. Demnach können wir einen unverzweigten Zerfällungskörper L/K von C wählen, so dass die Algebra $E \otimes_K L$ ein Körper ist. Sind darüber hinaus $\mathfrak{C}$, bzw. $\tilde{\mathfrak{C}}$ die eindeutigen Fortsetzungen von $\mathfrak{B}$, bzw. $\tilde{\mathfrak{B}}$, dann sind $\mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L$, bzw. $\tilde{\mathfrak{C}} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L$ die eindeutigen Fortsetzungen von $\mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L$, bzw. $\tilde{\mathfrak{B}} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L$ von $B \otimes_K L$ nach $C \otimes_K L$. Wegen [CJB93](1.2.1) ist die Gitterkette, welche zu einer erblichen Ordung in einem einfachen $B \otimes_K L$- und $C \otimes_K L$-Modul gehört invariant unter Fortsetzung. Wir können daher aus der Enthaltensrelation $\tilde{\mathfrak{B}} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L \subset \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L$ zunächst auf die Relation $\tilde{\mathfrak{C}} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L \subset \mathfrak{C} \otimes_{\mathfrak{o}_K} \mathfrak{o}_L$ und dann auf die Relation $\tilde{\mathfrak{C}} \subset \mathfrak{C}$ schliessen.

Wegen $[K:F] \mid d$ und dem Satz von Skolem-Noether können wir nun bis auf einen inneren Automorphismus von $A = M_m(D)$ annehmen, dass $K \subset D$ und $C = M_m(\Delta)$, wobei $\Delta := C_D(K)$. Darüber hinaus können wir bis auf Konjugation mit Elementen aus $C^\times$ annehmen das die Ordnungen $\mathfrak{C}$ und $\tilde{\mathfrak{C}}$ in simultaner Normalform (0.3) bezüglich C gegeben sind. Nach [Gra99a](2.2) ist die Periode von $\mathfrak{C}$ gerade $r'\frac{e(E/K)}{\langle e(E/K), \bar{d}\rangle}$ und nach Voraussetzung lässt sich die Situation von [Gra99a](3.2) und dessen Beweis im Falle $t' = 1$ auf die Fortsetzung von $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{A}$ anwenden. Weil die Periode von $\mathfrak{B}$ die Periode von $\tilde{\mathfrak{A}}$ teilt, trifft dasselbe auch auf die Fortsetzung von $\tilde{\mathfrak{B}}$ durch $\tilde{\mathfrak{A}}$ zu. Sei also $\{\tilde{Y}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ die Gitterkette von $\tilde{\mathfrak{C}}$ in dem einfachen C-Modul Δ^m (Spaltenvektoren) und π ein Primelement von $\mathfrak{o}_D$ welches K normalisiert. Auch sei $\{\tilde{X}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ die Gitterkette von $\tilde{\mathfrak{A}}$ in dem einfachen A-Modul D^m (Spaltenvektoren) und setze $f := [K:F]$, dann folgt aus der Gleichung (7) in [Gra99a] und mit geeigneter Nummerierung der Ketten für alle $j \in \mathbb{Z}$, dass $\tilde{X}_j = \oplus_{k=0}^{f-1} Y_{j-\frac{\hat{r}}{f}k}\pi^k$, wobei $\hat{r}$ die Periode von $\tilde{\mathfrak{C}}$ ist.

Wenn h eine Uniformisierende für $\tilde{\mathfrak{C}}$ ist und wenn μ der Quotient der Periode $\hat{r}$ von $\tilde{\mathfrak{C}}$ und von der Periode von $\mathfrak{C}$ ist, dann ist h^μ eine Uniformisierende von $\mathfrak{C}$ und bei geeigneter Wahl der Nummerierung in der Gitterkette $\{\tilde{Y}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, so dass $\tilde{Y}_0$ ein unzerlegbarer $\mathfrak{C}$-Modul ist, dann ist $\{\tilde{Y}_{j\mu}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ die Gitterkette von $\mathfrak{C}$ in Δ^m. Wenden wir nun wieder [Gra99b](Gleichung (7)) an, dann sehen wir, dass $\mathfrak{A}$ die Gitterkette $\{\tilde{X}_{j\mu}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ hat und somit wie verlangt $\tilde{\mathfrak{A}} \subset \mathfrak{A}$ gelten muss.
□

(7.5) Hilfssatz *Seien $[\mathfrak{A}_1, n_1, 0, \beta]$, $[\mathfrak{A}_2, n_2, 0, \beta]$ einfache Strata im Sinne von (3.1(iii)), $B = C_A(\beta)$, $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 \cap B$ und $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_2 \cap B$. Darüber hinaus setzen wir voraus, dass eine minimale Hauptordnung $\mathfrak{B}_m$ existiert, welche in $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ enthalten ist. Sei $\mathfrak{A}_m$ dann die zugehörige eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$ nach A, dann existieren zu jeder speziellen Approximationsfolge $[\mathfrak{A}_m, n_m, q_i^m, \gamma_i]$ $i = 0, \ldots, \mu$ von $[\mathfrak{A}_m, n_m, 0, \beta]$ Zahlen $q_0^{(1)}, \ldots, q_\mu^{(1)}$ bzw. $q_0^{(2)}, \ldots, q_\mu^{(2)}$, so dass $[\mathfrak{A}_1, n_1, q_i^{(1)}, \gamma_i]$ $i = 0, \ldots, \mu$ bzw. $[\mathfrak{A}_2, n_2, q_i^{(2)}, \gamma_i]$ $i = 0, \ldots, \mu$ eine spezielle Approximationsfolge für $[\mathfrak{A}_1, n_1, 0, \beta]$ bzw. $[\mathfrak{A}_2, n_2, 0, \beta]$ ist.*

<u>Beweis:</u>
Sind h_m, h_1, h_2 Uniformisierende für $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, (d.h. $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}_m} = \langle h_m\rangle \mathfrak{B}_m^\times$, $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}_1} = \langle h_1\rangle \mathfrak{B}_1^\times$, $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}_2} = \langle h_2\rangle \mathfrak{B}_2^\times$), dann existieren natürliche Zahlen t_1, t_2, so dass $h_m^{t_1} = h_1 b_1$ und $h_m^{t_2} = h_2 b_2$, wobei $b_1 \in \mathfrak{B}_1^\times$ und $b_2 \in \mathfrak{B}_2^\times$.

Seien $\mathfrak{C}_m, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ die eindeutigen Fortsetzungen von $\mathfrak{B}_m, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ nach $C := C_A(K)$, wobei $K = E^{ur}$ der unverzweigte Teil der Erweiterung E/F ist und $E := F[\beta]$. Nach [Gra99a](2.2) sind diese Fortsetzungen unverzweigt, d.h. h_m, h_1, h_2, sind auch Uniformisierende für $\mathfrak{C}_m$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$. Auch übertragen sich nach (7.4) die Enthaltensrelationen für die Ordnungen in B auf die entsprechenden Ordnungen in C. Wegen den Enthaltensrelationen für die Ordnungen und [PB99a]((5.1)(ii)) sind die Strata $[\mathfrak{C}_1, -\nu_{\mathfrak{C}_1}(\beta), 0, \beta]$, $[\mathfrak{C}_2, -\nu_{\mathfrak{C}_2}(\beta), 0, \beta]$ und $[\mathfrak{C}_m, -\nu_{\mathfrak{C}_m}(\beta), 0, \beta]$ alle einfach.

Ist nun $\mathfrak{A}_m$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{C}_m$ nach A und ist $[\mathfrak{A}_m, n_m, q_i^m, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$ eine spezielle Approximationsfolge wie in (3.11) für $[\mathfrak{A}_m, -\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta), 0, \beta]$, dann existieren ganze Zahlen $k_0^m, \ldots, k_{\mu-1}^m$, so dass

(7.6) $\gamma_i = h_m^{k_i^m} c_i,$

wobei $c_i \in \mathfrak{C}_m^\times$ für $i = 0, \ldots, \mu$. Weil wir aber die Gleichheit $\nu_{\mathfrak{C}_m}(\beta) = \nu_{\mathfrak{C}_m}(\gamma_i)$ für $i = 0, \ldots, \mu$ haben, müssen faktisch alle Exponenten gleich sein, also $k_0^m = \ldots = k_{\mu-1}^m =: k^m$. Weil aber die Darstellungen (7.6) eindeutig sind, $\mathfrak{C}_m^\times \subset \mathfrak{C}_1^\times, \mathfrak{C}_2^\times$ und $\beta \in \mathcal{K}_{\mathfrak{C}_1}, \mathcal{K}_{\mathfrak{C}_2}$, kommen wir zu dem Schluss, dass $t_1, t_2 \mid k^m$ und die $\gamma_0, \ldots, \gamma_\mu$ müssen alle $\mathfrak{C}_1$- und $\mathfrak{C}_2$-rein sein. Es gilt sogar $\mathfrak{C}_1$- und $\mathfrak{C}_2$-"soundness", weil $K = F[\gamma_0]^{ur} \supseteq F[\gamma_1]^{ur} \supseteq \ldots \supseteq F[\gamma_\mu]^{ur}$. Mithilfe der Bemerkung nach (3.9) folgern wir, dass wir mit $q_0^{(1)} = q_0^{(2)} = 1$, $q_\mu^{(1)} = -\nu_{\mathfrak{A}_1}(\beta)$, $q_\mu^{(2)} = -\nu_{\mathfrak{A}_2}(\beta)$ und $q_{i+1}^{(1)} = -k_0(\gamma_i, \mathfrak{A}_1)$, $q_{i+1}^{(2)} = -k_0(\gamma_i, \mathfrak{A}_2)$ für $i = 1, \ldots, \mu-2$, die verlangten Approximationsfolgen $[\mathfrak{A}_1, -\nu_{\mathfrak{A}_1}(\beta), q_i^{(1)}, \gamma_i]$, $[\mathfrak{A}_2, -\nu_{\mathfrak{A}_2}(\beta), q_i^{(2)}, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$ für die einfachen Strata $[\mathfrak{A}_1, -\nu_{\mathfrak{A}_1}(\beta), 0, \beta]$, $[\mathfrak{A}_2, -\nu_{\mathfrak{A}_2}(\beta), 0, \beta]$ erhalten, weil sie gemeinsame Realisationen der Folge von einfachen Paaren $[0, \beta]$, $[-k_0(\gamma_i, \mathfrak{A}(F[\gamma_i])), \gamma_i]$ for $i = 2, \ldots, \mu - 1$ sind und es folgt durch direkte Rechnung mithilfe von [PB99a]((5.1)(ii)), dass diese Approximationsfolgen speziell sind.

□

(7.7) Hilfssatz *Seien $\nu, \bar{\nu}, \tilde{\nu}$ nicht negative ganze Zahlen, sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum und $\mathfrak{B}_m$ eine Hauptordnung welche in $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(\beta)$ enthalten ist. Darüber hinaus sei $\mathfrak{P}$ das Jacobson Radikal von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_m$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{P}_m$ das Jacobson Radikal von $\mathfrak{A}_m$ und seien $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$, $[\mathfrak{A}_m, n', q_i', \gamma_i]$ für $i = 0, \ldots, \mu$ simultane spezielle Approximationsfolgen für die Strata $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, $[\mathfrak{A}_m, n', 0, \beta]$ wie in (7.5), wobei $n' := \nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta)$, dann gilt*

(i) $(\mathfrak{P}^\nu + \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}}) \cap C_A(\gamma_i) = \mathfrak{P}^\nu \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}} \cap C_A(\gamma_i)$ und

(ii) $(\mathfrak{P}^\nu \cap \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}} + \mathfrak{P}^{\tilde{\nu}}) \cap C_A(\gamma_i) = \mathfrak{P}^\nu \cap \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{\tilde{\nu}} \cap C_A(\gamma_i)$

für $i = 0, \ldots, \mu$.

Beweis:

Sei K_i/F die maximal unverzweigte Teilerweiterung von $F[\gamma_i]/F$ mit der Eigenschaft, dass $[K_i : F] \mid d$ und weil die Approximationsfolgen speziell sind, bemerken wir, dass $K_i \subseteq K_0$ für $i = 0, \ldots, \mu$.

Die Algebra $C_A(K_0)/K_0$ hat den Index $\frac{d}{[K_0:F]}$ und deshalb sind nach (7.3),(7.4) die Fortsetzungen von $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_m$ durch $\mathfrak{A} \cap C_A(K_0)$,$\mathfrak{A}_m \cap C_A(K_0)$ unverzweigt und es gilt $\mathfrak{A} \cap C_A(K_0) \supset \mathfrak{A}_m \cap C_A(K_0)$. Darüber hinaus können wir bis auf Konjugation annehmen, dass $K_0 \subset D$ und dass sich $\mathfrak{A} \cap C_A(K_0), \mathfrak{A}_m \cap C_A(K_0)$ in simultaner Normalform (0.3) befinden. Nach (7.2) gibt es Monomialmatrizen in Potenzen eines gegebenen Primelementes π von $\mathfrak{o}_D$, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_m$ in ihre Normalformen in $A = M_m(D)$ konjugieren. Umgekehrt gilt $\mathfrak{P}^\nu = (\mathfrak{p}_D^{\nu_{i,j}})_{i,j=1,\ldots,m}$, $\mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}} = (\mathfrak{p}_D^{\bar{\nu}_{i,j}})_{i,j=1,\ldots,m}$ und $\mathfrak{P}^{\tilde{\nu}} = (\mathfrak{p}_D^{\tilde{\nu}_{i,j}})_{i,j=1,\ldots,m}$, wobei diese Darstellungen die Menge derjenigen $m \times m$-Matrizen bedeuten sollen, so dass der (i,j)'*te* Eintrag jeweils alle Elemente aus

$\mathfrak{p}_D^{\nu_{i,j}}$, bzw. $\mathfrak{p}_D^{\bar{\nu}_{i,j}}$, bzw. $\mathfrak{p}_D^{\tilde{\nu}_{i,j}}$ durchlaufen soll. Setzen wir nun $D_i := C_D(K_i)$, dann erhalten wir $(\mathfrak{P}^\nu + \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}}) \cap C_A(K_i) = (\mathfrak{p}_{D_i}^{\eta_{i,j}})_{i,j=1,\dots,m} = (\mathfrak{P}^\nu \cap C_A(K_i) + \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}} \cap C_A(K_i))$, wobei $\eta_{i,j} = \sigma_{\mathfrak{o}_D/\mathfrak{o}_{D_i}}(max(\nu_{i,j}, \bar{\nu}_{i,j})) = max(\sigma_{\mathfrak{o}_D/\mathfrak{o}_{D_i}}(\nu_{i,j}), \sigma_{\mathfrak{o}_D/\mathfrak{o}_{D_i}}(\bar{\nu}_{i,j}))$ und $(\mathfrak{P}^\nu \cap \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}} + \mathfrak{P}^{\tilde{\nu}}) \cap C_A(K_i) = (\mathfrak{p}_{D_i}^{\hat{\eta}_{i,j}})_{i,j=1,\dots,m} = (\mathfrak{P}^\nu \cap \mathfrak{P}_m^{\bar{\nu}} \cap C_A(K_i) + \mathfrak{P}^{\tilde{\nu}} \cap C_A(K_i))$, wobei $\hat{\eta}_{i,j} = \sigma_{\mathfrak{o}_D/\mathfrak{o}_{D_i}}(max(min(\nu_{i,j}, \bar{\nu}_{i,j}), \tilde{\nu}_{i,j})) = max(min(\sigma_{\mathfrak{o}_D/\mathfrak{o}_{D_i}}(\nu_{i,j}), \sigma_{\mathfrak{o}_D/\mathfrak{o}_{D_i}}(\bar{\nu}_{i,j})), \sigma_{\mathfrak{o}_D/\mathfrak{o}_{D_i}}(\tilde{\nu}_{i,j}))$.

Wir wollen nun einen Index i fixieren und bemerken zunächst, dass wir uns im Bezug auf die zuzeigende Aussage unseres Satzes und im Bezug auf unseren fixierten Index i, aufgrund der obigen Schlussweise und wegen $K_i \subseteq K_0$, ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall $K_i = F$ zurückziehen können. Dabei können wir natürlich immernoch annehmen, dass $K_0[\gamma_i]$ ein Körper ist, welcher bezüglich der Ordnungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_m$ sound eingebettet ist. Auch gilt immernoch die Enthaltensrelation $\mathfrak{A} \cap C_A(K_0) \supset \mathfrak{A}_m \cap C_A(K_0)$ welche die Relation $\mathfrak{A} \cap C_A(K_0[\gamma_i]) \supset \mathfrak{A}_m \cap C_A(K_0[\gamma_i])$ impliziert. Ist nun M_i/F die Teilerweiterung von $K_0[\gamma_i]/F$ von minimalem Grade, so dass die Fortsetzung von $\mathfrak{A} \cap C_A(K_0[\gamma_i])$ durch $\mathfrak{A} \cap C_A(M_i)$ unverzweigt ist, dann ist auch die Fortsetzung von $\mathfrak{A}_m \cap C_A(K_0[\gamma_i])$ durch $\mathfrak{A}_m \cap C_A(M_i)$ unverzweigt und $\mathfrak{A}_m \cap C_A(M_i) \subset \mathfrak{A} \cap C_A(M_i)$. Entscheidend ist jedoch, dass aufgrund unserer Bedingungen an die Erweiterung M_i/F und durch Anwendung von inneren Automorphismen von $C_A(\gamma_i)$, die Voraussetzungen zur Anwendung von (7.2) simultan für die Fortsetzungen von $\mathfrak{A} \cap C_A(M_i)$ und $\mathfrak{A}_m \cap C_A(M_i)$ durch $\mathfrak{A} \cap C_A(\gamma_i)$ und $\mathfrak{A}_m \cap C_A(\gamma_i)$ erfüllt werden können. Daher finden wir insbesondere einen Isomorphismus $C_A(\gamma_i) \simeq M_{\bar{m}}(\bar{D})$ (wobei $\bar{m} = \frac{m\langle [F[\gamma_i]:F],d\rangle}{[F[\gamma_i]:F]}$ und $\bar{D}$ ein zentraler Schiefkörper über $F[\gamma_i]$ ist) und Monomialmatrizen in den Potenzen eines Primelementes $\bar{\pi}$ von $\mathfrak{o}_{\bar{D}}$, so dass die Ordnungen $\mathfrak{A} \cap C_A(\gamma_i)$ und $\mathfrak{A}_m \cap C_A(\gamma_i)$ durch diese Matrizen in ihre jeweilige Normalform (0.3) konjugiert werden. Betrachten wir nun die Gitterketten von $\mathfrak{A} \cap C_A(\gamma_i)$ und $\mathfrak{A}_m \cap C_A(\gamma_i)$ in dem einfachen $M_{\bar{m}}(\bar{D})$-Modul $W := (\bar{D})^{\bar{m}}$ (als Spaltenvektoren aufgefasst), dann sehen wir, dass diese Ketten eine gemeinsame $\mathfrak{o}_{\bar{D}}$ Basis haben in dem Sinne, dass die einzelnen Gitter jeweils als direkte Summe gewisser Potenzen von $\mathfrak{p}_{\bar{D}}$ geschrieben werden können, welche mit einem Basis Element e_i der Standardbasis $e_1, \dots, e_{\bar{m}}$ von W multipliziert werden.

Wählen wir nun eine unverzweigte Erweiterung L/F vom Grade d, welche A zerfällt und sehen diese als in D eingebettet an. Durch Skalarerweiterung erhalten wir wir die zerfallende Algebra $\bar{A} := A \otimes_F L \simeq End_L(V)$, wobei $V = D^m$ ein einfacher Links-$A = M_m(D)$-Modul und Rechts-D- bzw. Rechts-L-vektorraum ist. Auf der anderen Seite können wir die Teilerweiterung M/F vom Grade $\bar{d} := \frac{d}{\langle [F[\gamma_i]:F],d\rangle}$ von L/F in so einer Art und Weise nach A einbetten, dass $M[\gamma_i] \simeq F[\gamma_i] \otimes_F M$ eine Körpererweiterung von $F[\gamma_i]$ in $\bar{D}$ ist, wobei wir hier noch einmal bemerken, dass wir hier die Reduktion auf die Voraussetzung $K_i = F$ verwenden.

Folglich gilt $C \simeq End_{M[\gamma_i]\otimes_M L}(W \otimes_M L)$ und der einfache C-Modul $W \otimes_M L$ besitzt eine $M[\gamma_i] \otimes_M L$-Basis, so dass die Gitter der Gitterkette von $\mathfrak{C} := \mathfrak{A} \cap C_A(\gamma_i) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ und $\mathfrak{C}_m := \mathfrak{A}_m \cap C_A(\gamma_i) \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ simultane $\mathfrak{o}_{M[\gamma_i]\otimes_M L}$-Basen im Sinne von Hilfssatz [CJB99](5.3) haben. Auf der anderen Seite gilt $C = C_{\bar{A}}(\gamma_i \otimes 1) \simeq End_{F[\gamma_i]\otimes_F L}(V)$ und wenn wir den Isomorphismus $F[\gamma_i] \otimes_F L \simeq M[\gamma_i] \otimes_M L$ verwenden, dann können wir eine $F[\gamma_i] \otimes_F L$-Basis von V finden, so dass auch die Gitterketten von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_m$ gemeinsame $\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]\otimes_F L}$-Basen im Sinne von Lemma [CJB99](5.3) haben. Aus Satz [CJB93](1.2.1) leiten wir ab, dass $\bar{\mathfrak{A}} := \mathfrak{A} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ und $\bar{\mathfrak{A}}_m := \mathfrak{A}_m \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}_L$ dieselben Gitterketten wie $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_m$ in V haben, wenn wir sie als $\mathfrak{o}_L$-Gitterketten ansehen. Hilfssatz [CJB99](5.3) findet nun auch Anwendung und wir erhalten einen Isomorphismus von $(A(F[\gamma_i] \otimes_F L), C)$-Bimoduln $A \simeq A(F[\gamma_i] \otimes_F L) \otimes_{F[\gamma_i]\otimes_F L} C$ welcher sich zu $(\mathfrak{A}(F[\gamma_i] \otimes_F L), \mathfrak{C})$-Bimodulisomorphismen $\bar{\mathfrak{P}}^\nu \simeq \mathfrak{A}(F[\gamma_i] \otimes_F L) \otimes \mathfrak{R}^\nu$, $\bar{\mathfrak{P}}^{\tilde{\nu}} \simeq \mathfrak{A}(F[\gamma_i] \otimes_F L) \otimes \mathfrak{R}^{\tilde{\nu}}$ und zu einem $(\mathfrak{A}(F[\gamma_i] \otimes_F L), \mathfrak{C}_m)$-Bimodulisomorphismus $\bar{\mathfrak{P}}_m^{\bar{\nu}} \simeq \mathfrak{A}(F[\gamma_i] \otimes_F L) \otimes \mathfrak{R}_m^{\bar{\nu}}$ einschränkt. Dabei benutzen wir die üblichen Schreibweisen $A(F[\gamma_i] \otimes_F L) = End_L(F[\gamma_i] \otimes_F L)$

und $\mathfrak{A}(F[\gamma_i]\otimes_F L) = End_{\mathfrak{o}_L}\{\mathfrak{p}^j_{F[\gamma_i]\otimes_F L}\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Auch bezeichnen $\bar{\mathfrak{P}}$ das Jacobsonradikal von $\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{P}}_m$ das Jacobsonradikal von $\bar{\mathfrak{A}}_m$, $\mathfrak{R}$ das Jacobsonradical von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{R}_m$ das Jacobsonradical von $\mathfrak{C}_m$.

Benutzen wir nun in $\bar{A}$ eine zahme Korrestriktion s relativ zu $F[\gamma_i]\otimes_F L/L$, dann folgern wir aus [CJB93](1.3.12)(1.3.10), dass $(\bar{\mathfrak{P}}^{\nu}+\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}}_m)\cap C = s(\bar{\mathfrak{P}}^{\nu}+\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}}_m) = s(\bar{\mathfrak{P}}^{\nu})+s(\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}}_m) = (\bar{\mathfrak{P}}^{\nu}\cap C+\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}}_m\cap C)$ und $(\bar{\mathfrak{P}}^{\nu}\cap\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}}_m+\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}})\cap C = (\bar{\mathfrak{P}}^{\nu}\cap\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}}_m\cap C+\bar{\mathfrak{P}}^{\bar{\nu}}\cap C)$. Die Aussage unseres Hilfssatzes folgt nun indem wir auf beiden Seiten der Gleichung die Mengen der galoisinvarianten Elemente bilden, wobei $Gal(L/F)$ auf dem zweiten Tensorfaktor von $A\otimes_F L$ wirkt.

□

(7.8) Hilfssatz *Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{B}_m$ wie oben. Darüber hinaus wählen wir eine Folge von Elementen $\gamma_0,...,\gamma_\mu$, so dass die Folge $[\mathfrak{A},n,q_i,\gamma_i]$ bzw. $[\mathfrak{A}_m,n_m,q'_i,\gamma_i]$ $i=0,\dots,\mu$ eine spezielle Approximationsfolge für das Stratum $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ bzw. $[\mathfrak{A}_m,n_m,0,\beta]$ ist, wobei $n_m := -\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta)$, $n := -\nu_{\mathfrak{A}}(\beta)$ und die $q_0,q_1,\dots,q_\mu$; $q'_0,q'_1,\dots,q'_\mu$ in geeigneter Weise gemäss (7.5) gewählt werden.*

Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $J^1 =: 1+\mathfrak{J}^1$, $J^1_m =: 1+\mathfrak{J}^1_m$, $H^1 =: 1+\mathfrak{H}^1$ und $H^1_m =: 1+\mathfrak{H}^1_m$. Mit dieser Notation gilt dann

$$\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1_m = \sum_{j=i}^{\mu}\mathfrak{P}^{[\frac{q_j+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_j+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_j),$$

$$\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m = \sum_{j=i}^{\mu}\mathfrak{P}^{[\frac{q_j+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_j}{2}]+1}\cap C_A(\gamma_j)$$

und

$$\mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m = \sum_{j=i}^{\mu}\mathfrak{P}^{[\frac{q_j}{2}]+1}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_j}{2}]+1}\cap C_A(\gamma_j)$$

für $i=0,\dots,\mu$. Speziell ergeben sich für $i=0$ die linken Seiten $\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{J}^1_m$, $\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{H}^1_m$ bzw. $\mathfrak{H}^1\cap\mathfrak{H}^1_m$.

Beweis:

Weil alle Gleichheiten ähnlich zu beweisen sind, beschränken wir uns hier auf die erste. In der Sprache von (4.1) ausgedrückt, gilt $\mathfrak{J}^1=\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{J}^1_m=\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}_m)$. Mit (4.3), folgern wir

$$\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1 = \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1(\gamma_i,\mathfrak{A}) = \sum_{j=i}^{\mu}\mathfrak{P}^{[\frac{q_j+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_j) = (\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_i)+\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1) \quad (7.1)$$

und

$$\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1_m = \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1(\gamma_i,\mathfrak{A}_m) = \sum_{j=i}^{\mu}\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_j+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_j) = (\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_i)+\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1_m). \quad (7.2)$$

Indem wir unser Induktionsargument entlang der Approximationsfolge benutzen, genügt es offenbar zu zeigen, dass

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_i)+\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1)\cap(\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_i)+\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1_m) =$$
$$\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]}\cap C_A(\gamma_i)+\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1_m. \quad (7.3)$$

Der Beweis ist nun derselbe wie für Hilfssatz [CJB93](3.6.10)(S. 140,141) im zerfallenden Fall. Wir wiederholen hier nocheinmal den Beweisgang und fügen die in unserer Situation fehlenden Details an.

Wir betrachten die adjungierte Abbildung $a_{\gamma_i} \in End_F(V)$ aus Abschnitt (2) (analog zu [CJB93](1.4)) und bemerken, dass $ker(a_{\gamma_i}) = C_A(\gamma_i)$. Sei L_l das $\mathfrak{o}_F$-Gitter auf der linken Seite der Gleichung (7.3) und L_r das $\mathfrak{o}_F$-Gitter auf der rechten Seite der Gleichung (7.3), dann gilt natürlich $L_l \supseteq L_r$ und $a_{\gamma_i}(L_l) \simeq L_l/L_l \cap ker(a_{\gamma_i}) \supseteq L_r/L_r \cap ker(a_{\gamma_i}) \simeq a_{\gamma_i}(L_r)$. Wegen $L_l \cap ker(a_{\gamma_i}) = L_l \cap C_A(\gamma_i) = \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) = L_r \cap C_A(\gamma_i) = L_r \cap ker(a_{\gamma_i})$, genügt es daher zu zeigen, dass $a_{\gamma_i}(L_l) = a_{\gamma_i}(L_r)$.

Es gilt

$$a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1) = a_{\gamma_i}(L_r) \subseteq$$

$$a_{\gamma_i}(L_l) \subseteq a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1) \cap a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1) =$$

$$a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1) \cap a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1).$$

Wir müssen daher nur noch

$$a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1) = a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1) \cap a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1)$$

zeigen. Dazu benutzen wir den allgemeinen Satz hinter [CJB93](3.6.17) welcher uns die Isomorphie abelscher Gruppen

$$a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1) \cap a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1)/a_{\gamma_i}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1) \simeq$$

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1) \cap ker(a_{\gamma_i})/(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap ker(a_{\gamma_i}) + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1 \cap ker(a_{\gamma_i}))$$

liefert und wir können uns daher darauf beschränken zu zeigen, dass

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1) \cap C_A(\gamma_i) = (\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1 \cap C_A(\gamma_i)).$$

Auf der anderen Seite gilt

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i)) \subseteq$$

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1 \cap C_A(\gamma_i)) \subseteq$$

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1) \cap C_A(\gamma_i) \subseteq$$

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} + \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]}) \cap C_A(\gamma_i),$$

wobei der erste und der letzte Term unserer Gleichungskette nach (7.7)(i) übereinstimmen, womit unser Beweis endet.

□

(7.9) Hilfssatz *Mit den Voraussetzungen und Notationen aus (7.8) und für* $i \in \{1, \ldots, \mu\}$ *gilt*

$$J^1 \cap J^1_m = (\prod_{\nu=0}^{i-1} (1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_\nu+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_\nu)))(U^{[\frac{q_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}) \cap J^1 \cap U^{[\frac{q'_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}_m) \cap J^1_m),$$

$$H^1 \cap H^1_m = (\prod_{\nu=0}^{i-1} (1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu}{2}]+1} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_\nu}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_\nu)))(U^{[\frac{q_i}{2}]+1}(\mathfrak{A}) \cap H^1 \cap U^{[\frac{q'_i}{2}]+1}(\mathfrak{A}_m) \cap H^1_m)$$

und

$$J^1 \cap H^1_m = (\prod_{\nu=0}^{i-1} (1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_\nu}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_\nu)))(U^{[\frac{q_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}) \cap J^1 \cap U^{[\frac{q'_i}{2}]+1}(\mathfrak{A}_m) \cap H^1_m).$$

Beweis:

Die Beweise der ersten und der beiden anderen Gleichungen sind im Prinzip wieder fast identisch, so dass wir uns auf den Beweis der ersten Gleichung beschränken. Für $i = 0$ brauchen wir nichts zu zeigen. Setzen wir induktiv die Richtigkeit unserer Behauptung für fixiertes $i \in \{1, \ldots, \mu - 1\}$ voraus, dann müssen wir für den Induktionsschritt nach $i + 1$ zeigen, dass $U^{[\frac{q_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}) \cap J^1 \cap U^{[\frac{q'_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}_m) \cap J^1_m = (1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i)))(U^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]}(\mathfrak{A}) \cap J^1 \cap U^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]}(\mathfrak{A}_m) \cap J^1_m)$.

Wegen (7.8) und (4.3) gilt $U^{[\frac{q_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}) \cap J^1 \cap U^{[\frac{q'_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}_m) \cap J^1_m = U^{[\frac{q_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}) \cap J^1(\gamma_i, \mathfrak{A}) \cap U^{[\frac{q'_i+1}{2}]}(\mathfrak{A}_m) \cap J^1(\gamma_i, \mathfrak{A}_m) = 1 + \sum_{\nu=i}^{\mu} \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_\nu+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_\nu) = 1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m$.

Daher bleibt uns nur noch zu zeigen, dass

$$1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m =$$

$$(1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i))(1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m).$$

Nach (4.3), $\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 = \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1(\gamma_i, \mathfrak{A})$ und $\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m = \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1(\gamma_i, \mathfrak{A}_m)$, folgern wir, dass $\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m$ ein $(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i), \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i))$-Bimodul ist und damit ist die Enthaltenrelation $\supseteq$ offensichtlich.

Um die umgekehrte Enthaltensrelation zu zeigen, betrachten wir $x \in \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i)$ und $y \in \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m$. Es gilt wie verlangt $1 + x + y = (1 + x)(1 + (1 + x)^{-1}y) = (1 + x)(1 + \sum_{\nu=0}^{\infty}(-x)^\nu y) \in (1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i))(1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m)$.
□

Kapitel 8

Eine besondere Eigenschaft von PS-Charakteren

(8.1) Hilfssatz *Sei* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *ein einfaches Stratum und* $\theta_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$ *ein einfacher Charakter zu diesem Stratum, dann erhalten wir für jede definierende Folge* $\{(\gamma_\nu, \lambda_{\gamma_\nu})\}_{\nu=0,\ldots,\mu}$ *eine explizite Formel für* $\theta_{\mathfrak{A}}$ *im folgenden Sinne:*

Falls $1 + x \in H^1(\beta, \mathfrak{A})$, $i \in \{0, \ldots, \mu\}$ *und* $1 + x = (\prod_{\nu=0}^{i-1} 1 + x_\nu)(1 + x_i')$, *wobei* $x_\nu \in \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_\nu)$ *für* $\nu = 0, \ldots, i-1$ *und* $x_i' \in \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1(\gamma_i, \mathfrak{A})$, *dann gilt*

$$\theta_{\mathfrak{A}}(1 + x) = (\prod_{\nu=0}^{i-1} \lambda_{\gamma_\nu} \circ Nrd_{C_A(\gamma_\nu)/F[\gamma_\nu]}(1 + x_\nu)\psi^+_{\beta-\gamma_\nu}(x_\nu))\psi^+_{\beta-\gamma_i}(x_i')\theta_{\gamma_i}(1 + x_i'),$$

wobei $\theta_{\gamma_i} \in \mathcal{C}(\gamma_i, \mathfrak{A})$ *der eindeutige einfache Charakter ist, welcher durch die definierende Folge* $\{(\gamma_\nu, \lambda_{\gamma_\nu})\}_{\nu=i,\ldots,\mu}$ *gegeben ist (insbesondere setzen wir* $\theta_{\gamma_\mu} \equiv 1$*).*

Beweis:

Für $i = 0$ ist nichts zu zeigen. Daher setzen wir nun gemäss eines Induktionsargumentes voraus, dass die Aussage für $\mu > i \geq 1$ schon gezeigt ist und gemäss (7.9) schreiben wir $(1 + x_i') = (1 + x_i)(1 + x_{i+1}')$, wobei $x_i \in \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)$ und $x_{i+1}' \in \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1(\gamma_{i+1}, \mathfrak{A})$.

Wegen $([\frac{q_i}{2}] + 1) + ([\frac{q_{i+1}}{2}] + 1) \geq q_i + 1$ und $\beta - \gamma_i \in \mathfrak{P}^{-q_i}$, erhalten wir $\psi^+_{\beta-\gamma_i}(x_i') = \psi^+_{\beta-\gamma_i}(x_i + x_i x_{i+1}' + x_{i+1}') = \psi^+_{\beta-\gamma_i}(x_i + x_{i+1}')$. Nach Konstruktion der einfachen Charaktere wissen wir auch, dass $\theta_{\gamma_i}(1 + x_i') = \lambda_{\gamma_i} \circ Nrd_{C_A(\gamma_i)/F[\gamma_i]}(1 + x_i)\psi^+_{\gamma_i-\gamma_{i+1}}(x_{i+1}')\theta_{\gamma_{i+1}}(1 + x_{i+1}')$ und der Induktionsschritt folgt aus $\psi^+_{\beta-\gamma_i}(x_{i+1}')\psi^+_{\gamma_i-\gamma_{i+1}}(x_{i+1}') = \psi^+_{\beta-\gamma_{i+1}}(x_{i+1}')$.

□

Die besondere Eigenschaft von den PS-Charakteren, welche wir in (6.5) einführten, ist eine Verallgemeinerung eines Teils der Existenzaussage von [CJB93](3.6.1):

(8.2) Korollar *Mit den Voraussetzungen und Notationen von 7.5 nehmen wir* $\theta_1 \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}_1)$ *und* $\theta_2 \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A}_2)$, *so dass* $\theta_1 = \theta(A, id_A, \mathfrak{A}_1)$ *und* $\theta_2 = \theta(A, id_A, \mathfrak{A}_2)$, *wobei* (θ, β) *ein PS-Charakter ist. Dann gilt* $(\theta_1)_{|H^1(\beta,\mathfrak{A}_1)\cap H^1(\beta,\mathfrak{A}_2)} = (\theta_2)_{|H^1(\beta,\mathfrak{A}_1)\cap H^1(\beta,\mathfrak{A}_2)}$.

Beweis:

Wähle simultane spezielle Approximationsfolgen für $[\mathfrak{A}(E), -\nu_E(\beta), 0, \beta]$ und $[\mathfrak{A}_m, n_m, 0, \beta]$ welche die Voraussetzungen von Hauptsatz (6.4) erfüllen sollen. Nach 7.5 können wir gemeinsame spezielle Approximationsfolgen für $[\mathfrak{A}_1, -\nu_{\mathfrak{A}_1}(\beta), 0, \beta]$ und $[\mathfrak{A}_2, -\nu_{\mathfrak{A}_2}(\beta), 0, \beta]$ finden, welche auf denselben Approximationen $\gamma_0, \ldots, \gamma_\mu$ beruhen und daher ebenfalls die Voraussetzungen von Hauptsatz (6.4) im Bezug auf dieselbe Approximationsfolge von $[\mathfrak{A}(E), -\nu_E(\beta), 0, \beta]$ erfüllen. Doppelte Anwendung von Hauptsatz (6.4) auf $\theta(A(E), id_{A(E)}, \mathfrak{A}(E))$ hat nun zum Ergebnis, dass θ_1 und θ_2 eine gemeinsame definierende Folge $\{(\gamma_i, \lambda_{\gamma_i})\}_{i=0,\ldots,\mu}$ haben. Daher folgt unsere Behauptung nun direkt mit Hilfe von (7.9) und (8.1) im Falle $i = \mu$.

□

Kapitel 9

Fortsetzung der einfachen Charaktere auf gemischte Gruppen

Die besondere Eigenschaft von PS-Charakteren ermöglicht es uns nun besondere Erweiterungen von einfachen Charakteren zu definieren.

(9.1) Satz *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum und wir benutzen die Notation aus Abschnitt (7). Sei $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B}$ und $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ die gemischte Gruppe wie in Hilfssatz (7.1), dann existiert ein eindeutiger Charakter $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ von $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ welcher auf H^1 mit $\theta_{\mathfrak{A}}$ übereinstimmt und auf $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap H^1_m$ mit $\theta_{\mathfrak{A}_m} := \theta(A, id, \mathfrak{A}_m)$, wobei θ der eindeutige PS-Charakter ist, welcher durch die Gleichung $\theta(A, id, \mathfrak{A}) = \theta_{\mathfrak{A}}$ festgelegt ist. Darüber hinaus normalisiert $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ den Charakter $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$.*

Beweis:

Die Eindeutigkeit der Charakters ist klar. Dass die Menge $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ eine Gruppe ist, wissen wir bereits aus (7.1). Weil nach (5.11) die Gruppe $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}} J^1$ den Charakter $\theta_{\mathfrak{A}}$ normalisiert und $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}_m} J^1_m$ den Charakter $\theta_{\mathfrak{A}_m}$, brauchen wir für die Existenz des Charakters nur die Gleichheit $(\theta_{\mathfrak{A}})_{|H^1 \cap H^1_m} = (\theta_{\mathfrak{A}_m})_{|H^1 \cap H^1_m}$ und diese wird gerade durch (8.2) geliefert.

Darüber hinaus bemerken wir, dass $(J^1 \cap J^1_m)$ die Charaktere $\theta_{\mathfrak{A}}$ und $\theta_{\mathfrak{A}_m}$ normalisiert und damit $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$. Wegen $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} = (J^1 \cap J^1_m) H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ folgt nun auch die letzte Aussage.

□

(9.2) Lemma *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum mit der letzten Sprungstelle q und $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$. Seien $\mathfrak{A}_m$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$, $\mathfrak{P}_m$ das Jacobsonradikal von $\mathfrak{A}_m$, q' der letzte Sprung des Stratums $[\mathfrak{A}_m, -\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta), 0, \beta]$ und $\mathfrak{P}$ das Jacobsonradikal von $\mathfrak{A}$. Dann gilt für alle $x \in B^\times = C_A(\beta)^\times$:*

$$(x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})x + (\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})) \cap B =$$

$$x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})x \cap B + (\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}) \cap B.$$

Beweis:

Wir wählen zunächst wieder wie im Beweis von (7.7) die maximal unverzweigte Teilerweiterung K_0/F von E/F mit $[K_0 : F] \mid d$ und die eindeutigen Fortsetzungen $\mathfrak{C}_m$ bzw. $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{B}_m$ bzw. $\mathfrak{B}$ nach $C = C_A(K_0)$. Wir können wiederum ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathfrak{C}_m$ und $\mathfrak{C}$ in Normalform in $C = M_m(D_0)$ annehmen und ihre Fortsetzungen $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{A}$ als durch Monomialmatrizen zu ihren Normalformen in $A = M_m(D)$ konjugiert. Schreiben wir $x = c_1\bar{x}c_2$ mit $c_1, c_2 \in \mathfrak{C}_m^\times$, dann können wir erreichen, dass $\bar{x}$ ebenfalls monomial ist. Wir haben also

$$\bar{x}^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})\bar{x} + (\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}) = (\mathfrak{p}_D^{\eta_{i,j}})_{i,j=1,\dots,m},$$

$$\bar{x}^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})\bar{x} = (\mathfrak{p}_D^{\nu_{i,j}})_{i,j=1,\dots,m}$$

und

$$(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}) = (\mathfrak{p}_D^{\nu'_{i,j}})_{i,j=1,\dots,m}.$$

Wegen

$$\sigma_{D/D_0}(\eta_{i,j}) = \sigma_{D/D_0}(max\{\nu_{i,j}, \nu'_{i,j}\}) = max\{\sigma_{D/D_0}(\nu_{i,j}), \sigma_{D/D_0}(\nu'_{i,j})\}$$

für $i, j = 1, \dots, m$ und $\mathfrak{C}_m^\times \subset \mathcal{K}_{\mathfrak{A}} \cap \mathcal{K}_{\mathfrak{A}_m}$ gilt

$$(\bar{x}^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})\bar{x} + (\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})) \cap C =$$

$$\bar{x}^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})\bar{x} \cap C + (\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}) \cap C.$$

Wir können uns also ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf den Fall zurück ziehen, dass $K_0 = F$ ist und somit $\langle f(E/F), d\rangle = 1$ gilt. Dann haben wir sogar die Enthaltensrelationen $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}_m \supset \mathfrak{P}_m \supset \mathfrak{P}$. Im Falle von $2 \nmid q$ erhalten wir wegen $\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} = \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}$ die Forderung

$$(x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})x \cap \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}) \cap B = x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1} \cap B)x \cap (\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1} \cap B)$$

und im Falle $2 \mid q$ bekommen wir wegen $\mathfrak{P}^{\frac{q}{2}} \supset \mathfrak{P}_m^{\frac{q'}{2}+1} \supset \mathfrak{P}^{\frac{q}{2}+1}$ die Forderung

$$(x^{-1}(\mathfrak{P}_m^{\frac{q'}{2}+1})x + (\mathfrak{P}_m^{\frac{q'}{2}+1})) \cap B = x^{-1}(\mathfrak{P}_m^{\frac{q'}{2}+1} \cap B)x + (\mathfrak{P}_m^{\frac{q'}{2}+1} \cap B).$$

Dabei beachten wir, dass $h^{\frac{q}{2}}\mathfrak{P}_m = \mathfrak{P}_m^{\frac{q'}{2}+1}$, wenn h eine Uniformisierende für $\mathfrak{A}$ ist. Unsere beiden letzten Forderungen folgen nun durch Zerfällung der Algebra mit einem unverzweigten Zerfällungskörper L/F vom Grad d und [CJB93](1.3.16).

□

(9.3) Proposition *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum mit der letzten Sprungstelle q und $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$. Seien $\mathfrak{A}_m$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$ und q' der letzte Sprung des Stratums $[\mathfrak{A}_m, -\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta), 0, \beta]$. Dann gilt für alle $x \in B^\times = C_A(\beta)^\times$:*

$$x^{-1}H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}x \cap H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} =$$

$$(x^{-1}U^1(\mathfrak{B}_m)x \cap U^1(\mathfrak{B}_m))\cdot$$

$$(x^{-1}(1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1_m + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1)x \cap (1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1_m + \mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1)).$$

Beweis:

Weil $\mathfrak{H}^1$ bzw. $\mathfrak{H}^1_m$ ein Ideal in $\mathfrak{J}^1$ bzw. $\mathfrak{J}^1_m$ ist, alles $(\mathfrak{B},\mathfrak{B})$-Bimoduln sind und wegen (7.8), sehen wir leicht, dass

$$H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} =$$
$$U^1(\mathfrak{B}_m)(J^1 \cap H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}) =$$
$$1+\mathfrak{Q}_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1$$

und wir können uns darauf beschränken die additive Relation

$$x^{-1}(\mathfrak{Q}_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x\cap(\mathfrak{Q}_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1) =$$

$$x^{-1}\mathfrak{Q}_m x\cap\mathfrak{Q}_m+x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x^{-1}\cap(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)$$

zu zeigen, wobei $\mathfrak{P}$ wiederum das Jacobsonradikal von $\mathfrak{A}$ ist und $\mathfrak{P}_m$ das Jacobsonradikal von $\mathfrak{A}_m$.

Bezeichnen wir das Gitter auf der linken Seite der Gleichung mit L_l und das Gitter auf der rechten Seite mit L_r, dann gilt offenbar $L_r \subseteq L_l$. Der Beweis läuft nun analog zum Beweis von (7.8). Zunächst nutzen wir aus, dass $B = ker(a_\beta)$ und $L_r \cap B = x^{-1}\mathfrak{Q}_m x \cap \mathfrak{Q}_m = L_l \cap B$, um uns auf den Beweis der Gleichheit $a_\beta(L_l) = a_\beta(L_r)$ zurück ziehen zu können.

Wiederum gilt

$$a_\beta(x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x\cap(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)) =$$
$$a_\beta(L_r)\subseteq a_\beta(L_l)\subseteq$$
$$a_\beta(\mathfrak{Q}_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)\cap$$
$$x^{-1}a_\beta(\mathfrak{Q}_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x =$$
$$a_\beta(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)\cap$$
$$x^{-1}a_\beta(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x.$$

Mit der Bemerkung hinter [CJB93](3.6.17) reduzieren wir nun die Gleichheit $a_\beta(L_l) = a_\beta(L_r)$ auf die Aussage

$$(x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x+(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1))\cap B =$$

$$x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x\cap B+(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)\cap B.$$

Nun gilt aber

$$x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})x\cap B+(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})\cap B = (7.7)$$
$$x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap B+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap B)x+(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap B+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap B)\subseteq$$
$$x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x\cap B+(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1_m+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)\cap B\subseteq$$

$$(x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}_m^1+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1)x+(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}_m^1+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1))\cap B\subseteq$$
$$(x^{-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1})x+(\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}))\cap B$$

und damit folgt die Behauptung aus Lemma (9.2).

□

(9.4) Korollar *Sei $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ ein minimales einfaches Stratum und $\mathfrak{B}_m\subset\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap B$. Dann wird jeder gemischte Charakter $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ wie in (9.1) durch ganz $B^\times$ verkettet.*

Beweis:

Nach Konstruktion ist ein Charakter $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ für minimales Stratum $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ auf $U^1(\mathfrak{B}_m)$ von der Form $\lambda_\beta\circ Nrd_{B/E}$ und auf

$$1+\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{J}^1\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}_m^1+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}\cap\mathfrak{H}^1=1+\mathfrak{P}^{[\frac{q+1}{2}]}\cap\mathfrak{P}_m^{[\frac{q'}{2}]+1}+\mathfrak{P}^{[\frac{q}{2}]+1}$$

durch $\psi_\beta^\times$ gegeben. Weil beide Teile offensichtlich durch ganz $B^\times$ verkettet werden, folgt die Behauptung aus Lemma (9.3) für $q=n$ und $q'=-\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta)$.

□

Natürlich vermuten wir, dass die von uns definierten gemischten einfachen Charaktere auch im nicht minimalen Falle durch ganz $B^\times$ verkettet werden. Als Folge davon wären dann auch unsere erweiterten Heisenbergdarstellungen durch ganz $B^\times$ verkettet. Um aus diesen erweiterten einfachen Charakteren auch erweiterte Heisenbergdarstellungen zu machen, brauchen wir jedoch noch folgende Eigenschaft:

(9.5) Definition *Sei $[\mathfrak{A},n,0,\beta]$ ein einfaches Stratum und $\mathfrak{B}_m\subset\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cap C_A(\beta)$. Benutzen wir darüber hinaus alle obigen Sprechweisen, dann nennen wir das Paar $([\mathfrak{A},n,0,\beta],\mathfrak{B}_m)$ nicht ausgeartet, falls*

$$(J^1:J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap J^1)=(H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap J^1:H^1).$$

Kapitel 10

Reimanns [Rei91] Methode auf eine pro-p-Sylowuntergruppe fortzusetzen

(10.1) Hilfssatz *Sei* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *ein einfaches Stratum in* A *und* $\theta_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$. *Dann ist die eindeutige Heisenbergdarstellung* $\eta_{\mathfrak{A}}$ *von* $J^1(\beta, \mathfrak{A}) = J^1$ *durch die Eigenschaft bestimmt, dass sie* $\theta_{\mathfrak{A}}$ *enthält. Darüber hinaus ist* $(\eta_{\mathfrak{A}})_{|H^1(\beta,\mathfrak{A})}$ *ein vielfaches von* $\theta_{\mathfrak{A}}$ *und* $dim(\eta_{\mathfrak{A}}) = (J^1 : H^1)^{\frac{1}{2}}$. *Die* $A^\times$*-Verkettung von* $\eta_{\mathfrak{A}}$ *ist gerade* $J^1 B^\times J^1$.

Beweis:
Der Beweis ist wortwörtlich derselbe wie für [CJB93](5.1.1).
□

(10.2) Satz *Unter der Voraussetzung, dass das zugrunde liegende Paar* $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ *nicht ausgeartet ist, existiert eine eindeutige Fortsetzung* $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ *von* $\eta_{\mathfrak{A}}$ *nach* $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$, *so dass*

$$Ind_{H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}(\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}) \simeq (J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} : H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})^{\frac{1}{2}} \eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}.$$

Beweis:
Die Eindeutigkeit von $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ist klar. Um die Existenz zu zeigen, betrachten wir die nicht ausgeartete Form $\chi_{\theta_{\mathfrak{A}}} : J^1/H^1 \times J^1/H^1 \to \mathbb{C}^\times$, welche durch die Anwendung von $\theta_{\mathfrak{A}}$ auf Kommutatoren aus J^1 induziert wird. Wegen $(\theta_{\mathfrak{A}})_{|H^1 \cap H^1_m} = (\theta_{\mathfrak{A}_m})_{|H^1 \cap H^1_m}$, ist leicht zu zeigen, dass der Subquotient $J^1 \cap H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ isotrop ist bezüglich $\chi_{\theta_{\mathfrak{A}}}$. Aufgrund der Voraussetzung (9.5) der Nichtausgeartetheit, ist $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1/H^1$ das Orthogonal von $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1/H^1 = (J^1 \cap H^1_m)H^1/H^1$ bezüglich der Form $\chi_{\theta_{\mathfrak{A}}}$. Natürlich setzt sich $\theta_{\mathfrak{A}}$ zu einem Charakter $\theta^\star_{\mathfrak{A}}$ von $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1$ fort und wir erhalten analog eine nicht ausgeartete Form $\chi_{\theta^\star_{\mathfrak{A}}} : J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1/H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1 \times J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1/H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1 \to \mathbb{C}^\times$. Diese liefert uns nach [Zin88](4.2) eine irreduzible Heisenbergdarstellung $\hat{\eta}_{\mathfrak{A}}$ von $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1$. Wegen (7.1) und (9.1) können wir die Form $\chi_{\theta^\star_{\mathfrak{A}}}$ mit der Form

$$\chi_{\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}} : J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}/H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \times J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}/H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \to \mathbb{C}^\times$$

identifizieren, welche dadurch entsteht, dass wir $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ auf Kommutatoren in $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ anwenden. Diese Form ist dann natürlich auch nicht ausgeartet.

Damit haben wir aber gezeigt, dass $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ im Bezug auf die Gruppe $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ein Heisenbergcharakter im Sinne von [Zin88](4.2) ist und es gibt eine eindeutige irreduzible Darstellung $\hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ mit $Ind_{H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}(\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}) \simeq (J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} : H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$. Nach Konstruktion und der Mackeyschen Formel gilt daher $(\hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})_{|J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap J^1} \simeq \hat{\eta}_{\mathfrak{A}}$.

Weiter folgt wieder nach Konstruktion und der Mackeyschen Formel $\eta_{\mathfrak{A}} \simeq Ind_{J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap J^1}^{J^1}(\hat{\eta}_{\mathfrak{A}}) \simeq (Ind_{J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}(\hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}))_{|J^1}$, also dass $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} := Ind_{J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}(\hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})$ irreduzibel ist und eine Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A}}$ ist. Auch gilt nach Transitivität der Induktion $Ind_{H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}(\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}) \simeq (J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} : H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})^{\frac{1}{2}}\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$.
□

Kapitel 11

Eine Vereinfachung des Problems der nicht Ausgeartetheit unserer Paare $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$

(11.1) Hilfssatz *Sei M eine additive abstrakte Gruppe und seien $\{M_i\}_{i=0,\dots,n}$, $\{N_i\}_{i=0,\dots,n}$ zwei Familien von Untergruppen, so dass $M_i \supset N_i$ für $i = 0, \dots, n$. Unter der Annahme, dass alle einbezogenen Gruppenindizes endlich sind, gilt*

$$(\sum_{i=0}^{n} M_i : \sum_{i=0}^{n} N_i) = \frac{\prod_{i=0}^{n}(M_i : N_i)}{\prod_{i=0}^{n-1}(M_i \cap (\sum_{j=i+1}^{n} M_j) : N_i \cap (\sum_{j=i+1}^{n} N_j))}.$$

Beweis:

Wir beweisen den Hilfssatz durch Induktion über n. Der Fall $n = 0$ ist dabei trivial. Für den Induktionschritt setzen wir also voraus, der Hilfssatz wäre im Falle $n \geq 0$ bereits bewiesen und wir wollen dieselbe Aussage für $n + 1$ zeigen.

Sei $M_1' := \sum_{i=1}^{n+1} M_i$, $N_1' := \sum_{i=1}^{n+1} N_i$ und angenommen der Hilfssatz gelte für $n = 1$, dann gilt $(M_0 + M_1' : N_0 + N_1') = \frac{(M_0:N_0)(M_1':N_1')}{(M_0 \cap M_1':N_0 \cap N_1')}$ und wir erhalten die erforderliche Gleichung indem wir die Definitionen von M_1', N_1' einsetzen und die Induktionsannahme anwenden.

Daher bleibt nur noch der Fall $n = 1$. Hier gilt $(M_0 + M_1 : N_0 + N_1) = (M_0 + M_1 : N_0 + M_1)(N_0 + M_1 : N_0 + N_1)$ und die Gleichung folgt aus den Identitäten $(M_0 + M_1 : N_0 + M_1) = \frac{(M_0:N_0)}{(M_0 \cap M_1:N_0 \cap M_1)}$, $(N_0 + M_1 : N_0 + N_1) = \frac{(M_1:N_1)}{(N_0 \cap M_1:N_0 \cap N_1)}$ und $(M_0 \cap M_1 : N_0 \cap M_1)(N_0 \cap M_1 : N_0 \cap N_1) = (M_0 \cap M_1 : N_0 \cap N_1)$.

□

(11.2) Satz *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum und $\mathfrak{B}_m$ eine Hauptordnung, welche in $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(\beta)$ enthalten ist. Sei $\mathfrak{A}_m$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$ nach A und $\gamma_0, ..., \gamma_\mu$ die Elemente von A gemäss (7.5), so dass die Folgen $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$ und $[\mathfrak{A}_m, n_m, q_i', \gamma_i]$ $i = 0, \dots, \mu$ simultane Approximationsfolgen für die Strata $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ und $[\mathfrak{A}_m, n_m, 0, \beta]$ sind, wobei $n_m := -\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta)$.*

Mit den Notationen aus Abschnitt (7) gilt:

$$(J^1 : J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1) = \frac{\prod_{i=0}^{\mu}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) : \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i))}{\prod_{i=0}^{\mu-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) : \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i))}$$

und

$$(H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1 : H^1) = \frac{\prod_{i=0}^{\mu}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i) : \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i))}{\prod_{i=0}^{\mu-1}(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i) : \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i))}.$$

Beweis:

Wieder beschränken wir uns darauf, die erste Identität zu zeigen. Es ist leicht zu sehen, dass $(J^1 : J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1) = (\mathfrak{J}^1 : \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{J}^1_m + \mathfrak{H}^1)$. Wegen (4.1)(v) und (7.8) können wir (11.1) mit $M_i = \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i)$ und $N_i = \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)$ $(i = 0, \ldots, \mu)$ anwenden. Dann genügt es zu zeigen, dass für $i = 0, ..., \mu - 1$ jeweils die Gleichungen

$$\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) \cap (\textstyle\sum_{\nu=i+1}^{\mu} \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_\nu)) = \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) \tag{11.1}$$

und

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)) \cap \\ &(\textstyle\sum_{\nu=i+1}^{\mu} \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_\nu'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_\nu) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_\nu)) = \\ &\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)\end{aligned} \tag{11.2}$$

erfüllt sind.

Weil in gewissem Sinne (11.1) ein Spezialfall von (11.2) ist, beschränken wir uns auf den Beweis von (11.2).

Nach (7.8) gilt

$$\begin{aligned}&\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i) \subseteq \\ &(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)) \cap \\ &(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1_m) = \\ &(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)) \cap \\ &(\textstyle\sum_{\nu=i+1}^{\mu} \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_\nu'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_\nu) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_\nu}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_\nu)).\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite führt (7.7)(ii) zu

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_i'+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)) \cap \\ &(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q_{i+1}'+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1_m + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}^1_m) =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1}) \cap \\
&C_A(\gamma_i) \cap (\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}_m^1) = \\
&C_A(\gamma_i) \cap (\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}^1 \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{J}_m^1 + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap \mathfrak{H}_m^1) \subset \\
&C_A(\gamma_i) \cap (\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1}) = \\
&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap C_A(\gamma_i) + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap C_A(\gamma_i)).
\end{aligned}
$$

□

(11.3) Satz *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum und sei $\mathfrak{B}_m$ eine Hauptordnung welche in $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(\beta)$ enthalten ist. Wir wählen simultane spezielle Approximationsfolgen $[\mathfrak{A}, n, q_i, \gamma_i]$ und $[\mathfrak{A}_m, n_m, q'_i, \gamma_i]$, $i = 0, \ldots, \mu$ für $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ und $[\mathfrak{A}_m, n_m, 0, \beta]$, wobei $\mathfrak{A}_m$ die eindeutige Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$ nach A ist. Sei $E := F[\beta]$, K/F der maximal unverzweigte Teil der Erweiterung E/F und auch setzen wir $A_i := C_A(\gamma_i)$, $C_i := C_A(K[\gamma_i])$ für $i = 0, \ldots, \mu$. Dann ist das Paar $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ nicht ausgeartet, falls für alle $i \in \{0, \ldots, \mu\}$, so dass $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_i$ aber $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \nmid q_i$, wie auch für alle $i \in \{0, \ldots, \mu - 1\}$, so dass $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_{i+1}$ aber $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \nmid q_{i+1}$, die Gleichheit $(\mathfrak{P}_i^{\frac{-e_i}{2}} : \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_i}{2}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{-\frac{\bar{r}_m}{\bar{r}}\frac{e_i}{2}} + \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_i}{2}+1}) = (\mathfrak{P}_i^{\frac{-e_i}{2}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{-\frac{\bar{r}_m}{\bar{r}}\frac{e_i}{2}+1} + \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_i}{2}+1} : \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_i}{2}+1})$ gilt, wobei $\mathfrak{P}_i$ bzw. $\mathfrak{P}_{i,m}$ das Jacobsonradikal von $\mathfrak{A} \cap A_i$ bzw. $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ bezeichnet, $\bar{r}$ bzw. $\bar{r}_m$ die Periode von $\mathfrak{A} \cap A_i$ bzw. $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ und $e_i := e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i}$.*

Beweis:

Nach (11.2) genügt es zu zeigen, dass
$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap A_i : \mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i+1}{2}]} \cap A_i + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap A_i) = \\
&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_i}{2}]+1} \cap A_i + \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap A_i : \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap A_i)
\end{aligned}
$$
für alle $i = 0, \ldots, \mu$ und
$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap A_i : \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}+1}{2}]} \cap A_i + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap A_i) = \\
&(\mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}+1}{2}]} \cap \mathfrak{P}_m^{[\frac{q'_{i+1}}{2}]+1} \cap A_i + \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap A_i : \mathfrak{P}^{[\frac{q_{i+1}}{2}]+1} \cap A_i)
\end{aligned}
$$
für alle $i = 0, \ldots, \mu - 1$. Wenn $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \nmid q_i$, dann ist die erste Gleichung trival, weil $\mathfrak{P}^{[\frac{q_i+1}{2}]} \cap A_i = \mathfrak{P}^{[\frac{q_i}{2}]+1} \cap A_i$ und genauso führt für $i < \mu$ der Fall $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \nmid q_{i+1}$ trivialer Weise auf die zweite Gleichung. Daher schliessen wir diese Fälle von vorne herein aus und beschränken uns darauf zu zeigen, dass

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{P}_i^{\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} : \mathfrak{P}_i^{\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{\frac{q'_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} + \mathfrak{P}_i^{\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}+1}) = \\
&(\mathfrak{P}_i^{\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{\frac{q'_i}{2e_{\mathfrak{A}_m/\mathfrak{A}_m\cap A_i}}+1} + \mathfrak{P}_i^{\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}+1} : \mathfrak{P}_i^{\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}+1})
\end{aligned}
\tag{11.3}
$$

für $i \in \{0, \ldots, \mu\}$, so dass $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_i$ und

$$
\begin{aligned}
&(\mathfrak{P}_i^{\frac{q_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} : \mathfrak{P}_i^{\frac{q_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{\frac{q'_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} + \mathfrak{P}_i^{\frac{q_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}+1}) = \\
&(\mathfrak{P}_i^{\frac{q_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{\frac{q'_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}_m/\mathfrak{A}_m\cap A_i}}+1} + \mathfrak{P}_i^{\frac{q_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}+1} : \mathfrak{P}_i^{\frac{q_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}}+1})
\end{aligned}
\tag{11.4}
$$

für $i \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, so dass $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_{i+1}$. Unser Ziel ist es die letzteren Aussagen auf das Kriterium unseres Satzes zu reduzieren.

Zu diesem Zwecke fixieren wir einen Index $i \in \{0, \dots, \mu\}$ und dann sind $\mathfrak{A} \cap A_i$ bzw. $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ die Fortsetzungen von $\mathfrak{A} \cap C_i$ bzw. $\mathfrak{A}_m \cap C_i$.

Weil die Fortsetzung E/K total verzweigt ist, ist $\mathfrak{A} \cap C$ eine unverzweigte Fortsetzung von $\mathfrak{B}$ nach $C := C_A(K)$ und $\mathfrak{A}_m \cap C$ eine unverzweigte Fortsetzung von $\mathfrak{B}_m$ nach C und aus (7.4) folgern wir, dass $\mathfrak{A} \cap C \supset \mathfrak{A}_m \cap C$. Darüber hinaus folgern wir eine Enthaltensrelation $\mathfrak{A} \cap C_i = \mathfrak{A} \cap C \cap C_i \supset \mathfrak{A}_m \cap C \cap C_i = \mathfrak{A}_m \cap C_i$.

Sei $M/F[\gamma_i]$ die kleinste Teilerweiterung von $K[\gamma_i]/F[\gamma_i]$, so dass die Fortsetzung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A} \cap C_i$ nach $C_A(M)$ unverzweigt ist. Weil die Periode von $\mathfrak{A} \cap C_i$ ein Teiler der Periode von $\mathfrak{A}_m \cap C_i$ ist, folgern wir aus (7.3), dass auch die eindeutige Fortsetzung $\mathfrak{D}_m$ von $\mathfrak{A}_m \cap C_i$ nach $C_A(M)$ unverzweigt ist. Aus diesem Grunde gelten $e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i} = e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{D}}$ und $e_{\mathfrak{A}_m\cap A_i/\mathfrak{A}_m\cap C_i} = e_{\mathfrak{A}_m\cap A_i/\mathfrak{D}_m}$. Darüber hinaus gilt $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{D}} = e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{D}}$ und $e_{\mathfrak{A}_m/\mathfrak{D}_m} = e_{\mathfrak{A}_m/\mathfrak{A}_m\cap A_i} e_{\mathfrak{A}_m\cap A_i/\mathfrak{D}_m}$.

Seien nun $\bar{r}$, $\bar{r}_m$, $\hat{r}$ bzw. $\hat{r}_m$ die Perioden von $\mathfrak{A} \cap A_i$, $\mathfrak{A}_m \cap A_i$, $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}_m$. Sei h_m eine Uniformisierende von $\mathfrak{D}_m$, dann ist $h := h^{\frac{\hat{r}_m}{\hat{r}}}$ eine Uniformisierende für $\mathfrak{D}$ und $\nu_{\mathfrak{A}\cap A_i}(h) = e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{D}}$.

Weil die Erweiterung $M/F[\gamma_i]$ unverzweigt ist, folgt aus (2.6(iii)) $\frac{\hat{r}_m}{\hat{r}} e_{\mathfrak{A}_m/\mathfrak{A}_m\cap A_i} = \frac{\hat{r}_m}{\hat{r}} \frac{\bar{r}_m \bar{d}}{\hat{r}_m \hat{d}} = \frac{\bar{r}_m}{\bar{r}} \frac{\bar{r}\bar{d}}{\hat{r}\hat{d}} = \frac{\bar{r}_m}{\bar{r}} e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}$, wobei $\bar{d}$ der Index von A_i und $\hat{d}$ der Index von $C_A(M)$ ist. Darüber hinaus gilt $\frac{\bar{r}_m}{\bar{r}} \frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}} = \frac{q_i'}{2e_{\mathfrak{A}_m/\mathfrak{A}_m\cap A_i}}$.

Setzen wir nun zunächst voraus, dass $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \nmid q_i$, dann können wir wegen $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid q_i$ auch $\frac{q_i}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i}} = 2\nu + 1$ schreiben, wobei ν eine nicht negative ganze Zahl ist und demnach erhalten wir $\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}} = \nu e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{D}} + \frac{e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{D}}}{2}$.

Multiplizieren wir nun die erste Gleichung (11.3) mit $h^{-\nu-1}$ und benutzen $\nu_{\mathfrak{A}_m\cap A_i}(h) = \frac{\hat{r}_m}{\hat{r}} \nu_{\mathfrak{A}_m\cap A_i}(h_m) = \frac{\hat{r}_m}{\hat{r}} e_{\mathfrak{A}_m/\mathfrak{A}_m\cap A_i} = \frac{\bar{r}_m}{\bar{r}} e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i}$, dann transformiert sich die Gleichung (11.3) in die verlangte Gleichung $(\mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} : \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{-\frac{\bar{r}_m}{\bar{r}} \frac{e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} + \mathfrak{P}^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1}) =$
$(\mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{-\frac{\bar{r}_m}{\bar{r}} \frac{e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1} + \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1} : \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1})$.
Genauso können wir für $i < \mu$ die zweite Gleichung (11.4) in dieselbe Gleichung transformieren, wenn wir voraussetzen, dass $2e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i} \nmid q_{i+1}$.

Daher bleiben uns nur noch der Fall $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid q_i$ und falls $i < \mu$ auch der Fall $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid q_{i+1}$. Aber in diesem Falle multiplizieren wir unsere Gleichungen mit $h^{-\frac{q_i}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i}}}$ bzw. $h^{-\frac{q_{i+1}}{2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i}}}$ und reduzieren beide Gleichungen auf die Gleichung

$$(\mathfrak{A} \cap A_i : \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_m \cap A_i + \mathfrak{P} \cap A_i) = (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_m \cap A_i + \mathfrak{P} \cap A_i : \mathfrak{P} \cap A_i). \tag{11.5}$$

Um dies zu zeigen, fixieren wir einen Isomorphismus $A_i = M_t(\bar{D})$, wobei $\bar{D}$ ein zentraler Schiefkörper über $F[\gamma_i]$ vom Index $\bar{d}$ ist und dann können wir bis auf Konjugation in $A_i^\times$ annehmen, dass $M \subset \bar{D}$ (wir bemerken, dass $[M : F[\gamma_i]] = e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid \bar{d}$). Indem wir dies tun, identifizieren wir $C_A(M) = M_t(\hat{D})$, wobei $\hat{D} = C_{\bar{D}}(M)$. Bis auf Konjugation in $C_A(M)^\times$ können wir voraussetzen, dass $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_m$ in simultaner Normalform gegeben sind. Darüber hinaus bemerken wir, dass aufgrund der Totalverzweigtheit der Fortsetzung von $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{A} \cap A_i$ die Relationen $\bar{s} = \hat{s} \mid \hat{s}_m \mid \bar{s}_m$ gelten, wobei $\bar{s}$, $\bar{s}_m$, $\hat{s}$ bzw. $\hat{s}_m$ die Invarianten von $\mathfrak{A} \cap A_i$, $\mathfrak{A}_m \cap A_i$, $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}_m$ sind. Nach (7.2) ist $\mathfrak{A} \cap A_i$ durch eine $\hat{s} \times \hat{s}$-Monomialmatrix g in $M_t(\hat{D})$ und $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ durch eine $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Monomialmatrix zu seiner Normalform konjugiert.

Wegen $\mathfrak{A}_m \cap A_i \cap C_A(M) = \mathfrak{D}_m$, schliessen wir, dass die $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Blöcke über der Blockdiagonalen von $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ in einer Potenz $\mathfrak{p}_{\bar{D}}$ vom Exponenten ≥ 1 liegen, die Diagonal Blöcke in $\mathfrak{o}_{\bar{D}}$ und die $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Blöcke unter der der Blockdiagonalen in einer Potenz von $\mathfrak{p}_{\bar{D}}$ vom Exponenten ≤ 0. Dasselbe gilt für die Diagonalblocks einer $\hat{s} \times \hat{s}$-Blockzerlegung von $\mathfrak{A}_m \cap A_i = (A^m_{i,j})_{i,j=1,\dots,\hat{r}}$ und für eine $\hat{s} \times \hat{s}$-Blockzerlegung $g\mathfrak{A}_m \cap A_i g^{-1} = (B^m_{i,j})_{i,j=1,\dots,\hat{r}_\nu}$, weil die Konjugation durch die $\hat{s} \times \hat{s}$-Blockmonomialmatrix g die Diagonalblöcke lediglich permutiert und mit einer Potenz eines Primelementes $\bar{\pi}$ von $\mathfrak{o}_{\bar{D}}$ konjugiert.

Betrachte nun eine $\hat{s} \times \hat{s}$-Blockzerlegung $\mathfrak{A} \cap A_i = (A_{i,j})_{i,j=1,\dots,\hat{r}}$ und für eine $\hat{s} \times \hat{s}$-Blockzerlegung $g\mathfrak{A} \cap A_i g^{-1} = (B_{i,j})_{i,j=1,\dots,\hat{r}_\nu}$, sind wiederum die $B_{i,i} = M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}})$ nur eine Permutation der $A_{i,i}$ für $i = 0, \dots, \mu$, $B_{i,j} = M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}})$ für $i > j$ und $B_{i,j} = M_{\hat{s}}(\mathfrak{p}_{\bar{D}})$ für $i < j$.

In derselben Weise haben wir Zerlegungen $\mathfrak{P} \cap A_i = (C_{i,j})_{i,j=1,\dots,\hat{r}}$ und $g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1} = (D_{i,j})_{i,j=1,\dots,\hat{r}}$, wobei die $D_{i,i}$ eine Permutation der Blöcke $C_{i,i}$ für $i = 1, \dots, \hat{r}$ sind und die Blöcke Mengen von $\hat{s} \times \hat{s}$-Matrizen mit Einträgen in einer Potenz von $\mathfrak{p}_{\bar{D}}$ bedeuten, wobei der Exponent nur von ν, i, j abhängt. Für die Blöcke $D_{i,j}$ gilt einfach $D_{i,j} = M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}})$ for $i < j$ und $B_{i,j} = M_{\hat{s}}(\mathfrak{p}_{\bar{D}})$ für $i \geq j$.

Insgesamt erhalten wir $g\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_m \cap A_i g^{-1} + g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1} = (B_{i,j} \cap B^m_{i,j} + D_{i,j})_{i,j=1,\dots,\hat{r}}$. Insbesondere gilt für $i > j$ stets $(B_{i,j} \cap B^m_{i,j} + D_{i,j}) = (M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}}) \cap B^m_{i,j} + M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}})) = M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}})$ und für $i < j$ stets $(B_{i,j} \cap B^m_{i,j} + D_{i,j}) = (M_{\hat{s}}(\mathfrak{p}_{\bar{D}}) \cap B^m_{i,j} + M_{\hat{s}}(\mathfrak{p}_{\bar{D}})) = M_{\hat{s}}(\mathfrak{p}_{\bar{D}})$. Weil $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ aber durch eine $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Blockmonomialmatrix zu ihren Normalformen konjugiert ist, haben die Blöcke $A^m_{i,i}$ bzw. $B^m_{i,i}$ eine $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Blockbeschreibung, so dass die Diagonalblöcke in $\mathfrak{o}_{\bar{D}}$ liegen, die $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Blöcke unter der Blockdiagonalen Einträge in einer Potenz von $\mathfrak{p}_{\bar{D}}$ vom Exponenten ≤ 0 und die $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Blöcke über der Blockdiagonalen Einträge in einer Potenz von $\mathfrak{p}_{\bar{D}}$ vom Exponenten ≥ 1. Die Blöcke unterhalb der Blockdiagonalen in $B^m_{i,i}$ schneiden sich in $M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}}) \cap B^m_{i,i}$ runter nach $\mathfrak{o}_{\bar{D}}$ in und die Blöcke oberhalb der Blockdiagonalen werden in $M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}}) \cap B^m_{i,i}$ werden in $M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}}) \cap B^m_{i,i} + M_{\hat{s}}(\mathfrak{p}_{\bar{D}})$ nach $\mathfrak{p}_{\bar{D}}$ aufgefüllt für $i = 1, \dots, \hat{r}$.

Damit folgern wir, dass $(B_{i,i} \cap B^m_{i,i} + D_{i,i}) = (M_{\hat{s}}(\mathfrak{o}_{\bar{D}}) \cap B^m_{i,i} + M_{\hat{s}}(\mathfrak{p}_{\bar{D}}))$ die Hauptordung in Normalform in $M_{\hat{s}}(\bar{D})$ mit Invariante $\hat{s}_m$ und Periode $\frac{\hat{s}_m}{\hat{s}}$ ist. Insgesamt folgern wir, dass $g\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_m \cap A_i g^{-1} + g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1}$ eine Hauptordung ist welche in $M_t(\bar{D})$ in Normalform gegeben ist und die Invariante $\hat{s}_m$ und die Periode $\hat{r}_m$ hat.

Analog können wir zeigen, dass $g\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_m \cap A_i g^{-1} + g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1}$ das Jacobsonradikal von $g\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_m \cap A_i g^{-1} + g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1}$ ist und aus den Blockbeschreibungen der entsprechenden Normalformen erhalten wir sofort die Gleichung

$$(g\mathfrak{A} \cap A_i g^{-1} : g\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}_m \cap A_i g^{-1} + g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1}) = (g\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}_m \cap A_i g^{-1} + g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1} : g\mathfrak{P} \cap A_i g^{-1}).$$

Indem wir die Indizes auf beiden Seiten mit g^{-1} konjugieren, erhalten wir die verlangte Gleichung (11.5).

□

Kapitel 12

Einige Spezialfälle in denen alle Paare $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ nicht ausgeartet sind

(12.1) Korollar *Alle Paare* $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ *aus einfachen Strata* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *und Hauptordungen* $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(\beta)$ *sind nicht ausgeartet, falls*

(i) $A = D$ *ist ein zentraler Schiefkörper über* F.

(ii) $A = M_l(D)$*, wobei* D *ein beliebiger zentraler Schiefkörper über* F *ist und* l *eine Primzahl.*

(iii) Der Index d *der Algebra* A *(bzw. von* D*, wenn* D *ein zentraler Schiefkörper über* F *aus derselben Brauerklasse wie* A *ist) ist ungerade.*

Beweis:

(i) In einem zentralem Schiefkörper $D = A$ über F von endlicher Dimension, existiert eine eindeutige Hauptordnung $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}_D$ und dasselbe gilt auch für den Zentralisator $B := C_A(\beta)$. Daher gilt in diesem Falle immer $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$ und unsere Indexgleichung ist immer trivial.

(ii) Ist $A = M_l(D)$, wobei l eine Primzahl ist und D ein zentraler Schiefkörper über F, dann gilt entweder $[E : F] \mid d = Ind(A)$ (wobei $E := F[\beta]$) oder $B := C_A(\beta)$ ist ein Schiefkörper. Im letzteren Fall gilt wieder $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$ und die Nichtausgeartetheit solcher Paare ist klar.

Wenn $[E : F] \mid d$, dann gilt $B = M_l(D')$, wobei D' ein zentraler Schiefkörper über E vom Index $\frac{d}{[E:F]}$ ist und wieder ist der Fall $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$ trival. Falls aber $\mathfrak{B}_m \neq \mathfrak{B}$ ist, dann muss $\mathfrak{B}_m$ eine Minimalordung in B sein, welche die Periode l hat und die Invariante 1 und $\mathfrak{B}$ muss eine Maximalordung sein also mit der Periode 1 und der Invarianten l. Mit [Gra99a](1.9,1.8(iii)) folgern wir, dass $\mathfrak{A}$ wieder eine Maximalordung ist.

Nun können wir die Argumentation des Beweises von (11.3) in modifizierter Weise verwenden. Wir benutzen die Notationen und Voraussetzungen des Beweises von (11.3) für $\gamma_0, \ldots, \gamma_\mu$, A_i, C_i, $M/F[\gamma_i]$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_\mathfrak{m}$, wobei wir ein i fixieren, so dass $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_i$ und $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \nmid q_i$ oder $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_{i+1}$ und $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \nmid q_{i+1}$ falls $i < \mu$. Weil $\mathfrak{D}$ wie auch $\mathfrak{A} \cap A_i$ Maximalordnungen mit Invariante l sind, können wir uns mit denselben Argumenten wie im Beweis von (11.3) auf den Fall beschränken, indem $\mathfrak{A} \cap A_i$ durch ein $l \times l$-Blockmonomialmatrix zu ihrer Normalform konjugiert ist, also selbst in Normalform gegeben sein muss, wobei $C_A(M) = M_l(\hat{D})$, $A_i = M_l(\bar{D})$ und $\mathfrak{D} = M_p(\mathfrak{o}_{\hat{D}})$ und

$\mathfrak{A} \cap A_i = M_l(\mathfrak{o}_{\bar{D}})$. Fixieren wir nun ein Primelement $\bar{\pi}$ von $\mathfrak{o}_{\bar{D}}$, dann können wir auch annehmen, dass $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ durch eine $\hat{s}_m \times \hat{s}_m$-Blockmonomialmatrix in gewissen Potenzen von $\bar{\pi}$ (wobei $\hat{s}_m$ die Invariante von $\mathfrak{D}$ ist) zu ihrer Normalform konjugiert ist. Wir folgern, dass $\bar{\pi} I_l$ eine Uniformisierende von $\mathfrak{A} \cap A_i$ ist, welche auch $\mathfrak{A}_m \cap A_i$ normalisiert und durch Multiplikation der Gleichung $\dfrac{(\mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} : \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{-\frac{\bar{r}_m}{\bar{r}}\frac{e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} + \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1}) =}{(\mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} \cap \mathfrak{P}_{i,m}^{-\frac{\bar{r}_m}{\bar{r}}\frac{e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1} + \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1} : \mathfrak{P}_i^{\frac{-e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}+1})}$ mit $\bar{\pi}^{\frac{e_{\mathfrak{A}\cap A_i/\mathfrak{A}\cap C_i}}{2}} I_l$, reduzieren wir das hinreichende Kriterium aus (11.3) auf die Gleichung (11.5), welche nun in derselben Weise wie vorher im Beweis von (11.3) verifiziert wird.

(iii) Wieder wollen wir (11.3) anwenden und bemerken, dass unsere Bedingung aus (11.3) leer wird, wenn wir zeigen können, dass

$$e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid d, q_i, q_{i+1}, \tag{12.1}$$

weil dann nach Voraussetzung $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i}$ ungerade sein muss und daher aus $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_i$ bzw. $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} \mid q_{i+1}$ stets $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid q_i$ bzw. $2e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid q_{i+1}$ folgt.

Wegen [Gra99a](1.9)(b) ist $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i}$ ein Teiler von $f(K[\gamma_i]/F) = [K : F]$. Ist nun K_d/F die eindeutige Teilerweiterung von K/F mit $[K_d : F] =< [K : F], d >$, dann hat $C_A(K_d)$ den Index $\frac{d}{[K_d:F]}$ (vgl. z.B. [Zin96](Satz 1)) und nach [Gra99a](2.2)(b) ist die Fortsetzung von $\mathfrak{A} \cap C_i$ durch $\mathfrak{A} \cap C_A(K_d)$ unverzweigt. Daher gilt also $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} = e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_A(K_d)} \mid [K_d : F] \mid d$.

Nach (3.9)(C) gilt $\frac{rd}{e(F[\gamma_{i-1}]/F)} \mid q_i$ und $\frac{rd}{e(F[\gamma_i]/F)} \mid q_{i+1}$. Nach (2.6) gilt $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} = \frac{rd}{\bar{r}\bar{d}e(K[\gamma_i]/F)}$, wobei $\bar{r}$ die Periode von $\mathfrak{A} \cap C_i$ und $\bar{d}$ der Index von C_i ist. Sofort folgt also $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid q_{i+1}$. Bezeichnen wir nun mit d' den Index von $C_A(K)$ und mit r' die Periode von $\mathfrak{A} \cap C_A(K)$, dann gilt nach [Gra99b](2.2)(i)(a) $\bar{r} = \frac{r' < e(K[\gamma_i]/K), d' >}{e(K[\gamma_i]/K)}$ und wieder nach [Zin96](Satz 1) $\bar{d} = \frac{d'}{< e(K[\gamma_i]/K), d' >}$. Wir erhalten schliesslich $\frac{\frac{rd}{e(F[\gamma_{i-1}]/F)}}{e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i}} = \frac{\bar{r}\bar{d}e(K[\gamma_i]/F)}{e(F[\gamma_{i-1}]/F)} = \frac{r'd'}{e(K[\gamma_{i-1}]/K)}$. Die letzte Zahl ist aber nach [Gra99a](1.9)(iii) ganz, weil γ_{i-1} $\mathfrak{A} \cap C_A(K)$-sound ist. Wir erhalten also auch die Relation $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} \mid q_{i+1}$.

Insgesamt haben wir nun (12.1) und damit (iii) gezeigt.

□

(12.2) Korollar *Alle Paare* $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ *aus einfachen Strata* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *und Hauptordnungen* $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(\beta)$ *mit* $\langle [F[\beta] : F], d \rangle \mid e(F[\beta]/F)r'$*, wobei* r' *die Periode der Hauptordung* $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(\beta)$ *ist, sind nicht ausgeartet.*

Beweis:

Nach (7.3) und in der Notation von (11.3) gilt $e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap A_i} = e_{\mathfrak{A}/\mathfrak{A}\cap C_i} = 1$ für $i = 0, \ldots, \mu$ und die hinreichende Bedingung in (11.3) ist leer.

□

Um unsere Konstruktion in Abschnitt (10) mit der Konstruktion aus [CJB93] zu vergleichen, können wir folgenden Hilfssatz verwenden:

(12.3) Hilfssatz *Sei* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *ein einfaches Stratum und* $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap C_A(\beta)$ *eine Hauptordung. Sei* $\mathfrak{A}_m$ *die eindeutige Fortsetzung von* $\mathfrak{B}_m$ *nach* A*, seien* $\theta_{\mathfrak{A}}$ *und* $\theta_{\mathfrak{A}_m}$ *Realisationen desselben PS-Charakters für die Gruppen* H^1 *und* H^1_m *sowie* $\eta_{\mathfrak{A}}$ *und* $\eta_{\mathfrak{A}_m}$ *die zugehörigen Heisenbergdarstellungen. Auch setzen wir voraus, dass* $A = M_N(F)$ *eine zerfallende Algebra ist und sei* $\theta^{\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ *ein* *einfacher Charakter, welcher auf einer Untergruppe $H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ von $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$ lebt (wobei wir obige Notationen verwenden), so dass $(\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})_{|H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap H^1_m} = (\theta_{\mathfrak{A}_m})_{|H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap H^1_m}$. Auch setzen wir voraus, dass $Ind_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}(\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})$ ein Vielfaches einer irreduziblen Fortsetzung $\tilde{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ von $\eta_{\mathfrak{A}}$ nach $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$ ist, dann induzieren $\tilde{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ und $\eta_{\mathfrak{A}_m}$ isomorphe irreduzible Darstellungen von $U^1(\mathfrak{A}_m)$.*

Beweis:

Zunächst müssen wir bemerken, dass im zerfallenden Fall stets $U^1(\mathfrak{A}_m) \supset U^1(\mathfrak{A}) \supset J^1$ gelten. Daher haben wir auch $U^1(\mathfrak{A}_m) \supset U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$.

Die $A^\times$-Verkettung von $\tilde{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ist natürlich enthalten in der $A^\times$-Verkettung von $\eta_{\mathfrak{A}}$, welche $J^1B^\times J^1$ ist.

Wegen $J^1B^\times J^1 \cap U^1(\mathfrak{A}_m) = U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$ ist der Satz von Mackey anwendbar und die Induktion von $\tilde{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ nach $U^1(\mathfrak{A}_m)$ ist irreduzibel. Weil die $A^\times$-Verkettung von $\eta_{\mathfrak{A}_m}$ gerade $J^1_mB^\times J^1_m$ ist (siehe (10.1)) und wegen $J^1_mB^\times J^1_m \cap U^1(\mathfrak{A}_m) = J^1_m$, ist auch die Induktion von $\eta_{\mathfrak{A}_m}$ nach $U^1(\mathfrak{A}_m)$ irreduzibel. Nun müssen wir zeigen, dass diese Darstellungen äquivalent sind. Weil $Ind_{H^1_m}^{J^1_m}(\theta_{\mathfrak{A}_m})$ ein vielfaches von $\eta_{\mathfrak{A}_m}$ ist und $Ind_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}(\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})$ ein vielfaches von $\tilde{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$, reicht es zu zeigen, dass

$$\emptyset \neq Hom_{U^1(\mathfrak{A}_m)}(Ind_{H^1_m}^{U^1(\mathfrak{A}_m)}(\theta_{\mathfrak{A}_m}), Ind_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{A}_m)}(\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})) \simeq$$

$$Hom_{H^1_m}(\theta_{\mathfrak{A}_m}, Res_{H^1_m}^{U^1(\mathfrak{A}_m)} \circ Ind_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}}^{U^1(\mathfrak{A}_m)}(\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})) \simeq$$

$$Hom_{H^1_m}(\theta_{\mathfrak{A}_m}, \bigoplus_{x\in H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\backslash U^1(\mathfrak{A}_m)/H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}} Ind_{(H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})^x\cap H^1_m}^{H^1_m}((\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})^x)) \simeq$$

$$\bigoplus_{x\in H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\backslash U^1(\mathfrak{A}_m)/H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}} Hom_{H^1_m}(\theta_{\mathfrak{A}_m}, Ind_{(H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})^x\cap H^1_m}^{H^1_m}((\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})^x)).$$

Betrachten wir nun die Komponente für $x = 1$, dann sehen wir, dass nach Voraussetzung wie verlangt $Hom_{H^1_m}(\theta_{\mathfrak{A}_m}, Ind_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap H^1_m}^{H^1_m}(\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})) \simeq Hom_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap H^1_m}(Res_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap H^1_m}^{H^1_m}(\theta_{\mathfrak{A}_m}), Res_{H^{1\star}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}\cap H^1_m}^{H^1_m}(\theta^\star_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})) = \mathbb{C}^\times$ gilt.
□

Durch Kombination von (12.1), (10.2), (9.1) und (12.3) folgt nun:

(12.4) Korollar *Sei $A \simeq M_N(F)$ eine zerfallende Algebra, sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum und $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap B \subset \mathfrak{B}_M$, wobei $\mathfrak{B}_m$ eine minimale Hauptordnung und $\mathfrak{B}_M$ eine maximale Ordnung in $B := C_A(\beta)$ ist. Darüber hinaus seien $\mathfrak{A}_m$ und $\mathfrak{A}_M$ die eindeutigen Fortsetzungen von $\mathfrak{B}_m$ und $\mathfrak{B}_M$. Auch seien $\theta_{\mathfrak{A}}$, $\theta_{\mathfrak{A}_m}$ und $\theta_{\mathfrak{A}_M}$ die entsprechenden Realisationen eines fixierten PS-Charakters θ für die einfachen Strata $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$, $[\mathfrak{A}_m, -\nu_{\mathfrak{A}_m}(\beta), 0, \beta]$ und $[\mathfrak{A}_M, -\nu_{\mathfrak{A}_M}(\beta), 0, \beta]$, dann existieren die irreduziblen Darstellungen $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$, $\eta_{\mathfrak{A}_M,\mathfrak{B}}$ bzw. $\eta_{\mathfrak{A}_M,\mathfrak{B}_m}$ von $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$, $U^1(\mathfrak{B})J^1_M$ bzw. $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1_M$ aus Satz (10.2) und es gilt:*

(i) $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ist äquivalent zu der Darstellung $\tilde{\eta}$ aus [CJB93](5.1.15),

(ii) $\eta_{\mathfrak{A}_M,\mathfrak{B}}$ ist äquivalent zu der Darstellung $\hat{\eta}_M$ aus [CJB93](5.1.16) und

(iii) $\eta_{\mathfrak{A}_M,\mathfrak{B}_m}$ ist äquivalent zu der Darstellung $\tilde{\eta}_M$ aus [CJB93](5.1.14).

Insbesondere werden alle Darstellungen $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$, $\eta_{\mathfrak{A}_M,\mathfrak{B}}$ und $\eta_{\mathfrak{A}_M,\mathfrak{B}_m}$ durch ganz $B^\times$ verkettet.

□

Kapitel 13

Fortsetzung auf Level 0

Folgendes Resultat ist ein Extrakt der Ideen aus [Rei91](2.4) und [CJB93](5.2.4):

(13.1) Satz *Seien im folgenden alle Gruppen Untergruppen einer lokal proendlichen Gruppe G. Sei $\bar{J}$ kompakte Gruppe mit pro-p-Sylowuntergruppe $\bar{J}_p$ und $\bar{\eta}$ eine irreduzible Darstellung von $\bar{J}^1$ mit Darstellungsraum V, deren Isomorphieklasse stabil unter der adjungierten Aktion von $\bar{J}$ ist, wobei $\bar{J}^1 \subset \bar{J}_p$ eine normale Untergruppe von $\bar{J}$ ist und $\bar{\eta}$ eine Fortsetzung nach $\bar{J}_p$ besitzt. Wir nehmen auch an, dass $dim_{\mathbb{C}}(V)$ eine p-Potenz ist und $\bar{J}/\bar{J}^1 \simeq \bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ isomorph zu einer parabolischen Untergruppe von $Gl_{n_1}(\mathfrak{k}) \times \ldots Gl_{n_l}(\mathfrak{k})$, wobei $\mathfrak{k}$ ein endlicher Körper ist und $\mathfrak{k} \neq \mathbb{F}_2$. Im Falle $\mathfrak{k} = \mathbb{F}_2$ lassen wir keine echten parabolischen Untergruppen zu und fordern $n_i \neq 2$ für $i = 1, \ldots l$. Schliesslich sei $\bar{H}$ eine kompakte Gruppe auf der ein Charakter $\theta^\star$ lebt mit $(\bar{J} \cap \bar{H})\bar{J}_p = \bar{J}_p(\bar{J} \cap \bar{H}) = \bar{J}$. Wir nehmen an dass $\bar{\eta}_{|\bar{J}^1 \cap \bar{H}}$ ein vielfaches von $\theta^\star_{|\bar{J}^1 \cap \bar{H}}$ ist.*

Unter diesen Vorausetzungen gibt es eine eindeutige Fortsetzung κ von $\bar{\eta}$ so dass $\kappa_{|\bar{J} \cap \bar{H}} = \theta^\star_{|\bar{J} \cap \bar{H}} \otimes W$ und W eine Darstellung ist mit $det_V(W) \equiv 1$.

Im Extremfalle, dass $\mathfrak{k} = \mathbb{F}_2$ und $n_1 = \ldots = n_l = 2$ gilt, existiert zu jeder Fortsetzung η' von $\bar{\eta}$ nach $\bar{J}_p$ eine eindeutige Fortsetzung κ von η' nach $\bar{J}$.

Beweis:

Weil $\bar{\eta}$ durch jedes Element aus $\bar{J}$ stabilisiert wird und irreduzibel ist, existiert eine Abbildung $\zeta : \bar{J} \to Aut_{\mathbb{C}}(V)$, so dass für alle $x \in \bar{J}$ und alle $y \in \bar{J}^1$ stets $\zeta(x)^{-1}\bar{\eta}(y)\zeta(x) = \bar{\eta}(x^{-1}yx)$ gilt und die Operatoren $\zeta(x)$ (für fixiertes x aber variierendes y) sind nach Schurs Lemma bis auf einen Skalar eindeutig durch diese Eigenschaft bestimmt. Weil $\bar{\eta}$ eine Fortsetzung η' nach $\bar{J}_p$ besitzt, können wir $\zeta(x) := \eta'(x)$ für alle $x \in \bar{J}_p$ setzen.

Wir können ein Repräsentantensystem R der Doppelnebenklassen $\bar{J}_p \backslash \bar{J}/\bar{J}_p$ finden, welches in $\bar{J} \cap \bar{H}$ enthalten ist und so dass $x \in R$ und $x \in \bar{J}_p$ sofort $x = 1$ impliziert. Mit diesen Vereinbarungen können wir für alle $j_1, j_2 \in \bar{J}_p$ und $x \in R$ arrangieren, dass $\zeta(j_1 x j_2) = \eta'(j_1)\zeta(x)\eta'(j_2)$. Weil $\zeta(x)$ durch von Null verschiedene Skalare abgeändert werden kann, ohne dass die definierende Eigenschaft verletzt wird, können wir voraus setzen, dass für $x \in R \subset \bar{J} \cap \bar{H}$ die Gleichung $\zeta(x) = \theta^\star(x) \otimes W'(x)$ besteht, wobei

$$det_V(W'(x)) = 1. \tag{13.1}$$

Für alle $x \in \bar{J} \cap \bar{H}$ setzen wir $W'(x) := \theta^\star(x)^{-1}\eta'(x)$ und W' setzt sich damit zu einer Funktion $W' : \bar{J} \cap \bar{H} \to Aut_{\mathbb{C}}(V)$ fort, welche trivial auf $\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ ist. Weil $W'_{|\bar{J}_p \cap \bar{H}}$ eine Darstellung von

$\bar{J}_p \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ ist, folgern wir:

$det_V(W')_{|\bar{J}_p \cap \bar{H}}$ ist ein Charakter, dessen Ordnung ein Teiler von $(\bar{J}_p \cap \bar{H} : \bar{J}^1 \cap \bar{H})$ ist. (13.2)

Für alle $x_1, x_2 \in \bar{J}$ haben wir $\zeta(x_1)\zeta(x_2) = \alpha(x_1, x_2)\zeta(x_1x_2)$ mit einem 2-Cozyklus α von $\bar{J}$ mit Werten in $\mathbb{C}^\times$. Es gilt für alle $x_1, x_2 \in \bar{J} \cap \bar{H}$ auch die Gleichung $W'(x_1)W'(x_2) = \alpha(x_1, x_2)W'(x_1x_2)$. Nach Konstruktion erhalten wir

$$\alpha_{|\bar{J}_p \times \bar{J}_p} \equiv 1. \tag{13.3}$$

Darüber hinaus, können wir für $x_1, x_2 \in \bar{J}$ Elemente $j, j' \in \bar{J}_p$ und $h, h' \in \bar{J} \cap \bar{H}$ finden, so dass $x_1 = jh$ und $x_2 = h'j'$ und damit gilt dann

$$\alpha(x_1, x_2)^{dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})} = det_V(\zeta(x_1)\zeta(x_2)\zeta(x_1x_2)^{-1})^{(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})} =$$

$$det_V(\eta'(j)\zeta(h)\zeta(h')\eta'(j')(\eta'(j)\zeta(hh')\eta'(j'))^{-1})^{(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})} =$$

$$det_V(\zeta(h)\zeta(h')\zeta(hh')^{-1})^{(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})} =$$

$$det_V(\theta^\star(h)W'(h)\theta^\star(h')W'(h')\theta^\star(hh')^{-1}W'(hh')^{-1})^{(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})} =$$

$$det_V(W'(h)W'(h')W'(hh')^{-1})^{(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})}.$$

Damit und mit den Eigenschaften (13.1)(13.2) folgt aber

$$\alpha^{dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})} \equiv 1. \tag{13.4}$$

Weil $\bar{J}_p$ eine pro-p-Sylow Untergruppe von $\bar{J}$ ist, wissen wir aus der Kohomologietheorie endlicher Gruppen, dass die Abbildung $H^2(\bar{J}/\bar{J}^1, \mathbb{C}^\times)_p \overset{res}{\to} H^2(\bar{J}_p/\bar{J}^1, \mathbb{C}^\times)$ injektiv ist, wobei das Subskriptum p an der ersten Kohomologiegruppe, die Untergruppe aller Kohomologieklassen von p-Potenzordnung bezeichnet. Nach (13.4) gehört die Klasse von α zur ersten Gruppe und nach (13.3) ist die Einschränkung von α trivial. Daher muss α ein 2-Korand sein und wir finden eine Funktion $\chi : \bar{J}/\bar{J}^1 \to \mathbb{C}^\times$, so dass für alle $x_1, x_2 \in \bar{J}$ die Gleichheit $\alpha(x_1, x_2) = \chi(x_1)\chi(x_1x_2)^{-1}\chi(x_2)$ gilt. Natürlich ist dann $\kappa' := \chi\zeta$ eine Darstellung von $\bar{J}$ und eine Fortsetzung von $\bar{\eta}$.

Betrachten wir nun die Funktion χ als eine komplexe Funktion von $\bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$. Die Gleichung (13.3) sagt uns nun, dass $\chi_{|\bar{J}_p \cap \bar{H}}$ insbesondere ein Charakter von $\bar{J}_p \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ ist und die Gleichung (13.4) sagt uns, dass $\chi^{dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})}$ ein Charakter von $\bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ ist. Natürlich kann der Charakter $\chi_{|\bar{J}_p \cap \bar{H}}$ höchstens die Ordnung $(\bar{J}_p \cap \bar{H} : \bar{J}^1 \cap \bar{H})$ haben und deshalb ist $\chi^{dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})}$ ein Charakter von $\bar{J} \cap \bar{H}$ welcher trivial auf $\bar{J}_p \cap \bar{H}$ ist. Sei $N := ker(\chi^{dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})})$, dann gilt $\#(\bar{J}_p \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}) \mid \#(N/\bar{J}^1 \cap \bar{H})$ und daher $\#(\bar{J} \cap \bar{H}/N) \mid \#(\bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}_p \cap \bar{H})$, wobei letztere Zahl prim zu p ist.

Wir folgern daher, dass $\chi^{dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})}$ als Werte Einheitswurzeln annimmt, welche zu p prime Ordnung haben, welches zusammen mit der Tatsache, dass $dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H} : \bar{J}^1 \cap \bar{H})$ eine p-Potenz ist, zur Existenz eine Charakters χ' von $\bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ führt, so dass $(\chi')^{dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})} = \chi^{-dim_{\mathbb{C}}(V)(\bar{J}_p \cap \bar{H}:\bar{J}^1 \cap \bar{H})}$. Wir folgern, dass

$$det(W')(\chi\chi')^{dim_{\mathbb{C}}(V)} \text{ ein Charakter ist, welcher } p\text{-Potenzordung hat.} \tag{13.5}$$

Setzen wir nun zunächst voraus, dass $\mathfrak{k} \neq \mathbb{F}_2$. Und betrachte die parabolische Untergruppe $P \simeq \bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ aus $Gl_{n_1}(\mathfrak{k}) \times \ldots \times Gl_{n_l}(\mathfrak{k}) \simeq \bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass P eine obere Standartparabolische ist, d.h. P=LU, wobei U das unipotente Radikal ist und aus oberen unipotenten Dreiecksmatrizen besteht, sowie L eine Leviuntergruppe ist und $L \simeq Gl_{k_1}(\mathfrak{k}) \times \ldots Gl_{k_m}(\mathfrak{k})$ aus Blockdiagonalmatrizen besteht. Dabei ist die Partition $k_1, \ldots, k_m$ eine Verfeinerung der Partition $n_1, \ldots n_l$. Ein abelscher Charakter von P von p-Potenzordnung wäre nun nach [Rei91](2.9) trivial auf L und auf der Kommutatorgruppe von U. Damit würde aber die Einschränkung auf U nur auf der Nebendiagonalen von U leben und müsste invariant unter Konjugation von L sein. Weil $\mathfrak{k}$ mehr als zwei Elemente hat und L alle Diagonalmatrizen enthält, muss ein abelscher Charakter von P welcher trivial auf L ist also auch trivial auf U sein. Damit ist er überhaupt trivial und wir haben gezeigt, dass der Charakter aus (13.5) trivial ist falls $\mathfrak{k} \neq \mathbb{F}_2$ gilt. Setzen wir nun voraus, dass $\bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H} \simeq Gl_{n_1}(\mathfrak{k}) \times \ldots \times Gl_{n_l}(\mathfrak{k})$ keinen Faktor hat der Isomorph zu $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ ist, dann folgt mit [Rei91](2.9) wieder die Trivialität des Charakters aus (13.5).

In diesen Fällen können wir also $\kappa := \chi'\kappa'$ setzen, χ' auch als Charakter von $\bar{J}/\bar{J}^1 \simeq \bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ auffassen und stellen fest, dass κ wieder eine Fortsetzung von $\bar{\eta}$ ist. Wir erhalten $(\kappa)_{|\bar{J} \cap \bar{H}} = \theta^\star \otimes \chi\chi' W'$ und für $W := \chi\chi' W'$ erhalten wir mit der Trivialität des Charakter in (13.5), dass $det_V(W) \equiv 1$. Die Eindeutigkeit von κ folgt mit den gleichen Argumenten und der Tatsache, dass eine andere Fortsetzung von $\bar{\eta}$ welche die Eigenschaft (i) erfüllt ein Twist von κ mit einem Charakter von $\bar{J}/\bar{J}^1$ der Ordnung $dim_{\mathbb{C}}(V)$ sein muss. Da die Ordnung also eine p-Potenz ist, muss solch ein Charakter wieder trivial sein.

Schliesslich wollen wir auch den Extremfall, dass $\bar{J} \cap \bar{H}/\bar{J}^1 \cap \bar{H}$ isomorph zu einer l-ten Potenz von $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ ist, behandeln. In diesem Falle kann $\chi_{|\bar{J}_p \cap \bar{H}}$ als Produkt von l Charakteren einer Untergruppe von $Gl_2(\mathbb{F}_2)$, welche Isomorph zu $\mathbb{F}_2^+$ ist, angesehen werden und faktisch sind alle diese Charaktere Einschränkungen von Charakteren von $Gl_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$, nämlich dem trivialen Charakter und dem Signum einer Permutation von drei Ziffern. Demnach können wir einen Charakter χ' von $\bar{J}/\bar{J}^1$ finden, so dass $\chi'_{|\bar{J}_p} = \chi^{-1}_{|\bar{J}_p}$ und wieder $\kappa := \chi'\kappa'$ setzen. Wir schlussfolgern, dass κ eine Fortsetzung von η' ist. Die Eindeutigkeit folgt nun aus der der Tatsache, dass $\#(\bar{J}/\bar{J}_p) = 3^l$ und jede andere solche Fortsetzung von η', muss ein Twist von κ mit einem Charakter von $\bar{J}$ sein, welcher trivial auf $\bar{J}_p$ ist. Weil aber S_3 keine Faktorgruppe der Ordnung 3 hat, muss solch ein Charakter trivial sein.
□

Damit erhalten wir nun die gewünschten Fortsetzungen unserer Heisenbergdarstellungen:

(13.2) Hauptsatz *Sei $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ ein nicht ausgeartetes Paar im Sinne von (9.5), wobei $\mathfrak{B}_m$ eine minimale Hauptordung in $B := C_A(\beta)$ ist. Auch sei $\theta^\star_{\mathfrak{A}}$ eine Fortsetzung $\theta_{\mathfrak{A}}$ nach $H := \mathfrak{B}^\times H^1$ welche auf $\mathfrak{B}^\times$ durch die reduzierte Norm $Nrd_{B|E}$ faktorisiert (d.h. $\theta^\star_{\mathfrak{A}}$ ist in Termen der definierenden Folgen durch eine Fortsetzung λ_β von $U^1(\mathfrak{o}_E)$ nach $\mathfrak{o}_E^\times$ gegeben), dann existiert eine eindeutige Fortsetzung $\kappa_{\mathfrak{A}}$ von $\eta_{\mathfrak{A}}$ nach $J := \mathfrak{B}^\times J^1$ welche die folgenden Bedingungen erfüllt*

(i) wenn V der Darstellungsraum von $\kappa_{\mathfrak{A}}$ ist und $\mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B})$ keinen Faktor hat der Isomorph zu $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ ist, dann soll $(\kappa_{\mathfrak{A}})_{|H} = \theta^\star_{\mathfrak{A}} \otimes W$ gelten, wobei W eine Darstellung von H/H^1 ist mit $det_V(W) \equiv 1$ und

(ii) wenn $\mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B})$ einen Faktor hat der Isomorph zu $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ ist (insbesondere $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}_m$), dann soll $\kappa_{\mathfrak{A}}$ eine Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ (aus (10.2)) sein.

Beweis:

Zunächst bemerken wir, dass im Falle $\dim_{\mathbb{C}}(\eta_{\mathfrak{A}}) = (J^1 : H^1)^{\frac{1}{2}} = 1$ natürlich $\kappa_{\mathfrak{A}} = \theta^{\star}_{\mathfrak{A}}$ gelten soll und wir setzen im folgenden voraus, dass $\dim_{\mathbb{C}}(V) > 1$ ist. Im Falle von $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m$, gilt natürlich $\eta_{\mathfrak{A}} = \eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} = \eta_{\mathfrak{A}_m}$ sowie $J^1 = U^1(\mathfrak{B}_m)J^1 = J^1_m$ und die folgenden Argumente sollten auch in diesem Falle arbeiten.

Wir wollen nun einfach vorangegengenen Satz (13.1) mit $\bar{J} = J$, $\bar{J}^1 = J^1$, $\bar{\eta} = \eta_{\mathfrak{A}}$, $\bar{J}_p = U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$, $\bar{H} = H$ und $\theta^{\star} = \theta^{\star}_{\mathfrak{A}}$ anwenden. Auch ist $\eta_{\mathfrak{A}}$ stabil unter der Aktion von J und irreduzibel. Die Gruppe $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$ ist eine pro-p-Sylowuntergruppe von J und $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ (vgl. (10.2)) eine Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A}}$ nach $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$. Die Dimension von $\eta_{\mathfrak{A}}$ ist $(J^1 : H^1)^{\frac{1}{2}}$ und damit eine p-Potenz. Es gilt $J/J^1 \simeq H/H^1 \simeq (Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'}))^{r'}$, wobei s', r' die Invarinten von $\mathfrak{B}$ sind und $D' \simeq End_B(T)$ für jeden einfachen B-Modul T ist. Die Einschränkung $(\eta_{\mathfrak{A}})_{|H^1}$ ist ein Vielfaches der Einschränkung $(\theta^{\star}_{\mathfrak{A}})_{|H^1} = \theta_{\mathfrak{A}}$. Schliesslich gilt $J = HJ^1 = J^1H$, $J \cap H = H$ und $J^1 \cap H = H^1$.

In der Tat sind damit alle Voraussetzungen zur Anwendung von (13.1) gegeben und die resultierende Darstellung $\kappa_{\mathfrak{A}} = \kappa$ erfüllt nun offensichtlich die Bedingungen (i)(ii) welche sie auch eindeutig bestimmt.

□

Bemerkung: Wir können folgendes Diagramm von Enthaltensrelationen von Gruppen aufstellen

$$\begin{array}{ccccccc}
J & & & \supset & & & H \\
\cup & & & & & & \cup \\
U^1(\mathfrak{B}_m)J^1 & \supset & J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} & \supset & H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} & \supset & U^1(\mathfrak{B}_m)H^1 \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
J^1 & \supset & J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1 & \supset & H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1 & \supset & H^1
\end{array}$$

und auch von zugehörigen Darstellungen

$$\begin{array}{ccccccc}
\kappa_{\mathfrak{A}} & & & \supset & & & \theta^{\star}_{\mathfrak{A}} \\
\cup & & & & & & \cup \\
\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} & \supset & \hat{\eta}_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} & \supset & \theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} & \supset & (\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})_{|U^1(\mathfrak{B}_m)H^1} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\eta_{\mathfrak{A}} & \supset & (\eta_{\mathfrak{A}})_{|J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1} & \supset & (\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})_{|H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1} & \supset & \theta_{\mathfrak{A}}.
\end{array}$$

Es gilt $J = HJ^1$, $H^1 = J^1 \cap H$, H^1 ist normal in J^1, J^1/H^1 ist eine endliche abelsche p-Gruppe, die Anwendung von $\theta_{\mathfrak{A}}$ auf Kommutatoren von J^1 induziert eine nicht ausgeartete alternierende Form $J^1/H^1 \times J^1/H^1 \to \mathbb{C}^{\times}$, $\theta_{\mathfrak{A}}$ und $\theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ stimmen auf $H^1 \subset H \cap H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ überein, $U^1(\mathfrak{B}_m)H^1/H^1 = H \cap H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}/H^1$ ist eine p-Sylowuntergruppe von H/H^1, $J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1$ ist eine Untergruppe von J^1 welche in $H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1$ enthalten ist und das Paar $(H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}, \theta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m})$ normalisiert. Schliesslich gelten unter den Voraussetzungen, dass das Paar $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ nicht ausgeartet ist und J/J^1 keinen direkten Faktor hat, welcher isomorph zu $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ ist, die Gleichungen $(J^1 : J^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1) = (H^1_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m} \cap J^1 : H^1)$ und $H^1(J/J^1, \mathbb{F}_p) = 0$, wobei p die Restcharakteristik von F ist. In diesem Falle können wir also [Rei91](2.4) anwenden und im Falle von (13.2(i)) ist $\kappa_{\mathfrak{A}}$ einfach die Darstellung τ wie sie in [Rei91](2.4) konstruiert wurde.

Kapitel 14

Eine weitere Bemerkung zum zerfallenden Fall

Folgender Hilfssatz lässt uns darauf schliessen, dass die in (13.2) konstruierte Darstellung $\kappa_{\mathfrak{A}}$ immer dann eine Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ist, wenn letztere Darstellung durch ganz $B^\times$ verkettet ist. Dies ist etwa der Fall wenn A eine zerfallende Algebra ist (vgl. (12.4)) oder im minimalen Fall (weil dann nach (9.4) der zugehörige gemischte Charakter durch ganz $B^\times$ verkettet ist).

(14.1) Hilfssatz *Wir benutzen die obigen Bezeichnungen für $\theta_{\mathfrak{A}}$ und $\eta_{\mathfrak{A}}$. Sei $\mu_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ eine Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A}}$ nach $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$, welche durch ganz $\mathfrak{B}^\times$ verkettet wird, dann ist $\mu_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ fast immer eindeutig bestimmt, ausser in dem Falle, dass $\mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B})$ einen direkten Faktor hat, welcher isomorph zu $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ ist. In letzterem Falle muss $\mathfrak{B}$ die Invariante 2 haben und es gilt $\mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B}) \simeq (Gl_2(\mathbb{F}_2))^{r'} \simeq {S_3}^{r'}$, wobei r' die Periode von $\mathfrak{B}$ ist. Alle weiteren Fortsetzungen, welche die Eigenschaften von $\mu_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ erfüllen, können sich dann von $\mu_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ nur um einen Twist durch einen Charakter von $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1/J^1 \simeq U^1(\mathfrak{B}_m)/U^1(\mathfrak{B}) \hookrightarrow \mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B}) \simeq (S_3)^{r'}$ unterscheiden, welche Werte in $\{+1;-1\}$ annehmen und sich nach $(S_3)^{r'}$ fortsetzen lassen.*

Beweis:
Es gilt $\mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B}) \simeq (Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'}))^{r'}$, wobei s' die Invariante von $\mathfrak{B}$ ist, r' die Periode von $\mathfrak{B}$ und D' ein Schiefkörper derselben Brauerklasse wie B. Es gilt auch $U^1(\mathfrak{B}_m)/U^1(\mathfrak{B}) \simeq N^{r'}$, wobei N die Menge der unteren unipotenten Dreiecksmatrizen in $Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'})$ bezeichnet. Wenn $\mu'_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ eine weitere Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A}}$ ist, welche durch ganz $\mathfrak{B}^\times$ verkettet wird, dann unterscheidet es sich von $\mu_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ durch einen Charakter ϕ von $U^1(\mathfrak{B}_m)J^1/J^1 \simeq U^1(\mathfrak{B}_m)/U^1(\mathfrak{B}) \simeq N^{r'}$, welcher durch ganz $\mathfrak{B}^\times$ verkettet wird und ϕ ist die Inflation eines Charakters $\phi_1 \otimes \ldots \otimes \phi_{r'}$, wobei ϕ_ν ein Charakter von N ist für $\nu = 1, \ldots, r'$.

Wir fixieren nun einen beliebigen Index $\nu \in \{1, \ldots, r'\}$. Die Kommutatorgruppe von N besteht aus allen Matrizen $n = (n_{l,m}) \in N$, so dass $n_{l+1,l} = 0$ für $1 \leq l \leq s'-1$. Daher ist ϕ_ν von der Form $n \mapsto \psi(\sum_{l=1}^{s'-1} a_l n_{l+1,l})$, wobei ψ ein additiver Charakter von $\mathfrak{k}_{D'}$ ist. Angenommen $\mathfrak{k}_{D'}$ hat mindestens drei Elemente. Da der Charakter stabil unter Konjugation durch eine Diagonalmatrix aus $Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'})$ ist, müssen in diesem Falle alle a_i gleich Null sein und ϕ_ν ist trivial in diesem Falle. Nun betrachten wir den Fall, dass $\mathfrak{k}_{D'} = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen ist. Der Fall $s' = 1$ ist dann Trivial und wir setzen zunächst $s' > 2$ voraus. Beachten wir nun, dass ϕ_ν durch die Permutationsmatrix verkettet wird, welche zu dem Zyklus $(1, \ldots, s')$ gehört, so folgern wir zunächst $a_1 = a_2 = \ldots = a_{s'-1}$. Auf der anderen Seite verkettet auch die Matrix, die zur Transposition $(1, 2)$ gehört, den Charakter ϕ_ν und damit folgt $a_1 = 0$ und wieder ist ϕ_ν trivial. Damit bleibt nur noch der Fall $s' = 2$. Wie wir schon oben bemerkt haben, gilt $Gl_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$ (die Permutationsgruppe von drei Ziffern) und ebenso $N \simeq \mathbb{F}_2^+$. Daher hat N nur die triviale Darstellung oder den Charakter der den Wert -1 auf einem Urbild von 1 hat. Die erste setzt sich zur trivialen Darstellung von S_3 fort und die letztere zum Signumscharakter einer Permutation. Damit haben wir alle Fälle behandelt.

□

(14.2) Korollar *Wenn $A = M_N(F)$ eine zerfallende Algebra ist und wenn wir die Notationen, Voraussetzungen und Folgerungen von (13.2) benutzen, dann ist die Darstellung $\kappa_{\mathfrak{A}}$ eine Erweiterung von $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ und der Twist einer sogenannten β-Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A}}$ im Sinne von [CJB93](5.2.1) mit einem Charakter der Gruppe $J/J^1 \simeq \mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B})$, welcher vom Zentrum der Algebra $\mathfrak{B}/U^1(\mathfrak{B})$ durch die Determinantenabbildung angehoben wurde, insbesondere ist $\kappa_{\mathfrak{A}}$ selbst eine β-Fortsezung von $\eta_{\mathfrak{A}}$, falls $\mathfrak{B}$ eine maximale Ordnung in $B = C_A(\beta)$ ist.*

Beweis:

Nach (12.4) und [CJB93](5.1.9) (bzw. [CJB93](5.1.1) für $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_m$) wird $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ (wobei wir $\eta_{\mathfrak{A}_m,\mathfrak{B}_m} := \eta_{\mathfrak{A}_m}$ setzen) sogar durch ganz $B^\times$ verkettet und $(\kappa_{\mathfrak{A}})_{|U^1(\mathfrak{B}_m)J^1}$ sowie $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ sind daher Fortsetzungen von $\eta_{\mathfrak{A}}$, welche durch ganz $\mathfrak{B}^\times$ verkettet werden. Mit (14.1) folgern wir, dass $\kappa_{\mathfrak{A}}$ auch in dem Falle, dass $\mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B})$ keinen Faktor enthält der Isomorph zu $Gl_2(\mathbb{F}_2)$ ist, eine Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$ ist und daher gemäss der Bemerkung vor [CJB93](5.2.7) eine der Fortsetzungen wie sie mit den Argumenten in [CJB93](5.2.5) erhalten werden kann. Folgen wir nun den Argumenten von [CJB93](Kapitel 5), dann bekommen wir die gewünschte Referenz zu [CJB93](5.2.1).

□

Kapitel 15

Eine hypothetische Liste einfacher Typen und der “Level-0-fall”

Analog zu [CJB93](5.5.10) definieren wir eine Liste von sogenannten einfachen Typen:

(15.1) Definition *Ein hypothetischer einfacher Typ in $A^\times$ ist eine irreduzible Darstellung $\lambda = \kappa_{\mathfrak{A}} \otimes \sigma$ von $J = J(\beta, \mathfrak{A})$, wobei*

(i) $\mathfrak{A}$ eine Hauptordnung in A ist und $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum oder $n = 0$ und $\beta = 0$,

(ii) $\kappa_{\mathfrak{A}}$ eine Darstellung ist, wie sie durch Hauptsatz 13.2 gegeben wird, inbesondere setzen wir voraus, dass eine minimale Hauptordnung $\mathfrak{B}_m \subset \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \cap B$ existiert, so dass das Paar $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ nicht ausgeartet im Sinne von 9.5 ist, wobei wie bisher $B = C_A(\beta)$ oder falls $n = 0$ und $\beta = 0$, dann soll $\kappa_{\mathfrak{A}} \equiv 1$ sein und schliesslich

(iii) wenn wir die Isomorphie $J/J^1 \simeq \mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B}) \simeq (Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'}))^{r'}$ beachten (wobei D' ein Schiefkörper aus der Brauerklasse von B, s' die Invariante von $\mathfrak{B}$ ist und r' die Periode von $\mathfrak{B}$ ist), dann soll σ die Inflation einer Darstellung $\sigma_0^{\otimes^{r'}}$ sein, wobei σ_0 eine irreduzible supercuspidale Darstellung von $Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'})$ ist.

Im Falle $n = 0$ und $\beta = 0$ laufen die beiden Bedingungen (i) und (ii) leer und wir sprechen vom sogenannten Level-0-fall. In [MG00](5.3) wird gezeigt, dass die in (15.1) definierten einfachen Typen im Level-0-fall tatsächlich einfache Typen einer einzigen Bernsteinkomponente der Kathegorie der glatten Darstellungen von $A^\times$ im Sinne von [CJB98](4.1)(4.2) sind.

Natürlich vermuten wir, dass die obige Definition ganz allgemein, wie etwa im Falle eines Schiefkörpers oder analog zum zerfallenden Fall, eine Liste von einfachen Typen jeweils einer einzigen Bernsteinkomponente liefert. Insbesondere hoffen wir die lästige Nebenbedingung an das Paar $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ loszuwerden. In der Tat haben wir bisher keinen Grund die Vermutung, dass alle Paare $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ im allgemeinen nicht ausgeartet sind, zu verwerfen.

Die Strategie um zu zeigen, dass die in (15.1) definierten hypothetischen einfachen Typen in der Tat einfache Typen sind, ist dabei im wesentlichen dieselbe wie im Level-0-fall. Wir zeigen zunächst, dass λ ein cuspidaler Typ ist, falls $\mathfrak{B}$ eine Maximalordnung ist, d.h. $r' = 1$. Im Sinne von [CJB98](4.1)(4.2) bedeutet dies, dass die irreduziblen glatten Darstellungen von $A^\times$, welche λ enthalten, eine einzige Inertialklasse supercuspidaler Darstellungen bilden. So dann, werden die anderen einfachen Typen als einhüllende Typen im Sinne von [CJB98](8.1) auf diesen Fall zurückgezogen. Dazu wird die Heckealgebra berechnent und dabei festgestellt, dass alle auf einer einzigen Doppelnebenklasse lebenden Elemente der Heckealgebra invertierbar sind. Mithilfe von [CJB98](6.14) oder durch direkte Konstruktion wie in [MG00](5.3) können dann die Bedingungen aus [CJB98](8.1) erfüllt werden.

Im zerfallenden Fall $A = M_N(F)$ haben wir bereits in (14.2) festgestellt, dass $\kappa_{\mathfrak{A}}$ durch ganz $B^\times$ verkettet wird, wenn $\mathfrak{B}$ eine Maximalordnung ist und unsere Definition stimmt in diesem Falle mit der in [CJB93](5.5.10) überein.

(15.2) Definition Wir bezeichnen die einfachen Typen, für die die Ordnung $\mathfrak{B}$ maximal ist, im folgenden in Analogie zu [CJB93](Abschnitt 6) als maximale einfache Typen.

Kapitel 16

Hypothetische maximale einfache Typen

Zum Beweis des folgenden Satzes (16.4) benötigen wir zwei Hilfssätze welche Verallgemeinerungen von solchen aus [CJB93] sind.

(16.1) Hilfssatz *Sei $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ ein einfaches Stratum in A und $\theta_{\mathfrak{A}} \in \mathcal{C}(\beta, \mathfrak{A})$. Sei $\eta_{\mathfrak{A}}$ die nach (10.1) zu $\theta_{\mathfrak{A}}$ gehörende Heisenbergdarstellung von $J^1(\beta, \mathfrak{A}) = J^1$, dann gilt für $x \in A^\times$ die Gleichheit*

$$dim_{\mathbb{C}}(I_x(\eta_{\mathfrak{A}})) = \begin{cases} 1 & falls\ x \in J^1 B^\times J^1 \\ 0 & sonst, \end{cases}$$

wobei wir in Analogie zu [CJB93](5.1.7) der Kürze halber $I_x(\rho) := Hom_{K^x \cap K}(\rho, \rho^x)$ setzen, wenn ρ eine Darstellung ist, welche auf der kompakten Untergruppe K von $A^\times$ lebt.

Beweis:
Der Beweis ist wortwörtlich derselbe wie für [CJB93](5.1.8)(5.1.9), wenn wir folgende Verallgemeinerung von [CJB93](5.1.10) beweisen:

(16.2) Hilfssatz *Für $y \in B^\times$ gilt $(J^1 : J^1 \cap (J^1)^y) = (H^1 : H^1 \cap (H^1)^y)$.*

Beweis:
Wir folgen dem Beweisgang von [CJB93](5.1.10) und haben dabei allerdings einige Änderungen zu beachten. Wir schreiben wieder $H^1 = 1 + \mathfrak{H}^1$, $J^1 = 1 + \mathfrak{J}^1$ und wählen Haarsche Maße $\mu^\times$ für $A^\times$ und μ für A^+, so dass $\mu^\times(H^1) = \mu(\mathfrak{H}^1)$ und $\mu^\times(J^1) = \mu(\mathfrak{J}^1)$. Wegen $ker(a_\beta) = B$ und (4.5) besteht eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{Q} \to \mathfrak{J}^1 \stackrel{a_\beta}{\to} (\mathfrak{H}^1)^* \stackrel{s_\beta}{\to} \mathfrak{B} \to 0.$$

Diese Sequenz bleibt exakt wenn wir sie mit y konjugieren und wir behaupten, dass auch die Sequenz

$$0 \to \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^y \to \mathfrak{J}^1 + (\mathfrak{J}^1)^y \stackrel{a_\beta}{\to} (\mathfrak{H}^1)^* + ((\mathfrak{H}^1)^*)^y \stackrel{s_\beta}{\to} \mathfrak{B} + \mathfrak{B}^y \to 0$$

exakt bleibt. Nach (4.6) gilt $(\mathfrak{H}^1)^* = a_\beta(\mathfrak{J}^1) + \mathfrak{A}$ und daher ist der vorletzte Pfeil, welcher durch $\mathfrak{s}_\beta$ induziert wird, surjektiv. Auch gilt

$$(\mathfrak{H}^1)^* + ((\mathfrak{H}^1)^*)^y = a_\beta(\mathfrak{J}^1 + (\mathfrak{J}^1)^y) + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^y \tag{16.1}$$

und wir wollen als nächstes die Exaktheit bei $(\mathfrak{H}^1)^* + ((\mathfrak{H}^1)^*)^y$ untersuchen.

Zunächst können wir zur kanonischen Zerfällung $\tilde{A}$ von A übergehen und wie in (3.3) auch die Zerfällung $\tilde{\mathfrak{A}}$ von $\mathfrak{A}$ betrachten. Wir setzen auch $\tilde{B} := C_{\tilde{A}}(E)$ und $\tilde{\mathfrak{B}} := \tilde{\mathfrak{A}} \cap \tilde{B}$. Wenden wir nun [CJB93](1.4.16) für hinreichend kleines i, hinreichend grosses n und $j = m = 0$ an, so folgt für $k = k_0(\beta, \mathfrak{A})$ die Gleichheit $ya_\beta(\tilde{\mathfrak{Q}}^{-k}\mathfrak{N}_k(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})) + a_\beta(\tilde{\mathfrak{Q}}^{-k}\mathfrak{N}_k(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}))y = a_\beta(y\tilde{\mathfrak{Q}}^{-k}\mathfrak{N}_k(\beta, \tilde{\mathfrak{A}}) + \tilde{\mathfrak{Q}}^{-k}\mathfrak{N}_k(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})y) = (y\tilde{\mathfrak{A}} + \tilde{\mathfrak{A}}y) \cap ker(\mathfrak{s}_\beta) = (y\tilde{\mathfrak{A}} + \tilde{\mathfrak{A}}y) \cap a_\beta(\tilde{A})$. Auch liefert uns [CJB93](1.4.10) $a_\beta(\tilde{\mathfrak{Q}}^{-k}\mathfrak{N}_k(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})) = \tilde{\mathfrak{A}} \cap a_\beta(\tilde{A})$ und damit erhalten wir insgesamt $(y\tilde{\mathfrak{A}} + \tilde{\mathfrak{A}}y) \cap a_\beta(\tilde{A}) = y(\tilde{\mathfrak{A}} \cap a_\beta(\tilde{A})) + (\tilde{\mathfrak{A}} \cap a_\beta(\tilde{A}))y$.

Nehmen wir nun auf beiden Seiten den Durchschnitt mit A und setzen dies in (16.1) ein, so erhalten wir $((\mathfrak{H}^1)^* + ((\mathfrak{H}^1)^*)^y) \cap ker(\mathfrak{s}_\beta) = a_\beta(\mathfrak{J}^1 + (\mathfrak{J}^1)^y) + \mathfrak{A} \cap a_\beta(A) + (\mathfrak{A} \cap a_\beta(A))^y$. Weil nach [CJB93](3.1.10) die Gleichheiten $\mathfrak{A} \cap a_\beta(A) = (\tilde{\mathfrak{A}} \cap a_\beta(\tilde{A})) \cap A = a_\beta(\tilde{\mathfrak{Q}}^{-k}\mathfrak{N}_k(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})) \cap A \subset a_\beta(U^{[\frac{k+1}{2}]}(\tilde{\mathfrak{A}})\mathfrak{J}^1(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})) \cap A = a_\beta(\mathfrak{J}^1)$ gelten, wobei $k = -k_0(\beta, \tilde{\mathfrak{A}})$, folgern wir, dass unsere Sequenz exakt bei $(\mathfrak{H}^1)^* + ((\mathfrak{H}^1)^*)^y$ ist. Nach [CJB93](1.3.16) gilt auch $\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^y \subset (\mathfrak{J}^1 + (\mathfrak{J}^1)^y) \cap ker(a_\beta) \subset (\mathfrak{P} + \mathfrak{P}^y) \cap ker(a_\beta) = ((\tilde{\mathfrak{P}} + \tilde{\mathfrak{P}}^y) \cap ker(a_\beta)) \cap A = (\tilde{\mathfrak{Q}} + \tilde{\mathfrak{Q}}^y) \cap A = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}^y$ und damit die Exaktheit an den anderen Stellen.

Der Rest des Beweises ist nun wortwörtlich derselbe wie für [CJB93](5.1.10), wobei wir nur zu beachten haben, dass [CJB93](5.1.5) auch in unserem allgemeineren Fall einer beliebigen lokalen zentraleinfachen Algebra richtig ist.

□

□

(16.3) Hilfssatz *Sei* $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ *ein nicht ausgeartetes Paar und* $\kappa_{\mathfrak{A}}$ *eine Darstellung wie sie aus Hauptsatz (13.2) gewonnen wird. Sei auch* ξ *eine irreduzible Darstellung von* $J/J^1 = \mathfrak{B}^\times/U^1(\mathfrak{B})$. *Angenommen nun* $\kappa_{\mathfrak{A}}$ *wird durch ganz* $B^\times$ *verkettet, dann gilt:*

(i) $I_{A^\times}(\kappa_{\mathfrak{A}} \otimes \xi) = JI_{B^\times}(\xi_{|\mathfrak{B}^\times})J$,

(ii) für jedes $y \in B^\times$, *haben die Räume* $I_y(\kappa_{\mathfrak{A}} \otimes \xi)$ *und* $I_y(\xi)$ *dieselbe Dimension und*

(iii) die Darstellung $\kappa_{\mathfrak{A}} \otimes \xi$ *ist irreduzibel.*

Beweis:

Der Beweis ist wortwörtlich derselbe wie für [CJB93](5.3.2), wenn wir anstelle von [CJB93](5.1.1) Hilfssatz (10.1), anstelle von [CJB93](5.1.8) Hilfssatz (16.1) und anstelle von [CJB93](5.2.7) unsere Voraussetzung, dass $\kappa_{\mathfrak{A}}$ durch ganz $B^\times$ verkettet wird, verwenden.

□

(16.4) Satz *Sei* $\lambda = \kappa_{\mathfrak{A}} \otimes \sigma$ *ein maximaler einfacher Typ, welchem das einfache Stratum* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *zugrunde liegt. Wir setzen voraus, dass der Tensorfaktor* $\kappa_{\mathfrak{A}}$ *durch ganz* $B^\times$ *verkettet wird. Es gilt dann:*

(i) λ *ist ein einfacher Typ für eine einzelne Bernsteinkomponente der Kathegorie der glatten Darstellungen, deren irreduzible Elemente die Inertialklasse einer einzigen irreduziblen supercuspidalen Darstellung von* $A^\times$ *bilden.*

(ii) λ *und* $\lambda' = \kappa_{\mathfrak{A}} \otimes \sigma'$ *sind genau dann und nur dann Typen derselben Bernsteinkomponente, wenn die zu* σ *und* σ' *gehörenden supercuspidalen Darstellungen* σ_0 *und* σ'_0 *von* $Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'})$ *zum selben*

Orbit unter der Operation von $\Gamma := Gal(\mathfrak{k}_{D'}/\mathfrak{k}_{F[\beta]})$ gehören, wobei Γ auf jeden Eintrag einer Matrix aus $Gl_{s'}(\mathfrak{k}_{D'})$ wirkt, damit auf der Gruppe und schliesslich auch auf den Darstellungen dieser Gruppe.

Beweis:

(i): Nach Voraussetzung bezüglich $\kappa_{\mathfrak{A}}$ können wir Hilfssatz (16.3), (iii) anwenden und folgern, dass λ irreduzibel ist. Auch liefert die Kombination von (16.3)(i), [MG00](2.1) und der Voraussetzung, dass $\mathfrak{B}$ eine Maximalordnung ist, die Gleichheit $I_{A^\times}(\lambda) = JI_{B^\times}(\sigma_{|\mathfrak{B}^\times})J =< h^l > J =: \tilde{J}$, wobei $h \in \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ eine beliebige aber feste Uniformisierende von $\mathfrak{B}$ ist und l die Länge des Galoisorbits von $\sigma_{|\mathfrak{B}^\times}$ bzw. von σ_0 wie in [MG00](Abschnitt 2). Weil h^l die Gruppe J und damit die Äquivalenzklasse der Darstellung λ normalisiert, können wir die Darstellung λ zu einer Darstellung $\tilde{\lambda}$ von $\tilde{J}$ fortsetzen.

Nach Mackey ist nun die kompakte Induktion $\Pi :=$ c-$\mathrm{Ind}_{\tilde{J}}^{A^\times}(\tilde{\lambda})$ irreduzibel. Weil Π glatt ist, ist Π nach Harish-Chandra auch zulässig und daher nach [Bus90](2.4) supercuspidal (vgl. auch [Car84]).

Mit der Argumentation in [MG00](5.1) oder mit [CJB98](5.4) folgt nun, dass λ ein Typ für die Bernsteinkomponente der Kathegorie der glatten Darstellungen von $A^\times$ ist, deren irreduzible Elemente sämtlich in der Inertialklasse von Π liegen.

(ii) Zunächst benutzen wir eine analoge Argumentation wie zu Beginn des Beweises von [MG00](5.2) um zu zeigen, dass λ und λ' dieselbe Bernsteinkomponente parametrisieren, wenn σ und σ' bzw. σ_0 und σ_0' Galoiskonjugiert unter der Aktion von Γ sind. Dazu betrachten wir wie im Beweis von (i) eine Fortsetzung $\tilde{\lambda}$ von λ nach $\tilde{J}$. Da die adjungierte Aktion von h (wie oben) der Galoisaktion eines entsprechenden erzeugenden Elementes von Γ entspricht, $\tilde{J}$ eine normale Untergruppe vom Index l in $< h > J = \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}J$ ist und die Induktionen von $\tilde{\lambda}$ nach $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}J^1$ irreduzibel ist, müssen in deren Einschänkungen jeweils alle Konjugierten unter der Operation von h aufgehen. Damit enthält aber $\Pi =$ c-$\mathrm{Ind}_{\tilde{J}}^{A^\times}(\tilde{\lambda})$ auch λ' und daher parametrisieren λ und λ' nach [CJB98](5.2) dieselbe Bernsteinkomponente.

Angenommen λ und λ' parametrisieren dieselbe Bernsteinkomponente, dann gehen sie gemäss [CJB98](5.2) in derselben irreduziblen Darstellung auf und sind nach [CJB96b](6.5) miteinander verkettet. Wir benutzen nun zunächst eine analoge Argumentation wie zum Beweis von [CJB98](5.3.2) bzw. (16.3). Angenommen $y \in A^\times$ verkettet λ und λ', dann verkettet es auch $\lambda_{|J^1}$ und $\lambda'_{|J^1}$, welche beide Vielfache von $\eta_{\mathfrak{A}}$ sind. Wegen (10.1) muss daher $y \in J^1B^\times J^1$ gelten und weil J^1 sowohl λ als auch λ' normalisiert, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $y \in B^\times$ liegt.

Sind X der Darstellungsraum von $\kappa_{\mathfrak{A}}$, Y der Darstellungsraum von σ und Y' der Darstellungsraum von σ', dann kann ein zu y gehöriger Verkettungsoperator $\phi \in Hom_{J^1\cap(J^1)^y}(\lambda', \lambda^y)$ als Element von $End_{\mathbb{C}}(X) \otimes Hom_{\mathbb{C}}(Y', Y) \simeq Hom_{\mathbb{C}}(X \otimes Y', X \otimes Y)$ angenommen werden. Schreiben wir also $\phi = \sum_j S_j \otimes T_j$ mit $S_j \in End_{\mathbb{C}}(X)$ und so dass $\{T_j\}$ eine Basis von $Hom_{\mathbb{C}}(Y', Y)$ ist, dann folgt aus der Trivialität von σ und σ' auf Argumenten aus J^1, dass für alle $h \in J^1 \cap (J^1)^y$ stets $\sum_j(\kappa_{\mathfrak{A}}(h) \circ S_j - S_j \circ \kappa_{\mathfrak{A}}^y(h)) \otimes T_j = 0$ gilt. Aus der linearen Unabhängigkeit der T_j schliessen wir, dass alle S_j aus $I_y(\eta_{\mathfrak{A}})$ sind. Weil $\kappa_{\mathfrak{A}}$ nach Voraussetzung durch ganz $B^\times$ verkettet wird, nach (16.1) alle Verkettungsräume $I_y(\eta_{\mathfrak{A}})$ eindimensional sind und $\kappa_{\mathfrak{A}}$ eine Fortsetzung von $\eta_{\mathfrak{A}}$ ist, sind alle S_j sogar aus $I_y(\kappa_{\mathfrak{A}})$. Wiederum aus der Eindimensionalität der Räume folgt, dass wir sogar $\phi = S \otimes T$ schreiben können, wobei $S \in I_y(\kappa_{\mathfrak{A}})$ und $T \in Hom_{\mathbb{C}}(Y', Y)$.

Wählen wir nun $h \in J \cap J^y$ dann liefert uns die Verkettungsbedingung $S \circ \kappa_{\mathfrak{A}}^y \otimes T \circ \sigma^y = \kappa_{\mathfrak{A}} \circ S \otimes T \circ \sigma^y = \kappa_{\mathfrak{A}} \circ S \otimes \sigma' \circ T$ also $T \in Hom_{J\cap J^y}(\sigma', \sigma^y)$. Damit sind aber $\sigma_{|\mathfrak{B}^\times}$ und $\sigma'_{|\mathfrak{B}^\times}$ über $B^\times$ miteinander verkettet und wir können dem zweiten Teil des Beweises von [MG00](5.2) folgen, um zu sehen, dass σ und σ' bzw. σ_0 und σ_0' zum selben Galoisorbit unter der Aktion von Γ gehören.

□

Kapitel 17

Maximale einfache Typen im Falle $Gl_l(D)$ mit einer Primzahl l

(17.1) Korollar *Sei* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *ein einfaches Stratum, so dass* $B = C_A(\beta)$ *ein Schiefkörper ist, dann ist jedes Paar* $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ *nicht ausgeartet, die zugehörigen Darstellungen* $\kappa_{\mathfrak{A}}$ *aus (13.2) werden durch ganz* $B^\times$ *verkettet und die Typen aus (15.1) sind maximale Typen, welche die Folgerungen aus (16.4) erfüllen.*

Beweis:
Wenn B ein Schiefkörper ist, dann gilt $\mathfrak{B} = \mathfrak{o}_B = \mathfrak{B}_m$ und jedes Paar $([\mathfrak{A}, n, 0, \beta], \mathfrak{B}_m)$ ist nicht ausgeartet. Die Gruppe $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert die Gruppe J und jede Darstellung $\eta_{\mathfrak{A}}$, so dass jede Darstellung $\kappa_{\mathfrak{A}}$ eindeutig durch Eigenschaften charakterisiert wird, welche invariant unter Konjugation mit $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ sind. Damit muss aber die Äquivalenzklasse von $\kappa_{\mathfrak{A}}$ von $\mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ normalisiert werden und insbesondere wird $\kappa_{\mathfrak{A}}$ durch ganz $B^\times = \mathcal{K}_{\mathfrak{B}}$ verkettet. Weil $\mathfrak{B} = \mathfrak{o}_B$ Maximalordnung in B ist, sind damit alle Voraussetzungen zur Anwendung von (16.4) gegeben.
□

(17.2) Korollar *Sei* $\mathfrak{k}_F \neq \mathbb{F}_2$, $A = M_l(D)$ *mit einer Primzahl* l *(also die Vorraussetzungen von (12.1) erfüllt) und* $[\mathfrak{A}, n, 0, \beta]$ *ein einfaches Stratum, so dass* $\mathfrak{B} := \mathfrak{A} \cap B$ *eine Maximalordnung in* $B := C_A(\beta)$ *ist, dann werden alle zugehörigen Darstellungen* $\kappa_{\mathfrak{A}}$ *aus (13.2) durch ganz* $B^\times$ *verkettet und die Typendarstellungen aus (15.1) sind maximale Typen, welche die Folgerungen aus (16.4) erfüllen.*

Beweis:
Wie oben sei d der Index von D bzw. A und $E := F[\beta]$. Falls $[E : F]$ kein Teiler von d ist, so ist B ein Schiefkörper und nach (17.1) sind wir in diesem Falle fertig.

Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $E \subset D$ und somit $B = M_l(D')$, wobei $D' := C_D(\beta)$. Nehmen wir auch $\mathfrak{B}$ als in Normalform gegeben an, so ist also $\mathfrak{B} = M_l(\mathfrak{o}_{D'})$ und $\mathfrak{A} = M_l(\mathfrak{o}_D)$.

Setzen wir $\mathcal{J}_0^1 := \mathcal{J}^1(\beta, \mathfrak{o}_D)$ und $\mathcal{H}_0^1 := \mathcal{H}^1(\beta, \mathfrak{o}_D)$, dann sehen wir leicht, dass $J^1 = I_l + M_l(\mathcal{J}_0^1)$ und $H^1 = I_l + M_l(\mathcal{H}_0^1)$.

Zum Beweis des Satzes müssen wir zeigen, dass $\kappa := \kappa_{\mathfrak{A}}$ durch ganz $B^\times$ verkettet ist. Wegen $J = \mathfrak{B}^\times J^1$ brauchen wir nur Repräsentanten y der Doppelnebenklassen $\mathfrak{B}^\times \backslash B^\times / \mathfrak{B}^\times$ zu betrachten und können daher $y = diag(\pi'^{\nu_1} I_{n_1}, \ldots, \pi'^{\nu_{n_r}} I_r)$ mit $\nu_1 > \ldots > \nu_r$ annehmen, wobei π' ein Primelement von $\mathfrak{o}_{D'}$ ist und $n = (n_1, \ldots, n_r)$ eine Partition von l.

Sei $M := diag(M_{n_1}(D) \times \ldots \times M_{n_r}(D))$ und seien U und U^- die Gruppen der Unipotenten oberen bzw. unteren Blockdreiecksmatrizen, wobei wir eine Blockzerlegung $A = (M_{n_i \times n_j}(D))_{i,j=1,\ldots,r}$ zugrunde legen. Wir finden zur Partition $n := (n_1, \ldots, n_r)$ eine erbliche Standartordung $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}$ welche die Invarianten $n_1, \ldots, n_r$ hat. Betrachten wir die Ordnungen in der transponierten Fassung der Normalform (0.3), also in oberer Blockdreiecksform modulo $\pi' M_l(\mathfrak{o}_{D'}) = \pi' \mathfrak{B} =: \mathfrak{Q}$, dann gilt offenbar in Analogoie zu

(17.3) [CJB93](5.2.9)
(i) y normalisiert $\mathfrak{B}_n \cap M$ (dabei ist $\mathfrak{B}_n$ maximal mit dieser Eigenschaft) und
(ii) $\mathfrak{B} \cap y^{-1}\mathfrak{B}y \subset \pi'\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_n \cap y^{-1}\mathfrak{B}_n y$.

Wir haben $(\mathfrak{B}_n^\times J^1) \cap (\mathfrak{B}_n^\times J^1)^y = (\mathfrak{B}_n \cap M)((U^1(\mathfrak{B}_n)) \cap (U^1(\mathfrak{B}_n))^y)(J^1 \cap (J^1)^y)$ und $(J^1 \cap (J^1)^y) = ((U^1(\mathfrak{B})) \cap (U^1(\mathfrak{B}))^y)(J^1 \cap (J^1)^y)$.

Wir zeigen zunächst die

(17.4) Zwischenbehauptung, *dass $\kappa_{|\mathfrak{B}_n^\times} J^1$ durch y verkettet wird.*

Beweis der Zwischenbehauptung:
Sei (Θ, β) der PS-Charakter mit $\theta := \theta_{\mathfrak{A}} = \Theta(A, id_A, \mathfrak{A})$. Wir setzen $\theta_i := \Theta(M_{n_i}(D), p_i, \beta)$, $J_i^1 := p_i(J^1 \cap M)$ und $H_i^1 := p_i(H^1 \cap M)$ für $i = 1, \ldots, r$, wobei p_i die Projektion auf die i-te Diagonalkomponente von M ist, dann sehen wir sofort Aufgrund der Produktzerlegungen (7.9) und (8.1) die Relationen $H^1 \cap M = \prod_{i=1}^r H_i^1$ und $\theta_{|H^1 \cap M} = \bigotimes_{i=1}^r \theta_i$. Es ist leicht zu zeigen, dass auch für die Gruppen $J^1 \cap U$, $J^1 \cap U^-$, $H^1 \cap U$ und $H^1 \cap U^-$ entsprechende Produktzerlegungen (7.9) existieren und wegen (8.1) verschwindet θ auf $H^1 \cap U$ und $H^1 \cap U^-$.

Ähnlich wie im zerfallenden Fall erhalten wir:

(17.5) [CJB93](7.1.19), [CJB93](7.2.3) *Für die durch Anwendung von θ auf Kommutatoren von J^1 entstehende Form χ_θ auf J^1/H^1 gilt:*
(i) Die Einschränkung der Form χ_θ nach $J^1 \cap M/H^1 \cap M$ ist nicht ausgeartet und die direkte orthogonale Summe der entsprechenden Formen χ_{θ_i} von J_i^1/H_i^1 für $i = 1, \ldots, r$;
(ii) Die Räume $J^1 \cap U/H^1 \cap U$ und $J^1 \cap U^-/H^1 \cap U^-$ sind isotrop und orthogonal zu $J^1 \cap M/H^1 \cap M$ bezüglich χ_θ;
(iii) Es besteht bezüglich χ_θ die orthogonale direkte Summenzerlegung $J^1/H^1 = J^1 \cap M/H^1 \cap M \perp J^1 \cap U/H^1 \cap U \times J^1 \cap U^-/H^1 \cap U^-$.

Ebenfalls wie im zerfallenden Falle beweisen wir:

(17.6) [CJB93](7.2.4) *Sei $\eta = \eta_{\mathfrak{A}}$ (bzw. η_i) die Heisenbergdarstellung von J^1 (bzw. J_i^1) zum Heisenbergcharakter θ (bzw. θ_i) und Φ ein Charakter der der abelschen Gruppe $J^1 \cap U/H^1 \cap U$, dann existiert eine eindeutige Darstellung η_Φ von $J_{MU}^1 := (J^1 \cap M)(J^1 \cap U)H^1$, so dass $(\eta_\Phi)_{|J^1 \cap M} \simeq \eta_1 \otimes \ldots \eta_r$, $(\eta_\Phi)_{|H^1}$ ist vielfaches von θ und $(\eta_\Phi)_{|J^1 \cap U}$ ist ein vielfaches von Φ.*
Mit diesen Bezeichnungsweisen erhalten wir dann auch
(i) $\eta_{|J_{MU}^1} \simeq \bigoplus_{\Phi \in J^1 \cap \widehat{U/H^1} \cap U} \eta_\Phi$;
(ii) $\forall \Phi \in J^1 \cap \widehat{U/H^1} \cap U : Ind_{J_{MU}^1}^{J^1}(\eta_\Phi) \simeq \eta$;
(iii) $\forall \Phi_1, \Phi_2 \in J^1 \cap \widehat{U/H^1} \cap U \exists! x \in J^1 \cap U^-/H^1 \cap U^- : \eta_{\Phi_2} \simeq \eta_{\Phi_1}^x$.

Von besonderem Interesse sind für uns die Darstellungen $\eta_P := \eta_1$ und $\eta_U := (\eta_P)_{|J^1 \cap M} \simeq \eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_r$, wobei wir η_P als Darstellung von J^1_{MU} auf der Menge der $J^1 \cap U$ Fixvektoren in η auffassen und η_U auch als Darstellung von $(J^1 \cap M)(J^1 \cap U)/(J^1 \cap U)$.

Die Darstellung $\kappa_{|\mathfrak{B}_n^\times J^1}$ erfüllt die Bedingungen von Satz (13.1) bezüglich des entsprechenden Charakters $\theta^\star_{|\mathfrak{B}_n^\times H^1}$ mit $\bar{J} := \mathfrak{B}_n^\times J^1$, $\bar{H} := \mathfrak{B}_n^\times H^1$, $\bar{J}^1 := J^1$, $\bar{J}_p := U^1(\mathfrak{B}_m)J^1$, $\bar{\eta} = \eta$ und $\eta' = \eta_{\mathfrak{A},\mathfrak{B}_m}$, wobei $\mathfrak{B}_m$ eine in $\mathfrak{B}_n$ enthaltene Minimalordnung ist und $\mathfrak{B}_n^\times J^1/J^1 \simeq P_n(\mathfrak{k}_{D'}) \subset Gl_l(\mathfrak{k}_{D'})$ die Parabolische Standartuntergruppe zur Partition n ist.

Betrachte nun andererseits die Darstellung $\eta_U \simeq \eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_r$ von $J^1 \cap M$, welche dadurch entsteht, dass wir auf jedes η_i Hauptsatz (13.2) bezüglich einer entsprechenden Fortsetzung $\theta_i^\star$ von θ_i anwenden, wobei wir für jedes i die Fortsetzung durch dieselbe Fortsetzung des entsprechenden Charakters λ_β aus der definierenden Sequenz von θ erreichen. Wir erhalten eine Fortsetzung $\kappa_U \simeq \kappa_1 \otimes \ldots \otimes \kappa_r$ von $\eta_U \simeq \eta_1 \otimes \ldots \otimes \eta_r$ von $J^1 \cap M$ nach $\mathfrak{B}_n^\times J^1 \cap M$ welche eindeutig durch die Eigenschaften $(\kappa_U)_{|J^1} = \eta$ und $(\kappa_U)_{|\mathfrak{B}_n^\times H^1} \simeq \theta^\star_{|\mathfrak{B}_n^\times H^1} \otimes W'$ bestimmt ist, wobei der Determinantencharakter von W' trivial ist und $\theta^\star_{|\mathfrak{B}_n^\times H^1 \cap M} = \theta_1^\star \otimes \ldots \otimes \theta_r^\star$.

Wir setzen nun κ_U jeweils trivial nach $U^1(\mathfrak{B}_n)J^1 \cap U$ und $H^1 \cap U^-$ fort. Wir erhalten so eine Fortsetzung κ_P von η_P nach $(\mathfrak{B}_n^\times \cap M)(U^1(\mathfrak{B}_n) \cap U)J^1_{MU}$, welche aufgrund der Wahl der Partition n durch y verkettet wird, weil jedes κ_i als Darstellung von $Gl_{n_i}(\mathfrak{o}_{D'})J_i^1 = p_i(\mathfrak{B}_n^\times J^1 \cap M)$ aufgrund seiner charakterisierenden Eigenschaften durch $\pi' I_{n_i}$ normalisiert wird.

Nun betrachten wir die Darstellung $\kappa' \simeq Ind^{\mathfrak{B}_n^\times J^1}_{(\mathfrak{B}_n^\times \cap M)(U^1(\mathfrak{B}_n)\cap U)J^1_{MU}}(\kappa_P)$. Wegen $J^1(\mathfrak{B}_n^\times \cap M)(U^1(\mathfrak{B}_n) \cap U)J^1_{MU} = \mathfrak{B}_n^\times J^1$ und $J^1 \cap (\mathfrak{B}_n^\times \cap M)(U^1(\mathfrak{B}_n) \cap U)J^1_{MU} = J^1_{MU}$ erhalten wir $\kappa'_{|J^1} \simeq Ind^{J^1}_{J^1_{MU}}((\kappa_P)_{|J^1_{MU}}) \simeq Ind^{J^1}_{J^1_{MU}}(\eta_P) \simeq \eta$. Wegen $\mathfrak{B}_n^\times H^1 \supset (\mathfrak{B}_n^\times \cap M)(U^1(\mathfrak{B}_n) \cap U)J^1_{MU}$ und weil $\mathfrak{B}_n^\times J^1$ die Gruppe $\mathfrak{B}_n^\times H^1$ und den Charakter $\theta^\star$ normalisiert, erhalten wir $\kappa'_{|\mathfrak{B}_n^\times H^1} \simeq \bigotimes_{x \in \mathfrak{B}_n^\times J^1/\mathfrak{B}_n^\times H^1} \theta^\star_{|\mathfrak{B}_n^\times H^1} \otimes W'^x$.

Natürlich hat die Darstellung $\bigotimes_{x \in \mathfrak{B}_n^\times J^1/\mathfrak{B}_n^\times H^1} W'^x$ trivialen Determinantencharakter und damit folgt aus (13.2), dass $\kappa_{|\mathfrak{B}_n^\times J^1} \simeq \kappa'$. Weil aber κ_P durch y verkettet wird und κ' von κ_P induziert ist, folgt daher mit [CJB93](4.1.3) die Zwischenbehauptung.

□

Wegen der obigen Eigenschaften (17.3)(i)(ii) von $\mathfrak{B}_n$ haben wir $J \cap J^y = (\mathfrak{B}^\times \cap (\mathfrak{B}^\times)^y)(J^1 \cap (J^1)^y) = (U^1(\mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{B}^\times)^y)(U^1(\mathfrak{B}_n)J^1 \cap (U^1(\mathfrak{B}_n)J^1)^y)$. Auch erhalten wir wie im zerfallenden Fall $(U^1(\mathfrak{B}) \cap (\mathfrak{B}^\times)^y) \subset (U^1(\mathfrak{B}) \cap (U^1(\mathfrak{B}))^y)(\mathfrak{B}_n'^\times \cap (\mathfrak{B}_n'^\times)^y)$, wobei $\mathfrak{B}_n'$ die entsprechende entgegengesetze erbliche ordnung zur Partition n ist, d.h. $\mathfrak{B}_n$ ist von unterer Blockdreiecksgestalt modulo $\mathfrak{Q}$.

Nun ist κ auf $U^1(\mathfrak{B})$ durch $\theta = \theta_{\mathfrak{A}}$ gegeben und damit dort durch y verkettet. Die Einschränkung nach $U^1(\mathfrak{B}_n)J^1$ ist nach obiger Argumentation durch y verkettet und indem wir im Beweis der obigen Zwischenbehauptung y durch y^{-1}, $\mathfrak{B}_n$ durch $\mathfrak{B}_n'$, U durch U^- und so weiter ... ersetzen sowie beachten, dass die Verkettung einer Darstellung invariant unter Inversenbildung ist, erhalten wir dass auch die Einschränkung von κ nach $\mathfrak{B}_n'^\times J^1$ durch y verkettet wird. Damit folgt unsere Behauptung aus der Relation $(\mathfrak{B}^\times \cap (\mathfrak{B}^\times)^y)(J^1 \cap (J^1)^y) \subset (U^1(\mathfrak{B}) \cap (U^1(\mathfrak{B}))^y)(\mathfrak{B}_n'^\times \cap (\mathfrak{B}_n'^\times)^y)(U^1(\mathfrak{B}_n)J^1 \cap (U^1(\mathfrak{B}_n)J^1)^y)$.

□

Literaturverzeichnis

[Bro] P. Broussous. Strates simples dans une algébre simple i,ii.

[Bro98] P. Broussous. Extension du formalisme de bushnell et kutzko au cas d'une algèbre à division. *Proceed. London Math. Soc.*, 1998.

[Bus90] C. J. Bushnell. Induced representations of locally profinite groups. *Journal of Algebra*, 1990.

[Car84] H. Carayol. Représentations cuspidales du groupe linéaire. *Paris école normale supérieure annales scientifiques, Ser. 4*, 1984.

[CJB] G. Henniart C. J. Bushnell. Correspondance de jacquet-langlands explicite ii: le cas de degré égal à la caractéristique résiduelle.

[CJB85] A. Fröhlich C. J. Bushnell. Non-abelian congruence gauss sums and p-adic simple algebras. *Proc. London Math. Soc.*, 1985.

[CJB93] P. C. Kutzko C. J. Bushnell. *The admissible dual of Gl(N) via compact open subgroups.* Princeton University Press, 1993.

[CJB94] P. C. Kutzko C. J. Bushnell. Simple types in gl(n), computing conjugacy classes. *Contemporary Mathematics*, 1994.

[CJB96a] G. Henniart C. J. Bushnell. Local tame lifting for gl(n). *Publ. Math., Inst. Hautes Etud. Sci.*, 1996.

[CJB96b] P. C. Kutzko C. J. Bushnell. Supercuspidal representations of gl(n). Technical report, King's College London, 1996.

[CJB98] P. C. Kutzko C. J. Bushnell. Smooth representations of reductive p-adic groups: Structure theory via types. *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.*, 1998.

[CJB99] P. C. Kutzko C. J. Bushnell. Semisimple types in gl_n. *Compos. Math.*, 1999.

[Cor93] Lawrence Corwin. A construction of the supercuspidal representations of $gl_n(f)$, f p-adic. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1993.

[FB84] J. Tits F. Bruhat. Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. *Bull. Soc. Math. France*, 1984.

[Frö87] A. Fröhlich. Principal orders and embeddings of local fields in algebras. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1987.

[Gra98] M. Grabitz. Erbliche ordnungen in lokalen zentralen einfachen algebren. Master's thesis, Humboldt Universität Berlin, 1998.

[Gra99a] M. Grabitz. Continuation of hereditary orders in local central simple algebras. *Journal of Number Theory*, 1999.

[Gra99b] M. Grabitz. Simple characters for principal orders and their matching. Technical report, Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn, Germany), 1999.

[Hen91] G. Henniart. Correspondance de jacquet-langlands explicite i: le cas modéré de degré premier. *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris*, 1990-91.

[JNB84] D. Kazhdan M.-F. Vigneras J.-N. Bernstein, P. Delingne. *Représentations des groupes réductifs sur un corps local.* Hermann, Paris, 1984.

[MG00] E.-W. Zink M. Grabitz, A. J. Silberger. Level zero types and hecke algebras for local central simple algebras. Technical report, Humboldt Universität Berlin, 2000.

[PB99a] M. Grabitz P. Broussous. Pure elements and intertwining classes of simple strata in local central simple algebras. Technical report, Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn, Germany), 1999.

[P.B99b] P.Broussous. Minimal strata for gl(m,d). *J. reine angew. Math.*, 1999.

[Pon57] Pontrjagin. *Topologische Gruppen.* Teubner Verlag, Leipzig, 1957.

[Rei75] I. Reiner. *Maximal Orders.* Academic Press, New York, 1975.

[Rei91] H. Reimann. Representations of tamely ramified p-adic division and matrix algebras. *Journal of Number Theory*, 1991.

[Ser79] J.-P. Serre. *Local fields.* Springer Verlag, New York, 1979.

[Zin88] E.-W. Zink. Representation filters and their application in the theory of local fields. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1988.

[Zin90] E.-W. Zink. Representation theory of local division algebras i and ii. Technical report, Karl-Weierstass-Institut für Mathematik (Berlin, Germany), 1990.

[Zin92a] E.-W. Zink. Comparison of gl_n and division algebra representations - some remarks on the local case. *Mathematische Nachrichten*, 1992.

[Zin92b] E.-W. Zink. Representation theory of local division algebras. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1992.

[Zin93] E.-W. Zink. Comparison of gl_n and division algebra representations ii. Technical report, Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn, Germany), 1993.

[Zin96] E.-W. Zink. More on embeddings of local fields in simple algebras. Technical report, Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn, Germany), 1996.