Realisierbarer Portfoliowert in illiquiden Finanzmärkten

.

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herr Dipl.-Math. Dietmar Baum
geborem am 20.5.1971 in Ludwigshafen

Gutachter:

1. Prof. Dr. Hans Föllmer
2. Prof. Dr. Rüdiger Frey
3. Prof. Dr. Martin Schweizer

eingereicht am:	2. Mai 2001
Tag der mündlichen Prüfung:	23. Juli 2001

Abstract

We study a continuous time version of Jarrows model for an illiquid financial market in discrete time. In this model one can trade with a bond and a stock. In standard models for liquid financial markets, the stochastic dynamic of stock prices is modelled as a given semimartingale. In contrast, stock prices in our model depend on a fundamental semimartingale that can be interpreted as the cumulative demand of small investors and, in a monotone increasing way, on the strategy of an economic agent. Because of the resulting feedback effects, it is no longer possible to use the well known representation theorems of stochastic analysis to write random variables as stochastic integrals with respect to discounted stock prices and to use this to find hedging strategies for derivatives.

We define realisable portfolio wealth as the discounted proceeds of an idealised liquidation strategy that is optimal in a certain sense. Using Itôs formula, we can write the dynamics of the realisable portfolio wealth of self-financing strategies as the sum of a stochastic integral and a decreasing process. The integrator in the stochastic integral is a local martingale under an equivalent martingale measure that does not depend on the self-financing strategy. This decomposition yields a proof for the fact that our model is arbitrage free.

The decomposition theorem shows that the realisable portfolio wealth of continuous strategies of bounded variation is a local martingale under an equivalent martingale measure. Therefore, we proof an approximation result for stochastic integrals that shows that we can restrict the search for hedging strategies to continuous strategies of bounded variation. By combining the approximation result and the decomposition theorem we can calculate superreplication prices for derivatives and solve the relevant portfolio optimisation problems.

Keywords:
illiquidity, large investor, superreplication, portfolio optimisation

Zusammenfassung

Wir untersuchen eine zeitstetige Variante des zeitlich diskreten Modells von Jarrow für einen illiquiden Finanzmarkt. In dieser kann mit einem Bond und einer Aktie gehandelt werden. Während im Standardmodell eines liquiden Finanzmarktes die stochastische Dynamik des Aktienpreises durch ein festes Semimartingal modelliert wird, hängt der Aktienpreis in unserem Modell einerseits von einem fundamentalen Semimartingal, das sich als kumulative Nachfrage vieler kleiner Investoren interpretieren läßt, andererseits aber auch monoton wachsend vom Aktienbestand der Handelsstrategie eines ökonomischen Agenten ab. Wegen des damit verbundenen Rückkopplungseffekts ist es, im Gegensatz zu liquiden Finanzmärkten, nicht möglich, die bekannten Darstellungssätze der Stochastischen Analysis zu verwenden, um Zufallsvariablen als stochastische Integrale bezüglich des Prozesses der abdiskontierten Aktienpreise darzustellen und auf dieser Basis Absicherungsstrategien für Derivate zu konstruieren.

Wir definieren den realisierbaren Portfoliowert als den abdiskontierten Erlös einer idealisierten, in einem gewissen Sinne optimalen, Liquidationsstrategie. Mit Hilfe der Itô-Formel leiten wir eine Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes selbstfinanzierender Strategien in ein stochastisches Integral und einen fallenden Prozeß her. Dabei ist der Integrator des stochastischen Integrals ein von der betrachteten Strategie unabhängiges lokales Martingal unter einem äquivalenten Martingalmaß. Aus dieser Zerlegung ergibt sich ein Beweis für die Arbitragefreiheit des Modells.

Der Zerlegungssatz zeigt insbesondere, daß der realisierbare Portfoliowert stetiger Strategien von beschränkter Variation ein lokales Martingal unter einem äquivalenten Martingalmaß ist. Wir beweisen deshalb einen Approximationssatz für stochastische Integrale, der es erlaubt, sich bei der Absicherung von Derivaten auf solche Strategien zu beschränken. Durch Kombination des Approximationssatzes und des Zerlegungssatzes können wir Superreplikationspreise von Derivaten bestimmen und die relevanten Portfoliooptimierungsprobleme lösen.

Sclagwörter:
Illiquidität, Großinvestor, Superreplikation, Portfoliooptimierung

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In der klassischen Theorie der Finanzmärkte wird vorausgesetzt, daß alle Wertpapiere liquide sind. Dies bedeutet, daß sie jederzeit in jeder beliebigen Menge gekauft und verkauft werden können, ohne daß dadurch der Preis der Wertpapiere beeinflußt wird.

Diese Annahme ist in realen Finanzmärkten bestenfalls in erster Näherung erfüllt. Daß die ökonomischen Auswirkungen von Illiquidität enorm sein können, haben die Finanzkrisen in Südostasien und die kurz danach folgende Krise des Hedgefonds LTCM eindrucksvoll aufgezeigt.

Gibt man die Annahme der Liquidität auf, so wird die Analyse von Finanzmärkten erheblich komplexer. Dies hat mehrere Gründe.

Erstens kann die Illiquidität eines Wertpapiers sowohl die Zeitpunkte, an denen mit diesem Wertpapier gehandelt werden kann, als auch die dann handelbaren Volumina einschränken. Solch eine Einschränkung erfolgt immer dann, wenn es zu einem Zeitpunkt keinen Handelspartner gibt, der mehr als eine bestimmte Anzahl eines Wertpapiers zu einem beliebigen Preis handeln möchte. Die Menge der möglichen Handelsstrategien kann also eine sehr komplizierte Struktur haben.

Zweitens läßt sich die Annahme der Liquidität als Dimensionsreduktion interpretieren. In einem liquiden Finanzmarkt ist die relevante Information eines Portfolios im Portfoliowert zu aktuellen Marktpreisen enthalten. Anhand des Portfoliowertes können beliebige Portfolios miteinander verglichen werden. Dies wird in den Definitionen von Arbitragemöglichkeiten und Superreplikationsstrategien in liquiden Finanzmärkten ausgenutzt.

Dagegen ist es in illiquiden Finanzmärkten nicht von vornherein klar, wie man beliebige Portfolios miteinander vergleichen kann. Der Portfoliowert zu aktuellen Marktpreisen ist wenig aussagekräftig, da der aktuelle Marktpreis eines Wertpapiers in der Regel nicht für den ganzen Portfoliobestand an diesem Wertpapier realisiert werden kann. Insbesondere macht es keinen Sinn, die Definitionen von Arbitragemöglichkeiten und Superreplikationsstrategien ohne Modifikation aus der Theorie der liquiden Finanzmärkte zu übernehmen. Die Wertpapierpreisprozesse und die Handelsmöglichkeiten ab einem bestimmten Zeitpunkt hängen in einem illiquiden Finanzmarkt im allgemeinen sogar von der gesamten Handelsstrategie bis zu diesem

Zeitpunkt ab. In diesem Fall ist die relevante Information einer Handelsstrategie bis zu einem Zeitpunkt nicht in dem Portfolio der Strategie in diesem Zeitpunkt enthalten.

Auch bei der Betrachtung von Derivaten ist die Liquiditätsannahme dimensionsreduzierend. Beispielsweise unterscheidet man in realen Finanzmärkten Kauf- und Verkaufsoptionen auf ein zugrunde liegendes Wertpapier mit Barausgleich von solchen mit physischer Lieferung. Das zugrunde liegende Wertpapier nennt man Basiswert. Wenn eine Kaufoption mit Barausgleich ausgeübt wird, zahlt der Verkäufer der Option dem Käufer der Option die Differenz zwischen dem Marktwert des Basiswertes und dem vereinbarten Ausübungspreis. Bei der Ausübung einer Kaufoption mit physischer Lieferung muß der Verkäufer der Option dem Käufer der Option den Basiswert für den Ausübungspreis verkaufen.

In liquiden Finanzmärkten muß man für Bewertungszwecke nicht zwischen Kauf- und Verkaufsoptionen mit Barausgleich und den entsprechenden Kontrakten mit physischer Lieferung differenzieren, da die Portfoliowerte der Portfolios, auf die die Optionen bestehen, gleich groß sind. Dagegen muß man in illiquiden Finanzmärkten zwischen diesen beiden Portfolios und somit auch zwischen Optionen mit Barausgleich und solchen mit physischer Lieferung unterscheiden.

Eine dritte Schwierigkeit ergibt sich daraus, daß die Auswirkungen von Handelsstrategien in illiquiden Finanzmärkten im allgemeinen nicht linear in diesen Strategien sind.

Wir zeigen in dieser Arbeit, wie sich diese Komplikationen in einer zeitstetigen Variante des Modells für illiquide Finanzmärkte nach Jarrow [25] mathematisch beherrschen lassen. Dazu führen wir den realisierbaren Portfoliowert ein, welcher den Erlös einer, in einem gewissen Sinne optimalen, Liquidationsstrategie widerspiegelt. Anhand der realisierbaren Portfoliowerte können wir beliebige Portfolios miteinander vergleichen. Darauf aufbauend können wir die Begriffe der Arbitragemöglichkeit und der Superreplikationsstrategie sinnvoll definieren. Anschließend berechnen wir die zugehörigen Superreplikationspreise und verwenden die dabei gewonnenen Erkenntnisse zur Lösung der relevanten Portfoliooptimierungsprobleme.

Wir beschreiben jetzt unsere Resultate im einzelnen.

In Kapitel 1 definieren wir unseren zeitstetigen illiquiden Finanzmarkt auf einem Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtrierung $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$. In diesem illiquiden Finanzmarkt mit endlichem Zeithorizont $[0, T]$ kann ein ökonomischer Agent mit einem liquiden Bond und einer illiquiden Aktie handeln. Die Dynamik der Aktie wird mit Hilfe einer Funktion beschrieben, die die differenzierbare Abhängigkeit des abdiskontierten Aktienkurses von der Zeit, einem stetigen Semimartingal als Zustandsprozeß und der Aktienposition des ökonomischen Agenten zusammenfaßt, wobei die Funktion in der Aktienposition des ökonomischen Agenten monoton steigend ist. Der ökonomische Agent kann also den Aktienpreis durch Kaufen bzw. Verkaufen der Aktie positiv bzw. negativ beeinflussen. Außerdem gibt es ein äquivalentes Martingalmaß für den Prozeß der abdiskontierten Aktienpreise bei konstantem Aktienbestand des ökonomischen Agenten. Wir übernehmen ferner die übliche Definition der Selbstfinanzierbarkeit von Strategien aus der Theorie der liquiden Finanzmärkte. Dies hat zur Folge, daß wir einen Markt modellieren, der auf eine Order des ökonomischen Agenten reagiert, bevor diese ausgeführt wird. Vergleichbare Modelle finden sich in der Literatur z.B. in Back [1], Bierbaum [7], Frey [19], Frey und Stremme [20], Jarrow [25], Papanicolaou und Sircar [28], Platen und Schweizer [29] und Schönbucher und Wilmott [31].

Anschließend führen wir den Begriff des zu einem illiquiden Finanzmarkt assoziierten Finanzmarktes ein. Der assoziierte Finanzmarkt ist ein liquider Finanzmarkt, in dem ebenfalls mit einer Aktie und einem Bond gehandelt werden kann. Dabei hat der Bond die gleiche Dynamik wie der Bond des illiquiden Finanzmarktes. Der Prozeß der Aktienkurse im assoziierten Finanzmarkt wird durch den Prozeß der Aktienkurse bei konstant verschwindender Strategie des ökonomischen Agenten im illiquiden Finanzmarkt definiert. Der assoziierte Finanzmarkt stellt somit ein natürliches Referenzmodell für den illiquiden Finanzmarkt dar. Wir zeigen außerdem im weiteren Verlauf der Arbeit, daß die Eigenschaften des illiquiden Finanzmarktes eng mit den Eigenschaften des assoziierten Finanzmarktes verknüpft sind.

In Kapitel 2 definieren wir den realisierbaren Wert und den Buchwert eines Portfolios wie in Schönbucher und Wilmott [31]. Der Buchwert eines Portfolios bezeichnet den Wert, den man erhält, wenn man alle Positionen des Portfolios mit dem gerade aktuellen Wertpapierpreis bewertet. Dieser aktuelle Wertpapierpreis hängt natürlich von der Anzahl der Aktien im Portfolio ab. Im Gegensatz zum Buchwert stellt der realisierbare Portfoliowert den Wert dar, den man mittels einer idealisierten „unendlich schnellen aber nicht instantanen" Liquidationsstrategie erzielen kann. Der realisierbare Portfoliowert ist der Grenzerlös einer Folge von monotonen stetigen Strategien, die das Portfolio in einer gegen null gehenden Zeitspanne liquidieren. Dies bedeutet, daß die positiven Bestände des Portfolios in der jeweiligen Zeitspanne verkauft werden, während gleichzeitig die Positionen des Portfolios, die Leerverkäufe repräsentieren, eingedeckt werden.

In Satz 2.5 zerlegen wir die Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes selbstfinanzierender Strategien mit Hilfe der allgemeinen Itô-Formel in die Summe zweier explizit gegebener Prozesse. Der eine Prozeß ist ein stetiges lokales Martingal unter einem äquivalenten Martingalmaß, der andere ein fallender Prozeß. Für selbstfinanzierende Strategien mit nach unten beschränktem realisierbaren Portfoliowert ist der Prozeß des realisierbaren Portfoliowertes ein Supermartingal. Solche Strategien nennen wir in Analogie zur Theorie der liquiden Finanzmärkte zulässig. Für Strategien mit verschwindender quadratischer Variation ist der fallende Prozeß in der Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes konstant gleich null. Insbesondere erweist sich die Liquidation mit monotonen stetigen Strategien, die implizit in der Definition des realisierbaren Portfoliowertes enthalten ist, als optimal. Die Berücksichtigung dieser optimalen Liquidationsstrategie bietet die notwendige Normierung, um Portfolios mit unterschiedlichen Aktienpositionen vergleichen zu können.

Unter einer Arbitragemöglichkeit im illiquiden Finanzmarkt verstehen wir eine zulässige Strategie, deren realisierbarer Portfoliowert im Zeitpunkt T mindestens genauso groß ist wie im Zeitpunkt 0 und gleichzeitig mit einer strikt positiven Wahrscheinlichkeit sogar echt größer ist. Aus unserer Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes erhalten wir einen transparenten Beweis einer Variante des No-Arbitrage-Satzes in illiquiden Finanzmärkten von Jarrow [25] bzw. Bierbaum [7]. Dieser besagt, daß es in illiquiden Finanzmärkten keine Arbitragemöglichkeiten gibt. Der ökonomischen Agent kann also seine Manipulationsmacht nicht ausnutzen, um einen risikofreien Gewinn zu erzielen.

Die explizite Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes bildet die Basis für die Vollständigkeits-, Superreplikations- und Nutzenmaximierungsüberlegungen bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes in den folgenden Kapiteln. Da sich Buchwerte und realisierbare Portfoliowerte auf einfache Weise ineinander umrechnen lassen, kann man die explizite Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes auch für die Lösung von Problemen benutzen, die mit Hilfe von Buchwerten formuliert sind.

In Kapitel 3 betrachten wir eine Verallgemeinerung der illiquiden Finanzmärkte aus Kapitel 1, in der wir auf die dort vorausgesetzte Markovstruktur und Differenzierbarkeitsstruktur verzichten. Das Konzept des realisierbaren Portfoliowertes ist auch in diesen allgemeineren illiquiden Finanzmärkten von großer Bedeutung. Für elementare Strategien erhalten wir wieder eine Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes in ein lokales Martingal unter einem äquivalenten Martingalmaß und in einen fallenden Prozeß. Durch einen Grenzübergang können wir auch die Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes beliebiger selbstfinanzierender Strategien beschreiben. Auch in diesem Kontext erhalten wir mit einem geeigneten Zulässigkeitsbegriff ein No-Arbitrage-Ergebnis, welches das aus dem vorangegangenen Kapitel erweitert.

Die Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes aus Satz 2.5 zeigt, daß stetigen Handelsstrategien von beschränkter Variation eine besondere Bedeutung in illiquiden Finanzmärkten zukommt. Deswegen wird in Kapitel 4 untersucht, inwieweit man Prozesse in Integranden von stochastischen Integralen einer speziellen Form durch stetige Prozesse von beschränkter Variation ersetzen kann, ohne daß das neue stochastische Integral zu weit vom alten abweicht. Wir zeigen, daß wir das ursprüngliche stochastische Integral durch geschickte Wahl des stetigen Prozesses von beschränkter Variation gleichmäßig approximieren können.

Dies wird in Kapitel 5 genutzt, um zu untersuchen, welche Zufallsvariablen gleichmäßig durch den realisierbaren Portfoliowert in T von zulässigen Strategien approximiert werden können. Wir zeigen, daß eine derartige gleichmäßige Approximation einer beliebigen nach unten beschränkten, bezüglich des eindeutigen äquivalenten

Martingalmaßes integrierbaren, $\mathcal{F}_T$-meßbaren Zufallsvariable möglich ist, wenn der assoziierte Finanzmarkt vollständig ist und eine gewisse Integralbedingung erfüllt ist. Der für eine solche Approximation minimal notwendige realisierbare Portfoliowert im Zeitpunkt 0 ist der Erwartungswert der abdiskontierten Zufallsvariablen unter dem eindeutig bestimmten äquivalenten Martingalmaß. Dagegen ist es im allgemeinen nicht möglich, jede solche Zufallsvariable mit dem realisierbaren Portfoliowert in T einer zulässigen Strategie, deren realisierbarer Portfoliowert im Zeitpunkt 0 durch diesen Erwartungswert gegeben ist, zu replizieren. Insofern erweitert das Konzept der gleichmäßigen Approximierbarkeit die Idee der Replikation in geeigneter Weise auf illiquide Finanzmärkte.

Die Integralbedingung bedeutet, daß der Preiseinfluß der Zustandsvariablen für extreme Aktienbestände des ökonomischen Agenten nicht zu klein ist. Diese Bedingung hat zur Folge, daß die Dynamik des abdiskontierten Portfoliowertes jeder selbstfinanzierenden Semimartingalstrategie im assoziierten Finanzmarkt mit der Dynamik des lokalen Martingalteils der Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes einer zugeordneten selbstfinanzierenden Strategie im illiquiden Finanzmarkt übereinstimmt. Die Integralbedingung wird für die meisten Ergebnisse der nächsten Kapitel benötigt.

In Kapitel 6 werden die Resultate aus den vorangegangenen Kapiteln verwendet, um eine Charakterisierung von Superreplikationspreisen von Derivaten bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes und bezüglich des Buchwertes zu erlangen.

Unter einem Derivat $H = (H_C, H_S)$ verstehen wir einen zweidimensionalen Vektor von Zufallsvariablen auf dem Produktraum $(\Omega \times \mathsf{R}, \mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(\mathsf{R}))$. Mit einem Derivat $H = (H_C, H_S)$ verbinden wir die ökonomische Bedeutung eines Finanzinstrumentes, bei dem der Käufer des Derivats vom Verkäufer des Derivats im Zeitpunkt T eine Zahlung in Höhe von $H_C\left(\omega, \pi_T^1(\omega)\right)$ und gleichzeitig $H_S\left(\omega, \pi_T^1(\omega)\right)$ Aktien erhält, wobei π_T^1 die Aktienposition des ökonomischen Agenten in T ist. Ein Derivat mit $H_S = 0$ nennen wir Derivat mit Barausgleich. Kauf- und Verkaufsoptionen auf die illiquide Aktie mit Barausgleich bzw. mit physischer Lieferung sind Beispiele für wichtige real existierende Finanzinstrumente, die wir als Derivate modellieren können.

Seien nun ein Derivat $H = (H_C, H_S)$ und eine zulässige Strategie des ökonomischen Agenten mit Aktienbestand π_T^1 in T gegeben. Wir betrachten das Portfolio, welches wir erhalten, wenn wir den Bondbestand der Strategie in T um eine Anzahl von Bonds mit Gesamtwert $H_C(\pi_T^1)$ verringern und den Aktienbestand der Strategie in T um $H_S(\pi_T^1)$ reduzieren. Wenn dieses Portfolio in T einen positiven realisierbaren Portfoliowert hat, so nennen wir die Strategie Superreplikationsstrategie von H bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes. Sie heißt Superreplikationsstrategie bezüglich des Buchwertes, wenn dieses Portfolio in T einen positiven Buchwert besitzt. Das Infimum der realisierbaren Portfoliowerte im Zeitpunkt 0 von Superreplikationsstrategien bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes bzw. des Buchwertes eines

Derivats heißt Superreplikationspreis des Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes bzw. des Buchwertes.

Der ökonomische Agent kann ein Derivat für einen Preis, der größer als der Superreplikationspreis des Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes ist, risikolos verkaufen. Eine Kombination des Verkaufs des Derivats mit einer geeigneten Superreplikationsstrategie ergäbe dann nämlich eine Arbitragemöglichkeit für den ökonomischen Agenten.

Zunächst bestimmen wir Superreplikationspreise von Derivaten bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes. Wir zeigen, daß wir uns dabei auf Derivate mit Barausgleich beschränken können, da eine Strategie genau dann eine Superreplikationsstrategie eines Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes ist, wenn sie eine Superreplikationsstrategie eines zugeordneten Derivats mit Barausgleich bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes ist. Eine Untersuchung des zugeordneten Derivats mit Barausgleich ergibt außerdem, daß die Superreplikationspreise bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes von Kauf- und Verkaufsoptionen mit Barausgleich immer mindestens genauso hoch sind wie die für entsprechende Optionen mit physischer Lieferung. In einem einfachen Beispiel zeigen wir, daß sie sich unterscheiden können.

In Satz 6.8 zeigen wir, daß der Superreplikationspreis bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes eines Derivats $H = (H_C, 0)$ mit Barausgleich unter schwachen Regularitätsbedingungen an H_C mit dem Superreplikationspreis von $\inf_p H_C(\cdot, p)$ im assoziierten Finanzmarkt übereinstimmt. Er läßt sich also als Erwartungswert der abdiskontierten Auszahlung von $\inf_p H_C(\cdot, p)$ unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß berechnen, wenn der assoziierte Finanzmarkt vollständig ist.

Im Beweis nutzen wir aus, daß der realisierbare Portfoliowert von zulässigen Strategien unter einem beliebigen äquivalenten Martingalmaß des assoziierten Finanzmarktes ein Supermartingal ist, um zu zeigen, daß der Superreplikationspreis im illiquiden Finanzmarkt mindestens so groß ist wie der Superreplikationspreis von $\inf_p H_C(\cdot, p)$ im assoziierten Finanzmarkt. Für die umgekehrte Ungleichung betrachten wir eine beliebige Superreplikationsstrategie von $H_C(\beta)$ im assoziierten Finanzmarkt, wobei β eine $\mathcal{F}_{T-}$-meßbare Zufallsvariable ist. Aus dieser vorgegebenen Strategie konstruieren wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Superreplikationsstrategie des Derivats $(H_C(\beta), 0)$ bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes mit Aktienbestand β in T und einem realisierbaren Portfoliowert im Zeitpunkt 0, welches das Anfangskapital der vorgegebenen Strategie um genau ε übersteigt. Somit erhalten wir, daß der Superreplikationspreis von H bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes nicht größer als der Superreplikationspreis von $H_C(\beta)$ im assoziierten Finanzmarkt sein kann. Eine Minimierung der Superreplikationspreise der $H_C(\beta)$ im assoziierten Finanzmarkt über alle $\mathcal{F}_{T-}$-meßbaren Zufallsvariablen β liefert dann die gewünschte umgekehrte Ungleichung.

Anschließend betrachten wir die Superreplikation von Derivaten bezüglich des Buchwertes. Wir zeigen, daß sich der Superreplikationspreis eines Derivats bezüglich des Buchwertes als Superreplikationspreis eines zugeordneten Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes berechnen läßt. Wenn der assoziierte Finanzmarkt vollständig ist, erhalten wir eine Charakterisierung des Superreplikationspreises bezüglich des Buchwertes als einfach berechenbaren Erwartungswert unter dem äquivalenten Martingalmaß. Dies ist insbesondere deswegen von Interesse, weil Untersuchungen des Replikationspreises bezüglich des Buchwertes bisher nur eine Charakterisierung des Replikationspreises bzw. der replizierenden Strategie mittels nichtlinearer partieller Differentialgleichungen zuließen (vgl. Frey [19] und Schönbucher und Wilmott [31]). Mit Hilfe des Darstellungssatzes 2.5 zeigen wir, daß eine Superreplikation eines Derivats in der Regel billiger als eine perfekte Replikation ist, wenn die quadratische Variation der Replikationsstrategie nicht verschwindet. Dies liegt daran, daß die mit der quadratischen Variation verbundenen negativen Auswirkungen auf den realisierbaren Portfoliowert durch eine Superreplikation mit Hilfe stetiger Strategien von beschränkter Variation vermieden werden können.

In Kapitel 7 betrachten wir zwei Portfoliooptimierungsprobleme des ökonomischen Agenten. Das Ziel des ökonomischen Agenten besteht darin, seinen erwarteten Nutzen aus einem Konsumplan zu maximieren. Dabei wird bei dem einen Portfoliooptimierungsproblem als Nebenbedingung gefordert, daß der realisierbare Portfoliowert im Endzeitpunkt nicht negativ ist. Das andere Portfoliooptimierungsproblem stellt die Nebenbedingung eines nicht negativen Buchwertes im Endzeitpunkt. Unsere Untersuchung umfaßt sowohl zustandsabhängige als auch unstetige Nutzenfunktionen und läßt sich insbesondere auf die Probleme des Quantil-Hedgings und des effizienten Hedgings (vgl. Föllmer und Leukert [17] und [18]) von Derivaten mit Barausgleich, die vom Aktienbestand des ökonomischen Agenten unabhängig sind, anwenden.

In praktischer Hinsicht ist das Problem der Portfoliooptimierung, in dem der Nutzen aus dem realisierbaren Portfoliowert maximiert werden soll, viel relevanter als das analoge Problem, in dem der Nutzen aus dem Buchwert bezogen wird. Dies liegt daran, daß der Buchwert manipuliert werden kann und sich durch eine Auflösung des Portfolios nicht vollständig in realen Konsum umwandeln läßt. Im Gegensatz dazu ist solch eine Umwandlung für den realisierbaren Portfoliowert zumindest mit einer idealisierten Grenzstrategie risikofrei möglich. Die Lösung des Portfoliooptimierungsproblems bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes liefert somit die theoretische Grundlage für Fondsmanager, die in Werte des Neuen Marktes oder ähnliche Nebenwerte mit reduzierter Liquidität investieren. Die Betrachtung des zweiten Problems macht aus der Sicht eines ökonomischen Agenten Sinn, dessen Bezahlung von der Buchwert-Performance seines Portfolios abhängt.

In Satz 7.9 zeigen wir, daß der optimale Nutzen aus dem realisierbaren Portfoliowert mit dem optimalen Nutzen des analogen Portfoliooptimierungsproblems im assoziierten Finanzmarkt mit gleichem Anfangskapital übereinstimmt, wenn die indirekte Nutzenfunktion des Nutzenmaximierungsproblems im assoziierten Finanzmarkt linksstetig ist. Außerdem zeigen wir, daß sich der optimale Nutzen aus dem Buchwert unter der Zusatzannahme der Vollständigkeit des assoziierten Finanzmarktes als optimaler Nutzen des analogen Problems im assoziierten Finanzmarkt mit erhöhtem, explizit gegebenem Anfangskapital berechnen läßt. Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der vorausgesetzten Monotonie der Nutzenfunktion in den Konsumplänen und der Charakterisierung der Superreplikationspreise im illiquiden Finanzmarkt als Superreplikationspreise im assoziierten Finanzmarkt.

Das Ergebnis eines im Vergleich zum assoziierten Finanzmarkt unveränderten optimalen Nutzens aus realisierbarem Portfoliowert steht im Gegensatz zu der Verringerung des optimalen Nutzens beim Einführen von proportionalen Transaktionskosten in einen liquiden Finanzmarkt (vgl. z.B. Constantinides [8], Davis und Norman [12] und Shreve und Soner [32]). Einerseits wird der Nutzen des ökonomischen Agenten nicht dadurch verringert, daß der Markt auf eine Order des ökonomischen Agenten reagiert, bevor diese ausgeführt wird. Der ökonomischer Agent kann diese negativen Einwirkungen nach unserem Darstellungssatz für den realisierbaren Portfoliowert vermeiden, indem er stetige Handelsstrategien von beschränkter Variation verwendet. Andererseits ist der ökonomische Agent nicht in der Lage, seine Marktmacht auszunutzen. Der Darstellungssatz für den realisierbaren Portfoliowert zeigt nämlich auch, daß wir jeder zulässigen Strategie im illiquiden Finanzmarkt eine zulässige Strategie im assoziierten Finanzmarkt, deren Anfangskapital durch den realisierbaren Portfoliowert der ursprünglichen Strategie im Zeitpunkt 0 gegeben ist, zuordnen können, so daß der abdiskontierte Portfoliowert der zugeordneten Strategie mindestens so groß ist wie der realisierbare Portfoliowert der ursprünglichen Strategie.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Professor Dr. Hans Föllmer für die effektive Betreuung und die Schaffung des notwendigen kreativen Umfelds ganz herzlich bedanken. Seine Art Wahrscheinlichkeitstheorie und Finanzmathematik zu lehren legte den Grundstein für meine andauernde Begeisterung für diese Gebiete.

Des weiteren möchte ich mich bei meinen Freunden und Kollegen Ulrich Baum, Dirk Becherer, Jürgen Bierbaum, Urs Gruber, Ulrich Horst, Alexander Schied und insbesondere Peter Bank für hilfreiche Anregungen, Kommentare und fortwährende psychologische Unterstützung bedanken.

Kapitel 1

Modell für illiquide Finanzmärkte

Wir stellen in diesem Kapitel unsere zeitstetige Variante des Modells für einen illiquiden Finanzmarkt nach Jarrow [25] vor. In einem solchen illiquiden Finanzmarkt kann ein ökonomischer Agent mit einem liquiden Bond und einer illiquiden Aktie handeln. Dabei äußert sich die Illiquidität der Aktie darin, daß der ökonomische Agent den Preis der Aktie durch Kaufen bzw. Verkaufen der Aktie positiv bzw. negativ beeinflußt. Anschließend führen wir den Begriff des assoziierten Finanzmarktes ein. Es stellt sich in den folgenden Kapiteln heraus, daß dieser nicht nur ein natürliches Referenzmodell für den illiquiden Finanzmarkt darstellt, sondern daß sich auch viele Eigenschaften des assoziierten Finanzmarktes auf den illiquiden Finanzmarkt übertragen.

Im ersten Abschnitt stellen wir die Notationen und Vereinbarungen zusammen, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit benutzen werden.

1.1 Notationen und Vereinbarungen

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtrierung. Die Filtrierung erfülle die üblichen Bedingungen der Vollständigkeit und Rechtsstetigkeit. Sei $\mathcal{F}_0$ hierbei P-fast sicher trivial. Wenn nicht explizit etwas anderes angenommen wird, sind alle im folgenden betrachteten Prozesse auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, P)$ definiert. Gleichungen und Ungleichungen für Zufallsvariablen sowie Aussagen über Eigenschaften der Pfade eines Prozesses (z.B. wenn ein Prozeß als RCLL angenommen wird, d.h., daß die Pfade rechtsstetig sind und daß die linksseitigen Grenzwerte der Pfade existieren) sind immer P-fast sicher zu verstehen. In einzelnen Beispielen werden wir die Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ näher spezifizieren.

Wir setzen

$$\mathsf{N}_0 \stackrel{\triangle}{=} \{0, 1, ...\}$$

und

$$\mathsf{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1, 2, ...\}.$$

Unter einem lokalen Martingal $(M_t)_{s \leq t \leq T}$ verstehen wir wie Protter [30] einen adaptierten RCLL-Prozeß, für den es eine Folge $(T_n)_{n \in \mathsf{N}_0}$ von Stoppzeiten mit $0 \leq T_n \leq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathsf{N}_0$ und $P[\cup_{n \in \mathsf{N}_0} \{T_n = T\}] = 1$ gibt, so daß

$$(M_{T_n \wedge t} 1_{T_n > s})_{s \leq t \leq T}$$

ein Martingal ist. Eine solche Folge von Stoppzeiten nennen wir lokalisierende Sequenz des lokalen Martingals $(M_t)_{s \leq t \leq T}$. Wegen der Berücksichtigung der Indikatorfunktionen gibt es lokale Martingale $(M_t)_{s \leq t \leq T}$, für die M_s nicht integrierbar ist. Nach Theorem $I.46$ in Protter [30] gibt es für jedes lokale Martingal $(M_t)_{s \leq t \leq T}$ eine lokalisierende Sequenz, so daß

$$(M_{T_n \wedge t} 1_{T_n > s})_{s \leq t \leq T}$$

für jedes n ein gleichmäßig integrierbares Martingal ist. Wir nennen solch eine Sequenz gleichmäßig lokalisierende Sequenz. Wenn wir von einem lokalen Martingal $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ unter einem (zu P) äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaß P^* sprechen, so verstehen wir darunter, daß $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ ein lokales Martingal bezüglich $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, P^*)$ ist. Wir benutzen die Kurzschreibweise

$$\xi_t^1 dX_t^1 = \xi_t^2 dX_t^2$$

für Semimartingale X^1 und X^2 und bezüglich X^1 bzw. X^2 integrierbare Prozesse ξ^1 und ξ^2, um auszudrücken, daß

$$\int_{0+}^t \xi_s^1 dX_s^1 = \int_{0+}^t \xi_s^2 dX_s^2 \qquad \text{für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Wenn X ein Semimartingal ist, so bezeichnen wir mit X^c den stetigen Martingalteil des Semimartingals. Für einen linksstetigen Prozeß X bezeichnen wir mit X_- den Prozeß der pfadweisen linksseitigen Grenzwerte und mit ΔX den Prozeß $X - X_-$ der Sprünge von X. Ist $H \in L^1(P^*)$ bzw. $H \in L^1(P^0)$, so schreiben wir $E^*[H]$ bzw. $E^0[H]$ für $E^{P^*}[H]$ bzw. $E^{P^0}[H]$. Außerdem bezeichne $L^0(\mathcal{G})$ für eine σ-Algebra $\mathcal{G}$ auf Ω die Menge aller Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{G})$. Wenn $\mathcal{Q}$ eine Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, so nennen wir einen Prozeß $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ $\mathcal{Q}$-Supermartingal bzw. $\mathcal{Q}$-Martingal, wenn X Supermartingal bzw. Martingal unter allen $Q \in \mathcal{Q}$ ist.

Im Text kommen parameterabhängige Semimartingale der Form $(X_t(y))_{0 \leq t \leq T}$ $(y \in \mathsf{R})$ vor, wobei $X_t(y)$ in y monoton steigend ist. Wir bezeichnen dann mit

$dX_t(y)$ das stochastische Differential des Semimartingals und mit $X_t(dy)$ das von (t,ω) abhängige Lebesgue-Stiltjes-Differential.

Seien $x, a, b \in \overline{\mathsf{R}}$. Unter der Schreibweise $x \in [a,b]$ verstehen wir $a \leq x \leq b$, wenn $a \leq b$ und $b \leq x \leq a$, wenn $b < a$. Entsprechend ist auch die Schreibweise $x \in (a,b)$ mit $a \neq b$ zu verstehen. Diese Konvention gilt nicht für Intervalle, die implizit in Integralen enthalten sind, d.h. es gilt $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

1.2 Illiquide Finanzmärkte

Wir definieren nun unseren Begriff eines illiquiden Finanzmarktes. Dabei besteht $C^2([0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R})$ aus allen Funktionen, die Einschränkungen einer $C^2(\mathsf{R}^3)$-Funktion auf $[0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R}$ sind.

Definition 1.1 *Ein illiquides Wertpapier ist eine Abbildung*

$$\Psi : [0,T] \times \Omega \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$$

der Form

$$\Psi(t,\omega,p) = \psi(t, Z_t(\omega), p),$$

wobei gilt:

1. *Z ist ein stetiges Semimartingal.*
2. *$\psi \in C^2([0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R})$ mit*
$$\psi_p(t,z,p) \geq 0 \text{ auf } [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R}. \tag{1.1}$$
3. *Es gibt ein zu P äquivalentes Maß P^*, so daß für jedes $p \in \mathsf{R}$ gilt:*
$$(\psi(t, Z_t, p))_{0 \leq t \leq T} \text{ ist lokales Martingal unter } P^*. \tag{1.2}$$
4. *Es gilt*
$$\psi_z(s,z,p) > 0 \text{ auf } [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R}. \tag{1.3}$$

Definition 1.2 *Ein illiquider Finanzmarkt ist ein Tupel (B,Ψ) bestehend aus einem illiquiden Wertpapier Ψ und einem Bondpreisprozeß B mit*

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds} \qquad (0 \leq t \leq T), \tag{1.4}$$

wobei r ein progressiv meßbarer und beschränkter Prozeß ist.

Die Abbildung Ψ beschreibt den abdiskontierten Preis des illiquiden Wertpapiers in unserem Finanzmarkt, der von der Zeit t, der Zustandsvariablen $Z_t(\omega)$ und dem Bestand p des ökonomischen Agenten an diesem Wertpapier abhängt. Die Dynamik des Preises des illiquiden Wertpapiers bei konstantem Portfoliobestand $p \in \mathsf{R}$ ist also durch den Prozeß

$$(B_t\psi(t, Z_t, p))_{0\leq t\leq T}$$

gegeben. Wir bezeichnen dieses Wertpapier der Einfachheit halber als Aktie, obwohl es nicht notwendigerweise eine Aktie modellieren muß. Insbesondere muß der Preis des Wertpapiers nicht positiv sein. Die Zufallsvariablen r_t $(0 \leq t \leq T)$ sind die risikofreien kurzfristigen Zinssätze, die in den infinitesimal kleinen Zeitintervallen $[t, t + dt]$ gültig sind.

Die Eigenschaft (1.1) bedeutet, daß ein Aktienkauf durch den ökonomischen Agenten den Preis der Aktie in die Höhe treibt und entsprechend ein Verkaufen eine negative Einwirkung auf den Aktienpreis hat. Die Aussage (1.2) besagt, daß der Prozeß der abdiskontierten Aktienpreise bei konstantem Aktienbestand des ökonomischen Agenten ein lokales P^*-Martingal ist.

Der Zustandsprozeß Z kann z.B. als Prozeß der Fundamentalwerte der Aktie oder als Prozeß der kumulierten Liquiditätsnachfrage anderer ökonomischer Agenten interpretiert werden. Die Annahme der Stetigkeit von Z ist technischer Natur und wird in Satz 2.5 benötigt. In Kapitel 3, in dem das Konzept der illiquiden Wertpapiere verallgemeinert wird, untersuchen wir auch illiquide Wertpapiere mit unstetigen Zustandsprozessen. Die Eigenschaft 4. besagt, daß der Aktienpreis streng monoton steigend von der Zustandsvariablen abhängt. Diese Eigenschaft ist für die folgenden No-Arbitrage-Überlegungen nicht notwendig. Sie erleichtert jedoch den direkten Vergleich zwischen dem illiquiden Finanzmarkt und einem assoziierten liquiden Finanzmarkt.

Bemerkung 1.3 *Ähnliche Definitionen wurden in einem diskreten Finanzmarkt zuerst von Jarrow [25] verwendet und von Bierbaum [7] auf einen stetigen Finanzmarkt übertragen (vgl. auch Bemerkung 3.4). Cuoco und Cvitanić [9] und Cvitanić und Ma [11] modellieren einen illiquiden Finanzmarkt, in dem die Preiseinwirkung des Wertpapierbestands des ökonomischen Agenten nicht instantan, sondern via des Drifts und der Volatilität in einer Stochastischen Differentialgleichung für den Wertpapierpreisprozeß erfolgt. Bank [2] verbindet Elemente dieser Modelle mit Elementen des Modells von Jarrow [25].*

In der Literatur werden illiquide Finanzmärkte häufig mit Hilfe von Gleichgewichtsüberlegungen motiviert (vgl. Back [1], Bierbaum [7], Frey [19], Frey und

Stremme [20], Jarrow [25],Papanicolaou und Sircar [28] und Schönbucher und Wilmott [31]). Dabei handelt ein Großinvestor mit einem Referenzhändler, der als Stellvertreter für viele Kleinanleger fungiert. Es wird angenommen, daß die Überschußnachfrage des Referenzhändlers nur von der Zeit, dem Zustandsprozeß Z und dem vorgeschlagenen Preis abhängt. Außerdem wird die ökonomisch plausible Annahme getroffen, daß die Überschußnachfrage des Referenzhändlers fallend im vorgeschlagenen Preis ist. Aus der Markträumungsbedingung erhält man eine Reaktionsfunktion, die die Rolle der Abbildung Ψ spielt. Die Annahme $\psi_z > 0$ bedeutet in dieser Interpretation, daß die Überschußnachfrage des Referenzhändlers in der Zustandsvariablen streng monoton steigt. Die in (1.2) geforderte Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes bedeutet in diesem Zusammenhang, daß es bei konstantem Aktienbestand des ökonomischen Agenten keinen *Free-Lunch* mit verschwindendem Risiko (vgl. Delbaen und Schachermayer [13]) für die Kleinanleger gibt.

Definition 1.4 *$\mathcal{P}^p$ ist für beliebige $p \in \mathsf{R}$ die Menge aller zu P äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße P^p, so daß $(\psi(t, Z_t, p))_{0 \le t \le T}$ ein lokales P^p-Martingal ist. Wir setzen*

$$\mathcal{P}^* \stackrel{\triangle}{=} \cap_{p \in \mathsf{R}} \mathcal{P}^p. \tag{1.5}$$

Der dritte Punkt aus Definition 1.1 läßt sich also äquivalent als

$$\mathcal{P}^* \neq \emptyset$$

schreiben. Insbesondere gilt in einem illiquiden Finanzmarkt

$$\mathcal{P}^0 \neq \emptyset.$$

Definition 1.5 *Eine Strategie des ökonomischen Agenten ist ein zweidimensionaler adaptierter RCLL-Prozeß $\pi = (\pi^0, \pi^1)$, wobei π^1 ein Semimartingal ist.*

Eine Strategie π beschreibt die zeitliche Entwicklung der Anzahl von Bonds und von Aktien, die der ökonomische Agent hält.

Wir benutzen in der Folge häufig die abkürzende Schreibweise

$$S_t^1 \stackrel{\triangle}{=} \psi(t, Z_t, \pi_t^1)$$

für den aus der Strategie π resultierenden abdiskontierten Aktienpreis im Zeitpunkt t.

Bemerkung 1.6 *Da π^1 als Semimartingal angenommen wurde, folgt aus* 1. *und* 2. *aus Definition 1.1 und der Itô-Formel, daß auch $S^1 = (S_t^1)_{0 \le t \le T}$ ein Semimartingal ist.*

Schließlich bezeichnet S den durch

$$S_t \stackrel{\triangle}{=} (S_t^0, S_t^1) = (1, S_t^1) \quad (0 \leq t \leq T) \tag{1.6}$$

gegebenen zweidimensionalen Prozeß der abdiskontierten Preise des Bonds und der Aktie.

Wir stellen nun einige Beispiele für illiquide Wertpapiere vor.

Beispiel 1.7 *Wir betrachten*

$$\Psi(t, \omega, p) \stackrel{\triangle}{=} \phi(p)$$

mit einer steigenden C^2-Funktion ϕ. Der dadurch gegebene Aktienpreisprozeß erfüllt die ersten drei Bedingungen aus Definition 1.1, nicht jedoch (1.3). Da die Überlegungen, die zu dem No-Arbitrage-Ergebnis führen, auch ohne (1.3) auskommen, können wir dieses Beispiel in dem entsprechenden Abschnitt untersuchen.

Beispiel 1.8 *Ein Beispiel für ein illiquides Wertpapier ist*

$$\Psi(t, \omega, p) \stackrel{\triangle}{=} \phi(p) Z_t(\omega)$$

mit

$$Z_t \stackrel{\triangle}{=} Z_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + mt\right), \tag{1.7}$$

einer Brownschen Bewegung W bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ und einer strikt positiven steigenden C^2-Funktion ϕ. Das Martingalmaß aus der Definition ist dann gegeben durch

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp\left[-\frac{m}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2 T\right].$$

Insbesondere erhält man für $\phi \equiv 1$ die klassische Modellierung eines Wertpapiers als geometrische Brownsche Bewegung.

Beispiel 1.9 *Mit Z aus (1.7) und einer steigenden C^2-Funktion ϕ definiert*

$$\Psi(t, \omega, p) \stackrel{\triangle}{=} Z_t(\omega) + \phi(p)$$

ein illiquides Wertpapier mit einer additiven Preiseinwirkung des ökonomischen Agenten.

Beispiel 1.10 *In Back [1] ist W eine von einer Zufallsvariablen ν unabhängige Brownsche Bewegung bezüglich der natürlichen Filtrierung $(\mathcal{F}_t^W)_{0\leq t\leq T}$. W ist also auch eine Brownsche Bewegung bezüglich der Augmentierung $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$ von $\left(\mathcal{F}_t^\zeta\right)_{0\leq t\leq T}$ mit*

$$\zeta_0 \stackrel{\triangle}{=} \nu \text{ und}$$

$$\zeta_t \stackrel{\triangle}{=} W_t \quad \text{für } 0 < t \leq T.$$

Back verwendet Abbildungen $\Psi : ([0,T] \times \Omega \times \mathsf{R}) \to \mathsf{R}$ der Form

$$\Psi(t, \omega, p) = H(t, W_t(\omega) + p),$$

um den Aktienpreis beim Handeln eines Insiders mit einem Marketmaker und Liquiditätshändlern zu modellieren. Dabei ist ν die Insiderinformation des Insiders, die den Aktienpreis direkt nach T repräsentiert. Die Funktion H ist in t auf $(0,T)$ stetig differenzierbar, stetig auf $[0,T]$ und zweimal stetig differenzierbar und strikt monoton steigend im zweiten Argument. Des weiteren wird $E\left[\int_0^T H^2(t, W_t)dt\right] < \infty$ vorausgesetzt. Back definiert einen geeigneten Gleichgewichtsbegriff und zeigt in Lemma 4, daß $(H(t, W_t))_{0\leq t\leq T}$ im Gleichgewicht notwendigerweise ein quadratisch integrierbares Martingal ist. Aus der Itô-Formel folgt, daß dann auch $(H(t, W_t + p))_{0\leq t\leq T}$ für jedes $p \in \mathsf{R}$ ein lokales Martingal ist. Unsere Bedingung (1.2) ist also mit $P^* = P$ erfüllt. In einem solchen Gleichgewicht ist Ψ also ein illiquides Wertpapier, falls $H \in C^2\left([0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R}\right)$. Auch wenn diese zusätzliche Regularität nicht gegeben ist, gilt Satz 2.5 (vgl. Bemerkung 2.8). Um die Konsistenz mit unserer Annahme einer trivialen Anfangsinformation $\mathcal{F}_0$ zu wahren, setzen wir bei der weiteren Betrachtung dieses Beispiels voraus, daß ν eine Konstante ist.

Mit Hilfe der Ito-Formel kann man die kanonische Zerlegung des Prozesses der abdiskontierten Aktienpreise bei festem Aktienbestand des ökonomischen Agenten unter $P^* \in \mathcal{P}^*$ bestimmen. Da der Prozeß der abdiskontierten Aktienpreise bei festem Aktienbestand des ökonomischen Agenten ein lokales $\mathcal{P}^*$-Martingal ist, verschwindet der Term von beschränkter Variation in dieser kanonischen Zerlegung fast sicher. In der folgenden Proposition wird gezeigt, daß die resultierende Gleichung auch bei einer Mischung über ein Intervall von Aktienbeständen richtig bleibt. Der zweite Teil der Proposition wird in der Herleitung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes in Satz 2.5 verwendet.

Proposition 1.11 *Sei Ψ ein illiquides Wertpapier und $Z = M + A$ die kanonische Zerlegung des stetigen Semimartingals Z unter $P^* \in \mathcal{P}^*$ in ein stetiges lokales P^*-Martingal M und einen stetigen Prozeß von beschränkter Variation A. Dann haben wir:*

1. *P-fast sicher gilt*

$$\int_0^t \psi_t(s, Z_s, x)ds + \int_0^t \psi_z(s, Z_s, x)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t \psi_{zz}(s, Z_s, x)d\langle Z^c\rangle_s = 0$$
$$\text{für alle } (t, x) \in [0, T] \times \mathsf{R}. \quad (1.8)$$

2. *Für jede Strategie π und jedes $t \in [0, T]$ gilt P-fast sicher*

$$\int_0^t \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_t(s, Z_s, x)dx\right) ds + \int_0^t \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_z(s, Z_s, x)dx\right) dA_s$$
$$+ \int_0^t \left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi_s^1} \psi_{zz}(s, Z_s, x)dx\right) d\langle Z^c\rangle_s = 0.$$

3. *Für jedes $\mathcal{F}_s$-meßbare β_s sind*

$$(\psi(t, Z_t, \beta_s))_{t\geq s} \quad (1.9)$$

und

$$\left(\int_0^{\beta_s} \psi(t, Z_t, x)dx\right)_{t\geq s} \quad (1.10)$$

lokale P^*-Martingale.

Beweis. Mit Hilfe der Itô-Formel erhalten wir aus (1.2) und der Eindeutigkeit der kanonischen Zerlegung eines stetigen Semimartingals, daß es für jedes (t, x) eine P-Nullmenge $Q(t, x)$ gibt, so daß außerhalb von $Q(t, x)$

$$\int_0^t \psi_t(s, Z_s, x)ds + \int_0^t \psi_z(s, Z_s, x)dA_s + \frac{1}{2}\int_0^t \psi_{zz}(s, Z_s, x)d\langle Z^c\rangle_s = 0 \quad (1.11)$$

gilt. Wegen der Stetigkeit der linken Seite von (1.11) in (t, x) gilt (1.8) außerhalb der P-Nullmenge

$$Q = \cup_{(t,x)\in \mathsf{Q}^2\cap([0,T]\times\mathsf{R})} Q(t, x).$$

Deshalb folgt außerhalb von Q

$$\int_0^y \left(\int_0^t \psi_t(s, Z_s, x)ds\right) dx + \int_0^y \left(\int_0^t \psi_z(s, Z_s, x)dA_s\right) dx$$
$$+ \int_0^y \left(\frac{1}{2}\int_0^t \psi_{zz}(s, Z_s, x)d\langle Z^c\rangle_s\right) dx = 0 \text{ für alle } (t, y) \in [0, T] \times \mathsf{R}$$

und mit dem Satz von Fubini auch

$$\int_0^t \left(\int_0^y \psi_t(s, Z_s, x) dx \right) ds + \int_0^t \left(\int_0^y \psi_z(s, Z_s, x) dx \right) dA_s$$
$$+ \int_0^t \left(\frac{1}{2} \int_0^y \psi_{zz}(s, Z_s, x) dx \right) d\langle Z^c \rangle_s = 0 \text{ für alle } (t, y) \in [0, T] \times \mathsf{R}. \quad (1.12)$$

Wir definieren $t_n^N \triangleq n2^{-N}$ für $n, N \in \mathsf{N}_0$ und eine Folge von RCLL-Prozessen $\left(\theta^N\right)_{N \in \mathsf{N}_0}$ mit

$$\lim_{N \to \infty} \theta_t^N = \pi_t^1 \ P\text{-fast sicher} \quad (0 \leq t \leq T)$$

durch

$$\theta_t^N \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \pi^1_{t_{n+1}^N} 1_{[t_n^N, t_{n+1}^N)}(t) \quad (0 \leq t \leq T).$$

Da wegen der RCLL-Eigenschaft der Pfade von π

$$\sup_{t \in [0,T]} \left| \pi_t^1 \right| < \infty$$

gilt, die linke Seite von (1.12) stetig in y ist und die Ableitungen von ψ auf Kompakta beschränkt sind, zeigt der Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_t(s, Z_s, x) dx \right) ds + \int_0^t \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_z(s, Z_s, x) dx \right) dA_s \\
&\quad + \int_0^t \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi_s^1} \psi_{zz}(s, Z_s, x) dx \right) d\langle Z^c \rangle_s \\
= &\lim_{N \to \infty} \int_0^t \left(\int_0^{\theta_s^N} \psi_t(s, Z_s, x) dx \right) ds + \lim_{N \to \infty} \int_0^t \left(\int_0^{\theta_s^N} \psi_z(s, Z_s, x) dx \right) dA_s \\
&\quad + \lim_{N \to \infty} \int_0^t \left(\frac{1}{2} \int_0^{\theta_s^N} \psi_{zz}(s, Z_s, x) dx \right) d\langle Z^c \rangle_s \\
= &\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n^N \wedge t}^{t_{n+1}^N \wedge t} \left(\int_0^{\pi^1_{t_{n+1}^N}} \psi_t(s, Z_s, x) dx \right) ds \\
&\quad + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n^N \wedge t}^{t_{n+1}^N \wedge t} \left(\int_0^{\pi^1_{t_{n+1}^N}} \psi_z(s, Z_s, x) dx \right) dA_s \\
&\quad + \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n^N \wedge t}^{t_{n+1}^N \wedge t} \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi^1_{t_{n+1}^N}} \psi_{zz}(s, Z_s, x) dx \right) d\langle Z^c \rangle_s \\
= &\ 0.
\end{aligned}$$

Daß (1.9) bzw. (1.10) lokale P^*-Martingale sind, folgt aus (1.8) bzw. (1.12) und der Itô-Formel. ■

Wir definieren jetzt den Begriff einer selbstfinanzierenden Strategie in einem illiquiden Finanzmarkt analog zu dem gleichnamigen Begriff in liquiden Finanzmärkten. Man beachte jedoch, daß S^1 hier von π abhängt.

Definition 1.12 *Eine Strategie π in einem illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ) heißt selbstfinanzierend, wenn*

$$d(\pi_t S_t) = \pi_{t-} dS_t.$$

Wenn ein Semimartingal π^1 vorgegeben ist, so ist der Bondanteil einer selbstfinanzierenden Strategie mit Bondanfangsbestand π_0^0 eindeutig durch

$$d\pi_t^0 \stackrel{\triangle}{=} -S_{t-}^1 d\pi_t^1 - d[\pi^1, S^1]_t \tag{1.13}$$

bestimmt. Der Term $d[\pi^1, S^1]_t$ zeigt wegen der π^1-Abhängigkeit von S^1 insbesondere, daß der Marktpreis der Aktie auf eine Order reagiert, bevor diese ausgeführt wird.

Wenn wir von selbstfinanzierenden Strategien π sprechen, aber nur π^1 und π_0^0 gegeben sind, so setzen wir implizit eine Ergänzung wie in (1.13) voraus.

In liquiden Finanzmärkten besagt das Numéraire-Invarianzprinzip, daß der Begriff der Selbstfinanzierbarkeit unabhängig vom betrachteten Numéraire ist. Die folgende kurze Rechnung zeigt, daß das Numéraire-Invarianzprinzip auch in einem illiquiden Finanzmarkt gültig ist.

Proposition 1.13 *Für jedes strikt positive Semimartingal D gilt, daß π genau dann selbstfinanzierend ist, wenn π selbstfinanzierend bezüglich DS ist, d.h. wenn*

$$d(D_t \pi_t S_t) = \pi_{t-} d(D_t S_t)$$

gilt.

Beweis. Sei π selbstfinanzierend. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned} d(D_t \pi_t S_t) &= D_{t-} d(\pi_t S_t) + \pi_{t-} S_{t-} dD_t + d[D, \pi S]_t \\ &= D_{t-} \pi_{t-} dS_t + \pi_{t-} S_{t-} dD_t + \pi_{t-} d[D, S]_t \\ &= \pi_{t-} d(D_t S_t). \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, daß $d(\pi_t S_t) = d(\frac{1}{D_t} D_t \pi_t S_t) = \pi_{t-} d(\frac{1}{D_t} D_t S_t) = \pi_{t-} dS_t$, wenn π selbstfinanzierend bezüglich DS ist. ■

1.3 Assoziierte Finanzmärkte

Wir können einem illiquiden Finanzmarkt auf natürliche Weise einen liquiden Finanzmarkt zuordnen. Es zeigt sich, daß die Eigenschaften dieses assoziierten Finanzmarktes eng mit den Eigenschaften des illiquiden Finanzmarktes verknüpft sind. Außerdem bietet dieser assoziierte Finanzmarkt einen natürlichen Vergleichspunkt, um die Unterschiede zwischen liquiden und illiquiden Finanzmärkten zu verdeutlichen.

Definition 1.14 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Dann ist der assoziierte Finanzmarkt gegeben durch $(B, \widetilde{S})$ mit*

$$\widetilde{S}_t \stackrel{\triangle}{=} \psi(t, Z_t, 0) \qquad (0 \le t \le T).$$

Im assoziierten Finanzmarkt kann also wie im illiquiden Finanzmarkt ein Bond und eine Aktie gehandelt werden. Dabei ist der Preisprozeß des Bonds identisch mit dem des illiquiden Finanzmarktes. Der Prozeß der abdiskontierten Aktienpreise $\widetilde{S}$ hängt jedoch nicht vom Bestand des ökonomischen Agenten an Aktien ab.

Die Auszeichnung der verschwindenden Aktienposition des ökonomischen Agenten in Definition 1.14 ist willkürlich. Analoge Versionen der Resultate der folgenden Kapitel würden wir auch mit der Definition

$$\widetilde{S}_t \stackrel{\triangle}{=} \psi(t, Z_t, p) \qquad (0 \le t \le T)$$

für ein beliebiges $p \in \mathsf{R}$ erhalten.

Sei $Z = M + A$ die kanonische Zerlegung von Z unter $P^0 \in \mathcal{P}^0$ in ein lokales P^0-Martingal M und einen Prozeß A von beschränkter Variation. Dann gilt

$$d\widetilde{S}_t = \psi_z(t, Z_t, 0) dM_t. \tag{1.14}$$

Diese Darstellung von $\widetilde{S}$ als stochastisches Integral werden wir im Beweis von Satz 2.5 benutzen.

Wir definieren jetzt die Begriffe der Strategie und der Selbstfinanzierbarkeit und Zulässigkeit einer Strategie im assoziierten Finanzmarkt.

Definition 1.15 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt und $\widetilde{S} = \widetilde{M} + \widetilde{A}$ die kanonische Zerlegung von $\widetilde{S}$ unter P in ein lokales P-Martingal $\widetilde{M}$ und einen Prozeß $\widetilde{A}$ von beschränkter Variation. Dann heißt ein progressiv meßbarer Prozeß $\xi = (\xi^0, \xi^1)$ eine Strategie im assoziierten Finanzmarkt, wenn gilt:*

$$\int_0^T |\xi_s^i| ds \; < \; \infty, \; i = 0, 1, \tag{1.15}$$

$$\int_0^T |\xi_s^1| d|\widetilde{A}|_s \; < \; \infty, \tag{1.16}$$

$$\int_0^T \left(\xi_s^1\right)^2 d\langle \widetilde{S} \rangle_s \; < \; \infty. \tag{1.17}$$

Eine Strategie ξ *im assoziierten Finanzmarkt heißt selbstfinanzierend, wenn*

$$d(\xi^0 + \xi^1 \widetilde{S})_t = \xi^1_{t-} d\widetilde{S}_t.$$

Eine Strategie ξ *im assoziierten Finanzmarkt heißt zulässig, falls sie selbstfinanzierend ist und es ein* $\underline{c} \in \mathsf{R}$ *gibt, so daß*

$$\int_0^t \xi^1_s d\widetilde{S}_s \geq \underline{c} \text{ für alle } t \in [0, T].$$

Bemerkung 1.16 *Die Gleichungen (1.15) bis (1.17) haben zur Folge, daß die Integrale*

$$\int_0^T \xi^i_s dB_s,\ i = 0, 1,$$

$$\int_0^T \xi^1_s d\widetilde{S}_s$$

und somit auch

$$\int_0^T \xi^1_s d(B\widetilde{S})_s$$

definiert sind.

Offenbar gilt für eine zulässige Strategie ξ im assoziierten Finanzmarkt, daß $\left(\int_0^t \xi^1_s d\widetilde{S}_s\right)_{0\leq t\leq T}$ unter allen $P^0 \in \mathcal{P}^0$ ein nach unten beschränktes lokales Martingal und somit ein Supermartingal ist.

Wir definieren jetzt die Begriffe der Vollständigkeit und des Superreplikationspreises in gewohnter Weise.

Definition 1.17 *Sei* (B, Ψ) *ein illiquider Finanzmarkt. Der assoziierte Finanzmarkt heißt vollständig, wenn es für jedes nach unten beschränkte* $H = B_T H^* \in L^0(\mathcal{F}_T)$ *mit* $\sup_{P^0 \in \mathcal{P}^0} E^0[H^*] < \infty$ *eine zulässige Strategie* ξ *und ein* $P^0 \in \mathcal{P}^0$ *mit*

$$E^0[H^*] + \int_0^T \xi^1_s d\widetilde{S}_s = H^*$$

gibt.

Die Vollständigkeit des assoziierten Finanzmarktes hat die Eindeutigkeit des Martingalmaßes aus $\mathcal{P}^0$ zur Folge, so daß wegen (1.5)

$$\mathcal{P}^* = \mathcal{P}^0 \text{ und } |\mathcal{P}^*| = 1$$

gilt.

Definition 1.18 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt und $H = B_T H^* \in L^0(\mathcal{F}_T)$. Dann ist*

$$Y^a(H) = \inf\left\{ H_0 \,\middle|\, \exists \xi \text{ zulässig im assoziierten Finanzmarkt mit } H_0 + \int_0^T \xi_s^1 d\widetilde{S}_s \geq H^* \right\} \tag{1.18}$$

der Superreplikationspreis von H im assoziierten Finanzmarkt. Wir nennen eine Strategie ξ wie in (1.18) Superreplikationsstrategie von H im assoziierten Finanzmarkt.

Für nach unten beschränkte H gilt die bekannte Charakterisierung des Superreplikationspreises als Supremum der Erwartungswerte der abdiskontierten Auszahlung unter den äquivalenten Martingalmaßen

$$Y^a(H) = \sup_{P^0 \in \mathcal{P}^0} E^0[H^*]$$

(vgl. El Karoui und Quenez [15], Föllmer und Kabanov [16] und Kramkov [26]).

Beispiel 1.19 *In Beispiel 1.8 gilt*

$$\widetilde{S} = Z\phi(0).$$

Insbesondere ist der assoziierte Finanzmarkt eines Black-Scholes-Finanzmarktes (d.h. $\phi \equiv 1$) ein Black-Scholes-Finanzmarkt. In Beispiel 1.9 haben wir

$$\widetilde{S} = Z + \phi(0).$$

Wenn die Filtrierung die Augmentierung der natürlichen Filtrierung der Brownschen Bewegung ist, so ist der assoziierte Finanzmarkt aus 1.9 immer vollständig, der aus 1.8 genau dann, wenn $\phi(0) \neq 0$.

Kapitel 2

Buchwert, realisierbarer Portfoliowert und No-Arbitrage

Wir stellen den Begriff des realisierbaren Portfoliowertes vor und grenzen ihn vom Buchwert des Portfolios ab. Für illiquide Finanzmärkte können wir mit Hilfe der Itô-Formel die Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes explizit bestimmen. Diese legt in natürlicher Weise einen Zulässigkeitsbegriff nahe, aus dem wir insbesondere ein No-Arbitrage-Ergebnis ableiten können. Die explizite Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes bildet die Grundlage für die Resultate über Vollständigkeit, Superreplikation und Portfoliooptimierung in illiquiden Finanzmärkten, die wir in den nächsten Kapiteln erhalten werden.

2.1 Buchwert und realisierbarer Portfoliowert

Da der ökonomische Agent den Aktienkurs beeinflussen kann, ist der Wert seines Portfolios zu aktuellen Marktpreisen unterschiedlich von dem Wert, den er bei einer Liquidation erzielen kann.

Der Buchwert eines Portfolios beschreibt den Wert des Portfolios zu aktuellen Marktpreisen. Dagegen stellt der realisierbare Portfoliowert den Erlös einer Liquidationsstrategie dar, die das Portfolio gewissermaßen unendlich schnell aber nicht instantan auflöst. Dies ist wie folgt zu verstehen: Angenommen, der ökonomische Agent hat eine Aktienposition von π^1_t in $t < T$ (o.B.d.A. $t < T - 1$). Wir wählen eine Folge von adaptierten, auf $[t, t+\frac{1}{n}]$ stetigen und pfadweise monotonen Prozessen $(\lambda^n)_{n\in\mathsf{N}}$ mit $\lambda^n_t = \pi^1_t$ und $\lambda^n_{t+\frac{1}{n}} = 0$. Die zu diesen Prozessen zugehörigen selbstfinanzierenden Strategien erzielen aus der Liquidation der Aktien einen abdiskontierten

Erlös von

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} \psi(s, Z_s, \lambda_s^n) \left(-\frac{d}{ds}\lambda_s^n\right) ds,$$

den wir mit Hilfe der Substitution $x = \lambda_s^n$ in

$$\int_0^{\pi_t^1} \psi(s(x), Z_{s(x)}, x) dx$$

umformen können. Für $n \to \infty$ konvergiert dieser Term P-fast sicher gegen

$$\int_0^{\pi_t^1} \psi(t, Z_t, x) dx.$$

Dies motiviert folgende Definition:

Definition 2.1 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Der Buchwert V^π eines Portfolios π ist gegeben durch*

$$V_t^\pi \triangleq \pi_t S_t = \pi_t^0 + \pi_t^1 \psi(t, Z_t, \pi_t^1) \qquad (0 \le t \le T).$$

Den realisierbaren Portfoliowert R^π eines Portfolios π definieren wir als

$$R_t^\pi \triangleq \pi_t^0 + \int_0^{\pi_t^1} \psi(t, Z_t, x) dx \qquad (0 \le t \le T).$$

Wir bemerken zuerst, daß der realisierbare Portfoliowert eines Portfolios in liquiden Finanzmärkten immer mit dem Buchwert des Portfolios übereinstimmt.

Die im Begriff des realisierbaren Portfoliowertes implizit enthaltene Auflösung mittels einer unendlich schnellen aber nicht instantanen Liquidationsstrategie liefert eine Normierung, die den Portfoliowert zweier Portfolios mit zwei verschiedenen Aktienbeständen miteinander vergleichbar macht. Satz 2.5 zeigt außerdem, daß diese Normierung zu einer Dynamik führt, die sich in ein explizit gegebenes lokales $\mathcal{P}^0$-Martingal und einen ebenfalls explizit gegebenen fallenden Prozeß zerlegen läßt. Dagegen ist es unklar, welche praktisch relevanten Aussagen ein Vergleich der Buchwerte zweier Portfolios liefert. In der Literatur wurde die Dynamik des Buchwertes untersucht, um Aussagen über die Rückwirkung von simultan von mehreren Marktteilnehmern ausgeführten dynamischen Hedgingaktivitäten zu erhalten (vgl. Frey und Stremme [20] und Platen und Schweizer [29]).

Bemerkung 2.2 *Man beachte, daß sowohl V^π als auch R^π mit Hilfe von diskontierten Wertpapierpreisen definiert wurden. Wegen Proposition 1.13 ist eine selbstfinanzierende Strategie π bezüglich S auch selbstfinanzierend bezüglich BS. Wir haben*

$\pi BS = BV^\pi$ und $B_t\pi_t^0 + \int_0^{\pi_t^1} B_t\psi(t, Z_t, x)dx = B_t R_t^\pi$. Deswegen sind die Definitionen von Superreplikationspreisen bezüglich des Buchwertes und des realisierbaren Portfoliowertes, die wir in den nächsten Abschnitten mit Hilfe von diskontierten Größen geben, äquivalent zu solchen mit nichtdiskontierten Größen.

Bemerkung 2.3 *Bierbaum [7] definiert den realisierbaren Wert analog zu Jarrow [25] mittels*

$$\widetilde{R}_t^\pi \triangleq \pi_{t-}^0 + \pi_{t-}^1\psi(t, Z_t, 0).$$

Der Unterschied zwischen den beiden Definitionen besteht hauptsächlich darin, daß unsere den Wert einer unendlich schnellen aber nicht instantanen Liquidationsstrategie beschreibt, während Bierbaums Definition den Wert bei instantaner Liquidation widerspiegelt. Es zeigt sich unten, daß eine sofortige Auflösung des Portfolios im allgemeinen nicht optimal für den ökonomischen Agenten ist. Außerdem nimmt Bierbaums Definition implizit an, daß das Portfolio wirklich aufgelöst wird, weswegen der realisierbare Wert in t mit Hilfe des Portfoliobestandes in $t-$ definiert wird.

Bemerkung 2.4 *Unsere Definition 2.1 taucht explizit in Schönbucher und Wilmott [31] auf. Auch bei Back [1] ist ein mit dem realisierbaren Portfoliowert vergleichbares Konstrukt in Lemma 1 zu finden. Die von uns beschriebene unendlich schnelle aber nicht instantane Grenzstrategie erläutert er folgendermaßen: „In this lemma, we try to calculate the value of waiting until the ‚last instant' and then trading. The profit from this limit strategy is calculated by moving up or down the residual supply curve at time 1 to the point $p = \nu$."*

Buchwerte und realisierbare Portfoliowerte können mittels

$$\begin{aligned} V_t^\pi &= R_t^\pi + \pi_t^1\psi(t, Z_t, \pi_t^1) - \int_0^{\pi_t^1} \psi(t, Z_t, x)dx \\ &= R_t^\pi + \int_0^{\pi_t^1} x\psi(t, Z_t, dx) \end{aligned} \tag{2.1}$$

ineinander umgerechnet werden. Aussagen über den Buchwert können also in Aussagen über den realisierbaren Portfoliowert umgewandelt werden und umgekehrt. Auf $\{\pi_t^1 = 0\}$ stimmen V_t^π und R_t^π überein.

Aus dem Mittelwertsatz und der Monotonie von ψ in p folgt, daß es eine Abbildung $\beta : \Omega \to \mathsf{R}$ mit $\beta \in [0, \pi_t^1]$ gibt, so daß

$$V_t^\pi - R_t^\pi = \beta\left(\psi(t, Z_t, \pi_t^1) - \psi(t, Z_t, 0)\right) \geq 0 \text{ auf } \left\{\pi_t^1 \neq 0\right\}. \tag{2.2}$$

Der Buchwert ist also immer mindestens genauso groß wie der realisierbare Portfoliowert. In einem strikt illiquiden Finanzmarkt, d.h. einem illiquiden Finanzmarkt mit

$$\psi_p(t,z,p) > 0 \text{ auf } [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R} \tag{2.3}$$

finden wir sogar ein β mit $\beta \in (0, \pi_t^1)$ auf $\{\pi_t^1 \neq 0\}$, so daß (2.2) mit strikter Ungleichung erfüllt ist.

2.2 Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes

Für illiquide Finanzmärkte bestimmen wir nun die Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes mit Hilfe der allgemeinen Itô-Formel. Wir erhalten eine Zerlegung in ein stetiges lokales $\mathcal{P}^0$-Martingal und einen fallenden Prozeß. Diese explizite Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes ist ein zentrales Ergebnis, da sie, insbesondere in Zusammenhang mit (2.1), die Praktikabilität des Konzeptes des realisierbaren Portfoliowertes offenlegt. Die Zerlegung zeigt, daß stetigen Strategien von beschränkter Variation eine besondere Bedeutung zukommt, da der realisierbare Portfoliowert für solche Strategien ein stetiges lokales $\mathcal{P}^0$-Martingal ist. Die explizite Darstellung dieses lokalen $\mathcal{P}^0$-Martingals als stochastisches Integral bezüglich des abdiskontierten Aktienpreises im assoziierten Finanzmarkt ermöglicht in den folgenden Abschnitten die Berechnung von Superreplikationspreisen und optimalen Portfoliostrategien.

Im folgenden Satz ist $\widetilde{S}$ der Prozeß der abdiskontierten Aktienpreise im assoziierten Finanzmarkt nach Definition 1.14.

Satz 2.5 *Sei (B,Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Für eine selbstfinanzierende Strategie π gilt für $0 \leq t \leq T$:*

$$R_t^\pi = R_0^\pi + \int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - L_t^\pi \tag{2.4}$$

mit

$$L_t^\pi \triangleq \int_0^t \frac{1}{2}\psi_p(s,Z_s,\pi_s^1)d\langle \pi^{1c}\rangle_s + \sum_{0<s\leq t}\left(\psi(s,Z_s,\pi_s^1)\Delta\pi_s^1 - \Delta\int_0^{\pi_s^1}\psi(s,Z_s,x)dx\right)$$

und

$$\Xi_t^\pi \triangleq \frac{\left(\int_0^{\pi_t^1}\psi_z(t,Z_t,x)dx\right)}{\psi_z(t,Z_t,0)}.$$

Hierbei ist der Prozeß $L = (L_t)_{0\leq t\leq T}$ pfadweise monoton wachsend.

Beweis. Da π selbstfinanzierend ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
dR_s^\pi &= d\pi_s^0 + d(\pi_s^1 S_s^1) - d(\pi_s^1 S_s^1) + d\left(\int_0^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx\right) \\
&= \pi_{s-}^1 dS_s^1 - d(\pi_s^1 S_s^1) + d\left(\int_0^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx\right) \\
&= -\psi(s, Z_s, \pi_{s-}^1)d\pi_s^1 - d\left[\pi^1, S^1\right]_s + d\left(\int_0^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx\right). \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Wir formen nun den dritten Term mit der allgemeinen Itô-Formel um, wobei wir zusätzlich den Satz von Lebesgue anwenden. Dabei erhalten wir eine integrierbare Majorante, da alle auftauchenden Ableitungen stetig sind und wir ω-weise über ein Kompaktum integrieren. Wir bekommen

$$\begin{aligned}
& d\left(\int_0^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx\right) \\
=\; & \psi(s, Z_s, \pi_{s-}^1)d\pi_s^1 + \frac{1}{2}\psi_p(s, Z_s, \pi_s^1)d\langle \pi^{1c}\rangle_s \\
& + \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_t(s, Z_s, x)dx\right) ds + \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_z(s, Z_s, x)dx\right) dZ_s \\
& + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_{zz}(s, Z_s, x)dx\right) d\langle Z^c\rangle_s + \psi_z(s, Z_s, \pi_s^1)d\langle Z^c, \pi^{1c}\rangle_s \\
& + \left(\Delta \int_0^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx - \psi(s, Z_s, \pi_{s-}^1)\Delta\pi_s^1\right). \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Nun formen wir noch den zweiten Term von (2.5) mit Hilfe von Theorem 4.52 in Jacod und Sirjaev [24] und der allgemeinen Itô-Formel um:

$$\begin{aligned}
& -d\left[\pi^1, S^1\right]_s \\
=\; & -\Delta\pi_s^1 \Delta\psi(s, Z_s, \pi_s^1) - d\langle \pi^{1c}, S^{1c}\rangle_s \\
=\; & -\Delta\pi_s^1 \Delta\psi(s, Z_s, \pi_s^1) - \psi_z(s, Z_s, \pi_s^1)d\langle Z^c, \pi^{1c}\rangle_s - \psi_p(s, Z_s, \pi_s^1)d\langle \pi^{1c}\rangle_s. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Sei $Z = M + A$ die kanonische Zerlegung des stetigen Semimartingals Z unter $P^* \in \mathcal{P}^*$ in ein stetiges lokales P^*-Martingal M und einen stetigen Prozeß von beschränkter Variation A. Wenn wir (2.5), (2.6), (2.7) und 2. aus Proposition 1.11

zusammenfassen, resultiert

$$\begin{aligned} dR_s^\pi &= \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_z(s, Z_s, x)dx\right) dM_s - \frac{1}{2}\psi_p(s, Z_s, \pi_s^1)d\langle\pi^{1c}\rangle_s \\ &\quad + \left(\Delta\int_0^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx - \psi(s, Z_s, \pi_{s-}^1)\Delta\pi_s^1\right) - \Delta\pi_s^1\Delta\psi(s, Z_s, \pi_s^1). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$dR_s^\pi = \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_z(s, Z_s, x)dx\right) dM_s - dL_s^\pi \tag{2.8}$$

und somit unter Beachtung von (1.14) die Behauptung (2.4).

Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es eine Abbildung $\beta : \Omega \to \mathsf{R}$ mit $\beta \in [\pi_{s-}^1, \pi_s^1]$, so daß

$$\begin{aligned} &\psi(s, Z_s, \pi_s^1)\Delta\pi_s^1 - \Delta\int_0^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx \\ = \;&\psi(s, Z_s, \pi_s^1)\Delta\pi_s^1 - \int_{\pi_{s-}^1}^{\pi_s^1} \psi(s, Z_s, x)dx \\ = \;&\left[\psi(s, Z_s, \pi_s^1) - \psi(s, Z_s, \beta)\right]\Delta\pi_s^1 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Wegen der Voraussetzung $\psi_p > 0$ haben wir trivialerweise

$$\frac{1}{2}\int_0^T \psi_p(s, Z_s, \pi_s^1)d\langle\pi^{1c}\rangle_s \geq 0. \tag{2.10}$$

Aus (2.9) und (2.10) folgt die Monotonie von L. ■

Die Zufallsvariable Ξ_t^π läßt sich als in Aktieneinheiten des assoziierten Finanzmarktes gemessene effektive Aktienposition des ökonomischen Agenten im Zeitpunkt t interpretieren. Insbesondere gilt in einem illiquiden Finanzmarkt mit

$$\psi(s, Z_s, p) = Z_s \text{ für } 0 \leq s \leq T,$$

daß die effektive Aktienposition Ξ_t^π einer Strategie π gleich π_t^1 ist.

Die Zufallsvariable L_t^π stellt den Verlust des ökonomischen Agenten aufgrund von unstetigem oder nicht variationsbeschränktem Handeln dar. Anschaulich entsteht dieser, weil der Markt auf eine Order des ökonomischen Agenten reagiert, bevor diese ausgeführt wird.

Der Prozeß $\left(\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s\right)_{0\leq t\leq T}$ ist wegen Satz 4.40 in Jacod und Sirjaev [24] ein stetiges lokales $\mathcal{P}^0$-Martingal. Insbesondere ist der realisierbare Portfoliowert ein stetiges lokales Martingal, wenn die Handelsstrategie stetig und von beschränkter Variation ist. Dies ist eine nachträgliche Rechtfertigung für die Wahl von stetigen monotonen Prozessen $(\lambda^n)_{n\in\mathsf{N}}$ für die unendlich schnelle aber nicht instantane Liquidation, die die Definition des realisierbaren Portfoliowertes motivierte (vgl. auch die folgende Bemerkung).

Man beachte, daß ein illiquides Wertpapier Ψ mehrere Darstellungen

$$\Psi(t,\omega,p) = \psi(t, Z_t(\omega), p)$$

wie in Definition 1.1 haben kann. Da ein stetiges lokales Martingal von beschränkter Variation konstant ist, ist die Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes aus (2.4) in ein stetiges lokales Martingal und einen fallenden Prozeß unabhängig von der speziellen Darstellung.

Bemerkung 2.6 *Sei $t < T$ (o.B.d.A. $t < T-1$) und $(\lambda^{1n})_{n\in\mathsf{N}}$ eine Folge von adaptierten und pfadweise monotonen Prozessen auf $[t,T]$ mit $\lambda^{1n}_t = \pi^1_t$ und $\lambda^{1n}_s = 0$ für $s \geq t + \frac{1}{n}$. Die zu diesen Prozessen zugehörigen selbstfinanzierenden Strategien $(\lambda^n)_{n\in\mathsf{N}}$ mit $\lambda^{0n}_t = 0$ erzielen nach Satz 2.5 einen Liquidationserlös von*

$$\begin{aligned}
\lambda^{0n}_{t+\frac{1}{n}} &= \int_0^{\pi^1_t} \psi(t, Z_t, x)dx + \int_t^{t+\frac{1}{n}} \Xi^{\lambda^n}_s d\widetilde{S}_s - \left(L^{\lambda^n}_{t+\frac{1}{n}} - L^{\lambda^n}_t \right) \\
&\leq \int_0^{\pi^1_t} \psi(t, Z_t, x)dx + \int_t^{t+\frac{1}{n}} \Xi^{\lambda^n}_s d\widetilde{S}_s. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \Xi^{\lambda^n}_s = 0$ auf $[t,T]$ punktweise und majorisiert durch

$$\left(\frac{\left| \int_0^{\pi^1_t} \psi_z(s, Z_s, x)dx \right|}{\psi_z(s, Z_s, 0)} \right)_{t\leq s\leq T}$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_t^s \Xi^{\lambda^n}_u d\widetilde{S}_u = 0 \text{ gleichmäßig stochastisch auf } [t,T].$$

Dies zeigt, daß für jedes $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\lambda^{0n}_{t+\frac{1}{n}} - \int_0^{\pi^1_t} \psi(t, Z_t, x)dx > \varepsilon \right] = 0.$$

Wenn die λ^{1n} für alle $n \in \mathsf{N}$ stetig sind, gilt Gleichheit in (2.11) und deswegen für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left| \lambda^{0n}_{t+\frac{1}{n}} - \int_0^{\pi^1_t} \psi(t, Z_t, x)dx \right| > \varepsilon \right] = 0.$$

In diesem Sinne ist eine unendlich schnelle Auflösung mit Hilfe von stetigen Liquidationsstrategien optimal in der Klasse aller unendlich schnellen Liquidationsstrategien.

Bemerkung 2.7 *Ein analoger Beweis läßt sich führen, wenn das illiquide Wertpapier von einem d-dimensionalen stetigen Semimartingal* $Z = (Z^1, ..., Z^d)$ *abhängt und eine zu Definition 1.1 analoge Differenzierbarkeit vorhanden ist. Man erhält dann eine Gleichung wie in (2.4) mit* $\Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s$ *ersetzt durch*

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_{z_i}(s, Z_s, x) dx \right) dM_s^i,$$

wobei M^i *der lokale Martingalteil in der kanonischen Zerlegung von* Z^i *unter* $P^* \in \mathcal{P}^*$ *ist.*

Bemerkung 2.8 *Theorem* 9.36 *in He, Wang und Yan [21] besagt, daß die allgemeine Itô-Formel auch unter der etwas schwächeren Regularitätsannahme*

$$\psi \in C^0 \left([0, T] \times \mathsf{R}^2 \right) \cap C^{1,2} \left((0, T) \times \mathsf{R}^2 \right)$$

aus dem von Back [1] motivierten Beispiel 1.10 anwendbar ist, so daß Satz 2.5 auch in diesem Fall gilt.

Beispiel 2.9 *Da (2.8) ohne Benutzung von (1.3) hergeleitet wurde, gilt in Beispiel 1.7 für jede selbstfinanzierende Strategie* π*:*

$$dR_s^\pi = -\frac{1}{2} \phi_p(\pi_s^1) d\langle \pi^{1c} \rangle_s + \left(\Delta \int_0^{\pi_s^1} \phi(x) dx - \phi(\pi_s^1) \Delta \pi_s^1 \right). \tag{2.12}$$

Der realisierbare Portfoliowert ist pfadweise monoton fallend. Stetige Strategien von beschränkter Variation haben konstanten realisierbaren Portfoliowert. Wenn wir annehmen, daß π^1 *eine Bronwnsche Brücke von* 0 *nach* 0 *zwischen* 0 *und* T *mit Volatilität* σ^2 *ist, folgt aus (2.12), daß*

$$R_T^\pi = R_0^\pi - \frac{1}{2} \sigma^2 T.$$

Wenn wir σ *als Variable auffassen, sehen wir, daß es zu jedem* $H_0, H \in \mathsf{R}$ *mit* $H_0 > H$ *eine selbstfinanzierende Strategie* π *mit nach unten beschränktem realisierbaren Portfoliowert gibt, so daß* $\pi_0^0 = H_0$, $\pi_0^1 = 0$ *und* $R_T^\pi = H$.

Bemerkung 2.10 *Unabhängig von der Bedeutung im Kontext von illiquiden Finanzmärkten kann (2.12) benutzt werden, um Identitäten für stochastische Integrale herzuleiten. Sei dazu z.B. π^1 eine Brownsche Brücke von 0 nach 0 zwischen 0 und T und π die zugehörige selbstfinanzierende Strategie mit $\pi_0^0 = 0$. Da im Zeitpunkt T Buchwert und realer Wert übereinstimmen, ergeben sich aus (2.12) für $\phi(x) = x$ bzw. $\phi(x) = \exp(x)$ die Identitäten*

$$\int_0^T \pi_s^1 d\pi_s^1 = -\frac{1}{2}T$$

bzw.

$$\int_0^T \pi_s^1 d\exp(\pi_s^1) = -\frac{1}{2}\int_0^T \exp(\pi_s^1)dt.$$

Die erste Identität ist alternativ leicht mit partieller Integration herleitbar.

Beispiel 2.11 *Für Beispiel 1.8 mit $\phi(0) = 1$ besagt Satz 2.5, daß*

$$\begin{aligned} dR_s^\pi &= \widetilde{S}_s \left(-\frac{1}{2}\phi_p(\pi_s^1)d\langle \pi^{1c}\rangle_s + \left[\Delta \int_0^{\pi_s^1} \phi(x)dx - \phi(\pi_s^1)\Delta\pi_s^1\right]\right) \\ &\quad + \left(\int_0^{\pi_s^1} \phi(x)dx\right) d\widetilde{S}_s. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Für die additive Preiseinwirkung des ökonomischen Agenten aus Beispiel 1.9 erhalten wir

$$\begin{aligned} dR_s^\pi &= -\frac{1}{2}\phi_p(\pi_s^1)d\langle \pi^{1c}\rangle_s + \left(\Delta \int_0^{\pi_s^1} \phi(x)dx - \phi(\pi_s^1)\Delta\pi_s^1\right) \\ &\quad + \pi_s^1 d\widetilde{S}_s. \end{aligned}$$

2.3 Zulässigkeit und No-Arbitrage

Aufbauend auf Satz 2.5 definieren wir nun die Begriffe zulässige Strategie und Arbitragemöglichkeit in unserem Kontext. Wie üblich sollen durch die Beschränkung auf zulässige Strategien Verdopplungsstrategien (vgl. z.B. S. 104 in Duffie [14]) ausgeschlossen werden.

Definition 2.12 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Eine Strategie π heißt zulässig, wenn sie selbstfinanzierend ist und es ein $\underline{c} \in \mathsf{R}$ gibt, so daß*

$$\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s \geq \underline{c} \text{ für alle } t \in [0, T]. \tag{2.14}$$

Für zulässige Strategien ist

$$\left(\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s\right)_{0\le t\le T} \tag{2.15}$$

ein nach unten beschränktes lokales Martingal und somit ein $\mathcal{P}^0$-Supermartingal. Falls für π zusätzlich

$$E^0\left[\int_0^T (\Xi_s^\pi)^2\, d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] < \infty$$

für ein $P^0 \in \mathcal{P}^0$ gilt, so ist (2.15) ein quadratisch integrierbares P^0-Martingal.

Wegen Satz 2.5 folgt, daß eine selbstfinanzierende Strategie π zulässig ist, wenn es ein $\underline{c} \in \mathsf{R}$ gibt, so daß

$$R_t^\pi \ge \underline{c} \text{ für alle } t \in [0,T].$$

Für solche Strategien ist $(R_t^\pi)_{0\le t\le T}$ als Differenz eines $\mathcal{P}^0$-Supermartingals und des $\mathcal{P}^0$-integrierbaren monoton steigenden Prozesses $(L_t^\pi)_{0\le t\le T}$ ein $\mathcal{P}^0$-Supermartingal.

In einem illiquiden Finanzmarkt mit

$$\psi(s, Z_s, p) = Z_s \text{ für } 0 \le s \le T$$

lautet die linke Seite von (2.14)

$$\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s = \int_0^t \pi_s^1 dZ_s.$$

Die Definition ist also konsistent mit unserem Zulässigkeitsbegriff im assoziierten Finanzmarkt.

Bemerkung 2.13 *In Back [1] (siehe Beispiel 1.10) ist eine Strategie des ökonomischen Agenten zulässig, wenn* $\left(\int_0^t H(s, W_s + \pi_s^1) dW_s\right)_{0\le t\le T}$ *ein quadratisch integrierbares Martingal ist. Wegen Backs Voraussetzung, daß* $\left(\int_0^t H(s, W_s) dW_s\right)_{0\le t\le T}$ *ein quadratisch integrierbares Martingal ist, zeigt die Rechnung*

$$\begin{aligned} \Xi_s^\pi d\widetilde{H}_s &= \left(\int_0^{\pi_s^1} H_w(s, W_s + x)dx\right) dW_s \\ &= \big(H(s, W_s + \pi_s^1) - H(s, W_s)\big)\, dW_s, \end{aligned}$$

daß eine Strategie des ökonomischen Agenten genau dann zulässig im Sinne von Back ist, wenn

$$\left(\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{H}_s\right)_{0\le t\le T}$$

ein quadratisch integrierbares Martingal ist. Auch bei diesem Zulässigkeitsbegriff bleibt Korollar 2.16 richtig.

Wenn man das Konzept des realisierbaren Portfoliowertes als natürlich akzeptiert, so ist die folgende Definition für Arbitragemöglichkeiten naheliegend. Eine Arbitragemöglichkeit liegt dann vor, wenn der realisierbare Portfoliowert mit Hilfe einer zulässigen Strategie risikolos mit positiver Wahrscheinlichkeit gesteigert werden kann. Die Definition zeichnet keine Aktienposition des ökonomischen Agenten besonders aus, was wegen der im allgemeinen vorhandenen Nichtlinearität des Aktienpreises in der Aktienposition des ökonomischen Agenten auch sinnvoll erscheint.

Definition 2.14 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Eine zulässige Strategie π heißt Arbitragemöglichkeit für den ökonomischen Agenten, wenn*

$$\begin{aligned} R_T^\pi &\geq R_0^\pi \text{ und} \\ P[R_T^\pi &> R_0^\pi] > 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.15 *Jarrow [25] bzw. Bierbaum [7] nennen eine zulässige Strategie Arbitragemöglichkeit, wenn*

$$\begin{aligned} \pi_0^0 &= \pi_0^1 = 0, \\ \pi_T^1 &= 0, \\ \pi_T^0 &\geq 0 \text{ und} \\ P[\pi_T^0 &> 0] > 0. \end{aligned}$$

Diese Definition zeichnet die Aktienposition der Höhe null als Grundportfolio aus. Insbesondere setzt sie voraus, daß die Aktienposition in T glattgestellt wurde. Bei unserer Definition ist solch eine Glattstellung im allgemeinen nur im Grenzübergang zu einer unendlich schnellen aber nicht instantanen Auflösung des Portfolios direkt nach T möglich. Da der realisierbare Portfoliowert mit dem Bondbestand übereinstimmt, wenn keine Aktienposition vorhanden ist, ist eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Jarrow bzw. Bierbaum insbesondere eine Arbitragemöglichkeit im Sinne von Definition 2.14.

Folgendes Korollar wurde in einem diskreten Finanzmarkt für den eben beschriebenen, etwas stärkeren Arbitragebegriff zuerst von Jarrow [25] bewiesen. Jarrow führt in seinem Beweis eine Induktion über die endliche Anzahl der Handlungszeitpunkte durch. Deswegen können die Methoden von Jarrow nicht ohne Approximationsargument auf einen stetigen Finanzmarkt übertragen werden. Unser Beweis kommt ohne Approximationsargument, also nur mit Mitteln der Stochastischen Analysis aus, wobei die Hauptarbeit schon in Satz 2.5 geleistet wurde.

Korollar 2.16 *In einem illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ) gibt es keine Arbitragemöglichkeiten für den ökonomischen Agenten.*

Beweis. Sei π zulässig. Nach Definition der Zulässigkeit ist $\left(\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s\right)_{0\leq t\leq T}$ ein Supermartingal unter einem $P^0 \in \mathcal{P}^0$. Da $L_T^\pi \geq 0$ folgt aus (2.4), daß

$$E^0[R_T^\pi - R_0^\pi] \leq 0. \tag{2.16}$$

Da für jede Arbitragemöglichkeit

$$E^0[R_T^\pi - R_0^\pi] > 0$$

gelten würde, folgt die Behauptung. ■

In einem strikt illiquiden Finanzmarkt (d.h. (2.3) gilt) finden wir eine Abbildung $\beta : \Omega \to \mathsf{R}$ mit $\beta \in \left(\pi_{s-}^1, \pi_s^1\right)$ auf $\{\Delta\pi_s^1(\omega) \neq 0\}$, so daß (2.9) auf $\{\Delta\pi_s^1(\omega) \neq 0\}$ mit strikter Ungleichung erfüllt ist. Satz 2.5 zeigt dann in Verbindung mit (2.10), daß für eine zulässige Strategie π und $P^0 \in \mathcal{P}^0$ die Ungleichung $E^0[R_T^\pi] < R_0^\pi$ gilt, wenn der Erwartungswert der quadratischen Variation $E^0\left[[\pi^1]_T\right] > 0$ ist. Für eine zulässige Strategie π mit

$$E^0\left[\int_0^T (\Xi_s^\pi)^2\, d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] < \infty$$

gilt dann sogar

$$E^0[R_T^\pi] < R_0^\pi \Leftrightarrow E^0\left[\left[\pi^1\right]_T\right] > 0.$$

Kapitel 3

Erweiterung auf allgemeine illiquide Finanzmärkte

Wir verallgemeinern in diesem Kapitel die Ergebnisse aus Kapitel 2. Dazu definieren wir allgemeine illiquide Finanzmärkte, bei denen auf die Markovstruktur und die Differenzierbarkeitsstruktur der illiquiden Wertpapiere im Sinne von Definition 1.1 verzichtet wird. Auch in diesen allgemeinen illiquiden Finanzmärkten erweist sich das Konzept des realisierbaren Portfoliowertes als nützlich. Für elementare Strategien erhalten wir in einem solchen allgemeinen illiquiden Finanzmärkten eine Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes in einen lokalen Martingalanteil und einen fallenden Anteil. Durch ein Approximationsargument resultiert daraus mit einem geeigneten Zulässigkeitsbegriff ein allgemeines No-Arbitrage-Ergebnis, welches Korollar 2.16 erweitert. Außerdem erhalten wir eine zusätzliche Interpretationsmöglichkeit der Komponenten der Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes aus Satz 2.5.

3.1 Allgemeine illiquide Finanzmärkte

Folgende Definition verallgemeinert die Definition 1.1 des illiquiden Wertpapiers. Wir verzichten dabei auf die Regularität, die in der Annahme der Existenz einer C^2-Funktion ψ und eines Zustandsprozesses Z mit $\Psi(t, \omega, p) = \psi(t, Z_t(\omega), p)$ implizit enthalten ist.

Definition 3.1 *Ein allgemeines illiquides Wertpapier ist eine Abbildung*

$$\Psi : [0, T] \times \Omega \times \mathsf{R} \to \mathsf{R},$$

wobei gilt:

1. *Ψ ist im dritten Argument stetig und monoton steigend.*

2. *Es gibt ein zu P äquivalentes Maß P^*, so daß für jedes $p \in \mathsf{R}$ gilt:*
$$(\Psi(t,\cdot,p))_{0\leq t\leq T} \text{ ist lokales Martingal unter } P^*. \tag{3.1}$$
3. *Es gilt P-fast sicher, daß die Abbildungen $[0,T] \to \mathsf{R}$: $t \to \Psi(t,\omega,p)$ simultan für alle $p \in \mathsf{R}$ RCLL sind.*
4. *Es gilt P-fast sicher, daß die Abbildungen $[0,T] \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$: $(t,p) \to \Psi(t,\omega,p)$ auf Kompakta beschränkt sind.*

Definition 3.2 *Ein allgemeiner illiquider Finanzmarkt ist ein Tupel (B,Ψ) mit dem Bondpreisprozeß B aus (1.4) und einem allgemeinen illiquiden Wertpapier Ψ.*

Die Eigenschaften 1. und 2. entsprechen offensichtlich 2. und 3. aus Definition 1.1. Sie können also wie in den Anmerkungen nach Definition 1.1 interpretiert werden. Die vierte Bedingung stellt nach dem Satz von Lebesgue sicher, daß der Prozeß $\left(\int_0^{\pi_t^1} \Psi(t,\omega,x)dx\right)_{0\leq t\leq T}$ für RCLL-Prozesse π^1 wieder ein RCLL-Prozeß ist. Sie ist z.B. erfüllt, wenn $\Psi(t,\omega,p) = \psi(t,Z_t(\omega),p)$ mit einer stetigen Funktion ψ und einem Semimartingal Z.

Die Abbildung Ψ ist wieder als von (t,ω,p) abhängiger abdiskontierter Aktienpreis zu interpretieren. Definition 1.4 von $\mathcal{P}^p$ und $\mathcal{P}^*$ gelte hier analog.

Bemerkung 3.3 *Man beachte, daß aus* 1. *und* 2. *bereits folgt, daß die Abbildungen aus* 3. *P-fast sicher simultan für alle $p \in \mathsf{R}$ rechtsstetig sind, so daß sich die eigentliche Forderung von* 3. *auf die simultane Existenz der linksseitigen Grenzwerte bezieht.*

Bemerkung 3.4 *Unsere Definition des allgemeinen illiquiden Wertpapiers ist allgemeiner als die entsprechende Definition von Bierbaum [7]. Bierbaum betrachtet allgemeine illiquide Wertpapiere der Form $\Psi(t,\widetilde{Z}_t,\pi)$ mit einer stetigen Funktion Ψ und einem Semimartingal $\widetilde{Z}$. Anstelle von (3.1) fordert er, daß $\left(\Psi(t,\widetilde{Z}_t,\pi_s)\right)_{s\leq t\leq T}$ für jedes $\mathcal{F}_s$-meßbare π_s ein P^*-Martingal ist.*

Für eine beliebige Zufallsvariable X schreiben wir im folgenden häufig
$$\Psi(t,X) \text{ für die Zufallsvariable } \omega \to \Psi(t,\omega,X(\omega)).$$
Wir definieren jetzt den Begriff einer allgemeinen Strategie in einem allgemeinen illiquiden Finanzmarkt. Eine allgemeine Strategie beschreibt die Dynamik des Bestands des ökonomischen Agenten an Bonds und Aktien. Da wir in der kanonischen Definition der Selbstfinanzierbarkeit einer Strategie stochastisch bezüglich $(\Psi(t,\pi_t^1))_{0\leq t\leq T}$ integrieren, fordern wir, daß dieser Prozeß ein Semimartingal ist.

Definition 3.5 *Sei (B, Ψ) ein allgemeiner illiquider Finanzmarkt. Eine allgemeine Strategie eines ökonomischen Agenten für ein allgemeines illiquides Wertpaier Ψ ist ein zweidimensionaler adaptierter RCLL-Prozeß $\pi = (\pi^0, \pi^1)$, so daß*

$$\left(\Psi(t, \pi_t^1)\right)_{0 \le t \le T}$$

ein Semimartingal ist.

Bemerkung 3.6 *Diese Definition ist schwächer als die entsprechende Definition 1.5 in illiquiden Finanzmärkten. Wenn wir ein illiquides Wertpapier im Sinne von Definition 1.1 als allgemeines illiquides Wertpapier auffassen, so ist $(\Psi(t, \pi_t^1))_{0 \le t \le T}$ für jedes Semimartingal π^1 ein Semimartingal. Andererseits können wir in einem allgemeinen illiquiden Finanzmarkt nicht mehr davon ausgehen, daß jede allgemeine Strategie ein Semimartingal ist.*

Wir benutzen auch hier die abkürzenden Schreibweisen

$$S_t^1 \triangleq \Psi(t, \pi_t^1)$$

und (1.6).

Sei $t_n^N \triangleq n2^{-N}$ für $n, N \in \mathsf{N}_0$. Da π RCLL ist, ist π_- lokal beschränkt und linksstetig. Deswegen ist $\int_0^t \pi_{s-}^i d\widetilde{S}_s$ für jedes Semimartingal $\widetilde{S}$, $t \ge 0$ und $i \in \{0, 1\}$ definiert und es gilt (vgl. Protter [30] Theorem $II.21$)

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{t_n^N}^i \left(\widetilde{S}_{t_{n+1}^N \wedge t} - \widetilde{S}_{t_n^N \wedge t}\right) = \int_0^t \pi_{s-}^i d\widetilde{S}_s \text{ gleichmäßig } P\text{-stochastisch auf } [0, T]. \tag{3.2}$$

Beispiel 3.7 *Offensichtlich sind alle illiquiden Wertpapiere allgemeine illiquide Wertpapiere. Ein einfaches Beispiel für ein allgemeines illiquides Wertpapier, welches kein illiquides Wertpapier ist, wird durch*

$$\Psi(t, \omega, p) \triangleq N_t(\omega) - \lambda t + p$$

gegeben, wobei $(N_t)_{0 \le t \le T}$ ein Poissonprozeß mit Intensität λ ist.

Folgende Proposition zeigt analog zu 3. aus Proposition 1.11, daß der Prozeß der optimalen Liquidationserlöse eines festen $\mathcal{F}_s$-meßbaren Aktienbestandes β_s ein lokales Martingal ab s ist. Wir verwenden dieses Ergebnis im Beweis der Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes in Satz 3.9. Im Beweis der Proposition benötigen wir die Stetigkeit und Monotonie von $\Psi(t, \omega, p)$ in p, um die Eigenschaft, daß

$(\Psi(t,p))_{0\le t\le T}$ für $p \in \mathsf{R}$ ein lokales $\mathcal{P}^*$-Martingal ist, auch für Prozesse der Form $(\Psi(t,\beta_s))_{s\le t\le T}$ nutzbar zu machen.

Proposition 3.8 *Sei Ψ ein allgemeines illiquides Wertpapier, $P^* \in \mathcal{P}^*$ und $y \ge 0$. Dann gilt:*

1. *$(\Psi(t,\beta_s))_{s\le t\le T}$ ist für jedes $\mathcal{F}_s$-meßbare β_s ein lokales P^*-Martingal.*
2. *Es gibt eine Folge von Stoppzeiten $(S_n^y)_{n\in\mathsf{N}_0}$, die für alle lokalen Martingale aus* 1. *mit $|\beta_s| \le y$ simultan lokalisierende Sequenz ist.*
3. *Für jedes $\mathcal{F}_s$-meßbare β_s ist*

$$\left(\int_0^{\beta_s} \Psi(t,x)dx\right)_{s\le t\le T}$$

ein lokales P^*-Martingal.

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß $(\Psi(t,\beta_s))_{s\le t\le T}$ wegen 3. aus Definition 3.1 RCLL ist. Seien ein $y \ge 0$ beliebig vorgegeben und $(T_n^y)_{n\in\mathsf{N}_0}$ bzw. $(T_n^{-y})_{n\in\mathsf{N}_0}$ gleichmäßig lokalisierende Sequenzen für die lokalen P^*-Martingale $(\Psi(t,y))_{0\le t\le T}$ bzw. $(\Psi(t,-y))_{0\le t\le T}$. Die Folge $(S_n^y)_{n\in\mathsf{N}_0}$ (o.B.d.A. $S_0^y > 0$, da $\mathcal{F}_0$ P-fast sicher trivial) von Stoppzeiten mit

$$S_n^y \triangleq T_n^y \wedge T_n^{-y}$$

ist eine gleichmäßig lokalisierende Sequenz für $(\Psi(t,y))_{0\le t\le T}$ und $(\Psi(t,-y))_{0\le t\le T}$. Insbesondere sind die Prozesse $(\Psi(S_n^y \wedge t,y))_{0\le t\le T}$ und $(\Psi(S_n^y \wedge t,-y))_{0\le t\le T}$ nach Proposition 1.47 b) in Jacod und Sirjaev [24] für jedes $n \in \mathsf{N}_0$ aus der Klasse D bezüglich P^*. Deswegen ist auch der Prozeß

$$\left(\max\left(|\Psi(S_n^y \wedge t,y)|, |\Psi(S_n^y \wedge t,-y)|\right)\right)_{0\le t\le T}$$

für jedes $n \in \mathsf{N}_0$ aus der Klasse D bezüglich P^*. Da Ψ im dritten Argument monoton steigend ist, gilt für alle $n \in \mathsf{N}_0$, $-y \le x \le y$ und $0 \le t \le T$, daß

$$|\Psi(S_n^y \wedge t,x)| \le \max\left(|\Psi(S_n^y \wedge t,y)|, |\Psi(S_n^y \wedge t,-y)|\right).$$

Also ist $(\Psi(S_n^y \wedge t,x))_{0\le t\le T}$ für jedes $n \in \mathsf{N}_0$ ein lokales P^*-Martingal aus der Klasse D bezüglich P^*. Nach Proposition 1.47 c) in Jacod und Sirjaev [24] ist $(\Psi(S_n^y \wedge t,x))_{0\le t\le T}$ ein gleichmäßig integrierbares P^*-Martingal. Deswegen ist $(S_n^y)_{n\in\mathsf{N}_0}$ eine simultan lokalisierende Sequenz für alle lokalen P^*-Martingale $(\Psi(t,x))_{s\le t\le T}$ mit $-y \le x \le y$.

Sei nun ein beliebiges $\mathcal{F}_s$-meßbares β_s mit $|\beta_s| \leq y$ gegeben. β_s läßt sich als P^*-fast sicherer Grenzwert von $\left(\beta_s^k\right)_{k \in \mathsf{N}_0}$ mit

$$\beta_s^k = \sum_{l=0}^{n^k} \lambda_l^k 1_{A_l^k},$$

$n^k \in \mathsf{N}_0$, disjunkten $A_l^k \in \mathcal{F}_s$, $\cup_{l=0}^{n^k} A_l^k = \Omega$ und $\left|\lambda_l^k\right| \leq y$ schreiben. Wegen des schon Gezeigten, ist $\left(\Psi(t, \beta_s^k)\right)_{s \leq t \leq T}$ für alle $k \in \mathsf{N}_0$ ein lokales P^*-Martingal mit lokalisierender Sequenz $(S_n^y)_{n \in \mathsf{N}_0}$. Nun wird $\left|\Psi(S_n^y \wedge t, \beta_s^k)\right|$ für alle $n, k \in \mathsf{N}_0$ und alle $t \geq s$ durch

$$\max\left(\left|\Psi(S_n^y \wedge t, y)\right|, \left|\Psi(S_n^y \wedge t, -y)\right|\right) \in L^1(P^*)$$

majorisiert. Aus der Stetigkeit von Ψ im dritten Argument und dem Satz von Lebesgue für bedingte Erwartungen folgt 1. für beschränkte β_s sowie 2.

Sei nun ein beliebiges $\mathcal{F}_s$-meßbares β_s gegeben. Wir wählen für jedes $m \in \mathsf{N}$ eine simultan lokalisierende Sequenz $(S_n^m)_{n \in \mathsf{N}_0}$ wie in 2. und definieren

$$T_n \triangleq \sum_{m=1}^{n} S_n^m 1_{m-1 \leq |\beta_s| < m}.$$

Dann ist $(\Psi(T_n \wedge t, \beta_s) 1_{T_n > s})_{s \leq t \leq T}$ ein P^*-Martingal für alle $n \in \mathsf{N}_0$, weswegen 1. folgt.

Wegen 1. und

$$\int_0^{\beta_s} \Psi(t, x) dx = \beta_s \Psi(t, \beta_s) - \int_0^{\beta_s} x \Psi(t, dx) \tag{3.3}$$

reicht es zum Beweis von 3. zu zeigen, daß $\left(\widetilde{\Psi}(t, \beta_s)\right)_{s \leq t \leq T}$ mit

$$\widetilde{\Psi}(t, p) \triangleq \int_0^p x \Psi(t, dx) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

ein lokales P^*-Martingal ist.

Wegen des Satzes von Lebesgue und 4. aus Definition 3.1 ist $\left(\int_0^{\beta_s} \Psi(t, x) dx\right)_{s \leq t \leq T}$ ein RCLL-Prozeß. Aus (3.3) folgt, daß auch $\left(\widetilde{\Psi}(t, \beta_s)\right)_{s \leq t \leq T}$ ein RCLL-Prozeß ist.

Wir zeigen zuerst, daß $\left(\widetilde{\Psi}(t, p)\right)_{0 \leq t \leq T}$ für beliebige $p \in \mathsf{R}$ ein lokales P^*-Martingal ist. Für den Beweis setzen wir o.B.d.A. voraus, daß $p \geq 0$ und daß $(\Psi(t, x))_{0 \leq t \leq T}$

für alle $0 \leq x \leq p$ ein P^*-Martingal ist, wobei die zweite Annahme durch 2. gerechtfertigt wird. Wir wählen eine Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathsf{N}}$ mit $f_n:[0,p] \to \mathsf{R}$ der Form

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{N^n} x_i^n 1_{[x_i^n, x_{i+1}^n)}(x)$$

mit $N^n \in \mathsf{N}$, $x_i^n \geq 0$ für alle $i \leq N^n$ und alle $n \in \mathsf{N}$, so daß f_n auf $[0,p]$ monoton steigend gegen die Funktion $f(x) = x$ konvergiert. Da

$$\left(\int_0^p f_n(x) \Psi(t, dx) \right)_{0 \leq t \leq T}$$

ein P^*-Martingal ist, erhalten wir mit dem Satz über monotone Integration für bedingte Erwartungen, daß $\left(\widetilde{\Psi}(t,p) \right)_{0 \leq t \leq T}$ ein P^*-Martingal ist.

Die Abbildung $\widetilde{\Psi}(t,p)$ ist stetig in p und auf $(-\infty, 0]$ bzw. $[0, \infty)$ monoton fallend bzw. monoton steigend. Diese Eigenschaften können analog zum Beweis von 1. ausgenutzt werden, um zu zeigen, daß $\left(\widetilde{\Psi}(t, \beta_s 1_{\beta_s \geq 0}) \right)_{s \leq t \leq T}$ und $\left(\widetilde{\Psi}(t, \beta_s 1_{\beta_s < 0}) \right)_{s \leq t \leq T}$ und somit auch $\left(\widetilde{\Psi}(t, \beta_s) \right)_{s \leq t \leq T}$ lokale P^*-Martingale sind. ∎

3.2 Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes

Die Begriffe der selbstfinanzierenden Strategie, des realisierbaren Portfoliowertes und des Buchwertes übertragen sich auf naheliegende Weise auf allgemeine Finanzmärkte.

Wir leiten nun mit Hilfe einer Approximation wie in (3.2) eine Darstellung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes für allgemeine illiquide Finanzmärkte her. Die Darstellung zeigt, daß das Inkrement $R_t^\pi - R_0^\pi$ des realisierbaren Portfoliowertes einer selbstfinanzierenden allgemeinen Strategie π als stochastischer Grenzwert einer Folge von Zufallsvariablen $\left(M_t^{\pi N} - A_t^{\pi N} \right)_{N \in \mathsf{N}_0}$ aufgefaßt werden kann.

Dabei ist $M^{\pi N}$ ein lokales $\mathcal{P}^*$-Martingal und $A^{\pi N}$ steigend entlang der Folge $\left(t_n^N \right)_{n \in \mathsf{N}_0} \stackrel{\triangle}{=} \left(n 2^{-N} \right)_{n \in \mathsf{N}_0}$, d.h. $A_{t_{n+1}^N}^{\pi N} \geq A_{t_n^N}^{\pi N}$ für $n \in \mathsf{N}_0$.

Wir zeigen anschließend, daß sich diese Darstellung in den wichtigen Spezialfällen von elementaren allgemeinen Strategien π^1 bzw. von selbstfinanzierenden Strategien in illiquiden Finanzmärkten nach Definition 1.2 und Defintion 1.5 weiter vereinfacht. In diesen Spezialfällen existiert nämlich für $N \to \infty$ sowohl der stochastische Grenzwert von $M_t^{\pi N}$ als auch der von $A_t^{\pi N}$.

Satz 3.9 *Sei π eine selbstfinanzierende allgemeine Strategie in einem allgemeinen illiquiden Finanzmarkt (B,Ψ) und $t_n^N \triangleq n2^{-N}$ für $n,N \in \mathsf{N}_0$. Es gilt*

$$R_t^\pi = R_0^\pi + \lim_{N\to\infty}\left(M_t^{\pi N} - A_t^{\pi N}\right) \text{ gleichmäßig } P\text{-stochastisch auf } [0,T]. \tag{3.4}$$

Hierbei ist $M^{\pi N} = \left(M_t^{\pi N}\right)_{0\le t\le T}$ mit

$$M_t^{\pi N} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi^1_{t_n^N\wedge t}} \Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, x\right)dx - \int_0^{\pi^1_{t_n^N\wedge t}} \Psi\left(t_n^N\wedge t, x\right)dx\right)$$

ein lokales $\mathcal{P}^*$-Martingal und

$$\begin{aligned} A_t^{\pi N} \triangleq {} & \sum_{n=0}^{\infty}\Psi\left(t_{n+1}^N\wedge t, \pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}\right)\left(\pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t} - \pi^1_{t_n^N\wedge t}\right) \\ & - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}} \Psi\left(t_{n+1}^N\wedge t, x\right)dx - \int_0^{\pi^1_{t_n^N\wedge t}} \Psi\left(t_{n+1}^N\wedge t, x\right)dx\right). \end{aligned}$$

Für $t \in [t_m^N, t_{m+1}^N]$ $(m \in \mathsf{N}_0)$ gilt

$$A_t^{\pi N} \ge A_{t_m^N}^{\pi N}, \tag{3.5}$$

insbesondere also

$$A_t^{\pi N} \ge 0 \text{ für alle } t \in [0,T]. \tag{3.6}$$

Beweis. Da π selbstfinanzierend ist, gilt

$$\begin{aligned} R_t^\pi - R_0^\pi &= \pi_t^0 - \pi_0^0 + \left(\pi_t^1 S_t^1 - \pi_0^1 S_0^1\right) - \left(\pi_t^1 S_t^1 - \pi_0^1 S_0^1\right) \\ &\quad + \left(\int_0^{\pi_t^1}\Psi(t,x)dx - \int_0^{\pi_0^1}\Psi(0,x)dx\right) \\ &= \int_0^t \pi_{s-}^1 dS_s^1 - \left(\pi_t^1 S_t^1 - \pi_0^1 S_0^1\right) + \left(\int_0^{\pi_t^1}\Psi(t,x)dx - \int_0^{\pi_0^1}\Psi(0,x)dx\right). \end{aligned}$$

Gleichung (3.2) und eine Teleskopsummenbildung liefert folgende gleichmäßige stochastische Konvergenz auf $[0,T]$, die wir unter Beachtung der Tatsache, daß alle auftretenden Summen für festes N endliche Summen sind, in die gesuchte Konvergenz (3.4) umformen:

$$
\begin{aligned}
R_t^\pi - R_0^\pi = \lim_{N\to\infty} &\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty} \pi^1_{t_n^N\wedge t}\left(\Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, \pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}\right) - \Psi\left(t_n^N \wedge t, \pi^1_{t_n^N\wedge t}\right)\right) \\
&- \sum_{n=0}^{\infty}\left(\pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}\Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, \pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}\right) - \pi^1_{t_n^N\wedge t}\Psi\left(t_n^N \wedge t, \pi^1_{t_n^N\wedge t}\right)\right) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}} \Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, x\right) dx - \int_0^{\pi^1_{t_n^N\wedge t}} \Psi\left(t_n^N \wedge t, x\right) dx\right)\Bigg] \\
= \lim_{N\to\infty} &\Bigg[\sum_{n=0}^{\infty} -\Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, \pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}\right)\left(\pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t} - \pi^1_{t_n^N\wedge t}\right) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi^1_{t_{n+1}^N\wedge t}} \Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, x\right) dx - \int_0^{\pi^1_{t_n^N\wedge t}} \Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, x\right) dx\right) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\pi^1_{t_n^N\wedge t}} \Psi\left(t_{n+1}^N \wedge t, x\right) dx - \int_0^{\pi^1_{t_n^N\wedge t}} \Psi\left(t_n^N \wedge t, x\right) dx\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Auf $[t_m^N, t_{m+1}^N]$ $(m \in \mathsf{N}_0)$ gilt

$$M_t^{\pi N} - M_{t_m^N}^{\pi N} = \overline{M}_t^N - \overline{M}_{t_m^N}^N$$

mit

$$\overline{M}_t^N \triangleq \int_0^{\pi^1_{t_m^N}} \Psi\left(t, x\right) dx \text{ für } t \in [t_m^N, T].$$

Wegen 3. aus Proposition 3.8 ist $\left(\overline{M}_t^N\right)_{t_m^N \le t \le T}$ ein lokales $\mathcal{P}^*$-Martingal. Somit ist auch $\left(M_t^{\pi N}\right)_{0\le t\le T}$ ein lokales $\mathcal{P}^*$-Martingal. Da aus dem Mittelwertsatz die Existenz einer Abbildung $\beta : \Omega \to \mathsf{R}$ mit $\beta \in [\pi^1_{t_m^N\wedge t}, \pi^1_{t_{m+1}^N\wedge t}]$ und

$$
\begin{aligned}
&\Psi\left(t_{m+1}^N \wedge t, \pi^1_{t_{m+1}^N\wedge t}\right)\left(\pi^1_{t_{m+1}^N\wedge t} - \pi^1_{t_m^N\wedge t}\right) \qquad (3.8)\\
&-\left(\int_0^{\pi^1_{t_{m+1}^N\wedge t}} \Psi\left(t_{m+1}^N \wedge t, x\right) dx - \int_0^{\pi^1_{t_m^N\wedge t}} \Psi\left(t_{m+1}^N \wedge t, x\right) dx\right) \\
= \;&\left[\Psi\left(t_{m+1}^N \wedge t, \pi^1_{t_{m+1}^N\wedge t}\right) - \Psi\left(t_{m+1}^N \wedge t, \beta\right)\right]\left(\pi^1_{t_{m+1}^N\wedge t} - \pi^1_{t_m^N\wedge t}\right) \\
\ge \;& 0
\end{aligned}
$$

folgt, gilt (3.5) und (3.6). ■

Die lokalen $\mathcal{P}^*$-Martingale $M^{\pi N}$ lassen sich als die kumulative Veränderung des optimalen Liquidationserlöses der Aktien bei lokal auf $[t_m^N, t_{m+1}^N]$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ konstant gehaltenem Aktienbestand interpretieren. Die $A^{\pi N}$ spiegeln dagegen die Verringerung des realisierbaren Portfoliowertes bei den Portfolioumschichtungen dieser lokal konstant gehaltenen Strategien in t_m^N $(m \in \mathbb{N})$ wider, die auftreten, weil der Markt auf eine Order des ökonomischen Agenten reagiert, bevor diese ausgeführt wird.

Bemerkung 3.10 *Man beachte, daß der Prozeß* $\left(\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s\right)_{0 \le t \le T}$ *aus Satz 2.5 nicht nur ein lokales* $\mathcal{P}^*$*-Martingal, sondern sogar ein lokales* $\mathcal{P}^0$*-Martingal ist.*

Bemerkung 3.11 *Im allgemeinen ist es nicht richtig, daß die Pfade von* $A^{\pi N}$ *von beschränkter Variation sind.*

Beispiel 3.12 *Für den Finanzmarkt aus Beispiel 3.7 erhalten wir mit*

$$\widetilde{N}_t \triangleq N_t - \lambda t,$$

daß

$$M_t^{\pi N} = \sum_{n=0}^{\infty} \pi^1_{t_n^N \wedge t} \left(\widetilde{N}_{t_{n+1}^N \wedge t} - \widetilde{N}_{t_n^N \wedge t}\right)$$

und

$$A_t^{\pi N} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\pi^1_{t_{n+1}^N \wedge t} - \pi^1_{t_n^N \wedge t}\right)^2 .$$

Falls π^1 *ein Semimartingal ist, so gilt*

$$\lim_N M_t^{\pi N} = \int_0^t \pi^1_{s-} d\widetilde{N}_s$$

und

$$\lim_N A_t^{\pi N} = \frac{1}{2} \left[\pi^1\right]_t$$

gleichmäßig stochastich auf $[0, T]$.

Für elementare Strategien konvergieren die $M_t^{\pi N}$ und die $A_t^{\pi N}$ auch seperat, wie das folgende Korollar zeigt.

Korollar 3.13 *Sei (B, Ψ) ein allgemeiner illiquider Finanzmarkt und π eine selbstfinanzierende allgemeine Strategie mit*

$$\pi_t^1 = \sum_{k=0}^{K} \widetilde{\pi}_k 1_{[T_k, T_{k+1})}(t) \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Hierbei sind die T_k $(k = 0, ..., K+1)$ Stoppzeiten mit

$$\begin{aligned} T_0 &= 0, \\ 0 &< T_k < T_{k+1} < T \text{ für } k = 1, ..., K-1, \\ T_{K+1} &= T \end{aligned}$$

und die $\widetilde{\pi}_k$ $(k = 0, ..., K)$ $\mathcal{F}_{T_k}$-meßbare Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\lim_{N\to\infty} M_t^{\pi N} = \sum_{k=0}^{K} \left(\int_0^{\widetilde{\pi}_k} \Psi\left(T_{k+1} \wedge t, x\right) dx - \int_0^{\widetilde{\pi}_k} \Psi\left(T_k \wedge t, x\right) dx \right)$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} A_t^{\pi N} = & \sum_{\substack{k=0,...,K| \\ T_{k+1} \leq t}} \Psi\left(T_{k+1}, \widetilde{\pi}_{k+1}\right) \left[\widetilde{\pi}_{k+1} - \widetilde{\pi}_k\right] \\ & - \sum_{\substack{k=0,...,K| \\ T_{k+1} \leq t}} \left(\int_0^{\widetilde{\pi}_{k+1}} \Psi\left(T_{k+1}, x\right) dx - \int_0^{\widetilde{\pi}_k} \Psi\left(T_{k+1}, x\right) dx \right) \end{aligned}$$

gleichmäßig P-stochastisch auf $[0, T]$.

Beweis. Auf

$$D^m \triangleq \left\{ \left[\min_{k=0,...,K} \left(T_{k+1} - T_k\right) \right] > 2^{-m} \right\}$$

gilt für $N \geq m$ mit

$$T_k^N \triangleq \min\left\{ t_n^N \left| t_n^N \geq T_k \right. \right\},$$

daß

$$M_t^{\pi N} = \sum_{k=0}^{K} \left(\int_0^{\widetilde{\pi}_k} \Psi\left(T_{k+1}^N \wedge t, x\right) dx - \int_0^{\widetilde{\pi}_k} \Psi\left(T_k^N \wedge t, x\right) dx \right)$$

und

$$A_t^{\pi N} = \sum_{\substack{k=0,\ldots,K| \\ T_{k+1}\le t}} \Psi\left(T_{k+1}^N \wedge t, \widetilde{\pi}_{k+1}\right)\left[\widetilde{\pi}_{k+1} - \widetilde{\pi}_k\right]$$

$$- \sum_{\substack{k=0,\ldots,K| \\ T_{k+1}\le t}} \left(\int_0^{\widetilde{\pi}_{k+1}} \Psi\left(T_{k+1}^N \wedge t, x\right) dx - \int_0^{\widetilde{\pi}_k} \Psi\left(T_{k+1}^N \wedge t, x\right) dx \right).$$

Wegen 3. und 4. aus Definition 3.1 und des Satzes von Lebesgue sind die Abbildungen $[0,T] \to \mathsf{R}$: $t \to \Psi(t,\omega,p)$ und $t \to \int_0^p \Psi(t,\omega,x)dx$ P-fast sicher simultan für alle $p \in \mathsf{R}$ rechtsstetig. Deswegen erhalten wir, daß die $M_t^{\pi N}$ und die $A_t^{\pi N}$ für $N \to \infty$ P-fast sicher auf D^m gleichmäßig in $t \in [0,T]$ gegen den gewünschten Grenzwert konvergieren. Wegen

$$P\left[\cup_{m\in\mathsf{N}} D^m\right] = 1$$

folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 3.14 *Wir hätten diese Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes für selbstfinanzierende elementare Strategien auch durch ein Vorgehen wie im Beweis von Satz 3.9 erhalten, wenn wir dort direkt die Identität*

$$\int_0^t \pi_{s-}^1 dS_s^1 = \sum_{k=0}^{K} \pi_{T_k\wedge t}^1 \left[\Psi\left(T_{k+1} \wedge t, \pi_{T_{k+1}\wedge t}^1\right) - \Psi\left(T_k \wedge t, \pi_{T_k\wedge t}^1\right)\right]$$

für elementare Strategien benutzt hätten.

Wir zeigen nun, daß die Zufallsvariablen $M_t^{\pi N}$ und $A_t^{\pi N}$ für Semimartingalstrategien π in illiquiden Finanzmärkten im Sinne von Definition 1.2 gleichmäßig stochastisch konvergieren, und zwar gegen die Komponenten aus der Zerlegung von R^π aus Satz 2.5. Wir erhalten somit die Interpretation von $\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s$ als kumulative Veränderung des optimalen Liquidationserlöses aus Aktien bei lokal konstant gehaltenem Aktienbestand.

Korollar 3.15 *Sei π eine selbstfinanzierende Strategie in einem illiquiden Finanzmarkt (B,Ψ). Dann gilt mit Ξ^π und L^π aus Satz 2.5, daß*

$$\lim_{N\to\infty} M_t^{\pi N} = \int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s$$

und

$$\lim_{N\to\infty} A_t^{\pi N} = L_t^\pi$$

gleichmäßig P-stochastisch auf $[0,T]$.

Beweis. Es genügt, die erste Konvergenz zu zeigen, da die zweite dann aus den Sätzen 3.9 und 2.5 folgt. Nach Definition von $M_t^{\pi N}$ gilt

$$M_t^{\pi N} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\pi^1_{t_n^N \wedge t}} \psi \left(t_{n+1}^N \wedge t, Z_{t_{n+1}^N \wedge t}, x \right) dx - \int_0^{\pi^1_{t_n^N \wedge t}} \Psi \left(t_n^N \wedge t, Z_{t_n^N \wedge t}, x \right) dx \right).$$

Sei M wie im Beweis von Satz 2.5 definiert,

$$g(t,z,p) \triangleq \int_0^p \psi(t,z,x)dx$$

und $\theta^{nN} = \left(\theta_t^{nN}\right)_{0 \le t \le T}$ $(n, N \in \mathsf{N}_0)$ mit

$$\theta_t^{nN} \triangleq \pi^1_{t_n^N} 1_{[t_n^N, T]}(t).$$

Unter Beachtung von 3. aus Proposition 1.11 erhalten wir für $t \geq t_n^N$ mit Hilfe der Itô-Formel, angewendet auf $\left(g(s, Z_s, \theta_s^{nN})\right)_{0 \le s \le T}$, daß

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi^1_{t_n^N}} \psi\left(t, Z_t, x\right) dx - \int_0^{\pi^1_{t_n^N}} \psi\left(t_n^N, Z_{t_n^N}, x\right) dx \\ = \; & g(t, Z_t, \theta_t^{nN}) - g(t_n^N, Z_{t_n^N}, \theta_{t_n^N}^{nN}) \\ = \; & \int_{t_n^N}^t \left(\int_0^{\pi^1_{t_n^N}} \psi_z(s, Z_s, x) dx \right) dM_s \end{aligned}$$

gilt. Durch Summation ergibt sich für $N \in \mathsf{N}_0$

$$M_t^{\pi N} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_n^N \wedge t}^{t_{n+1}^N \wedge t} \left(\int_0^{\pi^1_{t_n^N}} \psi_z\left(s, Z_s, x\right) dx \right) dM_s,$$

d.h.

$$M_t^{\pi N} = \int_0^t f(s, Z_s, \theta_s^N) dM_s$$

mit

$$f(t,z,p) \triangleq \int_0^p \psi_z\left(t,z,x\right) dx$$

und $\theta^N = \left(\theta_t^N\right)_{0 \le t \le T}$, wobei

$$\theta_t^N \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \pi^1_{t_n^N} 1_{(t_n^N, t_{n+1}^N]}(t) \qquad (0 \le t \le T).$$

Wegen der Monotonie von f im dritten Argument gilt für $0 \leq t \leq T$

$$\left|f(t, Z_t, \theta_t^N)\right| \leq \max\left(\left|f(t, Z_t, \sup_{s\leq t}\left|\pi_{s-}^1\right|)\right|, \left|f(t, Z_t, -\sup_{s\leq t}\left|\pi_{s-}^1\right|)\right|\right).$$

Aus der lokalen Beschränktheit von $\left(\sup_{s\leq t}\left|\pi_{s-}^1\right|\right)_{0\leq t\leq T}$ und der Stetigkeit von f und Z folgt die lokale Beschränktheit des prävisiblen Prozesses

$$\left(\max\left[\left|f(t, Z_t, \sup_{s\leq t}\left|\pi_{s-}^1\right|)\right|, \left|f(t, Z_t, -\sup_{s\leq t}\left|\pi_{s-}^1\right|)\right|\right]\right)_{0\leq t\leq T}.$$

Aus

$$\lim_{N\to\infty} f(s, Z_s, \theta_s^N) = f(s, Z_s, \pi_{s-}^1) \text{ } P\text{-fast sicher}$$

ergibt sich deshalb mit Hilfe von Satz 4.31 in Jacod und Sirjaev [24] und der Stetigkeit von M die folgende gleichmäßige P-stochastische Konvergenz auf $[0, T]$:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} M_t^{\pi N} &= \lim_{N\to\infty}\int_0^t f(s, Z_s, \theta_s^N) dM_s \\
&= \int_0^t f(s, Z_s, \pi_{s-}^1) dM_s \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{\pi_{s-}^1} \psi_z\left(s, Z_s, x\right) dx\right) dM_s \\
&= \int_0^t \left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_z\left(s, Z_s, x\right) dx\right) dM_s.
\end{aligned}$$

■

3.3 Zulässigkeit und No-Arbitrage

Satz 3.9 legt in Verbindung mit den Korollaren 3.13 und 3.15 einen Zulässigkeitsbegriff nahe, der mit dem Zulässigkeitsbegriff in illiquiden Finanzmärkten aus Definition 2.12 konsistent ist. Wir erhalten ein No-Arbitrage-Ergebnis, welches Korollar 2.16 erweitert.

Definition 3.16 *Sei (B, Ψ) ein allgemeiner illiquider Finanzmarkt. Eine allgemeine Strategie π heißt allgemein zulässig, wenn sie selbstfinanzierend ist und es ein $\mathcal{P}^*$-Supermartingal $(M_t^\pi)_{0\leq t\leq T}$ gibt, so daß $M_t^{\pi N}$ für jedes t und $N \to \infty$ stochastisch gegen M_t^π konvergiert.*

Aus Satz 3.9 folgt, daß für eine allgemein zulässige Strategie π auch $A_t^{\pi N}$ für jedes t und $N \to \infty$ stochastisch gegen einen Grenzwert A_t^π mit

$$(A_t^\pi)_{0 \le t \le T} \text{ RCLL} \tag{3.9}$$

und

$$A_t^\pi \ge A_s^\pi \text{ für } t \ge s \tag{3.10}$$

konvergiert. Aus (3.9) und (3.10) folgt, daß $(A_t^\pi)_{0 \le t \le T}$ P-fast sicher monoton steigende Pfade hat.

Wegen Korollar 3.15 ist eine zulässige Strategie in einem illiquiden Finanzmarkt im Sinne von Definition 1.2 auch eine allgemein zulässige Strategie, wenn man den illiquiden Finanzmarkt als allgemeinen illiquiden Finanzmarkt betrachtet. Aus Korollar 3.13 folgt, daß eine selbstfinanzierende elementare Strategie in einem allgemeinen illiquiden Finanzmarkt allgemein zulässig ist, falls es ein $\underline{c} \in \mathsf{R}$ gibt, so daß

$$R_t^\pi \ge \underline{c} \text{ für alle } t \in [0, T].$$

Eine selbstfinanzierende allgemeine Strategie π ist insbesondere dann allgemein zulässig, wenn $(M_t^{\pi N})_{0 \le t \le T}$ für jedes $N \in \mathsf{N}_0$ ein quadratisch integrierbares $\mathcal{P}^*$-Martingal ist und es eine Zufallsvariable $M_T^\pi \in \cap_{P^* \in \mathcal{P}^*} L^2(P^*)$ mit

$$\lim_{N \to \infty} M_T^{\pi N} = M_T^\pi \text{ in } L^2(P^*) \text{ für alle } P^* \in \mathcal{P}^*$$

gibt.

Sei π eine allgemein zulässige Strategie in einem strikten allgemeinen illiquiden Finanzmarkt (d.h. Ψ ist im dritten Argument strikt monoton steigend), für die $M_t^{\pi N}$ gleichmäßig stochastisch auf $[0, T]$ gegen M_t^π konvergiert. Dann gilt für jede Stoppzeit $S > 0$ mit

$$P[\Delta \pi_S^1 \ne 0] > 0,$$

daß

$$E[1_{\Delta \pi_S^1 \ne 0} \Delta A_S^\pi] > 0.$$

Es gibt nämlich eine Folge $(N_k)_{k \in \mathsf{N}}$ mit $N_k \in \mathsf{N}$ für alle $k \in \mathsf{N}$, so daß $A_t^{\pi N_k}$ gleichmäßig P-fast sicher auf $[0, T]$ gegen A_t^π konvergiert. Wir definieren die Zufallsvariablen S_k $(k \in \mathsf{N})$ durch

$$S_k = t_n^{N_k} \text{ für } S \in (t_n^{N_k}, t_{n+1}^{N_k}].$$

Mit Hilfe der gleichmäßigen Konvergenz der $A_t^{\pi N_k}$ und des Satzes von Lebesgue berechnen wir

$$\begin{aligned}
& E[1_{\Delta\pi_S^1\neq 0}\min(\Delta A_S^\pi, 1)] \\
= \; & \lim_{k\to\infty} E\left[1_{\Delta\pi_S^1\neq 0}\min\left(A_S^{\pi N_k} - A_{S_k}^{\pi N_k}, 1\right)\right] \\
= \; & \lim_{k\to\infty} E\left[1_{\Delta\pi_S^1\neq 0}\min\left\{\Psi\left(S,\pi_S^1\right)\left(\pi_S^1-\pi_{S_k}^1\right) - \int_0^{\pi_S^1}\Psi(S,x)\,dx\right.\right. \\
& \left.\left. + \int_0^{\pi_{S_k}^1}\Psi(S,x)\,dx, 1\right\}\right] \\
= \; & E\left[1_{\Delta\pi_S^1\neq 0}\min\left\{\Psi\left(S,\pi_S^1\right)\left(\pi_S^1-\pi_{S_-}^1\right) - \int_0^{\pi_S^1}\Psi(S,x)\,dx\right.\right. \\
& \left.\left. + \int_0^{\pi_{S_-}^1}\Psi(S,x)\,dx, 1\right\}\right].
\end{aligned}$$

Wie in (3.8) existiert also eine Abbildung $\beta : \Omega \to \mathsf{R}$ mit $\beta \in (\pi_{S-}^1, \pi_S^1)$ auf $\{\Delta\pi_S^1 \neq 0\}$, so daß

$$E[1_{\Delta\pi_S^1\neq 0}\min(\Delta A_S^\pi, 1)] = E[\min\left\{\left(\Psi\left(S,\pi_S^1\right) - \Psi(S,\beta)\right)\left(\pi_S^1 - \pi_{S-}^1\right), 1\right\}] > 0.$$

Wir bezeichnen allgemein zulässige Strategien, für die die Bedingungen aus Definition 2.14 erfüllt sind, als allgemeine Arbitragemöglichkeiten und erhalten folgende Verallgemeinerung von Korollar 2.16.

Korollar 3.17 *In einem allgemeinen illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ) gibt es keine allgemeinen Arbitragemöglichkeiten für den ökonomischen Agenten.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine allgemein zulässige Strategie π mit

$$R_T^\pi - R_0^\pi \geq 0.$$

Nach Satz 3.9 und der Definition der allgemeinen Zulässigkeit konvergiert $A_T^{\pi N}$ stochastisch gegen A_T^π. Wegen der Positivität der $A_T^{\pi N}$ haben wir $A_T^\pi \geq 0$. Durch Erwartungswertbildung und Ausnutzung der Supermartingaleigenschaft von M^π folgt

$$0 \leq E^*[R_T^\pi - R_0^\pi] = E^*[M_T^\pi - A_T^\pi] \leq 0.$$

Also muß $R_T^\pi - R_0^\pi = 0$ sein, d.h. es gibt keine allgemeinen Arbitragemöglichkeiten.
∎

Kapitel 4

Gleichmäßige Approximation von stochastischen Integralen

Die Darstellung (2.4) der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes zeigt, daß den Strategien mit stetigen Pfaden von beschränkter Variation in Finanzmärkten mit illiquiden Wertpapieren eine besondere Bedeutung zukommt. Es stellt sich die Frage, welche $\mathcal{F}_T$-meßbaren Zufallsvariablen mit Hilfe realisierbarer Portfoliowerte in T solcher Strategien gleichmäßig approximiert werden können. Bei der Beantwortung dieser Frage in Kapitel 5 sind die beiden folgenden Approximationssätze von entscheidender Bedeutung.

Der erste Satz zeigt, daß wir stochastische Integrale mit stetigen lokalen Martingalen als Integratoren und progressiv meßbaren Strategien als Integranden gleichmäßig durch stochastische Integrale mit dem gleichen Integrator und einem RCLL-Integranden von beschränkter Variation approximieren können.

Satz 4.1 *Sei M ein stetiges lokales Martingal und ζ ein progressiv meßbarer Prozeß mit*

$$P\left[\int_0^T \zeta_s^2 d\langle M\rangle_s < \infty\right] = 1. \tag{4.1}$$

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen adaptierten RCLL-Prozeß ζ^ε mit Pfaden von beschränkter Variation, so daß

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (\zeta_s^\varepsilon - \zeta_s)dM_s\right| \le \varepsilon \tag{4.2}$$

gilt.

Beweis. 1. Sei zunächst M quadratisch integrierbar und

$$E\left[\int_0^T (\zeta_s)^2\, d\langle M\rangle_s\right] < \infty.$$

Nach Proposition 3.2.8 in Karatzas und Shreve [32] gibt es eine Folge von einfachen Prozessen $(\zeta^n)_{n\in\mathsf{N}}$ der Form

$$\zeta_s^n = X_0^n 1_{\{0\}} + \sum_{i=0}^{N^n} X_i^n 1_{(t_i^n, t_{i+1}^n]}(s) \qquad (0 \le s \le T)$$

mit

$$N^n \in \mathsf{N}_0, 0 = t_1^n < \dots < t_{N^n}^n,\ X_m^n\ \mathcal{F}_{t_m^n}\text{-meßbar},\ |X_m^n| \le C^n \in \mathsf{R} \quad \text{für } n \in \mathsf{N},\ 0 \le m \le N^n,$$

so daß

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (\zeta_s^n - \zeta_s)^2 d\langle M\rangle_s\right] = 0.$$

Wegen der Stetigkeit von M können wir $(\zeta^n)_{n\in\mathsf{N}}$ durch die neue Folge von Prozessen $(\widetilde{\zeta}^n)_{n\in\mathsf{N}}$ mit

$$\widetilde{\zeta}_s^n = \sum_{i=0}^{N^n} X_i^n 1_{[t_i^n, t_{i+1}^n)}(s) \qquad (0 \le s \le T) \tag{4.3}$$

ersetzen, so daß auch

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T (\widetilde{\zeta}_s^n - \zeta_s)^2 d\langle M\rangle_s\right] = 0.$$

Nach der Doobschen Ungleichung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\le t\le T} \left|\int_0^t (\widetilde{\zeta}_s^n - \zeta_s) dM_s\right| = 0 \text{ in } L^2.$$

Deswegen finden wir mit Hilfe der Chebeychev-Ungleichung eine Teilfolge der $(\widetilde{\zeta}^n)_{n\in\mathsf{N}}$, die wir wieder mit $(\zeta^n)_{n\in\mathsf{N}}$ bezeichnen, so daß

$$P\left[\sup_{0\le t\le T} \left|\int_0^t (\zeta_s^n - \zeta_s) dM_s\right| \ge \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] < \frac{1}{n^2}. \tag{4.4}$$

Nun definieren wir induktiv die Stoppzeiten

$$\begin{aligned} T_0 &\triangleq 0, \\ T_n &\triangleq \inf\left\{ t > T_{n-1} \,\middle|\, \left| \int_{T_{n-1}}^t (\zeta_s^n - \zeta_s) dM_s \right| = \frac{\varepsilon}{2^n} \right\} \wedge T,\ n \in \mathsf{N}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wegen (4.4) und des Lemmas von Borel-Cantelli gilt

$$P\left[\cup_{n=0}^\infty \{T_n = T\}\right] = 1. \tag{4.6}$$

Wir definieren nun ζ^ε durch

$$\zeta_t^\varepsilon \triangleq \sum_{n=1}^\infty \zeta_t^n 1_{[T_{n-1}, T_n)}(t) \text{ für } 0 \leq t \leq T.$$

Aus (4.3) und (4.6) folgt, daß die Pfade von ζ^ε von beschränkter Variation sind. Außerdem impliziert (4.5)

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t (\zeta_s^\varepsilon - \zeta_s) dM_s \right| \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

2. Seien nun M und ζ beliebig. Wir definieren die Stoppzeiten

$$T_m \triangleq \inf\left\{ t \,\middle|\, \int_0^t \zeta_s^2 d\langle M \rangle_s > m \text{ oder } \langle M \rangle_t > m \right\} \wedge T \quad (m \in \mathsf{N}).$$

Wegen der Stetigkeit von $\langle M \rangle$ und Voraussetzung (4.1) können wir eine aufsteigende Folge $(m_n)_{n \in \mathsf{N}}$ mit $m_n \in \mathsf{N}$ für $n \in \mathsf{N}$ und

$$P[T_{m_n} < T] < \frac{1}{n^2}$$

konstruieren. Außerdem setzen wir $T_{m_0} = 0$. Wegen des schon bewiesenen Falles finden wir eine Folge von adaptierten RCLL-Prozessen $(\zeta^{m_n})_{n \in \mathsf{N}}$ mit Pfaden von beschränkter Variation, so daß

$$\sup_{0 \leq t \leq T_{m_n}} \left| \int_0^t (\zeta_s^{m_n} - \zeta_s) dM_s \right| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \quad (n \in \mathsf{N}).$$

Die Strategie ζ^ε mit

$$\zeta_t^\varepsilon \triangleq \sum_{n=1}^\infty \zeta_t^{m_n} 1_{[T_{m_{n-1}}, T_{m_n})}(t) \quad (0 \leq t \leq T)$$

hat dann die gewünschten Eigenschaften. ■

Der zweite Approximationssatz besagt, daß man einen beliebigen RCLL-Prozeß, der als Parameter in dem Integranden eines stochastischen Integrals einer bestimmten Form auftaucht, so durch einen stetigen adaptierten Prozeß von beschränkter Variation ersetzen kann, daß das neue stochastische Integral das ursprüngliche stochastische Integral gleichmäßig bis auf ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ approximiert.

Wir werden diesen Satz in Kapitel 5 für die Funktion

$$f(s,z,p) \triangleq \frac{\int_0^p \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)}$$

anwenden, die in der Definition von Ξ^π in Satz 2.5 ausgezeichnet wird.

Satz 4.2 *Seien $\widetilde{S}$ und Z stetige Semimartingale, $\alpha \in \mathsf{R}$, $\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$ und f : $[0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ stetig und im dritten Argument monoton wachsend. Dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden adaptierten RCLL-Prozeß θ einen adaptierten und pfadweise stetigen, variationsbeschränkten und stückweise linearen Prozeß θ^ε, so daß*

$$\theta_0^\varepsilon = \alpha, \tag{4.7}$$

$$\theta_T^\varepsilon = \beta$$

und

$$\sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t (f(s,Z_s,\theta_s^\varepsilon) - f(s,Z_s,\theta_s))d\widetilde{S}_s \right| < \varepsilon \tag{4.8}$$

gilt.

Der Beweis erweitert Levental und Skorohod [27], die im Fall $f(s,z,p) = p$ und ohne eine Bedingung an θ_T^ε zeigen, daß eine P-fast sichere gleichmäßige ε-Approximation durch stückweise konstante Prozesse θ^ε von beschränkter Variation möglich ist.

Die Beweisidee von Levental und Skorohod besteht darin, die Strategie θ^ε so lange konstant zu halten, bis sie das erste mal um mehr als eine vorgegebene Konstante von θ abweicht. Die Strategie θ^ε wird dann sprunghaft auf den dann aktuellen Wert von θ gesetzt und das Spiel beginnt von neuem. Eine geeignete Lokalisierung führt dann zusammen mit einer geschickten Wahl der Konstanten zum Ziel. Dabei wird die Doobsche Ungleichung zum Abschätzen von

$$\sup_{0\le t\le T} \left| \int_0^t (\theta_s^\varepsilon - \theta_s)\, d\widetilde{S}_s \right|$$

verwendet.

Da wir eine stetige Strategie θ^ε konstruieren wollen, ersetzen wir die sprunghafte Anpassung an den aktuellen Wert von θ durch eine schnelle, lineare Anpassung an den am Anfangszeitpunkt dieser Anpassung aktuell gewesenen Wert von θ. Außerdem konstruieren wir mit Hilfe des Martingalkonvergenzsatzes einen stetigen Prozeß $\widetilde{\beta}$ mit Pfaden von beschränkter Variation, so daß $\widetilde{\beta}_T = \beta$. Die Idee besteht dann darin, die eben beschriebene Konstruktion von θ^ε bis hinreichend kurz vor T durchzuführen und dann, nach einem verbindenden Übergangsstück, $\theta^\varepsilon = \widetilde{\beta}$ zu setzen.

Daß der Beweis für eine beliebige stetige Funktionen f durchgeführt wird, bereitet im Vergleich zur Betrachtung des Spezialfalls $f(s, z, p) = p$ keine zusätzlichen Schwierigkeiten.

Bemerkung 4.3 *Aus der Adaptiertheit und der RCLL-Eigenschaft der Prozesse* $(f(t, Z_t, \theta_t))_{0\le t\le T}$ *bzw.* $(f(t, Z_t, \theta_t^\varepsilon))_{0\le t\le T}$ *folgt ihre progressive Meßbarkeit und pfadweise Beschränktheit. Deswegen sind die Integrale dieser Prozesse bezüglich Integratoren, die stetige Semimartingale sind, definiert.*

Beweis. Im folgenden verwenden wir die abkürzende Schreibweise

$$g_s(\eta) \triangleq f(s, Z_s, \eta_s) - f(s, Z_s, \theta_s),$$

wobei $\eta = (\eta_s)_{0\le s\le T}$ ein beliebiger Prozeß sein kann.

1. Sei ein $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Im zweiten Teil dieses Beweises konstruieren wir Stoppzeiten τ_n $(n \in \mathsf{N}_0)$ und Prozesse θ^n $(n \in \mathsf{N}_0)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\tau_0 = 0, \tag{4.9}$$

$$\tau_{n-1} \le \tau_n \le T,\ n \in \mathsf{N}, \tag{4.10}$$

$$P[\tau_n < T] < \frac{1}{n^2},\ n \in \mathsf{N}, \tag{4.11}$$

$$\theta^n \text{ ist adaptiert und hat variationsbeschränkte, ab } \tau_n \text{ stetige und stückweise lineare Pfade,} \tag{4.12}$$

$$\theta^n_{\tau_n} = \theta^{n-1}_{\tau_n} \text{ für } n \in \mathsf{N}, \tag{4.13}$$

$$\theta^0_0 = \alpha, \tag{4.14}$$

$$\theta^n_T = \beta \text{ und} \tag{4.15}$$

$$\sup_{\tau_n\le t\le\tau_{n+1}} \left| \int_{\tau_n}^t g_s(\theta^n)\,d\widetilde{S} \right| \le \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{4.16}$$

Aus (4.11) und dem Lemma von Borel-Cantelli folgt, daß

$$P\left[\cup_{n=0}^\infty \{\tau_n = T\}\right] = 1.$$

Wir definieren den wegen (4.12), (4.13) und (4.15) adaptierten und pfadweise stetigen, variationsbeschränkten und stückweise linearen Prozeß θ^ε durch

$$\theta_t^\varepsilon = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta_t^n 1_{[\tau_n, \tau_{n+1})}(t) \right) + \beta 1_{[T]}(t) \ (0 \leq t \leq T). \tag{4.17}$$

Wegen (4.14) ist (4.7) erfüllt. Außerdem folgt aus (4.16)

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t g_s(\theta^\varepsilon) d\widetilde{S} \right| \\ \leq & \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}} \left| \int_{\tau_n}^t g_s(\theta^n) d\widetilde{S}_s \right| \\ \leq & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon \end{aligned}$$

und somit (4.8). Der Prozeß θ^ε hat damit alle in der Behauptung des Satzes genannten Eigenschaften.

2. Wir wollen nun die θ^n und τ_n mit den Eigenschaften aus 1. induktiv konstruieren. Dazu konstruieren wir in a) eine Folge reeller Zahlen $(t_l)_{l \in \mathbb{N}}$ sowie drei adaptierte RCLL-Hilfsprozesse $\theta^{\inf} = \left(\theta_t^{\inf}\right)_{0 \leq t \leq T}$, $\theta^{\sup} = (\theta_t^{\sup})_{0 \leq t \leq T}$ und $\widetilde{\beta} = \left(\widetilde{\beta}_t\right)_{t_2 \leq t \leq T}$, die allesamt in der Induktion benötigt werden. In b) führen wir dann die Induktion aus.

a) Wir definieren ein quadratisch integrierbares Martingal $(J_t)_{0 \leq t \leq T}$ und ein Semimartingal $(\beta_t)_{0 \leq t \leq T}$ durch

$$\begin{aligned} J_t &\triangleq E[\tanh \beta | \mathcal{F}_t] && \text{für } (0 \leq t \leq T), \\ \beta_t &\triangleq \operatorname{artanh} J_t && \text{für } (0 \leq t \leq T) \end{aligned}$$

und setzen

$$\begin{aligned} \theta_t^{\inf} &\triangleq \min \left(\inf_{0 \leq s \leq t} \theta_s, \inf_{0 \leq s \leq t} \beta_s, \alpha \right) \text{ für } 0 \leq t \leq T \text{ und} \\ \theta_t^{\sup} &\triangleq \max \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \theta_s, \sup_{0 \leq s \leq t} \beta_s, \alpha \right) \text{ für } 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Man beachte, daß aus dem Martingalkonvergenzsatz und aus $\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$

$$\lim_{t \to T} J_t = \tanh \beta \ P\text{-fast sicher und in } L^2 \tag{4.18}$$

und somit

$$\lim_{t \to T} \beta_t = \beta \ P\text{-fast sicher} \tag{4.19}$$

folgt. Aus (4.18) und der Doobschen Ungleichung erhalten wir

$$\lim_{t\to T} \sup_{t\le s\le T} |J_s - J_t| = 0 \text{ in } L^2,$$

weswegen wir mit Hilfe der Chebeychev-Ungleichung eine Folge $(t_l)_{l\in\mathsf{N}}$ reeller Zahlen mit

$$t_1 = 0, \tag{4.20}$$

$$t_l < t_{l+1} < T \qquad (l \in \mathsf{N}), \tag{4.21}$$

$$(T - t_l) \le \frac{1}{l} \qquad (l \ge 2), \tag{4.22}$$

$$P[\sup_{t_l\le s\le T} |J_s - J_{t_l}| > \frac{1}{l^2}] < \frac{1}{l^2} \qquad (l \ge 2) \tag{4.23}$$

konstruieren können. Das Lemma von Borel-Cantelli besagt, daß es für P-fast alle ω ein $l_0(\omega) \in \mathsf{N}$ mit

$$\sup_{t_l\le s\le T} |J_s(\omega) - J_{t_l}(\omega)| \le \frac{1}{l^2} \text{ für } l \ge l_0(\omega)$$

gibt. Deswegen gilt für solche ω auch

$$\sup_{t_l\le s\le T} |\beta_s(\omega) - \beta_{t_l}(\omega)| \le \frac{C(\omega)}{l^2} \text{ für } l \ge l_0(\omega) \tag{4.24}$$

mit

$$C(\omega) = \max\left[\operatorname{artanh}'\left(\inf_{0\le t\le T} J_t(\omega)\right), \operatorname{artanh}'\left(\sup_{0\le t\le T} J_t(\omega)\right)\right] < \infty,$$

wobei artanh´die Ableitung von artanh ist. Wir definieren den wegen (4.19) stetigen, stückweise linearen und adaptierten Prozeß $\widetilde{\beta} = \left(\widetilde{\beta}_t\right)_{t_2\le t\le T}$ durch

$$\widetilde{\beta}_t \triangleq \beta_{t_{l-1}} + \frac{(t - t_l)}{(t_{l+1} - t_l)}\beta_{t_l} \text{ für } t \in [t_l, t_{l+1}] \ (l \ge 2),$$

$$\widetilde{\beta}_T \triangleq \beta.$$

Aus (4.24) erhalten wir

$$\sum_{l\ge 1} \left|\beta_{t_{l+1}}(\omega) - \beta_{t_l}(\omega)\right| < \infty,$$

weswegen gilt:

$$\text{Die Pfade von } \widetilde{\beta} \text{ sind von beschränkter Variation.} \tag{4.25}$$

b) Wir konstruieren jetzt induktiv Stoppzeiten τ_n und Strategien θ^n mit den Eigenschaften (4.9)-(4.16), so daß zusätzlich

$$\theta_t^{\inf} \leq \theta_t^n \leq \theta_t^{\sup} \text{ für } 0 \leq t \leq T. \tag{4.26}$$

Dafür setzen wir $\theta_0^{-1} \triangleq \alpha$ und $\tau_0 \triangleq 0$ und geben uns ein beliebiges $n \in \mathsf{N}_0$ vor. Falls $n > 0$, so seien außerdem θ^{n-1} und τ_n mit den Eigenschaften (4.9)-(4.16) und (4.26) konstruiert. Wir definieren eine Familie von Prozessen $(\theta^{\delta_1,\delta_2}; \delta_1, \delta_2 > 0)$ und zeigen in b3), daß $\theta^n \triangleq \theta^{\delta_1^*,\delta_2^*}$ für hinreichend kleine δ_1^* und δ_2^* gesetzt werden kann.

Seien also beliebige $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ vorgegeben. Wir setzen

$$U \triangleq (T - \delta_2) \vee \tau_n$$

und definieren $\theta^{\delta_1,\delta_2}$ in b1) und b2) nacheinander auf $[0, U]$ und $(U, T]$. Dabei soll $\theta^{\delta_1,\delta_2}$ auf dem ersten stochastischen Intervall den Prozeß θ approximieren, während auf dem zweiten, typischerweise kurzen, stochastischen Intervall dafür gesorgt wird, daß der Endbestand $\theta_T^{\delta_1,\delta_2}$ gleich β ist.

b1) (Konstruktion auf $[0, U]$) Da $(f(t, Z_t, \theta_t))_{0 \leq t \leq T}$ adaptiert und RCLL ist, definiert

$$\begin{aligned} T_0 &\triangleq \tau_n, \\ T_{2m+1} &\triangleq (T_{2m} + \delta_2) \wedge U \text{ für } m \geq 0, \\ T_{2m+2} &\triangleq (\inf\{t > T_{2m+1} \mid \ |f(t, Z_t, \theta_t) - f(T_{2m}, Z_{T_{2m}}, \theta_{T_{2m}})| > \delta_1\}) \wedge U \text{ für } m \geq 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

eine weitere von δ_1, δ_2 und n abhängige aufsteigende Folge von Stoppzeiten. Offensichtlich ist für jedes (δ_1, δ_2) mit $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$

$$P\left[\cup_{k=0}^{\infty}\{T_k = U\}\right] = 1. \tag{4.28}$$

Da $(f(t, Z_t, \theta_t))_{0 \leq t \leq T}$ adaptiert und RCLL ist, können wir zur Benutzung im Beweis von Behauptung 4.4 (s.u.) notieren, daß dies auch für (δ_1, δ_2) mit $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 = 0$ der Fall ist. Wenn $\delta_2 > 0$, so definiert

$$\begin{aligned} \theta_t^{\delta_1,\delta_2} &\triangleq \alpha && \text{für } t < T_0, \\ \theta_t^{\delta_1,\delta_2} &\triangleq \theta_{T_0}^{n-1} + (\theta_{T_0} - \theta_{T_0}^{n-1})\frac{t - T_0}{\delta_2} && \text{für } t \in [T_0, T_1], \\ \theta_t^{\delta_1,\delta_2} &\triangleq \theta_{T_{2m}} && \text{für } t \in (T_{2m+1}, T_{2m+2}] \text{ und } m \geq 0, \\ \theta_t^{\delta_1,\delta_2} &\triangleq \theta_{T_{2m}} + (\theta_{T_{2m+2}} - \theta_{T_{2m}})\frac{t - T_{2m+2}}{\delta_2} && \text{für } t \in (T_{2m+2}, T_{2m+3}] \text{ und } m \geq 1 \end{aligned}$$

$\theta^{\delta_1,\delta_2}$ auf dem Intervall $[0, U]$.

b2) (Konstruktion auf $[U, T]$)Wir definieren eine $\mathcal{F}_U$-meßbare Stoppzeit

$$\widetilde{U} \triangleq \min(t_l | l \in \mathsf{N}, t_l > U) 1_{\tau_n < T} + T 1_{\tau_n = T}$$

und eine Zufallsvariable

$$l^{\min} \triangleq \begin{cases} \min(l \in \mathsf{N} | t_l > U), & \text{wenn } \tau_n < T \\ 2, & \text{wenn } \tau_n = T \end{cases}$$

mit $l^{\min} \geq 2$.

Wir setzen

$$\theta_t^{\delta_1,\delta_2} \triangleq \theta_U^{\delta_1,\delta_2} + (\beta_{t_{l^{\min}-1}} - \theta_U^{\delta_1,\delta_2}) \frac{t-U}{\widetilde{U}-U} \qquad \text{für } t \in (U, \widetilde{U}],$$

$$\theta_t^{\delta_1,\delta_2} \triangleq \widetilde{\beta}_t \qquad \text{für } t \in (\widetilde{U}, T].$$

Somit haben wir den Prozeß $\theta^{\delta_1,\delta_2}$ auf $[0, T]$ definiert.

b3) Nach Konstruktion ist $\theta^{\delta_1,\delta_2}$ adaptiert mit ab τ_n stetigen und stückweise linearen Pfaden, $\theta_{\tau_n}^{\delta_1,\delta_2} = \theta_{\tau_n}^{n-1}$, $\theta_T^{\delta_1,\delta_2} = \beta$ und wegen der Induktionsannahme gilt auch (4.26). Aus (4.25) und (4.28) folgt, daß die Pfade von $\theta^{\delta_1,\delta_2}$ von beschränkter Variation sind.

Analog zu Bemerkung 4.3 sind stochastische Integrale von $(f(t, Z_t, \theta_t^{\delta_1,\delta_2}))_{0 \leq t \leq T}$ bezüglich stetiger Semimartingalintegratoren definiert.

Es reicht also zu zeigen, daß wir für hinreichend kleine δ_1 und $\delta_2 > 0$ eine (4.11) erfüllende Stoppzeit τ_{n+1} finden, so daß

$$\sup_{\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}} \left| \int_{\tau_n}^t g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2}) d\widetilde{S}_s \right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \tag{4.29}$$

gilt.

Sei $\widetilde{S} = M + A$ die eindeutige kanonische Zerlegung von $\widetilde{S}$ in ein lokales Martingal M und einen stetigen Prozeß von beschränkter Variation A. Wegen der Stetigkeit von $\widetilde{S}$ sind $\langle M \rangle_t$ und $\int_0^t d|A_s|$ stetig. Wir definieren zu einer beliebigen Konstante $L > 0$ eine lokalisierende Stoppzeit T^* durch

$$T^* \triangleq \inf \Bigg\{ t > \tau_n \Bigg| \max \Bigg(\int_{\tau_n}^t d\langle M \rangle_s, \\ \int_{\tau_n}^t d|A_s|, \ |f(t, Z_t, \theta_t^{\inf})|, \ |f(t, Z_t, \theta_t^{\sup})| \Bigg) > L \Bigg\} \wedge T.$$

Da $\left(|f(t,Z_t,\theta_t^{\inf})|\right)_{0\le t\le T}$ und $(|f(t,Z_t,\theta_t^{\sup})|)_{0\le t\le T}$ RCLL und $\left(\int_0^t d|A_s|\right)_{0\le t\le T}$ und $(\langle M\rangle_t)_{0\le t\le T}$ stetig sind, können wir nun ein L fixieren, so daß

$$P[T^* < T] < \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)^2}. \tag{4.30}$$

Im Anschluß an diese Hauptlinie des Beweises zeigen wir, daß

$$\exists \delta_1^*, \delta_2^* > 0 \text{ mit } P\left[\sup_{\tau_n \le t\le T^*}\left|\int_{\tau_n}^t g_s(\theta^{\delta_1^*,\delta_2^*})d\widetilde{S}_s\right| \ge \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \le \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)^2}. \tag{4.31}$$

Wir definieren

$$\theta^n \triangleq \theta^{\delta_1^*,\delta_2^*}$$

und

$$\tau_{n+1} \triangleq \inf\left\{t > \tau_n \;\middle|\; \left|\int_{\tau_n}^t g_s(\theta^n)d\widetilde{S}_s\right| = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right\} \wedge T^* \tag{4.32}$$

und wegen (4.30) und (4.31) erfüllt diese Stoppzeit (4.11). Klarerweise gilt auch (4.29). ■

Der Beweis der folgenden Behauptung komplettiert den Beweis von Satz 4.2.

Behauptung 4.4 *Es gilt (4.31).*

Beweis. Wegen der Definition von T^* und der Monotonie von f im dritten Argument gilt für beliebige $\delta_1, \delta_2 > 0$, daß

$$\max\left(\left|f(t,Z_t,\theta_t^{\delta_1,\delta_2})\right|, |f(t,Z_t,\theta_t)|\right) \le L \text{ für } \tau_n < t < T^*. \tag{4.33}$$

Mit Hilfe der Definitionen von T^* und $\theta^{\delta_1,\delta_2}$, der Doobschen Ungleichung, der fundamentalen Isometrie für stochastische Integrale und (4.33) können wir abschätzen:

$$
\begin{aligned}
& E\left[\left(\sup_{\tau_n \le t \le T^*}\left|\int_{\tau_n}^{t} g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2}) dM_s\right|\right)^2\right] \\
\le\ & 4E\left[\left(\int_{\tau_n}^{T^*} g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2}) dM_s\right)^2\right] \\
=\ & 4E\left[\int_{\tau_n}^{T^*} g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})^2 d\langle M\rangle_s\right] \\
=\ & 4E\left[\sum_{m=0}^{\infty}\int_{T_{2m}\wedge T^*}^{T_{2m+1}\wedge T^*} g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})^2 d\langle M\rangle_s\right. \\
& + \sum_{m=0}^{\infty}\int_{T_{2m+1}\wedge T^*}^{T_{2m+2}\wedge T^*} g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})^2 d\langle M\rangle_s \\
& \left. + \int_{U\wedge T^*}^{T^*} g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})^2 d\langle M\rangle_s\right] \\
\le\ & 4E\left[\sum_{m=0}^{\infty}\int_{T_{2m}\wedge T^*}^{T_{2m+1}\wedge T^*} (2L)^2 d\langle M\rangle_s + \int_{U\wedge T^*}^{T^*} (2L)^2 d\langle M\rangle_s\right] \\
& + 4E\left[\sum_{m=0}^{\infty}\int_{T_{2m+1}\wedge T^*}^{T_{2m+2}\wedge T^*} \delta_1^2 d\langle M\rangle_s\right] \\
\le\ & 16L^2 E\left[\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1,\delta_2}}(s) d\langle M\rangle_s\right] + 4\delta_1^2 L \\
& \stackrel{\triangle}{=} C_1(\delta_1,\delta_2)
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

mit

$$
B_{\delta_1,\delta_2} = \cup_{m\ge 0}\Big\{(t,\omega)|T_{2m}\wedge T^* \le t \le T_{2m+1}\wedge T^*\Big\} \\
\cup\Big\{(t,\omega)|U\wedge T^* \le t \le T^*\Big\}.
$$

Durch eine ähnliche Rechnung können wir auch den Anteil von beschränkter Variation des Integrals $\int_{\tau_n}^t \left(f(s, Z_s, \theta_s^{\delta_1,\delta_2}) - f(s, Z_s, \theta_s)\right) d\widetilde{S}_s$ abschätzen:

$$
\begin{aligned}
& E\left[\sup_{\tau_n \le t \le T^*} \left|\int_{\tau_n}^t g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2}) dA_s\right|\right] \\
\le\ & E\left[\sup_{\tau_n \le t \le T^*} \int_{\tau_n}^t \left|g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})\right| d|A_s|\right] \\
=\ & E\left[\sum_{m=0}^{\infty} \int_{T_{2m}\wedge T^*}^{T_{2m+1}\wedge T^*} |g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})| d|A_s|\right. \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{T_{2m+1}\wedge T^*}^{T_{2m+2}\wedge T^*} |g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})| d|A_s| \\
& \left. + \int_{U\wedge T^*}^{T^*} |g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2})| d|A_s|\right] \\
\le\ & E\left[\sum_{m=0}^{\infty} \int_{T_{2m}\wedge T^*}^{T_{2m+1}\wedge T^*} 2L d|A_s| + \int_{U\wedge T^*}^{T^*} 2L d|A_s|\right] \\
& + E\left[\sum_{m=0}^{\infty} \int_{T_{2m+1}\wedge T^*}^{T_{2m+2}\wedge T^*} \delta_1 d|A_s|\right] \\
\le\ & 2LE\left[\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1,\delta_2}}(s) d|A_s|\right] + \delta_1 L \\
& \triangleq C_2(\delta_1, \delta_2).
\end{aligned} \tag{4.35}
$$

Mit Hilfe der Chebeychev-Ungleichung folgt aus (4.34) und (4.35):

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{\tau_n \le t \le T^*} \left|\int_{\tau_n}^t g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2}) dM_s\right| \ge \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \\
=\ & P\left[\left(\sup_{\tau_n \le t \le T^*} \left|\int_{\tau_n}^t g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2}) dM_s\right|\right)^2 \ge \left(\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right)^2\right] \\
\le\ & \frac{C_1(\delta_1, \delta_2)}{\left(\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right)^2}
\end{aligned} \tag{4.36}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& P\left[\sup_{\tau_n \le t \le T^*} \left|\int_{\tau_n}^t g_s(\theta^{\delta_1,\delta_2}) dA_s\right| \ge \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \\
\le\ & \frac{C_2(\delta_1, \delta_2)}{\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}}.
\end{aligned} \tag{4.37}
$$

Wir wollen nun δ_1^* und δ_2^* so wählen, daß

$$\frac{C_1(\delta_1^*,\delta_2^*)}{\left(\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right)^2} \leq \frac{\frac{1}{4}}{(n+1)^2} \tag{4.38}$$

und

$$\frac{C_2(\delta_1^*,\delta_2^*)}{\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}} \leq \frac{\frac{1}{4}}{(n+1)^2}. \tag{4.39}$$

Dies ist möglich, da wir zuerst δ_1^* so wählen können, daß

$$4(\delta_1^*)^2 L \leq \frac{\frac{1}{8}}{(n+1)^2}\left(\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right)^2$$

und gleichzeitig

$$\delta_1^* L \leq \frac{\frac{1}{8}}{(n+1)^2}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Wir verdeutlichen im folgenden die (δ_1,δ_2)-Abhängigkeit der Stoppzeiten T_k, indem wir sie mit $T_k^{\delta_1,\delta_2}$ bezeichnen. Mit $\rho < \frac{\delta_1^*}{2}$ können wir dann ω-weise auf $\cup_{k=0}^\infty \{T_k^{\rho,0} = U\}$ die Anzahl der Intervalle $\left\{T_{2m}^{\delta_1^*,\delta_2} \wedge T^* \leq t \leq T_{2m+1}^{\delta_1^*,\delta_2} \wedge T^*\right\}$ in $B_{\delta_1^*,\delta_2}$ mit Lebesguemaß > 0 unabhängig von δ_2 durch die endliche Anzahl $N(\omega)$ der Intervalle $\left\{T_{2m+1}^{\rho,0} \wedge T^* \leq t \leq T_{2m+2}^{\rho,0} \wedge T^*\right\}$ mit Lebesguemaß > 0 nach oben abschätzen: Denn wenn sie größer wäre, gäbe es $m,k \in \mathsf{N}_0$ und ein Intervall $[t_1,t_2]$ mit $t_1 < t_2$, $t_1 = T_{2m+1}^{\rho,0} \wedge T^*$ und $t_2 = T_{2m+2}^{\rho,0} \wedge T^*$, sowie zwei Punkte $s_1 < s_2$ mit $s_1, s_2 \in [t_1,t_2)$, $s_1 = T_{2k}^{\delta_1^*,\delta_2} \wedge T^*$ und $s_2 = T_{2k+2}^{\delta_1^*,\delta_2} \wedge T^*$. Mittels der Dreiecksungleichung würden wir dann den Widerspruch

$$\begin{aligned} & |f(s_1,Z_{s_1},\theta_{s_1}) - f(s_2,Z_{s_2},\theta_{s_2})| \\ \leq \;& |f(s_1,Z_{s_1},\theta_{s_1}) - f(t_1,Z_{t_1},\theta_{t_1})| + |f(s_2,Z_{s_2},\theta_{s_2}) - f(t_1,Z_{t_1},\theta_{t_1})| \\ < \;& \rho + \rho < \delta_1^* \end{aligned}$$

erhalten.

Wegen der P-fast sicheren gleichmäßigen Stetigkeit von $\langle M\rangle_t(\omega)$ auf $[0,T]$ gibt es P-fast sicher zu jedem $\overline{\varepsilon} > 0$ ein $\overline{\delta}$, so daß ein Intervall mit Lebesguemaß $< \overline{\delta}$ eine Masse $< \frac{\overline{\varepsilon}}{N(\omega)}$ bezüglich des Maßes $d\langle M\rangle_t(\omega)$ hat. Also erhalten wir wegen (4.28), daß

$$\lim_{\delta_2\to 0}\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1^*,\delta_2}}(s)\,d\langle M\rangle_s = 0 \quad P\text{-fast sicher.}$$

Da $\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1^*,\delta_2}}(s)d\langle M\rangle_s$ nach Definition von T^* durch L majorisiert wird, folgt aus dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{\delta_2\to 0} 16L^2 E\left[\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1^*,\delta_2}}(s)d\langle M\rangle_s\right] = 0.$$

Eine entsprechende Überlegung zeigt

$$\lim_{\delta_2\to 0} 2LE\left[\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1^*,\delta_2}}(s)d|A_s|\right] = 0.$$

Wir sehen, daß wir δ_2^* so wählen können, daß

$$16L^2 E\left[\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1^*,\delta_2^*}}(s)d\langle M\rangle_s\right] \leq \frac{\frac{1}{8}}{(n+1)^2}\left(\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right)^2$$

und

$$2LE\left[\int_{\tau_n}^{T^*} 1_{B_{\delta_1^*,\delta_2^*}}(s)d|A_s|\right] \leq \frac{\frac{1}{8}}{(n+1)^2}\frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Aus (4.36), (4.37), (4.38) und (4.39) folgt nun

$$\begin{aligned}
& P\left[\sup_{\tau_n\leq t\leq T^*} |\int_{\tau_n}^{t} g_s(\theta^{\delta_1^*,\delta_2^*})d\widetilde{S}_s| \geq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \\
\leq\ & P\left[\sup_{\tau_n\leq t\leq T^*} \left|\int_{\tau_n}^{t} g_s(\theta^{\delta_1^*,\delta_2^*})dM_s\right| \geq \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \\
& +P\left[\sup_{\tau_n\leq t\leq T^*} \left|\int_{\tau_n}^{t} g_s(\theta^{\delta_1^*,\delta_2^*})dA_s\right| \geq \frac{\frac{1}{2}\varepsilon}{2^{n+1}}\right] \\
\leq\ & \frac{\frac{1}{4}}{(n+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(n+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

■

Kapitel 5

Gleichmäßige Approximierbarkeit von Zufallsvariablen

In liquiden Finanzmärkten ist die Frage, welche Zufallsvariablen mit Hilfe von zulässigen Strategien dupliziert werden können, von zentraler Bedeutung. Die Derivate, die durch solche Zufallsvariablen repräsentiert werden, können nämlich mit Hilfe von No-Arbitrage-Überlegungen eindeutig bewertet werden. Sowohl der Käufer als auch der Verkäufer des Derivats können ihr Risiko mit Hilfe der zulässigen Strategie absichern. In vollständigen liquiden Finanzmärkten ist jede nach unten beschränkte, unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß integrierbare Zufallsvariable duplizierbar. Das dafür notwendige Anfangskapital ist durch den Erwartungswert der abdiskontierten Zufallsvariable unter dem Martingalmaß gegeben.

Viele Duplikationsstrategien in liquiden Finanzmärkten haben eine nicht verschwindende quadratische Variation. In einem strikt illiquiden Finanzmarkt (vgl. (2.3) fällt der realisierbare Portfoliowert einer zulässigen Strategie nach Satz 2.5 im P^0-Mittel ($P^0 \in \mathcal{P}^0$), wenn die quadratische Variation der Strategie ansteigt. Deswegen ist es nicht zu erwarten, daß es in einem illiquiden Finanzmarkt mit vollständigem assoziierten Finanzmarkt und eindeutigem äquivalenten Martingalmaß P^0 für alle nach unten beschränkten $\mathcal{F}_T$-meßbaren Zufallsvariablen $H \in L^1(P^0)$ eine zulässige Strategie π mit $R_0^\pi \leq E^0[\frac{H}{B_T}]$ gibt, für die $R_T^\pi = \frac{H}{B_T}$ gilt.

Anstelle der perfekten Duplikation betrachten wir deswegen in illiquiden Finanzmärkten das Konzept der gleichmäßigen Approximierbarkeit von Zufallsvariablen. Dabei heißt eine Zufallsvariable H gleichmäßig approximierbar mit Anfangskapital H_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine zulässige Strategie π mit $R_0^\pi = H_0$ gibt, so daß $\left| R_T^\pi - \frac{H}{B_T} \right| \leq \varepsilon$.

In Satz 5.3 geben wir Bedingungen an, aus denen folgt, daß alle im assoziierten Finanzmarkt mit Hilfe von zulässigen Strategien duplizierbaren Zufallsvariablen automatisch mit dem gleichen Anfangskapital im illiquiden Finanzmarkt gleichmäßig approximierbar sind. Unter diesen Bedingungen folgt aus der Vollständigkeit des assoziierten Finanzmarktes, daß jede nach unten beschränkte $\mathcal{F}_T$-meßbare Zufallsvariable $H \in L^1(P^0)$ $(P^0 \in \mathcal{P}^0)$ mit Anfangskapital $E^0[\frac{H}{B_T}]$ gleichmäßig approximierbar ist.

Sei ein illiquider Finanzmarkt (B, Ψ) gegeben. Wir definieren

$$E \triangleq \left\{ (s,z,y) \in [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R} \,\middle|\, \frac{\int_0^{-\infty} \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)} < y < \frac{\int_0^{\infty} \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)} \right\}.$$

Die Definition von E wird durch die Zerlegung des realisierbaren Portfoliowertes aus Satz 2.5 und der dortigen Definition der effektiven Aktienposition

$$\Xi_s^\pi \triangleq \frac{\left(\int_0^{\pi_s^1} \psi_z(s,Z_s,x)dx\right)}{\psi_z(s,Z_s,0)}$$

des ökonomischen Agenten motiviert. Wegen $\psi_z > 0$ gilt

$$\frac{\int_0^{p_1} \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)} < \frac{\int_0^{p_2} \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)} \text{ für } p_1, p_2 \in \mathsf{R} \text{ mit } p_1 < p_2.$$

Somit ist E die Menge aller in den einzelnen Zeiten und Zuständen möglichen effektiven Aktienpositionen des ökonomischen Agenten.

Der Satz über implizite Funktionen besagt unter Berücksichtigung der Regularitätsannahmen an ψ, daß die wegen (1.3) wohldefinierte, durch

$$\Phi : E \to \mathsf{R},$$
$$\frac{\int_0^{\Phi(s,z,y)} \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)} = y \tag{5.1}$$

implizit gegebene Funktion

$$\Phi \in C^1(E) \tag{5.2}$$

und

$$E \text{ offen in } [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R} \tag{5.3}$$

ist.

Der Wert $\Phi(s,z,y)$ ist die Aktienposition, die der ökonomische Agent im Zustand z zur Zeit s halten muß, um eine effektive Aktienposition von y zu haben.

Wir definieren nun das für uns wesentliche Äquivalent der Begriffe Erreichbarkeit bzw. Vollständigkeit, die wir aus der Theorie der liquiden Finanzmärkte kennen. Dabei bezeichnet $Y^a(H)$ den Superreplikationspreis von $H \in L^0(\mathcal{F}_T)$ im assoziierten Finanzmarkt (vgl. (1.18)) und H^* die abdiskontierte Zufallsvariable $\frac{H}{B_T}$.

Definition 5.1 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Die Zufallsvariable $H \in L^0(\mathcal{F}_T)$ heißt gleichmäßig approximierbar mit Anfangskapital H_0, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine zulässige Strategie π mit*

$$\begin{aligned} R_0^\pi &= H_0 \text{ und} \\ |R_T^\pi - H^*| &< \varepsilon \end{aligned} \tag{5.4}$$

gibt. Den Approximationspreis von H definieren wir als das Infimum aller solcher H_0. Wir bezeichnen einen Finanzmarkt als approximativ vollständig, wenn es zu jeder nach unten beschränkten $\mathcal{F}_T$-meßbaren Zufallsvariablen H mit $Y^a(H) < \infty$ ein $P \in \mathcal{P}^0$ gibt, so daß H mit Anfangskapital $E^0[H^*]$ gleichmäßig approximiert werden kann.

Bemerkung 5.2 *Da wir den Prozeß der kurzfristigen Zinsraten r als beschränkt vorausgesetzt haben, ist unsere Definiton der gleichmäßigen Approximierbarkeit äquivalent zu einer, die in (5.4)*

$$|B_T R_T^\pi - H| < \varepsilon$$

fordert (vgl. Bemerkung 2.2).

Der nächste Satz und das darauf folgende Korollar ermöglichen es in vielen Fällen, Approximationspreise auf überraschend einfache Weise zu berechnen. Dabei kombinieren wir die Zerlegung der Dynamik des realisierbaren Portfoliowertes aus Satz 2.5 mit den Approximationssätzen aus Abschnitt 4.

Satz 5.3 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt und $H \in L^0(\mathcal{F}_T)$ nach unten beschränkt.*

1. *Der Approximationspreis von H ist größer oder gleich $Y^a(H)$.*
2. *Sei ξ eine zulässige RCLL-Strategie für den assoziierten Finanzmarkt mit*

$$H^* = H_0 + \int_0^T \xi_s^1 d\widetilde{S}_s. \tag{5.5}$$

Falls

$$P\text{-fast sicher gilt: } \left(s, Z_s, \xi_s^1\right) \in E \text{ für alle } s \in [0, T], \tag{5.6}$$

so ist H mit Anfangskapital H_0 gleichmäßig approximierbar.

3. Sei ξ eine zulässige Strategie für den assoziierten Finanzmarkt mit (5.5). Falls

$$E = [0, T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R}, \tag{5.7}$$

so ist H mit Anfangskapital H_0 gleichmäßig approximierbar.

Bemerkung 5.4 *Der dritte Teil ist keine direkte Folge aus dem zweiten Teil, da die Strategie ξ in letzterem als RCLL angenommen wird.*

Bedingung (5.7) impliziert, daß der ökonomische Agent in jedem Zustand z zu jeder Zeit s eine beliebige effektive Aktienposition y aufweisen kann. Dafür muß er eine Aktienposition von $\Phi(s, z, y)$ haben.

Da $\psi_z > 0$ ist, ist $(s, z, y) \notin E$ für ein $y > 0$ äquivalent zu

$$\lim_{p \to \infty} \int_p^\infty \psi_z(s, z, x) dx = 0.$$

Entsprechend ist $(s, z, y) \notin E$ für ein $y < 0$ äquivalent zu

$$\lim_{p \to -\infty} \int_p^{-\infty} \psi_z(s, z, x) dx = 0.$$

Bedingung (5.7) bedeutet also, daß der Preiseinfluß des Zustandsprozesses für extreme Bestände des ökonomischen Agenten an Aktien nicht zu klein wird.

Beweis. Sei H gleichmäßig approximierbar mit Anfangskapital H_0, $\varepsilon > 0$ beliebig und π wie in Definition 5.1. Insbesondere gilt also

$$|R_T^\pi - H^*| < \varepsilon.$$

Satz 2.5 liefert nun

$$H_0 + \int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - L_T^\pi > H^* - \varepsilon.$$

Aus der Zulässigkeit von π und $L_T^\pi \geq 0$ folgt für alle $P^0 \in \mathcal{P}^0$

$$H_0 \geq E^0[H^*] - \varepsilon$$

und somit 1.

Sei nun ξ wie in 2. und $\varepsilon > 0$ beliebig. O.B.d.A. gelte

$$\big(s, Z_s(\omega), \xi_s^1(\omega)\big) \in E \text{ für alle } (s, \omega) \in [0, T] \times \Omega.$$

Wir definieren die stetige, im dritten Argument monoton steigende Funktion $f : [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ mittels

$$f(s,z,p) \triangleq \frac{\int_0^p \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)} \tag{5.8}$$

und den wegen (5.2) adaptierten RCLL-Prozeß π durch

$$\pi_s \triangleq \Phi(s, Z_s, \xi_s^1) \quad (0 \leq s \leq T).$$

Nach (5.1) gilt

$$f(s, Z_s, \pi_s) = \xi_s^1 \quad (0 \leq s \leq T). \tag{5.9}$$

Aus Satz 4.2 erhalten wir für beliebige $\alpha \in \mathsf{R}$ und $\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$ einen adaptierten stetigen Prozeß $\pi^{1\varepsilon}$ mit $\pi_0^{1\varepsilon} = \alpha$, $\pi_T^{1\varepsilon} = \beta$ und Pfaden von beschränkter Variation, so daß

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t \left(f(s, Z_s, \pi_s^{1\varepsilon}) - f(s, Z_s, \pi_s) \right) d\widetilde{S}_s \right| \leq \varepsilon. \tag{5.10}$$

Wegen Satz 2.5 folgt hieraus

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \Xi_s^{\pi^\varepsilon} d\widetilde{S}_s - H^* + H_0 \right| \\ = \ & |R_T^{\pi^\varepsilon} - H^*| \\ \leq \ & \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Hierbei ist $R_T^{\pi^\varepsilon}$ der realisierbare Portfoliowert der Strategie π^ε, die zu $\pi^{1\varepsilon}$ ein $\pi^{0\varepsilon}$ wählt, so daß sich eine selbstfinanzierende Strategie mit $R_0^{\pi^\varepsilon} = H_0$ ergibt. Aus (5.10) und der Zulässigkeit von ξ erhalten wir die Zulässigkeit von π^ε. Somit ist H mit Anfangskapital H_0 gleichmäßig approximierbar.

Sei nun ξ eine Strategie wie in 3. und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Satz 4.1 gibt es eine im assoziierten Finanzmarkt zulässige Strategie ξ^ε mit RCLL-Pfaden von beschränkter Variation, so daß

$$\left| H_0 + \int_0^T \xi_s^{1\varepsilon} d\widetilde{S}_s - H^* \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wegen Voraussetzung (5.7) können wir wie im Beweis von 2., jetzt aber ausgehend von $\xi^{1\varepsilon}$, eine zulässige Strategie π^ε mit Anfangskapital H_0 im illiquiden Finanzmarkt konstruieren, für die (5.4) gilt. ■

Bemerkung 5.5 *Man beachte, daß wir den Anfangs- und den Endbestand an Aktien der im Beweis konstruierten gleichmäßigen Approximationsstrategien π^ε beliebig aus R bzw. aus $L^0(\mathcal{F}_{T-})$ wählen konnten.*

Bemerkung 5.6 *Wir betrachten nun den Fall, daß die Strategien aus* 2. *und* 3. *von Satz 5.3 selbstfinanzierend sind und für ein $P^0 \in \mathcal{P}^0$*

$$E^0\left[\int_0^T \left(\xi_s^1\right)^2 d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] < \infty \tag{5.12}$$

erfüllen. Sie müssen nicht mehr notwendigerweise zulässig sein. Dann gelten die Aussagen des Satzes analog, wenn wir auch in Definition 5.1 die Bedingung der Zulässigkeit von π durch die Bedingungen, daß π selbstfinanzierend ist und

$$E^0\left[\int_0^T \left(\Xi_s^\pi\right)^2 d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] < \infty \tag{5.13}$$

erfüllt, ersetzen. Für die im Beweis konstruierte Strategie ξ^ε gilt nämlich, daß

$$\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t (\xi_s^{1\varepsilon} - \xi_s^1) d\widetilde{S}_s\right| \le \varepsilon.$$

Der Prozeß $\left(\int_0^t (\xi_s^{1\varepsilon} - \xi_s^1) d\widetilde{S}_s\right)_{0\le t\le T}$ ist also ein beschränktes lokales P^0-Martingal und somit ein quadratisch integrierbares P^0-Martingal, weswegen

$$E^0\left[\int_0^T (\xi_s^{1\varepsilon} - \xi_s^1)^2 d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] < \infty$$

folgt. Zusammen mit (5.12) ergibt dies

$$E^0\left[\int_0^T \left(\xi_s^{1\varepsilon}\right)^2 d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] < \infty.$$

Ein analoges Argument zeigt, daß die im Beweis konstruierten selbstfinanzierenden Strategien π^ε unter den neuen Voraussetzungen die Gleichung (5.13) erfüllen. Man beachte, daß (5.4) insbesondere

$$\|R_T^\pi - H^*\|_{L^2(P^0)} < \varepsilon$$

impliziert.

In folgendem Korollar bezeichnet E^c das Komplement von E. Außerdem sei $\Pr(F)$ für eine Menge $F \subset [0,T] \times \mathsf{R} \times \mathsf{R}$ die Projektion von F auf $[0,T] \times \mathsf{R}$, d.h.

$$\Pr(F) \stackrel{\triangle}{=} \{(s,z) \in [0,T] \times \mathsf{R} | \exists x \in \mathsf{R} \text{ mit } (s,z,x) \in F\}.$$

Korollar 5.7 *Sei (B,Ψ) ein illiquider Finanzmarkt.*

1. *Wenn der assoziierte Finanzmarkt vollständig und (5.7) erfüllt ist, dann ist der illiquide Finanzmarkt approximativ vollständig.*

2. Sei $c > 0$, $P^0 \in \mathcal{P}^0$ und

$$E\left[\int_0^T 1_{\Pr(E^c)}(s, Z_s)\, d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] > 0. \tag{5.14}$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, eine zulässige Strategie ξ im assoziierten Finanzmarkt und ein beschränktes $H \in L^0(\mathcal{F}_T)$ mit

$$E^0[H^*] + \int_0^T \xi_s^1 d\widetilde{S}_s = H^*,$$

so daß für jede selbstfinanzierende Strategie π mit

$$\begin{aligned} R_0^\pi &= E^0[H^*], && (5.15) \\ E^0\left[\int_0^T (\Xi_s^\pi)^2\, d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] &< \infty \text{ und} && (5.16) \\ L_T^\pi &\leq c && (5.17) \end{aligned}$$

gilt, daß

$$\|R_T^\pi - H^*\|_{L^2(P^0)} \geq \varepsilon.$$

Ungleichung (5.17) kann nach Satz 2.5 als eine, im Zusammenhang mit illiquiden Finanzmärkten natürliche, Beschränkung der Handelsintensität nach oben interpretiert werden. Mit Hilfe dieser Ungleichung kann die Varianz von L_T^π unter P^0 durch $cE^0\left[L_T^\pi\right]$ nach oben abgeschätzt werden.

Beweis. Wenn der assoziierte Finanzmarkt vollständig ist, dann gibt es für ein beliebiges nach unten beschränktes $H \in L^0(\mathcal{F}_T)$ mit $Y^a(H) < \infty$ eine zulässige Strategie ξ mit

$$E^*[H^*] + \int_0^T \xi_s^1 d\widetilde{S}_s = H^*,$$

wobei P^* das eindeutig bestimmte Martingalmaß aus $\mathcal{P}^*$ ist. Die approximative Vollständigkeit des illiquiden Finanzmarktes folgt deshalb direkt aus 3. von Satz 5.3.

Angenommen, es gilt (5.14). Wir betrachten die Zerlegung

$$E^c = E^+ \cup E^-$$

mit

$$E^+ \triangleq \left\{(s, z, y) \,\middle|\, \frac{\int_0^\infty \psi_z(s, z, x)dx}{\psi_z(s, z, 0)} \leq y\right\}$$

und

$$E^- \triangleq \left\{ (s,z,y) \middle| y \leq \frac{\int_0^{-\infty} \psi_z(s,z,x)dx}{\psi_z(s,z,0)} \right\}.$$

O.B.d.A. sei

$$E\left[\int_0^T 1_{\Pr(E^+)}(s,Z_s)d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] > 0.$$

Die Definition von E^+ zeigt, daß aus $(s,z,y) \in E^+$ folgt, daß auch $(s,z,\widetilde{y}) \in E^+$ für alle $\widetilde{y} \geq y$. Wir konstruieren durch

$$T_n \triangleq \left\{ \inf t \middle| \langle\widetilde{S}\rangle_t = n \text{ oder } \left|\widetilde{S}_t\right| = n \right\} \wedge T$$

eine lokalisierende Sequenz $(T_n)_{n\in\mathsf{N}}$, wählen ein $N \in \mathsf{N}$, so daß

$$E\left[\int_0^{T_N} 1_{E^+}(s,Z_s,N)d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] > 0$$

und definieren die beschränkte Zufallsvariable H mit $E^0[H^*] = 0$ durch

$$H^* \triangleq \int_0^{T_N} (N+1)d\widetilde{S}_s = (N+1)\left(\widetilde{S}_{T_N} - \widetilde{S}_0\right).$$

Sei nun π eine selbstfinanzierende Strategie mit den Eigenschaften (5.15)-(5.17). Mit Hilfe von Satz 2.5 und der Dreiecksungleichung berechnen wir

$$\begin{aligned}
& \|R_T^\pi - H^*\|^2_{L^2(P^0)} \\
= \;& E^0\left[\left(\int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - L_T^\pi - H^*\right)^2\right] \\
= \;& \left(E^0\left[L_T^\pi\right]\right)^2 + E^0\left[\left(\int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - H^* - \left\{L_T^\pi - E^0\left[L_T^\pi\right]\right\}\right)^2\right] \\
\geq \;& \left(E^0\left[L_T^\pi\right]\right)^2 \\
& + \left(\sqrt{E^0\left[\left(\int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - H^*\right)^2\right]} - \sqrt{E^0\left[\left(L_T^\pi - E^0\left[L_T^\pi\right]\right)^2\right]}\right)^2. \quad (5.18)
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion von H^* und der Isometrie für stochastische Integrale erhalten wir ferner

$$E^0\left[\left(\int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - H^*\right)^2\right] \geq E^0\left[\int_0^{T_N} \left(\Xi_s^\pi - (N+1)\right)^2 d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right]$$

$$\begin{aligned}
&\geq E^0\left[\int_0^{T_N} 1_{E^+}(s,Z_s,N)\left(\frac{\int_0^\infty \psi_z(s,Z_s,x)dx}{\psi_z(s,Z_s,0)} - (N+1)\right)^2 d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] \\
&\geq E^0\left[\int_0^{T_N} 1_{E^+}(s,Z_s,N)d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] =: a > 0. \qquad (5.19)
\end{aligned}$$

Man beachte, daß a unabhängig von π ist.

Außerdem haben wir wegen Voraussetzung (5.17), daß

$$\begin{aligned}
E^0\left[\left(L_T^\pi - E^0\left[L_T^\pi\right]\right)^2\right] &= E^0\left[(L_T^\pi)^2\right] - \left(E^0\left[L_T^\pi\right]\right)^2 \\
&\leq E^0\left[(L_T^\pi)^2\right] \\
&\leq cE^0\left[L_T^\pi\right]. \qquad (5.20)
\end{aligned}$$

Wegen (5.18), (5.19) und (5.20) gilt für

$$E^0\left[L_T^\pi\right] \leq \frac{a}{4c},$$

daß

$$\|R_T^\pi - H^*\|_{L^2(P^0)}^2 \geq \frac{a}{4}.$$

Andererseits erhalten wir aus (5.18) und

$$E^0\left[L_T^\pi\right] > \frac{a}{4c}$$

die Abschätzung

$$\|R_T^\pi - H^*\|_{L^2(P^0)}^2 > \left(\frac{a}{4c}\right)^2.$$

Mit

$$\varepsilon \triangleq \min\left(\sqrt{\frac{a}{4}}, \frac{a}{4c}\right)$$

folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 5.8 *Sei (B,Ψ) ein strikt illiquider Finanzmarkt (d.h. (2.3) gilt) mit vollständigem assoziierten Finanzmarkt, $\widetilde{S}$ beschränkt, $d\langle\widetilde{S}\rangle(\omega)$ P-fast sicher äquivalent zum Lebesguemaß auf $[0,T]$ und $P^0 \in \mathcal{P}^0$. Dann ist die durch*

$$\xi_t^1 = 1_{[t,T]}(t) \qquad (0 \leq t \leq T)$$

gegebene selbstfinanzierende Strategie mit Anfangskapital 0 *zulässig im assoziierten Finanzmarkt. Wir definieren die beschränkte Zufallsvariable* H *durch*

$$H^* \triangleq \int_0^T \xi_s^1 d\widetilde{S}_s$$

und nehmen an, daß

$$E^0\left[\int_0^T \left(\xi_s^1\right)^2 d\langle\widetilde{S}\rangle_s\right] < \infty,$$

weswegen $\left(\int_0^t \xi_s^1 d\widetilde{S}_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *ein quadratisch integrierbares* P^0*-Martingal ist. Wir wollen zeigen, daß es keine zulässige Strategie* π *im illiquiden Finanzmarkt mit*

$$\begin{aligned} R_0^\pi &= 0 \text{ und} \\ R_T^\pi &= H^* \end{aligned}$$

gibt. Angenommen, wir hätten solch eine Strategie. Dann gilt nach Satz 2.5, daß

$$R_T^\pi = \int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - L_T^\pi = H^*.$$

Wegen $E^0[H^*] = 0$ *ergibt dies* $L_T^\pi = 0$ P*-fast sicher. Die Pfade von* π^1 *sind also fast sicher stetig, weswegen dies auch für die Pfade von* Ξ^π *gilt. Außerdem ist* $\left(\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *ein* P^0*-Supermartingal mit konstantem Erwartungswert, also ein* P^0*-Martingal. Wegen der Beschränktheit von* H^* *ist* $\left(\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *somit sogar ein quadratisch integrierbares* P^0*-Martingal. Aus der Isometrie für stochastische Integrale und der vorausgesetzten* P*-fast sicheren Äquivalenz von* $d\langle\widetilde{S}\rangle(\omega)$ *zum Lebesguemaß auf* $[0,T]$ *folgt*

$$\Xi_t^\pi = \xi_t^1 \qquad P^0 \times dt \text{ fast sicher.}$$

Dies bedeutet

$$\Xi_t^\pi = 0 \qquad P^0 \times dt \text{ fast sicher auf } \Omega \times [0,t)$$

und

$$\Xi_t^\pi = 1 \qquad P^0 \times dt \text{ fast sicher auf } \Omega \times [t,T],$$

was im Widerspruch zur Stetigkeit der Pfade von Ξ^π *steht.*

Bemerkung 5.9 *Sei nun ein Finanzmarkt mit d illiquiden Wertpapieren* $\Psi^1, ..., \Psi^d$ *der Form*

$$\Psi^i(t, \omega, p^i) = \psi^i(t, Z_t(\omega), p^i)$$

aus Bemerkung 2.7 gegeben. Dann können Analoga zu Satz 5.3 und Korollar 5.7 bewiesen werden, wobei

$$E \triangleq \left\{ (t, z, y) \middle| \exists p \in \mathsf{R}^d \ mit \ \sum_{i=1}^{d} \int_0^{p^i} \psi^i_{z_j}(t, z, x)dx = y^j \ für \ j = 1, ..., d \right\} \subset \mathsf{R}^{2d+1}$$

gesetzt wird, wenn es eine stetige Abbildung

$$\Phi : E \to \mathsf{R}^d$$

mit

$$\sum_{i=1}^{d} \int_0^{\Phi^i(t,z,y)} \psi^i_{z_j}(t, z, x)dx = y^j \ für \ j = 1, ..., d$$

gibt.

Beispiel 5.10 *Für Beispiel 1.7 ist* $\psi_z = 0$ *und somit Annahme (1.3) nicht erfüllt. Gleichung (2.12) zeigt, daß der realisierbare Portfoliowert fallend ist. Deswegen ist* $\operatorname{ess.sup} H^*$ *eine untere Schranke für den Approximationspreis von H.*

Beispiel 5.11 *Wir betrachten nun Beispiel 1.9. Die Filtrierung sei die Augmentierung der natürlichen Filtrierung der Brownschen Bewegung. Dann ist* $\psi_z = 1$, *weswegen (5.7) erfüllt ist. Der illiquide Finanzmarkt ist somit approximativ vollständig. Die in (5.1) definierte Funktion* Φ *bestimmt sich zu* $\Phi(t, z, y) = y$.

Beispiel 5.12 *Als letztes Beispiel sei der Spezialfall*

$$\Psi(t, \omega, p) = Z_t(\omega) \exp(p)$$

von Beispiel 1.8 aufgeführt, wobei wir wieder annehmen, daß die Filtrierung die Augmentierung der natürlichen Filtrierung der Brownschen Bewegung ist. Wir berechnen $\psi_z(t, z, p) = \exp(p)$ *und* $\Phi(s, z, y) = \ln(1 + y)$. *Es gilt*

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^p \exp(x)dx = \infty$$

und

$$\lim_{p \to -\infty} \int_0^p \exp(x)dx = -1.$$

Analog zum Beweis von 2. *aus Korollar 5.7 kann man zeigen, daß die Zufallsvariable*

$$H^* = -2\widetilde{S}_T$$

nicht mit Hilfe von selbstfinanzierenden Strategien, die (5.15)-(5.17) erfüllen, gleichmäßig approximiert werden kann. Im Gegensatz dazu ist der assoziierte Finanzmarkt $(B, \widetilde{S})$ *vollständig.*

Kapitel 6

Superreplikation

In liquiden Finanzmärkten formalisiert die Definition der Superreplikationsstrategie die Idee, daß man das Risiko eines Derivats mit Fälligkeit im Zeitpunkt T dadurch absichern kann, daß man mit Hilfe einer zulässigen Strategie einen Portfoliowert in T erzeugt, der mindestens so groß ist, wie die durch das Derivat festgelegte Zahlungsverpflichtung. Das Infimum der Anfangskapitale von Superreplikationsstrategien eines Derivats wird Superreplikationspreis des Derivats genannt.

Wir wollen diese Idee in diesem Kapitel auf illiquide Finanzmärkte übertragen. In realen Finanzmärkten unterscheidet man zwischen Derivaten mit Barausgleich und solchen mit physischer Lieferung. Bei Derivaten mit Barausgleich entsteht im Fälligkeitszeitpunkt T die Verpflichtung zu einer Barzahlung in einer durch das Derivat festgelegten Höhe. Bei Derivaten mit physischer Lieferung kann zusätzlich zu dieser Barzahlungsverpflichtung noch die Verpflichtung zur Lieferung einer durch das Derivat festgelegten Anzahl von Aktien entstehen. Wir führen einen Derivatebegriff ein, der sowohl reale Derivate mit Barausgleich als auch solche mit physischer Lieferung modellieren kann. Wir nennen eine zulässige Strategie Superreplikationsstrategie eines Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes bzw. bezüglich des Buchwertes, wenn das um die vertraglichen Verpflichtungen des Derivats modifizierte Portfolio der Strategie im Zeitpunkt T einen positiven realisierbaren Portfoliowert bzw. einen positiven Buchwert hat. Die Infima der realisierbaren Portfoliowerte im Zeitpunkt 0 solcher Strategien bezeichnen wir als Superreplikationspreis des Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes bzw. bezüglich des Buchwertes.

Wir zeigen, daß wir die Berechnung des Superreplikationspreises eines Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes bzw. bezüglich des Buchwertes auf die Berechnung des Superreplikationspreises eines zugeordneten Derivats mit Barausgleich bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes zurückführen können. Außerdem zeigen wir, daß der Superreplikationspreis eines Derivats mit Barausgleich bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes mit dem Superreplikationspreis eines zugeordneten minimalen Derivats im assoziierten Finanzmarkt übereinstimmt, wenn der illiquide Finanzmarkt und das Derivat gewisse Regularitätsbedingungen erfüllen. Wenn der illiquide Finanzmarkt zusätzlich vollständig ist, so erhalten wir eine Darstellung des Superreplikationspreises des Derivats mit Barausgleich als Erwartungswert der abdiskontierten Zahlungsverpflichtung des zugeordneten minimalen Derivats unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß.

6.1 Superreplikation bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Superreplikation von Derivaten bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes. Dafür definieren wir zunächst, was wir unter einem Derivat verstehen.

Definition 6.1 *Ein Derivat $H = (H_C, H_S)$ ist ein zweidimensionaler Vektor von Zufallsvariablen auf* $(\Omega \times \mathsf{R}, \mathcal{F}_T \times \mathcal{B}(\mathsf{R}))$.

Mit einem Derivat $H = (H_C, H_S)$ verbinden wir die ökonomische Bedeutung eines Finanzinstrumentes, bei dem der Käufer des Derivats vom Verkäufer des Derivats im Zeitpunkt T eine Zahlung in Höhe von $H_C(\omega, \pi_T^1(\omega))$ und gleichzeitig $H_S(\omega, \pi_T^1(\omega))$ Aktien erhält, wobei π_T^1 die Aktienposition des ökonomischen Agenten in T ist. Wir nehmen also an, daß der vor dem Übertrag der H_S Aktien vorhandene Portfoliobestand π_T^1 des ökonomischen Agenten die Höhe der Auszahlung bestimmt. Wie üblich stehen negative Beträge für Geld- bzw. Aktienflüsse vom Käufer des Derivats zum ökonomischen Agenten.

Derivate H mit $H_S = 0$ bezeichnen wir als Derivate mit Barausgleich. Für Derivate mit Barausgleich identifizieren wir H und H_C.

In den Beispielen am Ende dieses Abschnittes kommt π_T^1 nur indirekt in Form von $\psi(T, Z_T, \pi_T^1)$ in den Derivaten vor. In allgemeineren Beispielen kann die ökonomische Kritik angebracht sein, daß es keinen Markt für Derivate geben kann, deren Auszahlung von nicht öffentlich beobachtbaren Informationen abhängt.

Wir definieren jetzt den Superreplikationspreis eines Derivats H bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes. Dabei sei $H_C^* \triangleq \frac{H_C}{B_T}$ die abdiskontierte Barauszahlung des Derivats.

Definition 6.2 *Sei H ein Derivat in einem illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ). Der Superreplikationspreis $Y^r(H)$ für H bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes ist das Infimum aller Anfangskapitale H_0, für die es eine zulässige Strategie π mit*

$$R_0^\pi = H_0 \textit{ und}$$

$$\pi_T^0 + \int_0^{\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)} \psi(T, Z_T, x)dx \geq H_C^*(\pi_T^1) \tag{6.1}$$

gibt. Wir nennen eine solche Strategie π Superreplikationsstrategie von H.

Die linke Seite von (6.1) stellt den realisierbaren Portfoliowert nach Lieferung der $H_S(\pi_T^1)$ Aktien dar. Dieser soll größer sein als die abdiskontierte Zahlungsverpflichtung $H_C^*(\pi_T^1)$. Der ökonomische Agent kann ein Derivat H für einen Preis, der größer als $Y^r(H)$ ist, risikolos verkaufen. Eine Kombination des Verkaufs des Derivats mit einer geeigneten Superreplikationsstrategie ergäbe dann nämlich eine Arbitragemöglichkeit für den ökonomischen Agenten.

Für Derivate H mit Barausgleich vereinfacht sich (6.1) zu

$$R_T^\pi \geq H^*(\pi_T^1), \tag{6.2}$$

wobei wir H und H_C miteinander identifiziert haben. Offensichtlich gilt für zwei Derivate H_1, H_2 mit Barausgleich, daß

$$H_1 \leq H_2 \Longrightarrow Y^r(H_1) \leq Y^r(H_2).$$

Folgender Satz zeigt, daß wir die Berechnung des Superreplikationspreises eines Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes auf die Berechnung des Superreplikationspreises eines Derivats mit Barausgleich bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes zurückführen können.

Satz 6.3 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt und H ein Derivat. Wir definieren das Derivat $\widetilde{H}$ mit Barausgleich durch*

$$\widetilde{H}(p) \triangleq B_T \left(H_C^*(p) + \int_{p-H_S(p)}^{p} \psi(T, Z_T, x)dx \right).$$

Dann ist π genau dann Superreplikationsstrategie bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes von H, wenn π Superreplikationsstrategie von $\widetilde{H}$ bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes ist. Insbesondere gilt

$$Y^r(H) = Y^r(\widetilde{H}).$$

Beweis. Die gewünschte Äquivalenz folgt sofort aus

$$\begin{aligned}
& \pi_T^0 + \int_0^{\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)} \psi(T, Z_T, x)dx \geq H_C^*(\pi_T^1) \\
\Leftrightarrow \quad & \pi_T^0 + \int_0^{\pi_T^1} \psi(T, Z_T, x)dx \geq H_C^*(\pi_T^1) + \int_{\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)}^{\pi_T^1} \psi(T, Z_T, x)dx \\
\Leftrightarrow \quad & R_T^\pi \geq H_C^*(\pi_T^1) + \int_{\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)}^{\pi_T^1} \psi(T, Z_T, x)dx.
\end{aligned}$$

■

Seien H_1 und H_2 zwei Derivate. Wenn $\psi(T, Z_T, x) \geq 0$ für alle x, so impliziert Satz 6.3 insbesondere

$$H_1 \leq H_2 \Longrightarrow Y^r(H_1) \leq Y^r(H_2).$$

Folgendes Korollar besagt, daß der Superreplikationspreis eines Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes höchstens so hoch ist, wie der Superreplikationspreis des entsprechenden Derivats mit Barausgleich bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes.

Korollar 6.4 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt, H ein Derivat und das Derivat $\widetilde{H}$ mit Barausgleich durch*

$$\widetilde{H}(p) \triangleq B_T\left(H_C^*(p) + H_S(p)\psi(T, Z_T, p)\right)$$

gegeben. Dann gilt

$$Y^r(H) \leq Y^r(\widetilde{H}).$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus Satz 6.3, da für beliebige $p, y, z \in \mathsf{R}$ mit einem $p^* \in [p - y, p]$

$$\int_{p-y}^{p} \psi(T, z, x)dx = y\psi(t, z, p^*) \leq y\psi(t, z, p)$$

gilt. ■

Im nächsten Satz geben wir eine obere und eine untere Schranke für den Superreplikationspreis $Y^r(H)$ eines nach unten beschränkten Derivats H mit Barausgleich an. Die Schranken sind Infima der Superreplikationspreise der Zufallsvariablen $H(\beta)$ im assoziierten Finanzmarkt über alle möglichen $\mathcal{F}_T$- bzw. $\mathcal{F}_{T-}$-meßbaren Endbestände β an Aktien. Insbesondere erhält man $Y^r(H)$, wenn diese Infima übereinstimmen, was z.B. der Fall ist, wenn die Filtrierung linksstetig in T ist.

In Satz 2.5 werden zulässige stetige Strategien von beschränkter Variation dadurch ausgezeichnet, daß der realisierbare Portfoliowert ein lokales $\mathcal{P}^0$-Martingal ist. Da der Endbestand von stetigen Strategien immer $\mathcal{F}_{T-}$-meßbar ist, ist es nicht verwunderlich, daß diese σ-Algebra bei der Bestimmung von Superreplikationspreisen bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes eine besondere Rolle spielt.

Satz 6.5 *Sei H ein Derivat mit Barausgleich in einem illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ) mit*

$$\operatorname*{ess.inf}_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_T)} H(\beta) \geq \underline{c} \text{ für ein } \underline{c} \in \mathsf{R}. \tag{6.3}$$

1. *Für jede Superreplikationsstrategie von H gilt*

$$R_t^\pi \geq \operatorname*{ess.inf}_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_T)} \operatorname*{ess.sup}_{P^0 \in \mathcal{P}^0} E^0[H^*(\beta)|\mathcal{F}_t] \text{ für } 0 \leq t \leq T,$$

insbesondere also

$$Y^r(H) \geq \inf_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_T)} Y^a(H(\beta)).$$

2. *Sei $H_0 \in \mathsf{R}$, $\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$ und ξ eine zulässige RCLL-Strategie für den assoziierten Finanzmarkt mit*

$$H^*(\beta) \leq H_0 + \int_0^T \xi_s^1 d\widetilde{S}_s. \tag{6.4}$$

Falls (5.6) erfüllt ist, so gilt

$$Y^r(H) \leq H_0. \tag{6.5}$$

3. *Wenn (5.7) gilt, dann haben wir*

$$Y^r(H) \leq \inf_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})} Y^a(H(\beta)).$$

Beweis. Sei π eine Superreplikationsstrategie von H und $P^0 \in \mathcal{P}^0$. Wegen (6.2) und Satz 2.5 haben wir

$$R_T^\pi = H_0 + \int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - L_T^\pi \geq H^*(\pi_T^1), \tag{6.6}$$

wobei L^π ein monoton steigender positiver Prozeß ist. Aus (6.6) ergibt sich

$$\begin{aligned} E^0\left[H_0 + \int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - L_T^\pi \middle| \mathcal{F}_t\right] &= R_t^\pi + E^0\left[\int_t^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - (L_T^\pi - L_t^\pi) \middle| \mathcal{F}_t\right] \\ &\geq E^0[H^*(\pi_T^1)|\mathcal{F}_t], \end{aligned}$$

woraus wegen der Zulässigkeit von π 1. folgt.

Seien nun H_0, β und ξ wie in 2. gegeben. Nach Satz 5.3 und Bemerkung 5.5 ist $H_0 + \int_0^T \xi_s^1 d\widetilde{S}_s$ mit Anfangskapital H_0, beliebigem Aktienanfangsbestand $\alpha \in \mathsf{R}$ und Aktienendbestand β gleichmäßig approximierbar. Also gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Superreplikationsstrategie π von H mit $R_0^\pi = H_0 + \varepsilon$, $\pi_0^1 = \alpha$ und $\pi_T^1 = \beta$, woraus 2. folgt.

Wenn (5.7) erfüllt ist, so läßt sich das gleiche Argument für jedes $\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$ und jede Superreplikationsstrategie von $H(\beta)$ im assoziierten Finanzmarkt anführen, weswegen 3. folgt. ■

Bemerkung 6.6 *Man beachte, daß wir den Anfangsaktienbestand α der im Beweis konstruierten Superreplikationsstrategien frei aus R wählen konnten.*

Sei $H \in L^0(\mathcal{F}_T)$ ein nach unten beschränktes Derivat mit Barausgleich, welches nicht vom Aktienbestand des ökonomischen Agenten abhängt. Ferner sei der assoziierte Finanzmarkt vollständig, (5.7) erfüllt und P^* das eindeutige Maß aus $\mathcal{P}^*$. Wegen 1. und 3. folgt, daß

$$Y^r(H) = E^*[H^*].$$

Wir geben jetzt ein Kriterium an, aus dem folgt, daß die beiden Infima aus Satz 6.5 übereinstimmen.

Proposition 6.7 *Sei $\mathcal{Q}$ eine Menge zu P äquivalenter Wahrscheinlichkeitsmaße, $h : \mathsf{R}^d \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ nach oben halbstetig und $\widetilde{Z}$ eine $\mathcal{F}_{T-}$-meßbare R^d-wertige Zufallsvariable. Wir definieren $h^* : \mathsf{R}^d \to \overline{\mathsf{R}}$ durch*

$$h^*(z) \triangleq \inf_{p \in \mathsf{R}} h(z,p).$$

Falls

$$E^Q[h^*(\widetilde{Z})] > -\infty \textit{ für alle } Q \in \mathcal{Q},$$

so gilt

$$\inf_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h(\widetilde{Z},\beta)] = \inf_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T})} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h(\widetilde{Z},\beta)] = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h^*(\widetilde{Z})]. \tag{6.7}$$

Beweis. Wir bemerken zuerst, daß h^* nach Proposition 7.34 in Bertsekas und Shreve [6] Borel-meßbar ist, da h als nach oben halbstetig angenommen wurde. Offensichtlich gilt

$$\inf_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h(\widetilde{Z},\beta)] \geq \inf_{\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T})} \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h(\widetilde{Z},\beta)] \geq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h^*(\widetilde{Z})]. \tag{6.8}$$

Nach einem Resultat über meßbare Auswahl (Proposition 7.34 in Bertsekas und Shreve [6]) gibt es eine Folge von Borel-meßbaren Funktionen $(\phi^n)_{n \in \mathsf{N}}$, $\phi^n : \mathsf{R}^d \to \mathsf{R}$ mit

$$\begin{aligned} h(z,\phi^n(z)) &\leq h^*(z) + \frac{1}{n}, && \text{wenn } h^*(z) > -\infty \text{ und} \\ h(z,\phi^n(z)) &\leq -n, && \text{wenn } h^*(z) = -\infty. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Aus $h^*(\widetilde{Z}) > -\infty$ und (6.9) erhalten wir

$$\sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h(\widetilde{Z},\phi^n(\widetilde{Z}))] \leq \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E^Q[h^*(\widetilde{Z})] + \frac{1}{n}. \tag{6.10}$$

Da $\phi^n(\widetilde{Z})$ $\mathcal{F}_{T-}$-meßbar ist, folgt (6.7) aus (6.8) und (6.10). ■

Zusammen ergeben Satz 6.5 und Proposition 6.7 folgenden Satz, der es in vielen praktisch relevanten Fällen ermöglicht, Superreplikationspreise von Derivaten bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes zu berechnen.

Satz 6.8 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt der (5.7) erfüllt. Des weiteren sei H ein Derivat mit Barausgleich der Form*

$$H(p) = B_T h(\widetilde{Z}, p)$$

mit $h : \mathsf{R}^d \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ nach oben halbstetig und einer $\mathcal{F}_{T-}$-meßbaren R^d-wertigen Zufallsvariablen $\widetilde{Z}$. Wir definieren $h^* : \mathsf{R}^d \to \overline{\mathsf{R}}$ durch

$$h^*(z) \stackrel{\triangle}{=} \inf_{p \in \mathsf{R}} h(z, p).$$

Falls $B_T h^*(\widetilde{Z})$ nach unten beschränkt ist, so gilt:

1.

$$Y^r(H) = Y^a\left(B_T h^*(\widetilde{Z})\right).$$

2.

$$R_t^\pi \geq \operatorname*{ess\,sup}_{P^0 \in \mathcal{P}^0} E^0[h^*(\widetilde{Z})|\mathcal{F}_t]$$

für alle $0 \leq t \leq T$ und für jede Superreplikationsstrategie π von H.

Beweis. Die Behauptung folgt aus einer Kombination von Satz 6.5 mit Proposition 6.7. ■

Bemerkung 6.9 *Wegen Bemerkung 6.6 hätten wir für die Derivate aus Satz 6.8 in der Defintion der Superreplikationsstrategie zusätzlich*

$$\pi_0^1 = \alpha$$

für ein beliebiges $\alpha \in \mathsf{R}$ fordern können, ohne den Superreplikationspreis zu verändern.

Die Bedingung der $\mathcal{F}_{T-}$-Meßbarkeit von $\widetilde{Z}$ ist z.B. für $\widetilde{Z} = (Z_T, B_T)$ erfüllt. Die erste Aussage von Satz 6.8 besagt, daß sich der Superreplikationspreis von H bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes als Superreplikationspreis der minimalen Zufallsvariable $B_T h^*(\widetilde{Z})$ im assoziierten Finanzmarkt bestimmen läßt.

Sei nun der assoziierte Finanzmarkt vollständig, $P^* \in \mathcal{P}^*$, $H_1 = B_T h_1(\widetilde{Z}_1, p)$ und $H_2 = B_T h_2(\widetilde{Z}_2, p)$ Derivate wie in Satz 6.8 und $\lambda \geq 0$. Wegen

$$Y^r(H_1) = E^* \left[\inf_{p \in \mathsf{R}} h_1(\widetilde{Z}_1, p) \right]$$

und entsprechenden Gleichungen für H_2, $H_1 + H_2$ und λH_1 gilt

$$\begin{aligned} Y^r(H_1) + Y^r(H_2) &\leq Y^r(H_1 + H_2) \\ Y^r(\lambda H_1) &= \lambda Y^r(H_1). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$Y^r(H_1) \leq -Y^r(-H_1),$$

wenn $H_2 = -H_1$ ist. Der Verkaufspreis des Derivats mit Barausgleich ist also niedriger als der Kaufpreis. Dieses auf den ersten Blick der ökonomischen Intuition widersprechende Ergebnis, ist auf einfache Weise durch die Manipulationsmöglichkeiten des ökonomischen Agenten erklärbar. Man beachte, daß sich Superreplikationspreise in unvollständigen Finanzmärkten im Gegensatz dazu subadditiv verhalten (vgl. z.B. El Karoui und Quenez [15]).

Wir können jetzt die Sätze 6.8 und 6.3 kombinieren, um Superreplikationspreise von Derivaten zu berechnen, für die nicht notwendigerweise $H_S = 0$ ist. Dabei gilt Bemerkung 6.9 entsprechend auch hier.

Korollar 6.10 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt der (5.7) erfüllt. Ferner sei H ein Derivat,*

$$H_C^*(p) = h_C(\widetilde{Z}, p)$$

und

$$H_S(p) = h_S(\widetilde{Z}, p)$$

mit Borel-meßbaren Funktionen h_C und $h_S : \mathsf{R}^d \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ und einer $\mathcal{F}_{T-}$-meßbaren R^d-wertigen Zufallsvariablen $\widetilde{Z}$, so daß die durch

$$h(z_1, z_2, p) \triangleq h_C(z_1, p) + \int_{p - h_S(z_1, p)}^{p} \psi(T, z_2, x) dx$$

definierte Funktion $h : (\mathsf{R}^d \times \mathsf{R} \times \mathsf{R}) \to \mathsf{R}$ nach oben halbstetig ist. Wir definieren $h^* : (\mathsf{R}^d \times \mathsf{R}) \to \overline{\mathsf{R}}$ durch

$$h^*(z_1, z_2) \triangleq \inf_{p \in \mathsf{R}} h(z_1, z_2, p).$$

Falls $B_T h^*(\widetilde{Z}, Z_T)$ *nach unten beschränkt ist, so gilt*

1.

$$Y^r(H) = Y^a\left(B_T h^*(\widetilde{Z}, Z_T)\right).$$

2.

$$R_t^\pi \geq \operatorname*{ess.sup}_{P^0 \in \mathcal{P}^0} E^0[h^*(\widetilde{Z}, Z_T)|\mathcal{F}_t]$$

für alle $0 \leq t \leq T$ *und für jede Superreplikationsstrategie* π *von* H.

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus einer Kombination der Sätze 6.8 und 6.3, wobei wir noch bemerken, daß Z_T wegen der Stetigkeit von Z die benötigte $\mathcal{F}_{T-}$-Meßbarkeit aufweist. ■

Wir fahren mit einigen Beispielen fort. Der Einfachheit halber beschränken wir uns dabei auf folgende Finanzmärkte (B, Ψ), wobei wir

$$Z_t \stackrel{\triangle}{=} Z_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + mt\right) \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{6.11}$$

mit einer Brownschen Bewegung W setzen:

$$\begin{aligned}
(B, \Psi) \text{ mit } \Psi(t, \omega, p) &= Z_t(\omega) + (1 + \tanh p), &(6.12)\\
(B, \Psi) \text{ mit } \Psi(t, \omega, p) &= Z_t(\omega)\left(1 + \frac{1}{2}\tanh p\right) \text{ und} &(6.13)\\
(B, \Psi) \text{ mit } \Psi(t, \omega, p) &= Z_t(\omega) + p. &(6.14)
\end{aligned}$$

Ferner sei die betrachtete Filtrierung die Augmentierung der natürlichen Filtrierung der Brownschen Bewegung und $P^* \in \mathcal{P}^*$.

Die Finanzmärkte (6.12) und (6.13) unterscheiden sich in einem Punkt wesentlich vom Finanzmarkt (6.14). Bei letzterem ist der Preiseinfluß für festes (ω, t) unbeschränkt, bei den anderen beschränkt. Die ersten beiden Finanzmärkte beschreiben also Situationen, in denen der ökonomische Agent eine unbeschränkt große Position eingehen kann, ohne den Preis ins Unendliche zu beeinflussen. Alternativ kann man diese Finanzmärkte auch als Finanzmärkte eines mittelgroßen Investors ansehen. Diese Finanzmärkte sind im Vergleich zum dritten näher an den kompetetiven Finanzmärkten, bei denen Preisabweichungen ein unendlich großes Angebot bzw. eine unendlich große Nachfrage mit sich bringen.

Beispiel 6.11 *(Kaufoption mit Barausgleich bei unbeschränktem Preiseinfluß des ökonomischen Agenten) Sei* $H(p) = (B_T\psi(T, Z_T, p) - c)^+$. *Im Finanzmarkt (6.14) errechnen wir*

$$h^*(b, z) = \inf_p \left(\left[z + p - \frac{c}{b}\right]^+\right) = 0,$$

woraus sofort $Y^r(H) = 0$ *folgt. Der ökonomische Agent kann den inneren Wert der Aktie immer auf* 0 *manipulieren. Man beachte, daß*

$$h(b, z, p) = \left[z + p - \frac{c}{b}\right]^+$$

nur für $b \neq 0$ *definiert ist. Um Satz 6.8 formal anzuwenden, können wir die Variable* $\widetilde{b} = \ln b$ *einführen und dann die Funktion*

$$\widetilde{h}(\widetilde{b}, z, p) = \left[z + p - \frac{c}{\exp \widetilde{b}}\right]^+$$

betrachten.

Beispiel 6.12 *(Kaufoption mit Barausgleich bei beschränktem Preiseinfluß des ökonomischen Agenten) Sei erneut* $H(p) = (B_T \psi(T, Z_T, p) - c)^+$. *Im Finanzmarkt (6.12) erhalten wir*

$$\begin{aligned} h^*(b, z) &= \inf_p \left(\left[z + (1 + \tanh p) - \frac{c}{b}\right]^+ \right) \\ &= \left(z - \frac{c}{b}\right)^+. \end{aligned}$$

Also gilt

$$Y^r(H) = E^* \left[\left(Z_T - \frac{c}{B_T} \right)^+ \right],$$

d.h. der Preis der Option wird durch eine gewöhnliche Black-Scholes-Formel beschrieben, wenn der Prozeß der kurzfristigen Zinssätze r *deterministisch ist. Im Finanzmarkt (6.13) erhalten wir*

$$Y^r(H) = E^* \left[\left(\frac{1}{2} Z_T - \frac{c}{B_T} \right)^+ \right].$$

Dies entspricht dem Black-Scholes-Preis mit Anfangsaktienkurs $\frac{1}{2} Z_0$. *Wir nehmen jetzt an, daß der ökonomische Agent die Kaufoption kaufen möchte, also* $H = -(B_T \psi(T, Z_T, p) - c)^+$. *Dann gilt im Finanzmarkt (6.12), daß*

$$\begin{aligned} h^*(b, z) &= \inf_p \left(- \left[z + (1 + \tanh p) - \frac{c}{b}\right]^+ \right) \\ &= -\left(z + 2 - \frac{c}{b}\right)^+. \end{aligned}$$

Bei deterministischem Prozeß r *der kurzfristigen Zinsraten und* $\frac{c}{b} \geq 2$ *erhalten wir den Absolutbetrag des Superreplikationspreises aus der Black-Scholes-Formel mit einem um* $2B_T$ *verringerten Basispreis.*

Beispiel 6.13 *(Terminkauf mit Barausgleich) Sei $H(p) = (B_T\psi(T, Z_T, p) - c)$. Im Finanzmarkt (6.14) können wir Satz 6.8 nicht direkt anwenden, weil*

$$B_T h^*(B_T, Z_T) \equiv -\infty$$

nicht nach unten beschränkt ist. Durch das Betrachten der Derivate $H(p) \vee -n$ erhalten wir wegen der Monotonie der Superreplikationspreise bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes in den Derivaten mit Barausgleich, daß $Y^r(H) = -\infty$. Es gibt also kein endliches c, so daß der Kontrakt heute einen Wert von 0 hat. Im Finanzmarkt (6.12) erhalten wir

$$Y^r(H) = E^*\left[Z_T - \frac{c}{B_T}\right] = Z_0 - cE^*\left[\frac{1}{B_T}\right]. \tag{6.15}$$

Beispiel 6.14 *(Barausgleich bei Quadratoption) Sei $H(p) = B_T\psi^2(T, Z_T, p)$. Im Finanzmarkt (6.14) erhält man $Y^r(H) = 0$. Im Gegensatz zu den vorigen Beispielen, ist es in diesem Beispiel für den ökonomischen Agenten nicht sinnvoll, unendlich viele Aktien zu kaufen oder zu verkaufen.*

Beispiel 6.15 *(Terminkauf mit physischer Lieferung) Sei $H_C = -c$, $H_S = 1$. Für den Finanzmarkt (6.14) ergibt sich*

$$\begin{aligned} h^*(b, z) &= \inf_p \left(-\frac{c}{b} + \int_{p-1}^{p} (z + x)dx\right) \\ &= \inf_p \left(-\frac{c}{b} + z + (p - \frac{1}{2})\right) \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Eine Argumentation wie in Beispiel 6.13 zeigt, daß auch mit physischer Lieferung $Y^r(H) = -\infty$ gilt. Im Finanzmarkt (6.12) erhalten wir

$$\begin{aligned} h^*(b, z) &= \inf_p \left(-\frac{c}{b} + z + 1 + \int_{p-1}^{p} \tanh x dx\right) \\ &= -\frac{c}{b} + z, \end{aligned}$$

weswegen auch bei physischer Lieferung (6.15) gilt.

Beispiel 6.16 *(Kaufoption mit physischer Lieferung) Sei $H_C(p) = -c1_{B_T\psi(T,Z_T,p)>c}$ und $H_S(p) = 1_{B_T\psi(T,Z_T,p)>c}$. Im Finanzmarkt (6.12) ergibt sich*

$$h(b, z, p) = \left(-\frac{c}{b} + z + 1 + \int_{p-1}^{p} \tanh x dx\right) 1_{z+(1+\tanh p)-\frac{c}{b}>0}.$$

Die Funktion h ist offensichtlich stetig auf

$$G \triangleq \left\{(b,z,p)\,\middle|\, z + (1+\tanh p) - \frac{c}{b} > 0\right\}$$

und konstant gleich 0 *auf*

$$\left\{(b,z,p)\,\middle|\, z + (1+\tanh p) - \frac{c}{b} \leq 0\right\}.$$

Sei $(b_n, z_n, p_n)_{n\in\mathsf{N}} \subset G$ *eine beliebige Folge mit* $\lim_{n\to\infty}(b_n, z_n, p_n) = (b^*, z^*, p^*)$*, so daß*

$$z^* + (1+\tanh p^*) - \frac{c}{b^*} = 0.$$

Wegen der strikten Monotonie von $\tanh p$ *gilt*

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{c}{b_n} + z_n + 1 + \int_{p_n-1}^{p_n}\tanh x dx\right) &= -\frac{c}{b^*} + z^* + 1 + \int_{p^*-1}^{p^*}\tanh x dx \\ &< -\frac{c}{b^*} + z^* + 1 + \tanh p^* = 0,\end{aligned}$$

weswegen h nach oben halbstetig ist. Mit der implizit für $z - \frac{c}{b} \in (-2,0)$ *durch*

$$z + (1+\tanh\phi(b,z)) - \frac{c}{b} = 0$$

definierten Funktion ϕ *gilt:*

$$\begin{aligned} h^*(b,z) &= \inf_p (h(b,z,p)) \\ &= \begin{cases} z - \frac{c}{b} & \textit{für } z - \frac{c}{b} \geq 0 \\ -\frac{c}{b} + z + 1 + \int_{\phi(b,z)-1}^{\phi(b,z)}\tanh x dx < 0 & \textit{für } z - \frac{c}{b} \in (-2,0) \\ 0 & \textit{für } z - \frac{c}{b} \leq -2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit Beispiel 6.12 zeigt, daß die Kaufoption mit physischer Lieferung in diesem illiquiden Finanzmarkt billiger zu superreplizieren ist als die entsprechende Option mit Barausgleich.

6.2 Superreplikation bezüglich des Buchwertes

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Superreplikation eines Derivats bezüglich des Buchwertes. Es zeigt sich, daß sich auch dieses Problem als Superreplikationsproblem eines Derivats bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes reformulieren läßt, weswegen die Sätze 6.5 und 6.8 auch hier indirekt angewendet werden können.

Die Artikel von Frey [19] und Schönbucher und Wilmott [31] beschäftigen sich mit der Duplikation eines Derivats mit Barausgleich bezüglich des Buchwertes in einem illiquiden Finanzmarkt. Schönbucher und Wilmott leiten eine nichtlineare partielle Differentialgleichung her, die der Buchwertprozeß einer replizierenden Strategie in Abhängigkeit des Aktienkurses und der Zeit erfüllen muß. Sie zeigen weder Lösbarkeit der partiellen Differentialgleichung noch Eindeutigkeit einer Lösung. Frey leitet eine quasilineare partielle Differentialgleichung für die Duplikationsstrategie her. Ihm gelingt es unter gewissen Regularitätsannahmen, Lösbarkeit und Eindeutigkeit für diese partielle Differentialgleichung zu zeigen. Da Frey Modelle mit einer geometrischen Brownschen Bewegung Z als Zustandsprozeß betrachtet, setzt er voraus, daß sich die duplizierende Aktienposition als $(f(t, Z_t))_{0\leq t\leq T}$ mit einer $C^{1,2}$-Funktion f schreiben läßt. Im allgemeinen dürfte die quadratische Variation seiner Duplikationsstrategie also nicht verschwindend sein. Obige Überlegungen haben gezeigt (vgl. Satz 2.5), daß der realisierbare Portfoliowert in strikt illiquiden Finanzmärkten (d.h. (2.3) gilt) im Mittel unter einem äquivalenten Martingalmaß sinkt, wenn die quadratische Variation der verwendeten Strategie ansteigt. Dies legt die Vermutung nahe, daß solche Strategien für ein Superreplikationsproblem bezüglich des Buchwertes nicht optimal sind.

Zuerst präzisieren wir, was wir unter einer Superreplikation eines Derivats bezüglich des Buchwertes verstehen.

Definition 6.17 *Sei H ein Derivat in einem illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ). Der Superreplikationspreis $Y^p(H)$ bezüglich des Buchwertes ist das Infimum aller Anfangskapitale H_0, für die es eine zulässige Strategie π gibt, so daß*

$$\begin{aligned} R_0^\pi &= H_0 \text{ und} \\ \pi_T^0 + \left(\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)\right)\psi(T, Z_T, \pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)) &\geq H_C^*(\pi_T^1). \end{aligned} \tag{6.16}$$

Wir nennen eine solche Strategie Superreplikationsstrategie von H bezüglich des Buchwertes.

Gleichung (6.16) bedeutet, daß das Portfolio des ökonomische Agenten nach Zahlung von H_C und Lieferung der H_S Aktien einen nicht negativen Buchwert hat. Für Derivate H mit Barausgleich lautet (6.16)

$$V_T^\pi \geq H^*(\pi_T^1).$$

Satz 6.18 *Sei H ein Derivat in einem illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ). Wir definieren ein Derivat $\widetilde{H}$ mit Barausgleich durch*

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{H}(p)}{B_T} \triangleq H_C^*(p) - \int_0^p x\psi(T, Z_T, dx) \\ + p\psi(T, Z_T, p) - (p - H_S(p))\,\psi(T, Z_T, p - H_S(p)). \end{aligned}$$

Dann ist π genau dann Superreplikationsstrategie bezüglich des Buchwertes von H, wenn π Superreplikationsstrategie von $\widetilde{H}$ bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes ist. Insbesondere gilt

$$Y^p(H) = Y^r(\widetilde{H}).$$

Beweis. Die Äquivalenz der beiden Superreplikationsprobleme folgt aus

$$R_T^\pi \geq H_C^*(\pi_T^1) - \int_0^{\pi_T^1} x\psi(T, Z_T, dx) \\ + \pi_T^1 \psi(T, Z_T, \pi_T^1) - \left(\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)\right) \psi(T, Z_T, \pi_T^1 - H_S(\pi_T^1))$$

$\Leftrightarrow$

$$R_T^\pi \geq H_C^*(\pi_T^1) + \int_0^{\pi_T^1} \psi(T, Z_T, x)dx - \left(\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)\right) \psi(T, Z_T, \pi_T^1 - H_S(\pi_T^1))$$

$\Leftrightarrow$

$$\pi_T^0 + \left(\pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)\right) \psi(T, Z_T, \pi_T^1 - H_S(\pi_T^1)) \geq H_C^*(\pi_T^1).$$

■

Für Derivate H mit Barausgleich vereinfacht sich die Definition von $\widetilde{H}$ zu

$$\widetilde{H}(p) \stackrel{\triangle}{=} B_T \left(H_C^*(p) - \int_0^p x\psi(T, Z_T, dx) \right).$$

Mit Hilfe der Sätze 6.18 und 6.8 kann man Superreplikationspreise bezüglich des Buchwertes für Derivate bestimmen. Wir beschränken uns dabei exemplarisch auf Derivate mit Barausgleich in illiquiden Finanzmärkten mit vollständigem assoziierten Finanzmarkt.

Korollar 6.19 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt, der assoziierte Finanzmarkt vollständig, (5.7) erfüllt und $P^* \in \mathcal{P}^*$. Wir definieren*

$$F_t \stackrel{\triangle}{=} E^* \left[\max \left(\int_0^{\infty} x\psi(T, Z_T, dx), \int_0^{-\infty} x\psi(T, Z_T, dx) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (0 \leq t \leq T). \tag{6.17}$$

Dann gilt für jedes durch ein nach unten beschränktes $H \in L^1(P^*) \cap L^0(\mathcal{F}_T)$ gegebenes Derivat mit Barausgleich, daß

$$Y^p(H) = E^*[H^*] - F_0. \tag{6.18}$$

Für jede Superreplikationsstrategie π von H bezüglich des Buchwertes ist

$$R_t^\pi \geq E^*[H^* | \mathcal{F}_t] - F_t \quad (0 \leq t \leq T). \tag{6.19}$$

Beweis. Wir definieren die stetige Funktion $h : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ durch

$$h(z,p) \stackrel{\triangle}{=} -\int_0^p x\psi(T,z,dx).$$

Da $\psi_p > 0$ ist, ist die Funktion h auf $[0,\infty)$ fallend und auf $[-\infty,0)$ steigend in p, weswegen für die durch

$$h^*(z) \stackrel{\triangle}{=} -\max\left(\int_0^{-\infty} x\psi(T,z,dx), \int_0^{\infty} x\psi(T,z,dx)\right)$$

definierte Funktion $h^* : \mathsf{R} \to [-\infty, 0]$ gilt, daß

$$h^*(z) = \inf_p h(z,p).$$

Nach Proposition 7.34 in Bertsekas und Shreve [6] gibt es eine Folge von Borelmeßbaren Funktionen $(\phi^n)_{n\in\mathsf{N}}$, $\phi^n : \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ mit $(n \in \mathsf{N})$

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &\leq \phi^n, && \\ h(z,\phi^n(z)) &\leq h^*(z) + \frac{1}{n}, && \text{wenn } h^*(z) > -\infty \text{ und} \\ h(z,\phi^n(z)) &\leq -n, && \text{wenn } h^*(z) = -\infty. \end{aligned}$$

Deswegen folgt aus $Z_T \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$, Satz 6.18, Satz 6.5 und dem Satz über monotone Integration, daß

$$\begin{aligned} Y^p(H) &\leq \lim_{n\to\infty} Y^r\left(B_T \max\left[H^* - \int_0^p x\psi(T,Z_T,dx), -n\right]\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \inf_{\beta\in L^0(\mathcal{F}_{T-})} E^*\left[\max\left(H^* - \int_0^\beta x\psi(T,Z_T,dx), -n\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} E^*[\max(H^* - F_T, -n)] \\ &= E^*[H^*] - F_0. \end{aligned} \tag{6.20}$$

Die Ungleichung (6.19) folgt mit Hilfe von Satz 6.18 analog zum Beweis von 1. von Satz 6.5. Aus (6.19) und (6.20) ergibt sich nun auch (6.18). ■

Bemerkung 6.20 *Aussage (6.18) impliziert für ein Derivat H mit Barausgleich in einem strikt illiquiden Finanzmarkt (d.h. (2.3) gilt), daß*

$$Y^p(H) < Y^r(H)$$

gilt. Dies ist dadurch erklärbar, daß der ökonomische Agent sowohl durch ein sukzessives Aufbauen eines großen positiven Aktienbestands seinen Buchwert künstlich *nach oben manipulieren kann als auch durch das sukzessive Aufbauen einer großen Leerverkaufsposition, da durch ein zusätzliches Verkaufen der Aktie der negative Wert der bisherigen Position kleiner wird. Insbesondere ist der Superreplikationspreis für* $H = 0$ *gleich*

$$-F_0 < 0. \tag{6.21}$$

Dies zeigt, daß es in jedem strikt illiquiden Finanzmarkt „Arbitrage" bezüglich des Buchwertes gibt. Man sieht, daß $Y^p(H)$ *nicht sinnvoll als Preis von* H *interpretiert werden kann.*

Korollar 6.21 *Sei* (B, Ψ) *ein illiquider Finanzmarkt, der assoziierte Finanzmarkt vollständig, (5.7) erfüllt und* $P^* \in \mathcal{P}^*$*. Des weiteren sei* H *ein Derivat mit Barausgleich der Form*

$$H^*(p) = h(\widetilde{Z}, p)$$

mit einer nach oben halbstetigen Abbildung $h : \mathsf{R}^d \times \mathsf{R} \to \mathsf{R}$ *und einer* $\mathcal{F}_{T-}$*-meßbaren* R^d*-wertigen Zufallsvariablen* $\widetilde{Z}$*. Wir definieren* $h^* : (\mathsf{R}^d \times \mathsf{R}) \to \overline{\mathsf{R}}$ *durch*

$$h^*(z_1, z_2) \triangleq \inf_{p \in \mathsf{R}} \left(h(z_1, p) - \int_0^p x\psi(T, z_2, dx) \right). \tag{6.22}$$

Falls $\left(h^*(\widetilde{Z}, Z_T)\right)^+ \in L^1(P^*)$*, so gilt*

1.
$$Y^p(H) = E^* \left[h^*(\widetilde{Z}, Z_T) \right].$$

2.
$$R_t^\pi \geq E^*[h^*(\widetilde{Z}, Z_T) | \mathcal{F}_t]$$

für alle $0 \leq t \leq T$ *und für jede Superreplikationsstrategie bezüglich des Buchwertes* π *von* H*.*

Beweis. Mit h ist für $n \in \mathsf{N}$ auch

$$\max \left(h(z_1, p) - \int_0^p x\psi(T, z_2, dx), -n \right)$$

nach oben halbstetig. Aus den Sätzen 6.18 und 6.8 und dem Satz über monotone Integration folgt

$$\begin{aligned} Y^p(H) &\leq \lim_{n\to\infty} Y^r\left(B_T \max\left[h(z_1,p) - \int_0^p x\psi(T,Z_T,dx), -n\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} E^*\left[\max\left(h^*(\widetilde{Z},Z_T), -n\right)\right] \\ &= E^*[h^*(\widetilde{Z},Z_T)]. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Die zweite Behauptung folgt mit Hilfe von Satz 6.18 analog zum Beweis von 1. von Satz 6.5. Die erste Behauptung erhalten wir aus einer Kombination von 2. mit (6.23). ■

Bemerkung 6.22 *Nach den Bemerkungen 6.6 und 6.9 hätten wir den Anfangsbestand an Aktien der in den Beweisen der Korollare 6.19 und 6.21 implizit konstruierten Superreplikationsstrategien beliebig vorgeben können. Deshalb hätten wir für die Derivate aus diesen Korollaren in der Definition der Superreplikationsstrategie bezüglich des Buchwertes zusätzlich*

$$\pi_0^1 = \alpha$$

für ein beliebiges $\alpha \in \mathsf{R}$ fordern können, ohne ihren Superreplikationspreis bezüglich des Buchwertes zu verändern.

Sei (B,Ψ) ein strikt illiquider Finanzmarkt (d.h. (2.3) gilt), (5.7) erfüllt, der assoziierte Finanzmarkt vollständig, $P^* \in \mathcal{P}^*$ und H ein Derivat mit Barausgleich wie in Korollar 6.19 oder 6.21 mit $Y^p(H) > -\infty$. Dann ist jede zulässige Duplikationsstrategie π mit Anfangskapital H_0, die mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht verschwindende quadratische Variation hat, suboptimal für das Superreplikationsproblem bezüglich des Buchwertes. Nach Satz 2.5 gilt dann nämlich mit der positiven Zufallsvariablen L_T^π:

$$H_0 + \int_0^T \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s - L_T^\pi = H^*(\pi_T^1) - \int_0^{\pi_T^1} x\psi(T,Z_T,dx).$$

Also übersteigt H_0 den Superreplikationspreis um mindestens $E^*[L_T^\pi] > 0$. Insbesondere gilt dies für alle Duplikationsstrategien aus Frey [19], die nicht deterministisch sind. Das Phänomen, daß eine Duplikation teurer als eine Superreplikation sein kann, ist aus Finanzmärkten mit Transaktionskosten bekannt (vgl. Bensaid, Lesne, Pagès und Scheinkman [5], Cvitanić, Shreve und Soner [10] und Levental und Skorohod [27]).

Beispiel 6.23 *Wir betrachten den illiquiden Finanzmarkt (B,Ψ) mit*

$$\Psi(t,\omega,p) = p + (W_t(\omega) + \mu t) = p + Z_t(\omega)$$

mit einer Brownschen Bewegung W *und* $Z_t \stackrel{\triangle}{=} W_t + \mu t$. *Die Filtrierung sei die Augmentierung der natürlichen Filtrierung der Brownschen Bewegung. Wir betrachten das durch*

$$H^*(Z_T, p) = (p + Z_T)^2 = \psi^2(t, z, p)$$

gegebene Derivat mit Barausgleich. Dann sind die Voraussetzungen von Korollar 6.21 erfüllt. Die Funktion h^* *des Korollars lautet hier*

$$\begin{aligned} h^*(z) &= \inf_{p \in \mathsf{R}} \left((p+z)^2 - \int_0^p x dx \right) \\ &= \inf_{p \in \mathsf{R}} \left((p+z)^2 - \frac{1}{2} p^2 \right) \end{aligned}$$

Das Infimum wird genau in

$$p^* \stackrel{\triangle}{=} -2z$$

angenommen, woraus sich

$$h^* = -z^2$$

errechnet. Somit haben wir mit $P^* \in \mathcal{P}^*$, *daß*

$$Y^p(H) = E^*[h^*(Z_T)] = E^*[-Z_T^2] = -T.$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß Z *unter dem äquivalenten Martingalmaß* P^* *eine Brownsche Bewegung ist. Die optimale Grenzstrategie hat in* T *einen realisierbaren Portfoliowert von* $-Z_T^2$ *und eine Aktienposition von* $-2Z_T$. *Man beachte, daß* Y *im Gegensatz zum Superreplikationspreis von* $H^* = 0$ *in diesem Finanzmarkt endlich ist. Letzterer berechnet sich nämlich mit Hilfe von Korollar 6.21 zu* $-\infty$.

Kapitel 7

Portfoliooptimierung in illiquiden Finanzmärkten

Wir betrachten in diesem Kapitel die Probleme der Portfoliooptimierung des ökonomischen Agenten, bei denen dieser seinen Nutzen aus einem Konsumplan bezieht. Das Ziel des ökonomischen Agenten besteht darin, seinen erwarteten Nutzen entweder unter der Nebenbedingung, daß der realisierbare Portfoliowert in T nicht negativ ist oder unter der Nebenbedingung, daß der Buchwert in T nicht negativ ist, zu maximieren. Dabei umfaßt unsere Untersuchung sowohl zustandsabhängige als auch unstetige Nutzenfunktionen.

In Satz 7.9 zeigen wir, daß der optimale Nutzen aus dem realisierbaren Portfoliowert mit dem optimalen Nutzen des analogen Portfoliooptimierungsproblems im assoziierten Finanzmarkt mit gleichem Anfangskapital übereinstimmt, wenn die indirekte Nutzenfunktion des Nutzenmaximierungsproblems im assoziierten Finanzmarkt linksstetig ist. Außerdem zeigen wir, daß sich der optimale Nutzen aus dem Buchwert dann als optimaler Nutzen des analogen Problems im assoziierten Finanzmarkt mit erhöhtem, explizit gegebenem Anfangskapital berechnen läßt.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der vorausgesetzten Monotonie der Nutzenfunktion in den Konsumplänen und der Charakterisierung der Superreplikationspreise im illiquiden Finanzmarkt als Superreplikationspreise im assoziierten Finanzmarkt. Dabei setzen wir natürlich die für diese Charakterisierung notwendigen Regularitätsbedingungen voraus. Der Beweis zeigt außerdem, wie man optimierende Folgen von Strategien für die Portfoliooptimierungsprobleme im illiquiden Finanzmarkt konstruieren kann.

Wir setzen in diesem Kapitel voraus, daß der Prozeß der kurzfristigen Zinsraten r positiv ist.

7.1 Konsumpläne in illiquiden Finanzmärkten

Wir wollen das Portfoliooptimierungsproblem für allgemeine Nutzenfunktionen, die von einem Konsumplan auf $[0, T]$ abhängen können, untersuchen. Dafür müssen wir einige Begriffe und Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel auf Strategien, die einen Konsumplan finanzieren, verallgemeinern.

Wir definieren die Mengen

$$\mathcal{M}_+ \triangleq \{c : [0, T] \to [0, \infty) | c \text{ ist wachsend und rechtsstetig}\}$$

und

$$\mathcal{C} \triangleq \left\{ C : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{M}_+, \mathcal{B}(\mathcal{M}_+)) \,|\, (C_t)_{0 \le t \le T} \text{ ist adaptiert} \right\}.$$

Hierbei ist $\mathcal{B}(\mathcal{M}_+)$ die von der schwachen Topologie erzeugte Borel-σ-Algebra auf $\mathcal{M}_+$. Wir können also $\mathcal{C}$ mit der Menge der endlichen, positiven optionalen Maße auf $[0, T]$ identifizieren.

Definition 7.1 *Eine Strategie π finanziert den Konsumplan C in einem illiquiden Finanzmarkt (B, Ψ), wenn*

$$d(\pi_t S_t) = \pi_{t-} dS_t - dC_t^*.$$

Hierbei ist

$$C_t^* \triangleq \int_0^t \frac{1}{B_s} dC_s \text{ für } 0 \le t \le T.$$

Die Strategie π hat Anfangskapital w_0, wenn

$$R_0^\pi + C_0 = w_0.$$

Eine Strategie ξ im assoziierten Finanzmarkt finanziert den Konsumplan C im assoziierten Finanzmarkt, wenn

$$d(\xi_t^0 + \xi_t^1 \widetilde{S}_t) = \xi_{t-}^1 d\widetilde{S}_t - dC_t^*. \tag{7.1}$$

Die Strategie ξ hat Anfangskapital w_0, wenn

$$\xi_0^0 + \xi_0^1 \widetilde{S}_0 + C_0 = w_0.$$

Es gilt folgende Erweiterung des Numéraire-Invarianzprinzips aus Proposition 1.13.

Proposition 7.2 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Eine Strategie π finanziert genau dann denn Konsumplan C, wenn*

$$d(B_t \pi_t S_t) = \pi_{t-} d(B_t S_t) - dC_t. \tag{7.2}$$

Eine Strategie ξ im assoziierten Finanzmarkt finanziert genau dann den Konsumplan C im assoziierten Finanzmarkt, wenn

$$d(\xi_t^0 B_t + \xi_t^1 B_t \widetilde{S}_t) = \xi_{t-}^1 d\left(B_t \widetilde{S}_t\right) - dC_t.$$

Beweis. Sei π selbstfinanzierend. Dann berechnen wir:

$$\begin{aligned} d(B_t \pi_t S_t) &= B_t d(\pi_t S_t) + \pi_{t-} S_{t-} dB_t \\ &= B_t \pi_{t-} dS_t - B_t dC_t^* + \pi_{t-} S_{t-} dB_t \\ &= \pi_{t-} d(B_t S_t) - dC_t. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, daß $d(\pi_t S_t) = d(\frac{1}{B_t} B_t \pi_t S_t) = \pi_{t-} dS_t - dC_t^*$, wenn (7.2) gilt. Der Beweis für den assoziierten Finanzmarkt verläuft ebenfalls analog. ■

Mit Hilfe der nächsten Proposition kann man die Sätze 2.5, 6.5 sowie das Korollar 6.19 auf selbstfinanzierende Strategien mit Konsum anwenden.

Proposition 7.3 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt.*

1. *Die Strategie ξ im assoziierten Finanzmarkt finanziere den Konsum C. Ferner sei $\widetilde{\xi}$ die ξ eineindeutig zugeordnete selbstfinanzierende Strategie mit*

   $$\begin{aligned} \widetilde{\xi}^1 &= \xi^1 \text{ und} \\ \widetilde{\xi}_0^0 &= \xi_0^0. \end{aligned}$$

   Dann gilt

   $$\left(\widetilde{\xi}_t^0 + \widetilde{\xi}_t^1 \widetilde{S}_t\right) - \left(\xi_t^0 + \xi_t^1 \widetilde{S}_t\right) = C_t^* - C_0^* \text{ für } 0 \le t \le T.$$

2. *Die Strategie π finanziere den Konsum C. Ferner sei $\widetilde{\pi}$ die π eineindeutig zugeordnete selbstfinanzierende Strategie mit*

   $$\begin{aligned} \widetilde{\pi}^1 &= \pi^1 \text{ und} \\ \widetilde{\pi}_0^0 &= \pi_0^0. \end{aligned}$$

   Dann gilt

   $$R_t^{\widetilde{\pi}} - R_t^{\pi} = V_t^{\widetilde{\pi}} - V_t^{\pi} = C_t^* - C_0^* \text{ für } 0 \le t \le T.$$

Beweis. Die Behauptungen folgen direkt aus

$$\widetilde{\xi}_t^0 - \xi_t^0 = C_t^* - C_0^* \text{ für alle } 0 \le t \le T \tag{7.3}$$

bzw.

$$\widetilde{\pi}_t^0 - \pi_t^0 = C_t^* - C_0^* \text{ für alle } 0 \leq t \leq T.$$

Dabei ist noch zu beachten, daß wegen (7.3) und der RCLL-Eigenschaft von C (1.15) genau dann für $\widetilde{\xi}$ erfüllt, wenn (1.15) für ξ erfüllt ist. ∎

Wegen Proposition 7.3 in Verbindung mit Satz 2.5 ist folgende Definition natürlich. Hierbei ist Ξ wie in Satz 2.5 definiert.

Definition 7.4 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Eine Strategie π heißt zulässig für einen Konsum C, wenn sie C finanziert und es ein $\underline{c} \in \mathsf{R}$ gibt, so daß*

$$\int_0^t \Xi_s^\pi d\widetilde{S}_s \geq \underline{c} \textit{ für alle } t \in [0, T].$$

Entsprechend heißt eine Strategie ξ im assoziierten Finanzmarkt zulässig für einen Konsum C, wenn sie C finanziert und es ein $\underline{c} \in \mathsf{R}$ gibt, so daß

$$\int_0^t \xi_s^1 d\widetilde{S}_s \geq \underline{c} \textit{ für alle } t \in [0, T].$$

7.2 Portfoliooptimierung

Wir führen Portfoliooptimierungsprobleme mit Randbedingungen für den realisierbaren Portfoliowert bzw. den Buchwert ein. Mit Hilfe der expliziten Darstellungen der Superreplikationspreise aus Satz 6.5 und Korollar 6.19 zeigt sich, daß diese Probleme im wesentlichen äquivalent zu einem Portfoliooptimierungsproblem im assoziierten Finanzmarkt sind.

Wir betrachten eine zustandsabhängige Nutzenfunktion der Form

$$U : (\Omega \times \mathcal{M}_+, \mathcal{F} \times \mathcal{B}(\mathcal{M}_+)) \to \left(\overline{\mathsf{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathsf{R}})\right). \tag{7.4}$$

Eine ausgiebige Diskussion solcher allgemeiner Nutzenfunktionen mit weiteren Literaturhinweisen findet sich in Bank [3]. Die Halbordnung $\preceq$ auf $\mathcal{C}$ ist durch

$$C \preceq \widetilde{C} \Longleftrightarrow \left(\widetilde{C} - C\right) \in \mathcal{C}$$

definiert. Wir nehmen an, daß U monoton bezüglich $\preceq$ ist, d.h.

$$C \preceq \widetilde{C} \text{ und } U^-(C) \in L^1(P) \Rightarrow U^-(\widetilde{C}) \in L^1(P) \text{ und } E[U(C)] \leq E[U(\widetilde{C})]. \tag{7.5}$$

Ferner nehmen wir an, daß

$$U^-(C) \in L^1(P) \text{ für } C \equiv \varepsilon \text{ mit } \varepsilon > 0. \tag{7.6}$$

Beispiel 7.5 *Das klassische Beispiel einer Präferenzstruktur, die nur Konsum im Endzeitpunkt würdigt, kann durch die Nutzenfunktion*

$$U(C) \stackrel{\triangle}{=} u(C_T) \tag{7.7}$$

mit einer monoton steigenden, stetigen konkaven Funktion $u : [0, \infty) \to \overline{\mathsf{R}}$ *beschrieben werden. Wegen der vorausgesetzten Positivität des Prozesses* r *der kurzfristigen Zinsraten, ist es nie vorteilhaft vor* T *zu konsumieren, so daß das Optimierungsproblem mit der Nutzenfunktion* $u(C_T - C_{T-})$ *äquivalent zu dem durch (7.7) gegebenen ist. Das dazugehörige Portfoliooptimierungsproblem in einem liquiden Finanzmarkt kann häufig mit Hilfe eines Martingalansatzes oder einer Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung gelöst werden (vgl. Duffie [14] für einen Überblick über diese Lösungsmethoden und die zugehörige Literatur).*

Beispiel 7.6 *Die Probleme des Quantil-Hedgings und des effizienten Hedgings einer Zufallsvariablen* $H \geq 0$ *können als Nutzenmaximierungsprobleme mit einer zustandsabhängigen Nutzenfunktion formuliert werden (vgl. Föllmer und Leukert [17] und [18]). Die zugehörigen Nutzenfunktionen lauten*

$$U(C) \stackrel{\triangle}{=} 1_{C_T \geq H} \tag{7.8}$$

bzw.

$$U(C) \stackrel{\triangle}{=} -l\left((H - C_T)^+\right) \tag{7.9}$$

mit einer steigenden konvexen Funktion $l : [0, \infty) \to \mathsf{R}$ *für Quantil-Hedging bzw. effizientes Hedging mit Verlustfunktion* l. *Wir nehmen an, daß* $E[l(H)] < \infty$, *woraus insbesondere folgt, daß (7.6) erfüllt ist.*

Beispiel 7.7 *Ein Vorteil von allgemeinen Nutzenfunktionen der Form (7.4)-(7.6) ist, daß solche Nutzenfunktionen im Gegensatz zu Nutzenfunktionen, die nur von Konsumraten abhängen, die natürliche Eigenschaft der zeitlich lokalen Substituierbarkeit des Konsums haben können (vgl. Hindy, Huang und Kreps [22] und Hindy und Huang [23]). Dies ist z.B. bei der Hindy-Huang-Kreps-Präferenzstruktur, die durch die Nutzenfunktion*

$$U(C) \stackrel{\triangle}{=} \int_0^T u\left(t, Y(C)(t)\right) dt \tag{7.10}$$

gegeben ist, der Fall. Dabei ist

$$Y(C)(t) \stackrel{\triangle}{=} \eta e^{-\int_0^t \beta(s) ds} + \int_0^t \beta(s) e^{-\int_s^t \beta(v) dv} dC_s,$$

$$u : [0,T] \times [0,\infty) \to \mathsf{R}$$

steigend und konkav im zweiten Argument und stetig, $\eta \geq 0$ eine Konstante und $\beta : [0,T] \to (0,\infty)$ eine stetige Funktion. In Bank und Riedel [4] wird das Nutzenmaximierungsproblems bei Hindy-Huang-Kreps-Präferenzen in liquiden Finanzmärkten mit Hilfe eines verallgemeinerten Kuhn-Tucker-Prinzips gelöst.

Wir können jetzt unsere Portfoliooptimierungsprobleme formulieren:

Definition 7.8 *Sei (B,Ψ) ein illiquider Finanzmarkt. Der optimale Nutzen im assoziierten Finanzmarkt bei Anfangskapital $w_0 > 0$ ist*

$$U^a(w_0) \triangleq \sup_{C \in \mathcal{C}^a(w_0)} E[U(C)],$$

wobei

$$\mathcal{C}^a(w_0) \triangleq \{C \in \mathcal{C} \,|\, \exists\ \xi \text{ zulässig für } C \text{ im assoziierten Finanzmarkt mit } \xi_0^0 + \xi_0^1 \widetilde{S}_0 + C_0 \leq w_0, \text{ so daß } \xi_T^0 + \xi_T^1 \widetilde{S}_T \geq 0 \text{ und } U^-(C) \in L^1(P)\Big\}. \quad (7.11)$$

Der optimale Nutzen im illiquiden Finanzmarkt bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes bei Anfangskapital $w_0 > 0$ ist

$$U^r(w_0) \triangleq \sup_{C \in \mathcal{C}^r(w_0)} E[U(C)], \quad (7.12)$$

wobei

$$\mathcal{C}^r(w_0) \triangleq \{C \in \mathcal{C} \,|\, \exists \pi \text{ zulässig für } C \text{ mit } R_0^\pi + C_0 \leq w_0, \text{ so daß } R_T^\pi \geq 0 \text{ und } U^-(C) \in L^1(P)\big\}. \quad (7.13)$$

Der assoziierte Finanzmarkt sei vollständig. Der optimale Nutzen im illiquiden Finanzmarkt bezüglich des Buchwertes bei Anfangskapital $w_0 > -F_0$ (vgl. (6.17)) ist

$$U^p(w_0) \triangleq \sup_{C \in \mathcal{C}^p(w_0)} E[U(C)],$$

wobei

$$\mathcal{C}^p(w_0) \triangleq \{C \in \mathcal{C} \,|\, \exists \pi \text{ zulässig für } C \text{ mit } R_0^\pi + C_0 \leq w_0, \text{ so daß } V_T^\pi \geq 0 \text{ und } U^-(C) \in L^1(P)\big\}. \quad (7.14)$$

Normalerweise ist die Portfoliooptimierung mit der Nebenbedingung eines nicht negativen realisierbaren Portfoliowertes das für den ökonomischen Agenten relevantere Problem. Der realisierbare Portfoliowert läßt sich nämlich im Gegensatz zum Buchwert mit Hilfe einer idealisierten, unendlich schnellen aber nicht instantanen Liquidationsstrategie risikolos in realen Konsum umwandeln.

In manchen Situationen kann auch eine Portfoliooptimierung bezüglich der Buchwertnebenbedingung von Bedeutung sein. So wird z.B. ein Fondsmanager darauf achten, an bestimmten Zeitpunkten eine optisch möglichst gute Performance zu erzielen, indem er den Buchwert seines Portfolios in diesen Zeitpunkten maximiert. Ähnliches gilt für einen Händler in einer Handelsabteilung einer Bank, dessen Gehalt eine performanceabhängige Komponente aufweist.

Wegen Annahme (7.6) sind $\mathcal{C}^a(w_0)$ und $\mathcal{C}^r(w_0)$ für beliebige $w_0 > 0$ nicht leer. Wenn der assoziierte Finanzmarkt vollständig ist und (5.7) erfüllt ist, so ist der Konsumplan $C \equiv \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < w_0 + F_0$ nach Korollar 6.19 in Verbindung mit Proposition 7.3 in $\mathcal{C}^p(w_0)$.

Sei ξ bzw. π eine Strategie wie in (7.11), (7.13) bzw. (7.14). Dann sehen wir mit Hilfe von Proposition 7.3, daß

$$\xi_0^0 + \xi_0^1 \widetilde{S}_0 + \int_0^T \xi_s d\widetilde{S}_s - (C_T^* - C_0^*) \geq 0, \tag{7.15}$$

$$R_0^\pi + \int_0^T \Xi_s^\pi dS_s^1 - L_T^\pi - (C_T^* - C_0^*) \geq 0 \tag{7.16}$$

bzw.

$$R_0^\pi + \int_0^T \Xi_s^\pi dS_s^1 - L_T^\pi - (C_T^* - C_0^*) + \int_0^{\pi_T^1} x\psi(T, Z_T, dx) \geq 0. \tag{7.17}$$

Aus (7.15), (7.16) bzw. (7.17) folgt wegen der Zulässigkeit von ξ bzw. π und der Monotonie und Positivität von L, daß

$$\xi_0^0 + \xi_0^1 \widetilde{S}_0 + \int_0^t \xi_s d\widetilde{S}_s \geq 0 \text{ für } 0 \leq t \leq T,$$

$$R_t^\pi \geq 0 \text{ für } 0 \leq t \leq T$$

bzw.

$$R_t^\pi \geq -F_t \text{ für } 0 \leq t \leq T.$$

Der nächste Satz zeigt, daß der optimale Nutzen des ökonomischen Agenten bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes gleich dem optimalen Nutzen des analogen Optimierungsproblems im assoziierten Finanzmarkt mit gleichem Anfangskapital ist. Dieses Ergebnis hat zwei ökonomische Aspekte.

Einerseits wird der Nutzen des ökonomischen Agenten nicht dadurch verringert, daß der Markt auf eine Order des ökonomischen Agenten reagiert, bevor diese ausgeführt wird. Der ökonomische Agent kann diese negativen Einwirkungen nach Satz 2.5 vermeiden, indem er stetige Handelsstrategien von beschränkter Variation verwendet. Dies steht im Gegensatz zu der Verringerung des optimalen Nutzens bei der Einführung von proportionalen Transaktionskosten in einen gewöhnlichen Finanzmarkt (vgl. z.B. Constantinides [8], Davis und Norman [12] und Shreve und Soner [32]).

Andererseits ist der ökonomische Agent nicht in der Lage, seine Marktmacht auszunutzen. Für jede zulässige Strategie π mit Konsum hat nämlich die durch Ξ^π induzierte zulässige Strategie im assoziierten Finanzmarkt mit dem relevanten Anfangskapital und dem gleichen Konsum immer einen abdiskontierten Portfoliowert, der mindestens so groß ist wie der realisierbare Portfoliowert der ursprünglichen Strategie.

Der folgende Satz besagt außerdem, daß sich der optimale Nutzen bezüglich des Buchwertes als optimaler Nutzen des analogen Optimierungsproblems im assoziierten Finanzmarkt mit erhöhtem Anfangskapital bestimmen läßt. Insbesondere ist der ökonomische Agent in der Lage, seinen Buchwert gewinnbringend zu manipulieren.

Zusätzlich zeigt der Beweis, wie man optimierende Folgen von Strategien konstruieren kann.

Satz 7.9 *Sei (B, Ψ) ein illiquider Finanzmarkt, $w_0 > 0$, die Bedingung (5.7) erfüllt und U^a linksstetig in w_0. Dann ist*

$$U^r(w_0) = U^a(w_0). \tag{7.18}$$

Wenn zusätzlich der assoziierte Finanzmarkt vollständig ist und $F_T \in L^1(P^*)$ mit $P^* \in \mathcal{P}^*$, dann haben wir

$$U^p(w_0 - F_0) = U^a(w_0).$$

Beweis. Wegen der Linksstetigkeit von U^a in w_0 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C \in \mathcal{C}^a(w)$ mit $w < w_0$, so daß

$$E[U(C)] + \varepsilon \geq U^a(w_0).$$

Wegen 3. aus Satz 6.5 in Verbindung mit Proposition 7.3 gibt es eine für den Konsum C zulässige Strategie π mit

$$\begin{aligned} R_0^\pi + C_0 &\leq w_0 \text{ und} \\ R_T^\pi &\geq 0. \end{aligned}$$

Wenn zusätzlich $F_T \in L^1(P^*)$, so erhalten wir aus Korollar 6.19 in Verbindung mit Proposition 7.3 eine für den Konsum C zulässige Strategie π mit

$$\begin{aligned} R_0^\pi + C_0 &\leq w_0 - F_0 \text{ und} \\ V_T^\pi &\geq 0. \end{aligned}$$

Es folgt

$$U^r(w_0) \geq U^a(w_0)$$

bzw.

$$U^p(w_0 - F_0) \geq U^a(w_0).$$

Angenommen, wir hätten ein $C \in \mathcal{C}^r(w_0)$ bzw. $C \in \mathcal{C}^p(w_0 - F_0)$ und eine nach (7.13) bzw. (7.14) zugehörige Strategie π mit

$$E[U(C)] > U^a(w_0).$$

Sei ξ die unter der Zusatzannahme der Vollständigkeit des assoziierten Finanzmarktes exisitierende, im assoziierten Finanzmarkt zulässige Strategie mit

$$F_T = F_0 + \int_0^T \xi_s d\widetilde{S}_s.$$

Wegen (7.16) bzw. (7.17) sehen wir, daß die im assoziierten Finanzmarkt zulässige Strategie Ξ^π bzw. $\Xi^\pi + \xi$ mit Anfangskapital w_0 und Konsum C ein nicht negatives Endvermögen produziert. Dies liefert

$$U^r(w_0) \leq U^a(w_0)$$

bzw.

$$U^p(w_0 - F_0) \leq U^a(w_0).$$

■

Bemerkung 7.10 *Die Bemerkungen 6.6 und 6.22 zeigen, daß wir die im Beweis konstruierten ε-optimalen Strategien π im illiquiden Finanzmarkt so wählen können, daß $\pi_0^1 = \alpha$ für ein beliebiges vorgegebenes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.*

Die indirekte Nutzenfunktion U^a ist insbesondere dann stetig auf $(0, \infty)$, wenn U konkav in C ist, wie dies in den Beispielen (7.7), (7.9) und (7.10) der Fall ist. Die Konkavität von U impliziert nämlich die Konkavität von U^a.

Bemerkung 7.11 *Sei ein Nutzenmaximierungsproblem wie in (7.12) gegeben. Wenn es eine Folge* $(C^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $C^n \in \mathcal{C}^a(w_n)$, $w_n < w_0$ $(n \in \mathbb{N})$ *und*

$$\lim_{n\to\infty} E[U^a(C^n)] = U^a(w_0)$$

und eine nach (7.11) zugehörige Folge $((\xi^{0n}, \xi^{1n}))_{n\in\mathbb{N}}$ *gibt, so daß jedes* (ξ^{0n}, ξ^{1n}) *RCLL ist und (5.6) erfüllt, dann können wir auf (5.7) verzichten und erhalten immer noch (7.18). Dafür muß man im Beweis* 2. *aus Satz 6.5 anstelle von* 3. *aus Satz 6.5 verwendet werden. Natürlich können wir den Satz auch auf den Fall* $T = \infty$ *erweitern.*

Bemerkung 7.12 *Falls der assoziierte Finanzmarkt vollständig, (5.7) erfüllt,*

$$F_0 = \infty$$

und

$$\lim_{n\to\infty} E[U(n)] \geq E[U(C)] \qquad \text{für jedes } C \in \mathcal{C} \text{ mit } U^-(C) \in L^1(P), \tag{7.19}$$

so gilt

$$U^p(w_0) = \lim_{n\to\infty} E[U(n)] \text{ für jedes } w_0 \in \mathbb{R}. \tag{7.20}$$

Nach Korollar 6.19 gibt es dann nämlich zu jedem n *eine Superreplikationsstrategie des Derivats* $H = nB_T$ *bezüglich des Buchwertes mit einem realisierbaren Portfoliowert im Zeitpunkt* 0 *von* w_0. *Wegen Proposition 7.3 kann diese in eine den Konsum* $C \equiv n$ *finanzierende Strategie* π *mit*

$$\begin{aligned} R_0^\pi + C_0 &\leq w_0 \text{ und} \\ V_T^\pi &\geq 0. \end{aligned}$$

umgewandelt werden. Aus (7.19) folgt dann (7.20).

Beispiel 7.13 *Wir betrachten den Spezialfall* $u(x) = \ln x$ *von (7.7) und nehmen an, daß der abdiskontierte Aktienpreisprozeß* $\widetilde{S}$ *im assoziierten Finanzmarkt durch eine geometrische Brownsche Bewegung wie in (6.11) gegeben ist, wobei wir* $m > 0$ *voraussetzen. Außerdem sei die Filtrierung die Augmentierung der natürlichen Filtrierung der in* $\widetilde{S}$ *auftretenden Brownschen Bewegung und der assoziierte Finanzmarkt somit vollständig. Wir können den optimalen Konsumplan* C^{w_0} *und die optimale Strategie* ξ^{w_0} *im assoziierten Finanzmarkt mit einem Anfangskapital* $w_0 > 0$ *z.B. mit Hilfe eines Martingalansatzes bestimmen. Wir erhalten*

$$\begin{aligned} C_t^{w_0} &= 0 \text{ für } t < T, \\ C_T^{w_0} &= w_0 B_T \exp\left[\frac{m}{\sigma} W_T + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2 T\right] \end{aligned}$$

und

$$\xi_t^{w_0} = w_0 \frac{m}{\sigma^2} \frac{\exp\left[\frac{m}{\sigma} W_t + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{\sigma}\right)^2 t\right]}{\exp\left[\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t + mt\right]}.$$

Wegen Satz 7.9 gilt in dem Finanzmarkt aus (6.14), daß $U^r(w_0) = U^a(w_0)$. *Unter Beachtung der Positivität und Stetigkeit von* ξ^{w_0} *folgt mit Hilfe von Bemerkung 7.11, daß dies auch in dem Finanzmarkt aus Beispiel 5.12 der Fall ist. Indem wir ein* $w < w_0$ *wählen, so daß* $U^a(w) + \varepsilon > U^a(w_0)$ *und dann eine zulässige Strategie* π *mit Anfangskapital* w_0 *und Konsum* C^{w_0} *mit* $R_T^\pi \geq 0$ *konstruieren, erhalten wir eine* ε*-optimale Strategie in den illiquiden Finanzmärkten. Wegen Bemerkung 7.12 gilt im Finanzmarkt aus (6.14)* $U^p(w_0) = \infty$ *für beliebige* $w_0 \in \mathsf{R}$.

Beispiel 7.14 *Sei nun der (5.7) erfüllende illiquide Finanzmarkt aus (6.13) gegeben, wobei wir annehmen, daß der Prozeß* r *der kurzfristigen Zinsraten deterministisch ist. Wir betrachten das durch*

$$\widetilde{H}(p) \stackrel{\triangle}{=} (B_T \psi(T, Z_T, p) - c)^+$$

mit $c > 0$ *definierte Derivat* $\widetilde{H}$ *mit Barausgleich. Lemma* 3.18 *in Föllmer und Leukert [17] zeigt die Stetigkeit von* U^a *für die Quantil-Hedging-Nutzenfunktion (7.8) mit*

$$H \stackrel{\triangle}{=} \inf_p \widetilde{H}(p) = \left(\frac{1}{2} B_T Z_T - c\right)^+,$$

weswegen nach Satz 7.9 für beliebige $w_0 > 0$

$$U^r(w_0) = U^a(w_0) \tag{7.21}$$

gilt. Unter $\widetilde{\mathcal{C}}^r(w_0)$ *verstehen wir die Menge aller Paare* (π, C), *wobei* $C \in \mathcal{C}^r(w_0)$ *und* π *eine nach (7.13) zugehörige Strategie ist. Wir betrachten das Quantil-Hedging-Problem*

$$\sup_{(\pi,C)\in\widetilde{\mathcal{C}}^r(w_0)} E\left[1_{C_T \geq \widetilde{H}(\pi_T^1)}\right].$$

Offensichtlich haben wir

$$\sup_{(\pi,C)\in\widetilde{\mathcal{C}}^r(w_0)} E\left[1_{C_T \geq \widetilde{H}(\pi_T^1)}\right] \leq U^r(w_0). \tag{7.22}$$

Sei nun $0 < \varepsilon < w_0$ *beliebig vorgegeben. Nach Proposition* 7.34 *in Bertsekas und Shreve [6] gibt es ein* $\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$, *so daß*

$$\widetilde{H}(\beta) \leq H + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit Hilfe von Proposition 7.3, Satz 2.5 und dem Beweis von Satz 6.5 sehen wir, daß es zu jedem $C \in \mathcal{C}^r(w_0 - \varepsilon)$ *ein* π *mit* $\pi_T^1 = \beta$ *gibt, so daß* $(\pi, C) \in \widetilde{\mathcal{C}}^r(w_0 - \frac{\varepsilon}{2})$. *Also ist* $(\pi, \widetilde{C}) \in \widetilde{\mathcal{C}}^r(w_0)$, *wobei*

$$\widetilde{C}_t^* \triangleq C_t^* + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (0 \leq t \leq T).$$

Deswegen gilt

$$U^r(w_0 - \varepsilon) \leq \sup_{(\pi,C)\in\widetilde{\mathcal{C}}^r(w_0)} E\left[1_{C_T \geq \widetilde{H}(\pi_T^1)}\right],$$

woraus sich zusammen mit der Stetigkeit von U^a, *(7.21) und (7.22)*

$$\sup_{(\pi,C)\in\widetilde{\mathcal{C}}^r(w_0)} E\left[1_{C_T \geq \widetilde{H}(\pi_T^1)}\right] = U^a(w_0)$$

ergibt.

Beispiel 7.15 *Sei* (B, Ψ) *ein illiquider Finanzmarkt, (5.7) erfüllt und* $P^0 \in \mathcal{P}^0$. *Wir betrachten das Optimierungsproblem des Insiders mit Insiderinformation* ν *über den Liquidationswert der Aktie im Zeitpunkt* T *analog zu Back [1] (vgl. Beispiel 1.10)*

$$\sup_{\pi\in\mathcal{A}_0} E^0\left[\int_0^T \pi_{s-}^1 dS_s^1 + \left(\nu - S_T^1\right)\pi_T^1\right] \tag{7.23}$$

mit

$$\mathcal{A}_0 \triangleq \left\{\pi \text{ zulässig} | \pi_0^0 = \pi_0^1 = 0\right\},$$

wobei wir annehmen, daß

$$E^0\left[\sup_{p\in\mathsf{R}}\left(\nu p - \int_0^p \psi(T, Z_T, x)dx\right)\right] < \infty.$$

Das Nutzenmaximierungsproblem kann nicht auf einfache Weise mit einer Nutzenfunktion der Form (7.4) geschrieben werden, auch dann nicht, wenn wir in (7.4) eine zusätzliche Aktienbestandsabhängigkeit erlauben. Wir können trotzdem unsere *bisherigen Ergebnisse benutzen, um Aussagen über (7.23) zu treffen. Wegen Satz 2.5 erhalten wir für jede Strategie $\pi \in \mathcal{A}_0$*

$$\begin{aligned} & E^0\left[\int_0^T \pi^1_{s-} dS^1_s + \left(\nu - S^1_T\right)\pi^1_T\right] \\ = \;& E^0\left[V^\pi_T + \left(\nu - S^1_T\right)\pi^1_T\right] \\ = \;& E^0\left[R^\pi_T + \nu\pi^1_T - \int_0^{\pi^1_T} \psi(T, Z_T, x)dx\right] \\ \le \;& E^0\left[\nu\pi^1_T - \int_0^{\pi^1_T} \psi(T, Z_T, x)dx\right] \qquad (7.24) \\ \le \;& E^0\left[\sup_{p\in\mathbb{R}}\left(\nu p - \int_0^p \psi(T, Z_T, x)dx\right)\right]. \qquad (7.25) \end{aligned}$$

Eine Argumentation wie in Proposition 6.7 zeigt

$$\sup_{\beta\in L^0(\mathcal{F}_{T-})} E^0\left[\left(\nu\beta - \int_0^\beta \psi(T, Z_T, x)dx\right)\right] = E^0\left[\sup_{p\in\mathbb{R}}\left(\nu p - \int_0^p \psi(T, Z_T, x)dx\right)\right]. \tag{7.26}$$

Da es nach dem Beweis von Satz 6.5 für jedes $\beta \in L^0(\mathcal{F}_{T-})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Superreplikationsstrategie $\pi \in \mathcal{A}_0$ bezüglich des realisierbaren Portfoliowertes von $H^* = -\varepsilon$ mit Endbestand β gibt, folgt aus (7.25) und (7.26), daß

$$\sup_{\pi\in\mathcal{A}_0} E^0\left[\int_0^T \pi^1_{s-} dS^1_s + \left(\nu - S^1_T\right)\pi^1_T\right] = E^0\left[\sup_{p\in\mathbb{R}}\left(\nu p - \int_0^p \psi(T, Z_T, x)dx\right)\right].$$

Es gilt genau dann Gleichheit in (7.24) und (7.25), wenn π stetig und von beschränkter Variation ist und

$$\pi^1_T = \arg\max_{p\in\mathbb{R}}\left(\nu p - \int_0^p \psi(T, Z_T, x)dx\right),$$

was insbesondere $\nu = \psi(T, Z_T, \pi^1_T)$ impliziert. Der optimale Nutzen berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned} & E^0\left[\sup_{p\in\mathbb{R}}\left(\nu p - \int_0^p \psi(T, Z_T, x)dx\right)\right] \\ = \;& E^0\left[\psi(T, Z_T, \pi^1_T)\pi^1_T - \int_0^{\pi^1_T} \psi(T, Z_T, x)dx\right] \\ = \;& E^0\left[\int_0^{\pi^1_T} x\psi(T, Z_T, dx)\right]. \end{aligned}$$

All dies ist konsistent mit den Ergebnissen von Back.

Literaturverzeichnis

[1] K. Back, *Insider trading in continous time*, Review of Financial Studies **5** (1992), no. 3, 387–409.

[2] P. Bank, *No free lunch for large investors*, Preprint, Humboldt-Universität Berlin, 1999.

[3] ______, *Singular control of optional random measures - stochastic optimization and representation problems arising in the microeconomic theory of intertemporal consumption choice*, Ph.D. thesis, Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, 2000.

[4] P. Bank und Riedel, F., *Optimal consumption choice with intertemporal substitution*, erscheint in Annals of Applied Probability, 1999.

[5] B. Bensaid et al., *Derivative asset pricing with transaction costs*, Mathematical Finance **2** (1992), no. 2, 63–86.

[6] D.P. Bertsekas und Shreve, S.E., *Stochastic optimal control*, Academic Press, 1978.

[7] J. Bierbaum, *Über die Rückwirkung von Handelsstrategien großer Investoren auf Wertpapierprozesse*, Master's thesis, Institut für Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, 1997.

[8] G.M. Constantinides, *Capital market equilibrium with transaction costs*, Journal of Political Economy **94** (1986), no. 4, 842–862.

[9] D. Cuoco und Cvitanić, J., *Optimal consumption choices for a „large" investor*, Journal Econ. Dyn. Control **22** (1998), 401–436.

[10] J. Cvitanić et al., *There is no nontrivial hedging portfolio for option pricing with transaction costs*, Annals of Applied Probability **5** (1995), no. 2, 327–355.

[11] J. Cvitanić und Ma, J., *Hedging options for a large investor and forward-backward stochastic sde´*, Annals of Applied Probability **6** (1996), 370–398.

[12] M.H.A. Davis und Norman, A.R., *Portfolio selection with transaction costs*, Mathematics of operations research **15** (1990), no. 4, 676–713.

[13] F. Delbaen und Schachermayer, W., *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Mathematische Annalen **300** (1994), 463–520.

[14] D. Duffie, *Dynamic asset pricing theory*, 2. auflage ed., Princeton University Press, 1996.

[15] N. El Karoui und Quenez, M.C., *Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market*, SIAM Journal Control and Optimization **33** (1995), no. 1, 29–66.

[16] H. Föllmer und Kabanov Y., *Optional decomposition and lagrange multipliers*, Finance and Stochastics **2** (1998), 1–25.

[17] H. Föllmer und Leukert, P., *Quantile hedging*, Finance and Stochastics **3** (1999), 251–273.

[18] ______, *Efficient hedging: Cost versus shortfall risk*, Finance and Stochastics **4** (2000), 117–146.

[19] R. Frey, *Perfect option hedging for a large trader*, Finance and Stochastics **2** (1998), 115–141.

[20] R. Frey und Stremme, A., *Market volatility and feedback effects from dynamic hedging*, Mathematical Finance **7** (1997), 351–374.

[21] S. He et al., *Semimartingale theory and stochastic calculus*, CRC Press Inc., 1992.

[22] A. Hindy et al., *On intertemporal preferences in continous time - the case of certainty*, Journal of Mathematical Economics **21** (1992), 401–440.

[23] A. Hindy und Huang, C.-F., *Intertemporal preferences for uncertain consumption: A continous time approach*, Econometrica **60** (1992), 781–801.

[24] J. Jacod und Sirjaev, A.N., *Limit theorems for stochastic processes*, Springer, 1987.

[25] R.A. Jarrow, *Market manipulation, bubbles, corners, and short squeezes*, Journal of Financial and Quantitytive Analysis **27** (1992), no. 3, 311–336.

[26] D.O. Kramkov, *Optional decomposition of supermartingales and hedging claims in incomplete security markets*, Probability Theory and Related Fields **105** (1996), 459–479.

[27] S. Levental und Skorohod, A.V., *On the possibility of hedging options in the presence of transaction costs*, Annals of Applied Probability **7** (1997), no. 2, 410–443.

[28] G.C. Papanicolaou und Sircar, K.R., *General black-scholes models accounting for increased market volatility from hedging strategies*, Applied Mathematical Finance **5** (1998), 45–82.

[29] E. Platen und Schweizer, M., *On feedback effects from hedging derivatives*, Mathematical Finanace **8** (1998), no. 1, 67–84.

[30] P. Protter, *Stochastic integration and differential equations - a new approach*, Springer, 1990.

[31] P.J. Schönbucher und Wilmott, P., *The feedback effect of hedging in illiquid markets*, Preprint, University of Oxford, 1998.

[32] S.E. Shreve und Soner, H.M., *Optimal investment and consumption with transaction costs*, Annals of Applied Probability **4** (1994), no. 3, 609–692.

Lebenslauf

Name:	Dietmar Baum
07/1981 - 06/1990	Abitur, Ludwigshafen
07/1990 - 09/1991	Wehrdienst / Zivildienst
10/1991 - 02/1995	Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn Studium der Mathematik
03/1995 - 12/1996	Humboldt-Universität, Berlin Diplom-Mathematiker
03/1995 - 03/1997	Humboldt-Universität, Berlin Vordiplom in Volkswirtschaftslehre
07/1996 - 08/1996	Bankgesellschaft Berlin AG, Berlin Praktikum
05/1997 - 03/1999	Hypovereinsbank AG, München Financial Engineer
03/1999 - 03/2000	WIAS, Berlin Wissenschaftlicher Mitarbeiter
seit 01/2001	Humboldt-Universität, Berlin Wissenschaftlicher Mitarbeiter

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit selbständig ohne fremde Hilfe verfaßt zu haben und nur die angegebene Literatur und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Dietmar Baum
2. Mai 2001