Geraden in komplexen Mannigfaltigkeiten

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
Humboldt-Universität zu Berlin

von
Herr Dipl.-Math. Achim Radtke
geboren am 05.03.1967 in Neunkirchen/Saar

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Jürgen Mlynek

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Prof. Dr. Bodo Krause

Gutachter:

1. Prof. Dr. Herbert Kurke
2. Prof. Dr. B. Kreußler
3. Prof. Dr. J. Kramer

eingereicht am:	11. April 2001
Tag der mündlichen Prüfung:	9. November 2001

Meinen Eltern
gewidmet.

Vorwort

Den Gegenstand dieser Arbeit bilden Mannigfaltigkeiten mit Geraden. Wir werden zwei Verallgemeinerungen des üblichen Geradenbegriffs benutzen. Der schwächere Begriff stammt aus der Theorie der Twistorräume. Dabei sind Geraden rationale Kurven in einer dreidimensionalen, komplexen Mannigfaltigkeit mit dem Normalenbündel $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1)$, dies entspricht dem Normalenbündel einer Geraden im $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$.
Einen stärkeren Begriff hat Kato in [Kat82] eingeführt. Danach ist eine rationale Kurve in einer komplexen Mannigfaltigkeit eine Gerade, wenn es eine biholomorphe Abbildung von einer Umgebung der Kurve auf eine Umgebung einer Geraden im $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ gibt.
Bei Flächen sind diese beiden Begriffe äquivalent und Flächen mit Geraden sind Aufblasungen von $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$. In höheren Dimensionen ist die Situation komplizierter.

Aus der Deformationstheorie folgt, daß eine Gerade in einer Mannigfaltigkeit nicht isoliert auftritt, sondern zu einer ganzen Familie von Geraden gehört, die eine offene Menge in der umgebenden Mannigfaltigkeit überdecken. Damit ergibt sich, daß auf der umgebenden Mannigfaltigkeit keine globalen holomorphen Differentialformen existieren können und daher die Kodaira-Dimension der Mannigfaltigkeit $-\infty$ ist.
Hieraus resultieren die Schwierigkeiten, solche Räume mit den üblichen Methoden der Klassifikationstheorie zu untersuchen. Da es keine holomorphen Differentialformen gibt, besteht der Albanese-Torus aus einem Punkt. Auch das *Minimal Model Programm* der Mori-Theorie sagt über solche Mannigfaltigkeiten nichts aus.
Im allgemeinen sind Mannigfaltigkeiten mit Geraden weder projektiv noch Kähler-Mannigfaltigkeiten oder von der Klasse $\mathcal{C}$ (Modifikationen von Kähler-Mannigfaltigkeiten).
Es bleibt der Zugang über die algebraische Reduktion. Dabei erhält man eine Faserung über einer projektiven Mannigfaltigkeit, die einen Isomorphismus zwischen den meromorphen Funktionenkörpern induziert. Die Dimension der Basismannigfaltigkeit bezeichnet man als algebraische Dimension.
Für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit Geraden ist die algebraische Reduktion besonders günstig. Wir erhalten dann eine elliptische Faserung über einer rationalen Fläche. Diese können beschrieben werden, und es ergeben sich Kriterien dafür, welche dieser Faserungen Geraden enthalten können.

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil befasst sich mit allgemeinen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten, die Geraden besitzen. Im zweiten Teil werden dann spezielle dreidimensionale Mannigfaltigkeiten untersucht.

Im Kapitel I werden Geraden eingeführt und die Familie einer Geraden vorgestellt. Nun werden einige Eigenschaften der umgebenden Mannigfaltigkeit hergeleitet, wobei die Existenz dieser Familie stets eine Rolle spielt. Wir wollen hier nur einige Beispiele vorwegnehmen. Im Flächenfall ergibt sich, daß nur Aufblasungen von $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ Geraden enthalten. Auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit folgt aus der Existenz von Geraden, daß die Mannigfaltigkeit projektiv ist. Bei bestimmten Abbildungen können wir Aussagen über die Bilder von Geraden treffen. Ist der Parameterraum der Geraden kompakt und glatt, so muß die umgebende Mannigfaltigkeit der $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ sein.

Im Kapitel II befassen wir uns mit projektiven Mannigfaltigkeiten, die Geraden enthalten. Wir stellen die rational zusammenhängende Faserung einer projektiven Mannigfaltigkeit vor. Dies ist eine Abbildung auf eine andere Mannigfaltigkeit, so daß alle rationalen Kurven vollständig in den Fasern enthalten sind und die allgemeine Faser rational zusammenhängend ist.

Dann wenden wir uns zwei Arbeiten von Oxbury und Langer zu, die spezielle dreidimensionale projektive Mannigfaltigkeiten mit Geraden untersucht haben.
Oxbury stellt die Frage, ob eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit Geraden eine Fano-Mannigfaltigkeit ist und welche Fano-Mannigfaltigkeit man dadurch erhält. Er geht von einer Einbettung in einen $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ aus und kann dann den Geraden einen Grad zuordnen. Sein Ergebnis ist eine Liste der dreidimensionalen projektiven Mannigfaltigkeiten mit Geraden vom Grad eins und zwei.

Langer untersucht dreidimensionale Mannigfaligkeiten mit einem positiven Divisor und Geraden. Er gibt eine Liste von Mannigfaltigkeiten mit einem Divisor D an, bezüglich dessen die Geraden vom Grad ≤ 4 sind.

Im Kapitel III wenden wir uns den Geraden mit tubularer Struktur zu. Dies sind Geraden, die dem anfangs beschriebenen stärkeren Geradenbegriff genügen. Wir stellen einige Ergebnisse aus den Arbeiten von Kato vor und benutzen diese, um am Beispiel des projektivierten Tangentialbündels von

$\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ zu zeigen, daß die beiden vorgestellten Geradenbegriffe nicht äquivalent sind.

Kapitel IV stellt das Konzept der algebraischen Dimension und algebraischen Reduktion einer komplexen Mannigfaltigkeit vor. Dann geben wir eine knappe Charakterisierung der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Geraden, sortiert nach der algebraischen Dimension. Ist die algebraische Dimension eins, so erhalten wir eine Faserung auf $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ und eine Liste der möglichen glatten Fasern.
Im Falle der algebraischen Dimension zwei ergibt die algebraische Reduktion eine Abbildung auf eine rationale Fläche, deren allgemeine Fasern elliptische Kurven sind. Dies ist die Überleitung zum zweiten Teil der Arbeit. Dort werden wir elliptische Faserungen über Hirzebruch-Flächen mit Geraden untersuchen.

Im Kapitel V befassen wir uns mit den einfachsten ellliptischen Faserungen, den Hauptfaserbündeln. Zunächst geben wir eine kurze Einführung in die elliptischen Hauptfaserbündel. Dann bestimmen wir, im wesentlichen durch Schnittzahlberechnungen auf der Basisfläche, alle elliptischen Hauptfaserbündel über Flächen, die Geraden enthalten. Alle diese Räume enthalten auch tubulare Geraden.

Im Kapitel VI stellen wir die Weierstraß-Normalform vor. Das ist eine Faserung, deren Fasern ebene elliptische Kurven sind, enthalten in einem holomorphen $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$-Bündel über dem Basisraum. Da zu dieser Faserung ein globaler Schnitt existiert, erhalten wir eine Gruppenstruktur in den Fasern, und die Garbe der Keime der holomorphen Schnitte erhält die Struktur einer Garbe von Gruppen. Es ergibt sich eine Korrespondenz von Elementen der ersten Kohomologiegruppe mit Werten in dieser Garbe und elliptischen Faserungen, die lokal und faserweise isomorph zur Weierstraß-Normalform sind. Eine Weierstraß-Normalform wird vollständig durch ein Geradenbündel (Weierstraßbündel) und zwei Schnitte in Potenzen dieses Bündels charakterisiert.

Kapitel VII enthält das Hauptresultat dieser Arbeit. Darin untersuchen wir, welche elliptischen Faserungen über Flächen, die lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell sind, Geraden enthalten. Wir können uns auf elliptische Faserungen über Hirzebruch-Flächen beschränken. Dann berechnen wir, welche

Paare, bestehend aus dem Weierstraßbündel der elliptischen Faserung und demjenigen Linearsystem, das die Bilder der Geraden enthält, überhaupt in Frage kommen. Leider bleibt offen, ob es zu allen diesen Paaren auch Faserungen gibt, die Geraden enthalten.

Kapitel VIII enthält Fragen, die in dieser Arbeit nicht gestellt wurden oder offen geblieben sind.

Anhang A befasst sich mit Linearsystemen auf Hirzebruch-Flächen. Darin werden die Kohomologiegruppen von Geradenbündeln auf Hirzebruch-Flächen berechnet. Anschließend bestimmen wir diejenigen Linearsysteme auf Hirzebruch-Flächen, die glatte rationale Kurven von positivem Selbstschnitt enthalten. Dieser Anhang ist aus Kapitel VII ausgegliedert, um die Lesbarkeit zu verbessern.

Anhang B enthält eine Übersicht über die sogenannten Hopf-Flächen und ihre wichtigsten Eigenschaften. Diese Flächen sind die am längsten bekannten und bekanntesten nichtprojektiven kompakten Flächen. Sie spielen an einigen Stellen dieser Arbeit eine wichtige Rolle, insbesondere im Kapitel V.

Anhang C gibt eine knappe Auflistung der Definitionen und Sätze aus der Deformationstheorie, soweit sie in dieser Arbeit verwendet werden.

Danksagung

Diese Arbeit wäre ohne zahlreiche Gespräche, Diskussionen und Anregungen mit anderen Mathematikern nicht zustande gekommen. Hiermit möchte ich mich bei allen bedanken. Dabei möchte ich Dr. Georg Hein und Lorenz Wotzlaw sowie Dr. Bernd Kreußler besonders hervorheben. Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Herbert Kurke, der stets auf meine Fragen eingegangen ist und mich durch zahlreiche anregende Diskussionen unterstützte.
Die Arbeit ist im Rahmen des Graduiertenkollegs "Geometrie und Nichtlineare Analysis" an der Humboldt-Universität zu Berlin entstanden.

Achim Radtke

Inhaltsverzeichnis

Notation

Es folgt eine Liste von häufig benutzten Bezeichnungen. Einige davon werden im Text definiert.

Allgemeine Bezeichnungen

$\mathbf{Z}$	der Ring der ganzen Zahlen
$\mathbf{C}$	der Körper der komplexen Zahlen
S^1	die Kreisgruppe
$\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$	der komplexe, projektive n-dimensionale Raum
$[X]$	Kurzschreibweise für die homogenen Standard-koordinaten $[X_0 : X_1 : ... : X_n]$ des $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$
S_n	die n-te Hirzebruch-Fläche
$GL_n(\mathbf{C})$	die Lie-Gruppe der nichtsingulären komplexen $n \times n$ Matrizen
$\mathfrak{gl}_n(\mathbf{C})$	die Lie-Algebra von $GL_n(\mathbf{C})$
$SL_n(\mathbf{C})$	die Lie-Gruppe der nichtsingulären $n \times n$-Matrizen mit Determinante 1
$\mathfrak{s}l_n(\mathbf{C})$	die Lie-Algebra von $SL_n(\mathbf{C})$

Es sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit, $Y \subset X$ eine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit und S eine kompakte, komplex projektive Mannigfaltigkeit.

$b_k(X)$	die k-te Bettizahl von X
$\mathcal{X}(X)$	die Eulercharakteristik von X
TX	das Tangentialbündel von X
$N_{Y\setminus X}$	das Normalenbündel von Y in X
K_X	das kanonische Bündel von X
Ω_X^p	die Garbe der Keime der holomorphen p-Formen auf X
$\mathcal{M}(X)$	der Körper der meromorphen Funktionen auf X
$K(S)$	der Körper der rationalen Funktionen auf S
$a(X)$	die algebraische Dimension von X
$\kappa(X)$	die Kodaira-Dimension von X

Es sei $\pi : X \to X'$ eine holomorphe Abbildung auf eine komplexe Mannigfaltigkeit X', $E \to X$ ein Vektorbündel und $\mathcal{F} \to X$ eine Garbe. Im allgemeinen unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen einem Vektorbündel und der dazu assoziierten Garbe.

$E^\vee$	das duale Vektorbündel
E^*	$E \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$
$H^q(X, \mathcal{F})$	die q-te Kohomologiegruppe von X mit Werten in $\mathcal{F}$
$h^q(X, \mathcal{F})$	$\dim H^q(X, \mathcal{F})$
$h^q(\mathcal{O}_X)$	$h^q(X, \mathcal{O}_X)$
$h^q(\Omega_X^p)$	$h^q(X, \Omega_X^p)$
$c_k(E)$	die k-te Chernklasse des Vektorbündels E
rg E	der Rang des Vektorbündels E
$\pi_*(\mathcal{F})$	die direkte Bildgarbe von $\mathcal{F}$
$R^p_{\pi_*}(\mathcal{F})$	die p-te direkte Bildgarbe

Der Begriff *ample* ist in dieser Arbeit zu *ampel* eingedeutscht.

Allgemeine Theorie

Kapitel I

Geraden in Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Geraden einführen und den Einfluß von Geraden auf die globale Geometrie des umgebenden Raumes untersuchen.

1 Definition

In der algebraischen Geometrie ist eine Gerade ein eindimensionaler linearer Unterraum eines n-dimensionalen projektiven Raumes $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$. Wir wollen nun diesen Begriff für beliebige, nicht notwendig projektive, Mannigfaltigkeiten verallgemeinern.

1.1 Definition
Es sei X eine kompakte, komplexe n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine rationale Kurve $L \subset X$ heißt Gerade, falls für das Normalenbündel von L in X gilt:

$$N_{L\setminus X} \cong \mathcal{O}_L(1)^{\oplus(n-1)}.$$

2 Die Familie einer Geraden

Die Existenz einer Geraden in einer Mannigfaltigkeit impliziert die Existenz vieler Geraden. Da

$$H^1(L, N_{L\setminus X}) = 0 \text{ und } \dim \mathrm{H}^0\left(L, N_{L\setminus X}\right) = 2n-2$$

ist, erhalten wir eine durch einen $2n-2$ dimensionalen Raum W parametrisierte maximale, vollständige Familie von Geraden in X, wobei die Vereinigung der Geraden eine offene Menge enthält (siehe dazu Satz C.4 auf Seite 111). Wir erhalten die folgenden Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} X \times W \supset Z & \xrightarrow{\mu} & W \\ \downarrow{\scriptstyle \nu} & & \\ X & & \end{array}$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned} \dim X &= n \\ \dim Z &= 2n-1 \\ \dim W &= 2n-2 \\ \dim \nu^{-1}(x) &= n-1 \text{ für } x \in X \\ \dim \mu^{-1}(w) &= 1 \text{ für } w \in W \end{aligned}$$

Die Abbildung μ ist ein flacher Morphismus, dessen Fasern unter ν auf die Geraden, der zu L gehörenden Familie von Geraden in X abgebildet werden.

Die Existenz einer solchen Familie von Geraden hat einen weitreichenden Einfluß auf die Geometrie der umgebenden Mannigfaltigkeiten. Dies wollen wir nun näher beleuchten.

2.1 Differentialformen

Auf Mannigfaltigkeiten mit Geraden gibt es keine holomorphen Differentialformen. Dazu betrachten wir die Einschränkung der Kotangentialgarbe Ω^1_X auf eine Gerade L. Es gilt

$$\Omega^1_X|_L \cong \mathcal{O}_L(-2) \oplus \mathcal{O}_L(-1)^{\oplus(n-1)}.$$

Da die Garbe Ω^p_X in $(\Omega^1_X)^{\otimes p}$ enthalten ist, sind die Einschränkungen $\Omega^p_X|_L$ $(p = 1, ..., n)$ negativ. Das bedeutet, alle globalen Schnitte müssen auf den Geraden verschwinden und da die Vereinigung der Geraden eine offene Menge enthält, kann es keine globalen Schnitte geben. Insbesondere gilt damit:

- Die Kodaira-Dimension von X ist $\kappa(X) = -\infty$.
- Der Albanese-Torus von X ist nulldimensional.

2.2 Geraden und Aufblasungen

Es sei $A \subset X$ eine analytische Teilmenge mit $\dim A \leq n-2$. Dann gilt: $\dim \nu^{-1}(A) \leq 2n-3$ und $\dim \mu\left(\nu^{-1}(A)\right) \leq 2n-3$. Das bedeutet, generische Geraden aus der Familie Z sind disjunkt mit A. Damit existieren auch in dem Raum $\widetilde{X}$, den man durch Aufblasen von X längs A erhält, Geraden.

Umgekehrt kann die Existenz von Geraden durch das Abblasen einer analytischen Menge zerstört werden. Dies wird offensichtlich, wenn die Geraden durch Aufblasen erzeugt wurden. Dazu betrachten wir die Fläche $S := \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$. Diese enthält keine Geraden. Die Diagonale $D \subset S$ hat das Normalenbündel $N_{D \setminus S} \cong \mathcal{O}_D(2)$. Durch Aufblasen von S in einem Punkt $p \in D$ erhält man Geraden.

2.3 Flächen mit Geraden

Es sei S eine Fläche und $L \subset S$ eine Gerade, d.h. $L^2 = 1$. Dann ist S eine algebraische Fläche und es gilt daher $\mathrm{H}^1\left(S, \mathcal{O}_S\right) \cong \mathrm{H}^0\left(S, \Omega_S^1\right)$. Aus Abschnitt 2.1 (Seite 3) folgt nun

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1\left(S, \mathcal{O}_S\right) &= 0 \text{ und} \\ \mathrm{H}^0\left(S, K_S^{\otimes 2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet, die Sequenz

$$0 \to \mathrm{H}^0\left(S, \mathcal{O}_S\right) \to \mathrm{H}^0\left(S, \mathcal{O}_S(L)\right) \to \mathrm{H}^0\left(L, \mathcal{O}_L(1)\right) \to 0$$

ist exakt. Daher ist $\dim \mathrm{H}^0\left(S, \mathcal{O}_S(L)\right) = 3$ und wir erhalten mit dem Linearsystem $|\mathcal{O}_S(L)|$ $(L^2 = 1)$ einen birationalen Morphismus

$$\phi : S \to \mathbf{P}^2\mathbf{C},$$

der regulär längs L ist. Flächen mit Geraden ergeben sich demnach durch Aufblasen von $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$.

2.4 Bilder von Geraden

Der folgende Satz beschreibt das Verhalten von Geraden unter bestimmten Abbildungen.

2.1 Satz
Es seien X und S kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten und $\pi : X \to S$ eine holomorphe Abbildung. Es gelte

- $\dim X = n$,
  $\dim S = k \geq 2$ *und*
  $\dim \pi^{-1}(s) \leq n - k$ *für alle* $s \in S$.

- *Nichtreduzierte Fasern sind in einer Teilmenge von S enthalten, die mindestens von der Kodimension zwei ist.*

Dann gilt:

1. *Für eine generische Gerade $L \subset X$ ist die Einschränkung*

$$\pi|_L : L \to \pi(L)$$

   eine Immersion.

2. *Ist $k \geq 3$, so ist die Einschränkung*

$$\pi|_L : L \to \pi(L)$$

   für eine generische Gerade $L \subset X$ biholomorph.

Beweis:
Wir argumentieren im folgenden lokal, daß heißt wir nehmen an, daß
$\mu^{-1}(W) \cong W \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ ist. Dabei behalten wir die Bezeichnungen W, Z und X im folgenden für die offenen Teilmengen der entsprechenden Mannigfaltigkeiten bei.

Den nichtregulären Ort von π bezeichnen wir mit B und mit B' den Ort der nichtregulären Werte von π. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus 2

(Seite 2):

$$\begin{aligned} \dim B' &\leq k-1 \\ \dim B &\leq n-k-1+k-1 \\ &\leq n-2 \\ \dim \nu^{-1}(B) &\leq 2n-3 \\ \dim \mu(\nu^{-1}(B)) &\leq 2n-3 \end{aligned}$$

Das bedeutet, $W \setminus \mu(\nu^{-1}(B))$ enthält eine offene Menge und daher schneiden generische Geraden die Fasern von π in glatten Punkten.

Zunächst zeigen wir, daß für eine generische Gerade gilt:

$$\deg \pi|_L = 1.$$

Nun betrachten wir eine Gerade $L \subset X$ für die $\pi|_L$ nicht injektiv ist und wählen einen Punkt $P \in L$ für den gilt:

$$L \cap \pi^{-1}(\pi(P)) = \{q_1, ..., q_r\},$$

mit $r \geq 2$ und $p_i \neq q_j$, falls $i \neq j$.
Deformationen von $L \subset X$ die den Punkt q_1 fixieren werden lokal durch

$$\mathrm{H}^0\left(L, N_{L\setminus X}(-q_1)\right) \cong \mathrm{H}^0\left(L, \mathcal{O}_L^{\oplus(n-1)}\right)$$

parametrisiert. Wir bezeichnen die Faser über $\pi(P)$ mit $F_P := \pi^{-1}(\pi(P))$. Die Projektionen

$$T_{q_i}X \longrightarrow N_{L\setminus X}|_{q_i},\ i = 2, ..., r$$

induzieren Abbildungen

$$h_i : T_{q_i}F_P \longrightarrow N_{L\setminus X}|_{q_i}.$$

Nun wählen wir einen Schnitt in dem Normalenbündel $N_{L\setminus X}$ der in q_1 verschwindet und in keinem der Punkte $q_2, ..., q_r$ im Bild von $h_2, ..., h_r$ liegt. Die dadurch induzierte Deformation von $L \subset X$ liefert eine Gerade $L' \subset X$ für die gilt

$$L' \cap F_P = \{q_1\}.$$

Das bedeutet $\deg \pi|_L = 1$.

Wir wollen als nächstes zeigen, daß generische Geraden keine Fasern tangential schneiden. Dazu müssen wir die Tangentialräume an Geraden und Fasern vergleichen.
Es sei $\Delta_X \subset X \times X$ die Diagonale in $X \times X$ und $h_{\Delta_X} : H \to X \times X$ die Aufblasung von $X \times X$ längs Δ_X. Ein Punkte im exzeptionellen Ort von H entspricht dann einem Punkt in X mit einer Tangentialrichtung an X in diesem Punkt. Alle anderen Punkte von H entsprechen Paaren von verschiedenen Punkten von X.
Ein Punkt in dem Faserprodukt

$$Z \times_W Z \cong \left(W \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}\right) \times_W \left(W \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}\right) \cong W \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$$

der in der Diagonalen von $Z \times Z$ enthalten ist, entspricht einem Punkt in X, einer Tangentialrichtung an diesen Punkt sowie einer Geraden durch diesen Punkt mit genau dieser Tangentialrichtung. Alle anderen Punkte in $Z \times_W Z$ entsprechen Paaren von verschiedenen Punkten in X mit einer Geraden durch diese beiden Punkte. Die durch $\mu : Z \to W$ induzierte Abbildung $Z \times_W Z \to W$ bezeichnen wir ebenfalls mit μ.

Nun betrachten wir die induzierte Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \nu \times \nu : Z \times_W Z \cong W \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} & \longrightarrow & X \times X \\ (w, p_1, p_2) & \mapsto & \nu(w, p_1), \nu(w, p_2). \end{array}$$

Mit $Bl\,(Z \times_W Z)$ bezeichnen wir die Aufblasung von $Z \times_W Z$ längs $(\nu \times \nu)^{-1}(\Delta_X)$. Damit erhalten wir folgendes kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z \times_W Z & \stackrel{\nu\times\nu}{\longrightarrow} & X \times X \\ \uparrow & & \uparrow h_{\Delta_X} \\ Bl\,(Z \times_W Z) & \longrightarrow & H. \end{array}$$

Für $(x, x) \in \Delta_X$ ist

$$\begin{array}{rcl} (\nu \times \nu)^{-1}(x, x) & = & \left\{(w, p, p) \in W \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} : \nu(w, p) = x\right\} \\ & = & W \times \Delta_{\mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}}, \end{array}$$

wobei $\Delta_{\mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}}$ die Diagonale in $\mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ bezeichnet.

Da $(\nu \times \nu)^{-1}(\Delta_X)$ ein glatter Divisor in $Z \times_W Z$ ist, gilt $Z \times_W Z \cong Bl\,(Z \times_W Z)$. Wir erhalten also eine Abbildung

$$\widetilde{\nu} : Z \times_W Z \to H$$

mit diskreten Fasern, so daß folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} Z \times_W Z & \xrightarrow{\nu\times\nu} & X \times X \\ \widetilde{\nu} \searrow & & \nearrow h_{\Delta_X} \\ & H & \end{array}$$

Da $N_{\Delta_X \setminus X \times X} \cong TX$ ist, ist der exzeptionelle Ort E von h_{Δ_X} gerade $E \cong \mathbf{P}(TX)$.

Wir definieren

$$E(X/S) := \mathbf{P}(T_{X/S}) \subset E.$$

Geraden die an eine Faser von π tangential sind, werden durch

$$\mu\left(\widetilde{\nu}^{-1}\left(E(X/S)\right)\right) \subset W$$

parametrisiert. Geraden auf denen π keinen kritischen Ort besitzt und für die die Einschränkung von π eine Immersion ist, werden durch

$$U := W \setminus \mu\left(\widetilde{\nu}^{-1}\left(E(X/S)\right) \cup \nu^{-1}(B)\right)$$

parametrisiert. Als nächstes wollen wir untersuchen, ob U eine offene Menge in W enthält. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim \widetilde{\nu}^{-1}\left(E(X/S)\right) &= \dim E(X/S) \\ &= \dim \mathbf{P}\left(T_{X/S}\right) \\ &= \dim X + \dim X - \dim S - 1 \\ &= 2n - k - 1. \end{aligned}$$

Für $k \geq 2$ folgt nun

$$\dim \mu\left(\widetilde{\nu}^{-1}\left((E(X/S)\right) \cup \nu^{-1}(B)\right) \leq 2n - 3 < \dim W.$$

Damit ist für eine generische Gerade $L \subset X$ die Enschränkung $\pi|_L : L \to \pi(L)$ eine Immersion. Der erste Teil des Satzes ist somit gezeigt.

Als nächstes wollen wir untersuchen, wann die Einschränkung von π auf eine generische Gerade injektiv ist. Dazu betrachten wir die Einbettung $X \times_S X \hookrightarrow X \times X$ und bezeichnen die strikte Transformierte von $X \times_S X$ in H mit $H(X/S)$. Geraden die eine Faser von π in zwei Punkten schneiden werden durch $\mu\left(\widetilde{\nu}^{-1}(H(X/S))\right)$ parametrisiert. Es gilt

$$\begin{aligned} \dim H(X/S) &= \dim X \times_S X \\ &= 2(n-k)+k \\ &= 2n-k. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\dim \mu\left(\widetilde{\nu}^{-1}(H(X/S))\right) \leq 2n-k.$$

Für $k \geq 3$ gilt dann

$$\dim \mu\left(\widetilde{\nu}^{-1}(H(X/S))\right) < \dim W.$$

Das bedeutet, für eine generische Gerade $L \subset X$ ist die Enschränkung

$$\pi|_L : L \to \pi(L)$$

eine injektive Immersion und somit biholomorph. ∎

Für $k = 2$ müssen wir weitere Voraussetzungen fordern.

2.2 Korollar
Es sei $\pi : X \to S$ eine holomorphe Abbildung, die den Voraussetzugen des obigen Satzes genügt. Ist $L \subset X$ eine Gerade deren Bild $\pi(L)$ glatt ist, dann gilt für eine generische Gerade L:

$$\pi|_L : L \to C := \pi(L)$$

ist biholomorph.

Beweis:
Für $k \geq 3$ ist dies bereits gezeigt. Im Falle $k = 2$ erhalten wir mit Teil eins des Satzes, daß für eine generische Gerade $L \subset X$ die Einschränkung $\pi|_L : L \to C := \pi(L)$ eine glatte Immersion vom Grad eins ist. Das bedeutet $\pi|_L$ ist biholomorph. ∎

2.5 Die Hartshorne-Vermutung

In [Har70] stellt Hartshorne die Vermutung auf, daß eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit positivem Tangentialbündel isomorph zu $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ ist.
Diese Vermutung wurde von Mori durch den folgenden Satz bestätigt.

2.3 Satz (Mori [Mor79])
Es sei X eine n-dimensionale projektive Mannigfaltigkeit. Falls mindestens eine rationale Kurve in X existiert und die Einschränkung des Tangentialbündels von X auf allen rationalen Kurven ampel ist, dann ist X isomorph zu $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$.

Der Beweis wird im wesentlichen auf den folgenden Satz zurückgeführt, der den $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ durch eine Familie rationaler Kurven charakterisiert.

2.4 Satz
Es sei X eine n-dimensionale projektive Mannigfaltigkeit und $L \subset X$ eine Gerade. Die Familie der Kurven, die L enthält, sei mit W bezeichnet und es gelte: $W^0 \subset W$ sei eine kompakte Zusammenhangskomponente, die ausschließlich glatte Kurven parametrisiert. Dann ist X isomorph zu $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$.

Beweis:
Es gibt ein Diagramm (vgl. 2 auf Seite 2)

$$\begin{tikzcd} X \times W^0 \supset Z^0 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\nu"'] & W^0 \\ X & \end{tikzcd}$$

wobei gilt

$$\begin{aligned} \dim X &= n \\ \dim Z^0 &= 2n-1 \\ \dim W^0 &= 2n-2 \\ \dim \nu^{-1}(x) &= n-1 \text{ für } x \in X \\ \dim \mu^{-1}(w) &= 1 \text{ für } w \in W^0 \end{aligned}$$

und $\nu(\mu^{-1}(w))$ ist eine Gerade in X für alle $w \in W^0$.

Für alle $x \in X$ und jede Gerade L aus W^0 mit $x \in L$ gilt:

$$\mathrm{H}^1\left(L, N_{L\setminus X}\right) = \mathrm{H}^1\left(L, N_{L\setminus X}(-x)\right) = 0.$$

Daher ist W^0 und $W^0(x) := \mu(\nu^{-1}(x))$ glatt. Da Z^0 ein holomorphes $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel über $W^0(x)$ ist, ist Z^0 glatt.
Für generische Wahl von x ist $Z^0(x) := \nu^{-1}(x)$ glatt und es gilt $W^0(x) \cong Z^0(x)$. Die Abbildung $d\mu|_z$ ist für alle $z \in Z^0(x)$ von maximalem Rang und da $Z^0(x)$ zusammenhängend ist, gilt $Z^0(x) \cong \mathbf{P}(T_xX) \cong \mathbf{P}^{\mathrm{n}-1}\mathbf{C}$.

Wir bezeichnen mit

$$pr_2 : \tilde{X} \to X$$

die Aufblasung von X im Punkt x und mit E den exzeptionellen Divisor. Nun zeigen wir, daß die Abbildung $\nu : Z^0 \setminus Z^0(x) \to X \setminus \{x\}$ biholomorph ist und sich zu einer biholomorphen Abbildung $Z^0 \to \tilde{X}$ fortsetzen läßt.
Für $z_1, z_2 \in Z^0 \setminus Z^0(x)$ mit $z_1 \neq z_2$ gilt $\nu(z_1) \neq \nu(z_2)$. Dies ist offensichtlich, wenn z_1 und z_2 in der selben Faser von μ enthalten sind. Anderenfalls gilt $z_1 \in \mu^{-1}(w_1)$ und $z_2 \in \mu^{-1}(w_2)$ mit $w_1 \neq w_2$. Die Bilder $\nu(\mu^{-1}(w_1))$ und $\nu(\mu^{-1}(w_2))$ sind Geraden in X und diese schneiden sich in höchstens einem Punkt, d.h. in diesem Fall in x. Die Fortsetzung auf ganz Z^0 ist nun offensichtlich. Wir identifizieren nun Z^0 mit $\tilde{X}$ und den exzeptionellen Divisor E mit $W^0(x)$, so das wir eine Abbildung

$$pr_1 : \tilde{X} \to E$$

erhalten.
Nun wollen wir zeigen, das $X \cong \mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ ist.
Dazu wählen wir eine Hyperebene $H_0 \subset E$. Es gilt

$$pr_1^*(H_0)|_E = \mathcal{O}_E(1) \text{ und } \mathcal{O}_{\tilde{X}}(E)|_E = \mathcal{O}_E(-1).$$

Daher erhalten wir die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(pr_1^* H_0) \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(pr_1^* H_0 + E) \to \mathcal{O}_E \to 0.$$

Da $pr_1 : \tilde{X} \to E$ ein $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel ist, ist $R^1_{pr_{1*}}(\mathcal{O}_{\tilde{X}}(pr_1^* H_0)) = 0$ und es gilt

$$\dim \mathrm{H}^0\left(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(pr_1^* H_0 + E)\right) = \dim \mathrm{H}^0\left(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(pr_1^* H_0)\right) + 1 = n + 1.$$

Basispunkte von $|pr_1^*H_0 + E|$ müssen in E enthalten sein. Nun ist

$$\mathrm{H}^0\left(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}(pr_1^*H_0 + E)\right) \to \mathrm{H}^0\left(E, \mathcal{O}_E\right)$$

surjektiv und daher ist dieses Linearsystem basispunktfrei.
Wie wir bereits gesehen haben, ist $pr_1^*H_0 + E|_E$ trivial, d.h. $pr_1^*H_0 + E = pr_2^*\mathcal{L}$ mit einem Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf X.

Nun wollen wir zeigen, daß die zu dem Linearsystem $|\mathcal{L}|$ assoziierte Abbildung $\phi_{\mathcal{L}} : X \to \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ biholomorph ist.
Um zu sehen, daß für jede Kurve $C \subset X$, die nicht in E enthalten ist, $C.\mathcal{L} > 0$ gilt, betrachten wir die strikte Transformierte $\tilde{C}$ von C in X. Es ist $\tilde{C}.E \geq 0$. Falls $pr_1(C)$ eindimensional ist, ist $pr_1^*H_0.C > 0$, da H_0 positiv ist. Anderenfalls ist $\tilde{C}$ eine Faser von pr_1 und dann gilt $\tilde{C}.E = 1$. Somit ist $\phi_{\mathcal{L}}$ ein endlicher Morphismus.

Nun wollen wir die lokale Injektivität von $\phi_{\mathcal{L}}$ zeigen.
Es sei $x_1 \in X$ ein allgemeiner Punkt und $X_2 \in X \setminus \{x\}$ ein beliebiger Punkt und wir nehmen $\phi_{\mathcal{L}}(x_1) = \phi_{\mathcal{L}}(x_2)$ an. Da $pr_1^*H_0$ die Fasern von pr_1 trennt folgt, daß x_1 und x_2 in der gleichen Faser $C \cong \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ von pr_1 liegen. Nun ist $deg\ pr_1^*H_0 + E|_C = 1$, das bedeutet, die Abbildung $\phi_{\mathcal{L}}$ ist auf C ein Isomorphismus. Daher ist $x_1 = x_2$.
Nun bleibt zu zeigen, daß $\phi_{\mathcal{L}}$ in allen Punkten von maximalem Rang ist.
Es sei $\tilde{C}$ eine Faser von pr_1 und $C = pr_2(\tilde{C})$. Die Tangentialabbildung von $\phi_{\mathcal{L}}$ ist längs C injektiv und die durch das Linearsystem $|pr_1^*H_0|$ induzierte Abbildung

$$N_{C \setminus \tilde{X}} \to T_{pr_2(C)}E$$

hat trivialen Kern.
Insgesamt sehen wir, daß $\phi_{\mathcal{L}}$ ein generisch bijektiver, generisch unverzweigter birationaler endlicher Morphismus auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ ist und somit ein Isomorphismus.

■

2.6 Kähler-Mannigfaltigkeiten

Ist X eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit mit Geraden, so ist X projektiv.
Beweis:

Nach Theorem 8.3. [KM71] (Seite 143) gilt für eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit M mit $\mathrm{H}^2(M, \mathcal{O}_M) = 0$, daß M projektiv ist.
Aus der Existenz von Geraden in X folgt $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X^2) = 0$ (siehe Abschnitt 2.1 auf Seite 3). Die Hodgesymmetrie $\mathrm{H}^0(X, \Omega_X^2) = \mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X)$ für Kähler-Mannigfaltigkeiten impliziert das Verschwinden von $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X)$. Somit ist X projektiv.

∎

2.7 Konforme Strukturen

In Dimension 3 induziert die Existenz von Geraden eine besondere Struktur auf dem Modulraum der Geraden, eine konforme Struktur. Dies wollen wir nun erläutern.

In der komplexen Geometrie bezeichnet man mit einer konformen Struktur einen Nullkegel in jedem Tangentialraum an die gegebene Mannigfaltigkeit, so daß sich eine holomorphe Familie ergibt.

Es sei X eine n-dimensionale, kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, $L \subset X$ eine Gerade und

$$\begin{array}{ccccc} X \times W \supset & Z & \xrightarrow{\mu} & W \\ & \nu \big\downarrow & & \\ & X & & \end{array}$$

die vollständige Familie der Geraden (siehe auch Abschnitt 2 auf Seite 2). Zu jedem Punkt $w \in W$ gibt es eine Umgebung $U(w)$ von w in W, so daß auf $Z_U := \mu^{-1}(U(w))$ ein Geradenbündel $\mathcal{L}$ existiert, für das gilt $\mathcal{L}.Z_w = 1$, mit $Z_w := \mu^{-1}(w)$. Wir verwenden im folgenden die Kurzschreibweise $N := N_{Z \backslash X \times W}$. Dann ist $N^\vee \otimes \mathcal{L}$ faserweise trivial, das bedeutet $N^\vee \otimes \mathcal{L}$ ist ein via μ zurückgezogenes Vektorbündel:

$$N^\vee \otimes \mathcal{L} \cong \mu^* \mathcal{F}_- \text{ mit } \mathcal{F}_- := \mu_*(N^\vee \otimes \mathcal{L})$$

Daher gilt

$$\begin{aligned} N^\vee \otimes \mathcal{L} &= \mu^* \mathcal{F}_- \\ N^\vee &= \mu^* \mathcal{F}_- \otimes \mathcal{L}^\vee \\ N &= (\mu^* \mathcal{F}_-)^\vee \otimes \mathcal{L} \\ &= \mathcal{H}om(\mu^* \mathcal{F}_-, \mathcal{L}) \end{aligned}$$

und $\mu_* N = \mathcal{H}om(\mathcal{F}_-, \mathcal{F}_+)$ mit $\mathcal{F}_+ := \mu_* \mathcal{L}$. Für eine Faser Z_w von μ gilt:

$$N^\vee \otimes \mathcal{L}|_{Z_w} = \mathcal{O}_{Z_w}^{\oplus(n-1)}$$

$$\mathcal{L}|_{Z_w} = \mathcal{O}_{Z_w}(1).$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\ \mathcal{F}_- &= 2 \\ \mathrm{rg}\ \mathcal{F}_+ &= n-1. \end{aligned}$$

Ist X von der Dimension 3, so ergibt sich $\mathrm{rg}\ \mathcal{F}_- = \mathrm{rg}\ \mathcal{F}_+ = 2$. Da $\mu_* N = TW$ und $\mu_* N = \mathcal{H}om(\mathcal{F}_-, \mathcal{F}_+)$ ist, erhalten wir eine symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} g : TW \times TW &\rightarrow \mathcal{H}om\left(\bigwedge^2 \mathcal{F}_-, \bigwedge^2 \mathcal{F}_+\right) \\ g(h,k)(x \wedge y) &= \frac{1}{2}\left(h(x) \wedge k(y) + k(x) \wedge h(y)\right). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $g(h,h) = \det(h)$.
Bisher haben wir lokal argumentiert und das Geradenbündel $\mathcal{L}$ war nicht eindeutig. Wählen wir statt $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel $\tilde{\mathcal{L}}$ so gilt $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} \otimes \mu^* \mathcal{L}_0$ mit einem geeigneten Geradenbündel $\mathcal{L}_0$ auf W. Da

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}om\left(\bigwedge^2 \left(\mu_*(N^\vee \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}_0\right), \bigwedge^2 \left(\mu_* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}_0\right)\right) = \\ &\mathcal{H}om\left(\left(\bigwedge^2 \mu_*(N^\vee \otimes \mathcal{L})\right) \otimes \mathcal{L}_0, \left(\bigwedge^2 \mu_* \mathcal{L}\right) \otimes \mathcal{L}_0\right) = \\ &\mathcal{H}om\left(\bigwedge^2 \left(\mu_*(N^\vee \otimes \mathcal{L})\right), \bigwedge^2 \left(\mu_* \mathcal{L}\right)\right) \end{aligned}$$

ist, läßt sich die Form g auf ganz W fortsetzen.
Die konforme Struktur erhalten wir nun mit $Q = \{h \in TW : g(h,h) = 0\}$. In $w \in W$ entspricht Q_w gerade denjenigen Schnitten in $N|Z_w$ die eine Nullstelle besitzen.

3 Beispiele.

1. Die projektiven Räume $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ und die Twistorräume werden von Geraden überdeckt (siehe dazu [AHS78]).

2. Es seien $[x] = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ homogene Koordinaten von $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$ und

$$\begin{aligned} L_1 &:= \Big\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : x_0 = x_1 = 0\Big\} \\ L_2 &:= \Big\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : x_2 = x_3 = 0\Big\} \end{aligned}$$

zwei Geraden. Auf $X' := \mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ operiert die Gruppe $\mathbf{Z}$ via

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} \times X' &\to X' \\ n, [x] &\mapsto \phi_n([x]) := [x_0 : \alpha_1^n x_1 : \alpha_2^n x_2 : \alpha_3^n x_3]\,, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_i \in \mathbf{C}^*$, $|\alpha_i| < 1$ $(i = 1, 2, 3)$.
Wir wollen für einige spezielle Werte der α's meromorphe Funktionen auf den Quotientenräumen untersuchen. Dazu müssen wir $\mathbf{Z}$-invariante meromorphe Funktionen auf X' betrachten. Da $\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus X'$ von der Kodimension zwei ist, können alle Funktionen fortgesetzt werden. Es sei

$$f = \sum_{i,j,k \in \mathbf{Z}} c_{ijk} \cdot X_1^i X_2^j X_3^k$$

die Laurent-Reihenentwicklung einer meromorphen Funktion f im Punkt $[1 : 0 : 0 : 0]$ und $X_i = \frac{x_i}{x_0}$ $(i = 1, 2, 3)$ seien lokale Koordinaten. Eine $\mathbf{Z}$-invariante Funktion muß der Gleichung

$$\sum_{i,j,k \in \mathbf{Z}} c_{ijk} \cdot X_1^i X_2^j X_3^k = \sum_{i,j,k \in \mathbf{Z}} c_{ijk} \cdot \alpha_1^i \alpha_2^j \alpha_3^k \cdot X_1^i X_2^j X_3^k$$

genügen. Dazu untersuchen wir nun drei spezielle Fälle.

a) $\underline{\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \quad |\alpha| \neq 1}$

Die Gleichung

$$\sum c_{ijk} \cdot X_1^i X_2^j X_3^k = \sum_{ijk} c_{ijk} \cdot \alpha^{j+k} X_1^i X_2^j X_3^k$$

ist genau dann erfüllt, wenn aus $c_{ijk} \neq 0$ $j + k = 0$ folgt.
Dann kann f durch eine Reihe der Form

$$f(X_1, X_2, X_3) = \sum c_{ik} X_1^i \left(\frac{X_2}{X_3}\right)^k$$

dargestellt werden. Die invarianten Funktionen sind also Funktionen in zwei Variablen.

b) $\underline{\alpha_1 = 1, \quad 0 < |\alpha_2| < 1, \quad 0 < |\alpha_3| < 1}$
$\underline{\alpha_2^l = \alpha_3^m \iff l = m = 0}$

In diesem Fall sind die invarianten Funktionen von der Form

$$f(X_1, X_2, X_3) = \sum c_i \cdot X_1^i.$$

c) $\underline{0 < |\alpha_i| < 1, \quad i = 1, 2, 3}$
$\underline{\alpha_1^k \alpha_2^l \alpha_3^m = 1 \iff k = l = m = 0}$

In diesem Fall sind nur die konstanten Funktionen $\mathbf{Z}$-invariant.

Für alle diese Beispiele erhält man als Quotient $X'/\mathbf{Z}$ eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit. Wir wollen nun zeigen, daß alle diese Quotientenräume Geraden enthalten. Dazu definieren wir:

$$\begin{aligned} \beta &:= \max\{|\alpha_2|, |\alpha_3|\} \\ \alpha &:= \min\{|\alpha_2|, |\alpha_3|\} \end{aligned}$$

und wir wählen eine reelle Zahl μ so, daß gilt

$$1 < \mu < \frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Dann ist die Menge

$$N(\mu) := \left\{ [x] \in X' : \frac{1}{\mu}\left(|x_2|^2 + |x_3|^2\right) < |x_0|^2 + |x_1|^2 < \mu\left(|x_2|^2 + |x_3|^2\right) \right\}$$

offen und enthält die Gerade

$$L := \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in X' : x_0 = x_2 \text{ und } x_1 = x_3\}.$$

Für alle $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ gilt: $L \cap \phi_n(L) = \emptyset$. Nun wollen wir zeigen, daß für hinreichend großes $n \in \mathbf{N}$ gilt

$$\begin{aligned} N(\mu) \cap \phi_n(N(\mu)) &= \emptyset \\ \text{und } N(\mu) \cap \phi_{-n}(N(\mu)) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Dann wird nämlich eine offene Umgebung $U \subset X'$ von L biholomorph auf eine offene Menge in $X' / \mathbf{Z}$ abgebildet.
Wir wählen einen Punkt $p = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in X'$ und erhalten für $n > 1$ die Ungleichung

$$\mu \left(|\alpha_2^n x_2|^2 + |\alpha_3^n x_3|^2 \right) < \mu \beta^{2n} \left(|x_2|^2 + |x_3|^2 \right).$$

Da $\beta < 1$ ist, folgt für hinreichend großes n

$$\mu \beta^{2n} \left(|x_2|^2 + |x_3|^2 \right) < |x_0|^2 + |x_1|^2.$$

Für $n < 0$ definieren wir $m := -n$ und erhalten die Ungleichung

$$\frac{1}{\mu} \left(|\alpha_2^{-m} x_2|^2 + |\alpha_3^{-m} x_3|^2 \right) > \frac{1}{\mu} \alpha^{-2m} \left(|x_2|^2 + |x_3|^2 \right).$$

Da

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2m} = \infty$$

ist, erhalten wir für hinreichend großes m

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^{2m} \left(|x_2|^2 + |x_3|^2 \right) > |x_0|^2 + |x_1|^2.$$

Dann ist $p \notin \phi_n(N(\mu))$ und $p \notin \phi_{-n}(N(\mu))$ für hinreichend großes n.

Im Kapitel IV werden wir etwas systematischer meromorphe Funktionen auf komplexen Mannigfaltigkeiten diskutieren.
Weitere Eigenschaften der Beispiele 3.2. werden dann im Kapitel III untersucht.

Kapitel II

Rationale Kurven in projektiven Mannigfaltigkeiten

In der Klassifikationstheorie projektiver Mannigfaltigkeiten spielen rationale Kurven eine große Rolle. In diesem Kapitel wollen wir einige Resultate über rationale Kurven und Geraden in projektiven Mannigfaltigkeiten zusammenstellen.

1 Rationale Kurven in Flächen

Es sei F eine Fläche und $C \subset F$ eine rationale Kurve mit $C^2 \geq 0$, dann ist F eine projektive Fläche und es gilt:

1. Falls $C^2 = 0$ ist, dann ist F birational äquivalent zu einem $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel über einer Kurve R.

2. Falls $C^2 > 0$ ist, dann ist F eine rationale Fläche.

Siehe dazu [BPV84], Kap. V, Prop. 4.3.

Die Existenz einer rationalen Kurve mit nichtnegativem Selbstschnitt impliziert, daß die Fläche projektiv ist und daß die Kodaira-Dimension $\kappa(F) = -\infty$ ist. Die Kodaira-Enriques-Klasssifikation zeigt, daß für projektive Flächen auch die Umkehrung gilt, es gibt jedoch auch nichtprojektive Flächen mit Kodaira-Dimension $-\infty$. Dies sind die Flächen der Klasse VII, z.B. die Hopf-Flächen (siehe dazu Anhang B, Seite 105).

Die minimalen Modelle der Flächen sind eindeutig, falls die Kodaira-Dimension nichtnegativ ist.

2 Projektive Mannigfaltigkeiten mit vielen rationalen Kurven

Mit der folgenden Definition wollen wir erklären, wann wir von vielen rationalen Kurven sprechen.

2.1 Definition
Eine n-dimensionale projektive Mannigfaltigkeit X heißt uniruled, falls eine n-1 dimensionale projektive Mannigfaltigkeit Y und eine dominante rationale Abbildung $Y \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \to X$ existiert.

Für diese Mannigfaltigkeiten gibt es die folgende Charakterisierung.

2.2 Satz
Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

1. *X ist uniruled.*
2. *Der universelle Morphismus $\phi : Hom(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, X) \times X \to X$ ist dominant.*
3. *Es gibt eine Zariski-dichte offene Teilmenge $U \subset X$, so daß zu jedem Punkt $x \in X$ mindestens eine rationale Kurve existiert, die x enthält.*
4. *Jeder Punkt von X ist in einer rationalen Kurve enthalten.*

Beweis:
Siehe [MP97] Part I, Lect.II, Prop. 5.4. ■

2.3 Bemerkung
Eine projektive Mannigfaltigkeit X der Dimension $n \leq 3$ ist genau dann uniruled, wenn die Kodaira-Dimension $\kappa(X) = -\infty$ ist (siehe dazu: [MP97], Part I, Lect. IV, 4.2.). Es besteht die Vermutung, daß dies für projektive Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension gilt. Das Beispiel der Hopf-Flächen zeigt, daß dies für nichtprojektive Mannigfaltigkeiten nicht zutrifft.

Eine wichtige Klasse von Mannigfaltigkeiten mit vielen rationalen Kurven ist die folgende.

2.4 Definition
Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit X heißt rational zusammenhängend, falls es eine rationale Kurve $C \subset X$ gibt, so daß für die Normalisierung $f : \tilde{C} \to C$ gilt: $f^*(TX)$ ist positiv.

2.5 Bemerkungen

2.5.1 In diesen Mannigfaltigkeiten kann man zwei allgemeine Punkte durch eine rationale Kurve verbinden.

2.5.2 Mannigfaltigkeiten mit Geraden sind rational zusammenhängend und die Geraden sind minimale Kurven für diese Eigenschaft.

2.5.3 Fano-Mannigfaltigkeiten sind rational zusammenhängend.
(Siehe [MP97], Part I, Lect. V, 5.1.)

Zur weiteren Beschreibung von Mannigfaltigkeiten mit vielen rationalen Kurven ist der folgende Satz von großer Bedeutung.

2.6 Satz (Miyaoka)
Es sei X eine glatte projektive Mannigfaltigkeit mit vielen rationalen Kurven. Dann existiert eine dominante rationale Abbildung $\pi : X \to \pi(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Es existieren offene Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset \pi(X)$, so daß $\pi|_U : U \to V$ ein eigentlicher Morphismus ist.*
2. *Eine allgemeine Faser von π ist irreduzibel und rational zusammenhängend.*
3. *Ist $y \in \pi(X)$ ein allgemeiner Punkt, dann sind alle rationalen Kurven in X, die die Faser $X_y := \pi^{-1}(y)$ schneiden, in X_y enthalten.*

Die Abbildung π besitzt die folgende universelle Eigenschaft.

Ist $f : X \to Z$ eine dominante rationale Abbildung, deren allgemeine Faser rational zusammenhängend ist, dann gibt es eine, bis auf einen birationalen Automorphismus von $\pi(X)$, eindeutige rationale Abbildung $\sigma : Z \to$

$\pi(X)$, so daß gilt: $\pi = \sigma \circ f$.

Die Abbildung π ist durch X bis auf birationale Äquivalenz eindeutig bestimmt.

Beweis: Siehe [MP97], Part I, Lect. V, Theorem 3.1.

2.7 Definition
Es sei X eine projektive Mannigfaltigkeit. Dann ist die maximale rationale zusammenhängende Faserung

- *die oben beschriebene Abbildung π, falls X uniruled ist*
- *und sonst die identische Abbildung.*

Für eine Regelfläche F ist die maximale rational zusammenhängende Faserung die Albanese-Abbildung. Rational zusammenhängende Flächen sind rational und die maximale rational zusammenhängende Faserung ist die konstante Abbildung.

In Dimension 3 gibt es den folgenden Satz.

2.8 Satz
Es sei X eine glatte, dreidimensionale projektive Mannigfaltigkeit. Dann ist das Bild $\pi(X)$ der maximalen rational zusammenhängenden Faserung von X nicht uniruled und es gilt:

$$\begin{array}{lll}
\dim \pi(X) = 0 & \textit{genau dann, wenn} & \mathrm{H}^0\left(X, (\Omega^1_X)^{\otimes m}\right) = 0 \textit{ ist, für alle } m > 0. \\
\dim \pi(X) = 1 & \textit{genau dann, wenn} & \mathrm{H}^0\left(X, \Omega^1_X\right) \neq 0 \textit{ und} \\
 & & \mathrm{H}^0\left(X, \Omega^2_X\right)^{\otimes m} = 0 \textit{ ist, für alle } m > 0. \\
\dim \pi(X) = 2 & \textit{genau dann, wenn} & \mathrm{H}^0\left(X, \Omega^2_X\right)^{\otimes 12} \neq 0 \textit{ und} \\
 & & \mathrm{H}^0\left(X, \Omega^3_X\right)^{\otimes m} = 0 \textit{ ist, für alle } m > 0. \\
\dim \pi(X) = 3 & \textit{genau dann, wenn} & \mathrm{H}^0\left(X, \Omega^3_X\right)^{\otimes m} \neq 0 \textit{ ist} \\
 & & \textit{für mindestens ein } m > 0.
\end{array}$$

Beweis:
Siehe [MP97], Part I, Lect. V, Theorem 3.7.

2.1 Projektive Mannigfaltigkeiten mit Geraden

Projektive dreidimensionale Mannigfaltigkeiten mit Geraden wurden von Oxbury [Oxb94] und Langer [Lan98] untersucht.
In [Oxb94] wird die Frage diskutiert, ob eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit Geraden eine Fano-Mannigfaltigkeit ist und welche man dadurch erhält. Dabei wird von einer gegebenen Einbettung $X \subset \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ ausgegangen, wobei die Geraden Kurven vom Grad d sind. Das Ergebnis ist das folgende.

2.9 Satz (Oxbury)
Es sei $X \subset \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ eine dreidimensionale Mannigfaltigeit, $L \subset X$ eine Gerade vom Grad $d \leq 2$. Dann gilt

1. $d = 1$, $X \cong \mathbf{P}^3\mathbf{C}$
2. $d = 2$
   (a) $n = 9$, $X \cong \mathbf{P}^3\mathbf{C}$, $X \subset \mathbf{P}^9\mathbf{C}$ *ist die Veronese-Einbettung*
   (b) $n = 6$, X *ist eine Quartik, deren generische Hyperfläche ein "rational scroll" ist.*
   (c) $n \leq 8$, X *ist eine Fano-Mannigfaltigkeit vom Index 2, d.h.* $-K_X = 2H$, *wobei* H *ein positiv Erzeuger der Picardgruppe ist.*

Die folgende Liste beschreibt den Fall 2c) vollständig. Dabei ist e der Grad der Einbettung, gegeben durch H.

- $e = 3$, X *ist eine nichtsinguläre Kubik in* $\mathbf{P}^4\mathbf{C}$.
- $e = 4$, X *ist transversaler Durchschnitt zweier Quadriken in* $\mathbf{P}^5\mathbf{C}$.
- $e = 5$, X *ist transversaler Durchschnitt von* $\mathrm{Gr}(2,5) \subset \mathbf{P}^9\mathbf{C}$ *und* $\mathbf{P}^6\mathbf{C} \subset \mathbf{P}^9\mathbf{C}$.
- $e = 6$, X *ist entweder die Segre-Einbettung von* $\mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \subset \mathbf{P}^7\mathbf{C}$ *oder ein transversaler Hyperebenenschnitt der Segre-Einbettung von* $\mathbf{P}^2\mathbf{C} \times (\mathbf{P}^2\mathbf{C})^\vee \subset \mathbf{P}^8\mathbf{C}$.
- $e = 7$, X *ist eine Aufblasung von* $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$ *in einem Punkt.*

Für $4 \leq e \leq 6$ wird X von Geraden überdeckt.

Beweis: Siehe [Oxb94], 2.4., 3.7., 4.1., 4.2.

In [Lan98] werden dreidimensionale projektive Mannigfaltigkeiten mit Geraden vom Grad d bezüglich eines positiven Divisors H, untersucht. Dabei geht die Adjunktionstheorie (siehe [BS95]) wesentlich ein.
Wir benötigen noch die folgende Schreibweise. Ist $\mathcal{E}$ ein holomorphes Vektorbündel, so bezeichnen wir mit $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ die Projektivierung von $\mathcal{E}$ und mit $\xi_{\mathcal{E}}$ das duale tautologische Bündel von $\mathbf{P}(\mathcal{E})$.

2.10 Satz (Langer)
Ist X eine dreidimensionale projektive Mannigfaltigkeit mit einer Geraden L und einem positiven Divisor H, so daß gilt $H.L = d \leq 4$, dann ist (X, H) aus der folgenden Liste:

1. $(X, H) = (\mathbf{P}^3\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3\mathbf{C}}(1)),\ d = 1.$
2. $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$
   $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1)$
   $\phi : \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}^1\mathbf{C},$
   $H = \xi_{\mathcal{E}} + (d-1)\phi^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1),$
   $d = 2, 3, 4.$
3. *(X, H) ist eine Fano-Mannigfaltigkeit mit $-K_X = 2H,\ d = 2.$*
4. *(X, H) ist eine Faserung von Quadriken über $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$.*
5. *(X, H) ist die Projektivierung eines positiven Vektorbündels $\mathcal{E}$ über einer Fläche F und für $(F, c_1(\mathcal{E}))$ gilt:*
   (a) $(\mathbf{P}^2\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}(4)),\ d = .4$
   (b) $F = S_1 = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2)) \xrightarrow{p} \mathbf{P}^1\mathbf{C}$
   $c_1(\mathcal{E}) = 3\xi_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2)} - p^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1)),$
   wobei $\mathcal{E}$ auf einer Kurve C' mit $(C')^2 = 1$ den Spaltungstyp $\mathcal{O}_{C'}(2) \oplus \mathcal{O}_{C'}(3)$ hat. d=3
   (c) $(\mathbf{P}^2\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}(5)),\ d = 4$
   oder $\mathcal{E}$ hat auf einer Geraden in $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ den Spaltungstyp
   $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(3),\ d = 3.$
   (d) *$(F, -2K_F)$, wobei F eine Del Pezzo-Fläche ist, $d = 4$.*

(e) $F \xrightarrow{p} \mathbf{P}^2\mathbf{C}$ *ist* $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ *in* $m \leq 12$ *Punkten aufgeblasen,* E_i *bezeichnet die exzeptionellen Divisoren.*
$c_1\mathcal{E} = 7p^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}(1)) - 2(E_1 + ...E_m) - E_k$
oder $c_1\mathcal{E} = 7p^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}(1)) - 2(E_1 + ...E_m)$
und $\mathcal{E}$ *hat auf dem Urbild einer Geraden, die die exzeptionellen Divisoren nicht schneidet, den Spaltungstyp* $\mathcal{O}(3) \oplus \mathcal{O}(4),\ d = 4.$

Hat man Vektorbündel wie in b), c) und e) vom jeweils beschriebenen Spaltungstyp, so gibt es auch Geraden in X.

6. $X \xrightarrow{p} W$ *ist die Aufblasung einer Varietät* W *in* k *verschiedenen Punkten ,* $H = p^*H_1 - (E_1 + ...E_k)$ *wobei* (W, H_1) *aus der folgenden Liste sind.*

   (a) $(\mathbf{P}^3\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^3\mathbf{C}}(3)),\ 1 \leq k \leq 26,\ d = 3.$

   (b) $(Q^3, \mathcal{O}_{Q^3}(2))$, *wobei* $Q^3 \subset \mathbf{P}^4\mathbf{C}$ *eine Kubik ist,* $1 \leq k \leq 7,\ d = 3$ *oder* $4 \leq k \leq 7,\ d = 4.$

   (c) $(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \xi_{\mathcal{E}})$,
   wobei $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2),\ 2 \leq k \leq 6$
   oder $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(4)$
   bzw. $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(3)$
   $1 \leq k \leq 8,\ d = 4.$

7. $X = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2))$,
   $H = 2\xi_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2)}$,
   $d = 4.$

8. X *ist eine Fano-Mannigfaltigkeit und* $H = -K_X,\ d = 4$

Beweis: Siehe [Lan98] 3.1., 3.2. und 3.4.

Kapitel III

Geraden mit tubularer Struktur

> *In [Kat82] hat Kato einen Geradenbegriff eingeführt, der die komplette Umgebungsstruktur der Geraden berücksichtigt. In diesem Kapitel wollen wir einige der Ergebnisse von Kato vorstellen und zuletzt zeigen wir, daß die beiden Geradenbegriffe nicht äquivalent sind.*

Auf reellen Mannigfaltigkeiten hat man den Satz über tubulare Umgebungen. D.h. für eine reelle Untermannigfaltigkeit N der reellen Mannigfaltigkeit M gibt es eine Umgebung U von N in M und eine Umgebung V des Nullschnittes des Normalenbündels $N_{N\setminus M}$ von N in M und eine diffeomorphe Abbildung $\phi : U \to V$ unter der N auf den Nullschnitt abgebildet wird. Man erhält diese tubulare Umgebung, weil es eine Partition der Eins gibt. In der holomorphen Kategorie gibt es im allgemeinen keine tubularen Umgebungen.

0.1 Definition
Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $Y \subset X$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit. Als reelle Untermannigfaltigkeit besitzt Y eine tubulare Umgebung und es gibt einen Diffeomorphismus $\phi : U \to V$ wie oben beschrieben. Falls es einen holomorphen Diffeomorphismus ϕ gibt, nennt man dies eine tubulare Struktur .

0.2 Bemerkung
Eine Gerade L in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X hat eine tubulare Struktur, falls es eine offene Umgebung U von L in X gibt und eine biholomorphe Abbildung $\varphi : U \to V \subset \mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ auf eine offene Menge $V \subset \mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$

so daß das Bild $\varphi(L)$ eine Gerade (im klassischen Sinne) in $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ ist. Eine *tubulare Gerade* ist eine Gerade mit tubularer Struktur.

1 Verkleben von komplexen Mannigfaltigkeiten

Für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension die tubulare Geraden enthalten hat man eine Verklebungseigenschaft, ähnlich der Zusammenhangssumme in der Topologie. Wir wollen dies nun für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten explizit beschreiben.

Es seien $[x] = [x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ homogene Koordinaten von $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathbf{P}^3\mathbf{C} & \to & \mathbf{P}^3\mathbf{C} \\ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] & \mapsto & [x_2 : x_3 : x_0 : x_1] \end{array}$$

ist eine holomorphe Involution. Für die Geraden

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \left\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : x_0 = x_1 = 0\right\} \\ L_2 & = & \left\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : x_2 = x_3 = 0\right\} \end{array}$$

gilt $\sigma(L_1) = L_2$.
Für reelle Zahlen $r > 0$ und $\epsilon > 1$ definieren wir

$$\begin{array}{rcl} U_r & := & \left\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : |x_0|^2 + |x_1|^2 < r\left(|x_2|^2 + |x_3|^2\right)\right\} \\ N_\epsilon & := & U_\epsilon \setminus \overline{U_{\frac{1}{\epsilon}}} \\ \Sigma_r & := & \partial U_r = \left\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : |x_0|^2 + |x_1|^2 = r\left(|x_2|^2 + |x_3|^2\right)\right\} \end{array}$$

Es gilt: Für alle $r > 0$ ist U_r biholomorph zu U_1 und

$$\begin{array}{rcl} \bigcap_{r>0} U_r & = & L_1 \\ \Sigma_1 & \subset & N_\epsilon \\ \sigma(\Sigma_1) & = & \Sigma_1 \\ \sigma\left(N_\epsilon\right) & = & N_\epsilon \\ \sigma(U_1) & = & \mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus \overline{U_1}. \end{array}$$

Eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit enthält genau dann eine tubulare Gerade, wenn sie eine offene Menge, biholomorph zu U_1 enthält.
Es seien X_1 und X_2 Mannigfaltigkeiten mit tubularen Geraden. Wir fixieren $\epsilon > 1$ und erhalten offene Einbettungen

$$\begin{aligned} i_1 : U_\epsilon &\rightarrow X_1 \\ i_2 : U_\epsilon &\rightarrow X_2. \end{aligned}$$

Wir können die Mengen

$$\begin{aligned} X_1^\sharp &:= X_1 \setminus \overline{i_1(U_{\frac{1}{\epsilon}})} \\ X_2^\sharp &:= X_2 \setminus \overline{i_2(U_{\frac{1}{\epsilon}})} \end{aligned}$$

verkleben, indem wir die Punkte

$$p_1 \in i_1(N_\epsilon) \subset X_1^\sharp \text{ und } p_2 = i_2 \circ \sigma \circ i_1^{-1}(p_1) \in X_2^\sharp$$

miteinander identifizieren. Damit erhalten wir eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit, die ebenfalls tubulare Geraden enthält und bezeichnen diese mit $M\left(X_1, X_2, i_1, i_2\right)$.

1.1 Bemerkung
Mannigfaltigkeiten, die tubulare Geraden enthalten, wurden erstmals von M. Kato studiert [Kat82] (vgl. auch [Kat85],[Kat89],[KY86]). In [Kat82] wird die Verklebung von solchen Mannigfaltigkeiten eingeführt. Ausgehend von einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit X betrachtet Kato eine Folge X_n von Mannigfaltigkeiten mit tubularen Geraden:

$$\begin{aligned} X_1 &= X \\ X_2 &= M\left(X_1, X_1, i_1, i_1\right) \\ X_n &= M\left(X_{n-1}, X_1, i_{n-1}, i_1\right). \end{aligned}$$

Für die Mannigfaltigkeiten X_n gilt:

$$\begin{aligned} \pi_1\left(X_n\right) &= 0 \\ \pi_2\left(X_n\right) &= \mathbf{Z} \\ b_3\left(X_n\right) &= 4n \\ h^1\left(X_n, \mathcal{O}_{X_n}\right) &\geq n \\ h^1\left(X_n, \Omega^1_{X_n}\right) &\geq n. \end{aligned}$$

Das bedeutet, für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten gibt es keine allgemein gültige Abschätzung der Hodge-Zahlen durch die Betti-Zahlen. Für beliebige kompakte Flächen gibt es eine solche Abschätzung, auch wenn die Fläche keine Kähler-Metrik besitzt (siehe Satz B.2.1 auf Seite 107).

L-Hopf-Mannigfaltigkeiten. In [Kat89] untersucht Kato, wie sich Mannigfaltigkeiten mit tubularen Geraden durch den Verklebungsprozeß faktorisieren lassen. Dort werden auch die L-Hopf-Mannigfaltigkeiten beschrieben. Dies sind Mannigfaltigkeiten, deren universelle Überlagerung das Komplement zweier disjukter Geraden in $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$ ist. Eine L-Hopf-Mannigfaltigkeit heißt *primär*, falls die Fundamentalgruppe unendlich zyklisch ist. Es gilt der folgende Satz.

1.2 Satz (Kato)
Jede L-Hopf-Mannigfaltigkeit wird durch eine primäre L-Hopf-Mannigfaltigkeit endlich und unverzweigt überlagert.
Eine L-Hopf-Mannigfaltigkeit ist genau dann primär, wenn die Fundamentalgruppe torsionsfrei ist.
Jede L-Hopf-Mannigfaltigkeit ist von der folgenden Form:
Es seien

$$\begin{aligned} L_1 &= \Big\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : x_0 = x_1 = 0\Big\} \\ L_2 &= \Big\{[x] \in \mathbf{P}^3\mathbf{C} : x_2 = x_3 = 0\Big\} \end{aligned}$$

zwei Geraden in $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$. *Die folgende Matrix ergibt einen Automorphismus von* $\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$*:*

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

wobei $(\alpha_0 - \alpha_1)\lambda_1 = (\alpha_2 - \alpha_3)\lambda_2 = 0$ *und* $0 < |\alpha_0| \leq |\alpha_1| < |\alpha_2| \leq |\alpha_3|$ *gilt.* *Die durch* $g^n, n \in \mathbf{Z}$ *erzeugte Gruppe operiert auf* $\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ *und jede primäre L-Hopf-Mannigfaltigkeit ist von der Form*

$$\Big(\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2)\Big) / < g^n > .$$

Beweis: Siehe [Kat89], Theorem B.

1.3 Bemerkung
Wir haben bereits L-Hopf-Mannigfaltigkeiten in den Beispielen 3 auf Seite 14 gesehen.

Für

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

hat Yamada [Yam86] den Raum der Deformationen von

$$X := \left(\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2)\right) / < g^n >$$

und von Verklebungen davon berechnet.

Weitere topologische Eigenschaften der Verklebung finden sich in [Kat85] §1.

2 Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten mit tubularen Geraden

Zunächst wollen wir ein Lemma von Kato verallgemeinern, das zeigt, welche Bedeutung tubulare Geraden haben (siehe [Kat85] §3.).

2.1 Lemma
Es sei $L \subset \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ eine Gerade und $V \subset \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ eine tubulare Umgebung von L. Ist $\gamma : V \to \gamma(V) \subset \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ eine biholomorphe Abbildung, so gibt es eine Fortsetzung von γ zu einem Automorphismus von $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$.

Beweis:
Wir wählen einen Punkt $P \in L$. Dann gibt es eine projektive Transformation $\tau \in PGL(n+1, \mathbf{C})$, so daß gilt

$$\tau \circ \gamma(P) = P$$

und

$$\tau \circ \gamma(L) = L.$$

Da es genügt eine Fortsetzung von $\tau \circ \gamma$ zu finden, können wir annehmen, daß schon für γ gilt:

$$\gamma(P) = P \text{ und } \gamma(L) = L.$$

Wir wählen nun homogene Koordinaten $[X_0 : ... : X_n]$ von $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ bezüglich derer $P = [1 : 0 : ... : 0]$ und L durch

$$X_1 = X_2 = ...X_{n-1} = 0$$

gegeben ist. Dann erhalten wir eine lokale Karte $U \cong \mathbf{C}^n$ mit Koordinaten $(x_1, ..., x_n)$, so daß $P = (0, ..., 0)$ und $L \cap U$ durch $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} = 0$ gegeben ist.
Für $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$ läßt sich die Teilmenge

$$x_1 = \lambda_1 \cdot t, \quad x_2 = \lambda_2 \cdot t \quad , ..., x_{n-1} = \lambda_{n-1} \cdot t, \quad x_n = t$$

von U zu einer Geraden $L(\lambda)$ auf $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ fortsetzen. Nun wählen wir $\epsilon > 0$ so, daß für die Menge

$$\Lambda := \left\{ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1} : |\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + ... + |\lambda_{n-1}|^2 < \epsilon \right\}$$

die Geraden $L(\lambda)$ für alle $\lambda \in \Lambda$ in V enthalten sind.
Die Abbildung γ ist bezüglich der lokalen Koordinaten von U durch die Komponentenfunktionen

$$\gamma_k = \gamma_k(x_1, ..., x_n), \ k = 1, ..., n$$

gegeben. Da die Einschränkung aller Geraden in $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ durch P auf $U \cong \mathbf{C}^n$ affine Geraden durch $0 \in \mathbf{C}^n$ sind und das Bild $\gamma(L(\lambda))$ eine Gerade in $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ ist, gibt es holomorphe Funktionen $c(\lambda, t)$, so daß gilt:

$$\gamma_k(\lambda_1 \cdot t, \lambda_2 \cdot t, ..., \lambda_{n-1} \cdot t, t) = c(\lambda, t) \cdot \frac{d}{dt}\gamma_k(\lambda_1 \cdot t, \lambda_2 \cdot t, ..., \lambda_{n-1} \cdot t, t)|_{t=0}.$$

Für festes λ ist $\gamma|_{L(\lambda)}$ ein Automorphismus von $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ und die lokal definierte Funktion

$$t \mapsto c(\lambda, t)$$

setzt sich auf $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ mit $c(\lambda, 0)$ fort. Daher gibt es in einer Umgebung von $0 \in \Lambda$ holomorphe Funktionen $b(\lambda)$ und $d(\lambda)$, so daß gilt:

$$c(\lambda, t) = \frac{b(\lambda) \cdot t}{1 + d(\lambda) \cdot t}.$$

Mit der Bezeichnung

$$b_k(\lambda) = b(\lambda) \cdot \frac{d}{dt}\gamma_k(\lambda_1 \cdot t, ..., \lambda_{n-1} \cdot t, t)|_{t=0}, \quad k = 1, ..., n$$

erhalten wir nun die Gleichungen

$$\gamma_k(\lambda_1 \cdot t, ..., \lambda_{n-1} \cdot t) = \frac{b_k(\lambda) \cdot t}{1 + d(\lambda) \cdot t}$$

bzw.

$$(1 + d(\lambda) \cdot t) \cdot \gamma_k(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1} \cdot t, t) = b_k(\lambda) \cdot t, \quad k = 1, ..., n.$$

Entwickeln wir nun γ_k in Taylor-Reihen bezüglich der Variablen t und bezeichnen mit $\mathcal{L}_k$ den linearen Teil (bezüglich aller Variablen) der Funktion $\gamma_k(x_1, ..., x_n)$, so erhalten wir

$$\mathcal{L}_k(\lambda_1 \cdot t, ..., \lambda_{n-1} \cdot t) = b_k(\lambda) \cdot t.$$

Daher gilt für den Grad von b_k bezüglich $x_1, ..., x_n$

$$\deg b_k \leq 1, \quad k = 1, ..., n.$$

Aus den Gleichungen

$$(1 + d(\lambda) \cdot t) \cdot \gamma_k(\lambda_1 \cdot t, ..., \lambda_{n-1} \cdot t, t) = b_k(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \cdot t, \quad k = 1, ..., n$$

erhalten wir

$$\left(1 + d\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}\right) \cdot x_n\right) \cdot \gamma_k(x_1, ..., x_n) = b_k(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, ..., \frac{x_{n-1}}{x_n}) \cdot x_n.$$

Daraus ersehen wir nun auch, daß der Grad der Funktion d

$$\deg d \leq 1$$

ist.
Die Funktionen $\gamma_k(x_1, ..., x_n)$ sind also Quotienten von Polynomen vom Grad ≤ 1.
Damit erhalten wir die Fortsetzung von γ zu einem Element aus $PGL(n + 1, \mathbf{C})$. ∎

2.2 Lemma (Kato)
Es seien $V_i \subset \mathbf{P}^3\mathbf{C}, i = 1, 2$ *offene Teilmengen und* $\phi : V_1 \to V_2$ *eine holomorphe, lokal biholomorphe Abbildung. Dann ist* ϕ *biholomorph und läßt sich zu einem Element* $\widetilde{\phi} \in PGL(4, \mathbf{C})$ *fortsetzen.*

Beweis: Siehe [Kat82] Lemma 3.1. (Seite 7).

2.3 Satz (Kato)
Es sei X *eine kompakte komplex dreidimensionale Mannigfaltigkeit,* $L \subset X$ *eine tubulare Gerade und diejenige irreduzible Komponente des Barlet-Raumes, die den zu* L *korrespondierenden Punkt enhält, sei kompakt. Dann ist* X *von der algebraischen Dimension drei und unirational.*

Beweis: Siehe [Kat82] Prop. 3.1. (Seite 10).

3 Tubulare Geraden und projektive Strukturen

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz tubularer Geraden auf Twistorräumen diskutieren und ein Beispiel für eine Mannigfaltigkeit, die nichttubulare Geraden enthält, angeben. Dazu benötigen wir den Begriff der projektiven Struktur.

3.1 Definition
Eine komplexe Mannigfaltigkeit X *der Dimension* n *besitzt eine holomorph-projektive Struktur, falls es eine Überdeckung mit Karten* (U_α, ϕ_α) *gibt, so daß gilt:*

1. ϕ_α *bildet* U_α *auf eine offene Menge in* $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ *ab.*
2. *Für jedes Paar* (α, β) *mit* $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ *ist der Koordinatenwechsel* $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta)$ *durch die Einschränkung einer projektiven Transformation auf* $\mathbf{P}^n\mathbf{C}$ *gegeben.*

Detaillierte Untersuchungen von Mannigfaltigkeiten mit projektiver Struktur finden sich in [Gun78], [KO80], [KO81] und [KW83].

Wir benötigen den folgenden Satz.

3.2 Satz (Kobayashi, Ochiai [KO80]**)**
Es sei X eine komplexe Manigfaltigkeit der Dimension n mit holomorph-projektiver Struktur. Dann gilt:

1. *Das Tangentialbündel $T\widetilde{X}$ der universellen Überlagerung $\widetilde{X}$ von X ist global erzeugt und für eine beliebige kompakte Untermannigfaltigkeit $Y \subset \widetilde{X}$ ist die Einschränkung $T\widetilde{X}|_Y$ ampel.*
2. *Es sei S eine komplexe Untermannigfaltigkeit von X, die in einer einfach zusammenhängenden offenen Menge $U \subset X$ enthalten ist. Dann ist das Normalenbündel $N_{S\setminus X}$ von S in X sehr ampel.*
3. *Falls S einfach zusammenhängend ist, so ist das Normalenbündel $N_{S\setminus X}$ sehr ampel.*
4. *Ist X kompakt und einfach zusammenhängend, so ist X isomorph zu $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ mit der natürlichen projektiven Struktur.*

Beweis:
Wir wählen eine Karte (U_0, ϕ_0) gemäß der obigen Definition. Zu einem Punkt $P \in X$ wählen wir eine Kette von Karten

$$(U_1, \phi_1), ..., (U_m, \phi_m),$$

für die gilt

$$U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset, \quad i = 1, ..., m.$$

Da X eine holomorph-projektive Struktur hat, gibt es projektive Transformationen $f_1, ..., f_m \in PGL(n+1, \mathbf{C})$, so daß gilt

$$\begin{aligned} \phi_0 &= f_1 \circ \phi_1 \text{ auf } U_0 \cap U_1 \\ f_1 \circ \phi_1 &= f_2 \circ \phi_2 \text{ auf } U_1 \cap U_2 \\ \vdots \;&\vdots\; \vdots \\ f_{m-1} \circ \phi_{m-1} &= f_m \circ \phi_m \text{ auf } U_{m-1} \cap U_m. \end{aligned}$$

Nun definieren wir:

$$\phi(P) := f_m(\phi_m(P)).$$

Da $\phi(P)$ von der Wahl der Kette $U_1, ..., U_m$ abhängt, ist ϕ keine eindeutige Funktion. Wenn X jedoch einfach zusammenhängend ist, ergibt sich eine holomorphe Immersion

$$\phi : X \hookrightarrow \mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}.$$

Falls X nicht einfach zusammenhängend ist, erhalten wir zumindest für die universelle Überlagerung $\widetilde{X}$ von X eine Immersion.

1. Da das Tangentialbündel von $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ global erzeugt ist, gilt dies auch für das Tangentialbündel $T\widetilde{X}$ von $\widetilde{X}$.
   Für eine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit $Y \subset \widetilde{X}$ erhalten wir einen Isomorphismus
   $$T\widetilde{X}|_Y \cong T\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}|_{\phi(Y)}$$
   und somit ist $T\widetilde{X}|_Y$ ampel.

2. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, daß $U \subset X$ eine einfach zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit mit holomorph-projektiver Struktur ist und ϕ eine Immersion
   $$\phi : U \hookrightarrow \mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$$
   liefert.

3. Hierzu wählen wir eine einfach zusammenhängende tubulare Umgebung U von S.

4. In diesem Fall ist ϕ ein Isomorphismus.

$\blacksquare$

3.3 Bemerkung
Holomorph-projektive Strukturen sind eine Verallgemeinerung von holomorph-affinen Strukturen. Die Existenz einer projektiven Struktur kann als Integrabilität eines verallgemeinerten Zusammenhanges, ein sogenannter projektiver Zusammenhang, formuliert werden. Der Teil 4 des obigen Satzes gilt auch unter schwächeren Voraussetzungen, es genügt die Existenz eines projektiven Zusammenhanges (vgl. [KO80] und [KW83]).

3.4 Bemerkung
Es sei X eine n-dimensionale kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit und $U \subset X$ die Vereinigung der tubularen Geraden in X. Ist U nicht leer, so folgt aus Lemma 2.1 (Seite 29), daß U eine offene Menge mit holomorph-projektiver Struktur enthält.
Wird X von tubularen Geraden überdeckt, so folgt aus Satz 3.2 (Seite 33)

das $X \cong \mathbf{P}^n\mathbf{C}$ ist oder X nicht einfach zusammenhängend ist. Umgekehrt gilt:
Ist $L \subset X$ eine Gerade und U eine offene Umgebung von L mit holomorph-projektiver Struktur, so ist L eine tubulare Gerade.

3.5 Beispiele

3.5.1 Twistorräume konform-flacher Mannigfaltigkeiten. Es sei M eine reelle 4-dimensionale konform-flache Mannigfaltigkeit und $\pi_M : X \to M$ der dazu assoziierte Twistorraum. Die Abbildung π_M hängt nur von der konformen Klasse der Metrik ab (siehe [AHS78]).
Wir betrachten zunächst den Twistorraum $\pi_{S^4} : \mathbf{P}^3\mathbf{C} \to S^4$. Die Mannigfaltigkeit S^4 ist konform-flach. Daher können wir eine offene Überdeckung $\bigcup U_i = M$ von M mit Diffeomorphismen $f_i : U_i \to V$ auf eine offene Menge $V \subset S^4$ finden, so daß wir biholomorphe Abbildungen $\phi_i : \pi_M^{-1}(U_i) \to \pi_{S^4}^{-1}(V)$ erhalten, für die gilt $\pi_{S^4} \circ \phi_i = f_i \circ \pi_M$.
Da die Fasern von π_{S^4} tubulare Geraden in $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$ sind, erhalten wir ebenfalls tubulare Geraden in X.

3.5.2 Nichttubulare Geraden. Die Mannigfaltigkeit $X = \mathbf{P}(T\mathbf{P}^2\mathbf{C})$ ist der Twistorraum über $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ und enthält daher viele Geraden. Wir wollen zunächst annehmen, daß $L \subset X$ eine tubulare Gerade ist. Da X homogen ist, würde X dann von tubularen Geraden überdeckt werden. Mit Lemma 2.2 auf Seite 32 erhält man eine holomorph-projektive Struktur auf X. Da X einfach zusammenhängend ist folgt mit dem Satz 3.2, daß X biholomorph zu $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$ ist. Da dies nicht sein kann sind alle Geraden in X nichttubular.

4 Tubulare Geraden und der Weyl-Tensor

Nun wollen wir uns der konformen Struktur auf dem Modulraum der Geraden zuwenden. Wir erhalten nun eine weitere Möglichkeit zu testen, ob die Geraden in einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit tubular sind.

Es sei X eine dreidimensionale komplexe Manngfaltigkeit mit Geraden. Dann ist

$$
\begin{array}{ccccc}
X \times W \supset & Z & \xrightarrow{\mu} & W \\
& \nu \downarrow & & \\
& X & &
\end{array}
$$

die vollständige Familie der Geraden (siehe I.2, Seite 2). Wie wir bereits in I.2.7 (Seite 13) gesehen haben, induzieren die Geraden eine holomorphe konforme Struktur auf dem Modulraum der Geraden, gegeben durch eine Bilinearform

$$
\begin{aligned}
g : TW \times TW &\rightarrow \mathcal{H}om\left(\bigwedge^2 \mathcal{F}_-, \bigwedge^2 \mathcal{F}_+\right) \\
g(h,k)(x \wedge y) &= \frac{1}{2}\left(h(x) \wedge k(y) + k(x) \wedge h(y)\right),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_- &:= \mu_*\left(N^\vee \otimes \mathcal{L}\right) \\
\text{und } \mathcal{F}_+ &:= \mu_* \mathcal{L}
\end{aligned}
$$

ist.

Lokal besitzt $\mathcal{H} := \mathcal{H}om\left(\bigwedge^2 \mathcal{F}_-, \bigwedge^2 \mathcal{F}_+\right)$ einen flachen holomorphen Zusammenhang D. Dann gibt es genau einen torsionsfreien holomorphen Zusammenhang ∇ auf TW, das heißt

$$
\begin{aligned}
\nabla_v w - \nabla_w v &= [v,w], \\
Dg(v,w) &= g(\nabla v, w) + g(v, \nabla w)
\end{aligned}
$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
2g(\nabla_u v, w) &= D_u\left(g(v,w)\right) + D_v\left(g(u,w)\right) - D_w\left(g(u,v)\right) \\
&\quad + g\left([u,v], w\right) - g\left([v,w], u\right) - g\left([u,w], v\right).
\end{aligned}
$$

Lokal können wir stets annehmen, daß $\mathcal{H} \cong \mathcal{O}_W$ und $D = d$ ist. Dann ist der Krümmungstensor F durch $F := \nabla\nabla$ gegeben und es gilt

$$F(v,w)x = \nabla_v \nabla_w x - \nabla_w \nabla_v x - \nabla_{[v,w]} x.$$

Ist $e_1, ..., e_4$ eine Basis von TW und $e^1, ..., e^4$ die dazu duale Basis, dann ist der Ricci-Tensor durch

$$R(w) := \sum_i F(e_1, w)e^i$$

gegeben. Der Weyl-Tensor W_F ist durch

$$W_F := F - \frac{R \owedge Id}{2} + \frac{tr(R) Id \owedge Id}{12}$$

definiert und beschreibt den invarianten Anteil der Krümmungsform unter konformen Abbildungen (siehe [Bes87] Kap. 1.G Def. 1.116 Seite 48). Dabei ist das $\owedge$-Produkt wie folgt definiert. Sind K und L selbstadjungierte Abbildungen bezüglich g, so ist

$$\begin{array}{rcl} K \owedge L : \bigwedge^2 TW & \to & \bigwedge^2 TW \\ x \wedge y & \mapsto & K(x) \wedge L(y) + L(x) \wedge K(y). \end{array}$$

Das Verschwinden des Weyl-Tensors ist äquivalent dazu, daß die Mannigfaltigkeit im holomorphen Sinne konform-flach ist (siehe [Ger62], Seite 188). Auf vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten läßt sich der Weyl-Tensor einfacher berechnen. Dann induziert der Hodge-$*$ Operator einen Endomorphismus von Ω^2_M und es gilt $*^2 = -1$. Somit zerfällt Ω^2_M in eine direkte Summe $\Omega^2_M = \Lambda_+ \oplus \Lambda_-$, die gerade den $+1$ und -1 Eigenräumen von $*$ entsprechen. Der Riemannsche-Krümmungstensor hat bezüglich dieser Zerlegung die Blockgestalt

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix},$$

wobei $B \in Hom(\Lambda_-, \Lambda_+)$, $A \in End\Lambda_+$ und $C \in End\Lambda_-$ ist. Mit den Bezeichnungen $W_+ := A - tr(A)Id$ und $W_- := C - tr(C)$ gilt für den Weyl-Tensor $W_F = W_+ + W_-$. Siehe dazu [AHS78].

4.1 Beispiel
In $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$ *werden die Geraden durch die Grassmann-Mannigfaltigkeit* $Gr(2, 4)$ *parametrisiert. Da diese Mannigfaltigkeit konform-flach ist, verschwindet der Weyl-Tensor auf* $Gr(2, 4)$.

4.2 Bemerkung
Es sei X eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, $L \subset X$ eine Gerade, M der Parameterraum der Geraden in X und $w \in W$ der zu L korrespondierende

Punkt in W. Falls die formale Umgebung von L isomorph zu der formalen Umgebung einer Geraden in $\mathbf{P}^3\mathbf{C}$ ist, so verschwindet der Weyl-Tensor im Punkt $w \in W$. Wenn der Weyl-Tensor in einem Punkt des Parameterraums nicht verschwindet, so kann die korrespondierende Gerade nicht tubular sein.

Nun wollen wir nochmal zeigen, daß die Geraden in $\mathbf{P}\left(T\mathbf{P}^2\mathbf{C}\right)$ nicht tubular sind.

4.3 Definition
Die Mannigfaltigkeit $F(1,2) \subset \mathbf{P}^2\mathbf{C} \times \left(\mathbf{P}^2\mathbf{C}\right)^\vee$ *ist die Menge der Paare* $(m,l) \in \mathbf{P}^2\mathbf{C} \times \left(\mathbf{P}^2\mathbf{C}\right)^\vee$ *für die gilt* $m \in l$.

4.4 Bemerkung
Sind $\left([X_0 : X_1 : X_2], [Y_0 : Y_1 : Y_2] \in \mathbf{P}^2\mathbf{C} \times \left(\mathbf{P}^2\mathbf{C}\right)^\vee\right)$ homogene Koordinaten, so ist $F(1,2) \subset \mathbf{P}^2\mathbf{C} \times \left(\mathbf{P}^2\mathbf{C}\right)^\vee$ durch die Gleichung

$$X_0Y_0 + X_1Y_1 + X_2Y_2 = 0$$

gegeben.
Nun geben wir einen Isomorphismus $\phi : F(1,2) \stackrel{\cong}{\to} \mathbf{P}\left(T\mathbf{P}^2\mathbf{C}(-2)\right)$ in lokalen Koordinaten an. Durch die Projektion

$$\begin{array}{rcl} pr_1 : F(1,2) & \to & \mathbf{P}^2\mathbf{C} \\ [X_0 : X_1 : X_2], [Y_0 : Y_1 : Y_2] & \mapsto & [X_0 : X_1 : X_2] \end{array}$$

erhalten wir ein holomorphes $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel über $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$. Für $i = 0,1,2$ seien $U_i \subset \mathbf{P}^2\mathbf{C}$ die durch $X_i \neq 0$ gegebenen Standardkarten mit den lokalen Koordinaten

$$\begin{array}{l} u_0 := \dfrac{X_1}{X_0},\ v_0 := \dfrac{X_2}{X_0} \quad \text{in } U_0, \\ u_1 := \dfrac{X_0}{X_1},\ v_0 := \dfrac{X_2}{X_1} \quad \text{in } U_1, \\ u_2 := \dfrac{X_0}{X_2},\ v_0 := \dfrac{X_1}{X_2} \quad \text{in } U_2. \end{array}$$

Die Einschränkungen $F(1,2)|_{pr_1^{-1}(U_i)} \cong U_i \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} \subset U_i \times \mathbf{P}^2\mathbf{C}$ sind durch die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} Y_0 + u_0 \cdot Y_1 + v_0 \cdot Y_2 = 0 & \text{über } U_0, \\ u_1 \cdot Y_0 + Y_1 + v_1 \cdot Y_2 = 0 & \text{über } U_1, \\ u_2 \cdot Y_0 + v_2 \cdot Y_1 + Y_2 = 0 & \text{über } U_2 \end{array}$$

gegeben. Der gesuchte Isomorphismus hat dann die lokalen Ausdrücke

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} &\to \mathbf{P}\left(T\mathbf{P}^2\mathbf{C}(-2)\right) \\ (u_0, v_0), [a_0 : b_0] &\mapsto (u_0, v_0), [u_0 \cdot b_0 - v_0 \cdot a_0 : -b_0 : a_0] \end{aligned}$$

über U_0,

$$\begin{aligned} \phi_1 : U_1 \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} &\to \mathbf{P}\left(T\mathbf{P}^2\mathbf{C}(-2)\right) \\ (u_1, v_1), [a_1 : b_1] &\mapsto (u_1, v_1), [b_1 : -u_1 \cdot b_1 + v_1 \cdot a_1 : -a_1] \end{aligned}$$

über U_1 und

$$\begin{aligned} \phi_2 : U_2 \times \mathbf{P}^1\mathbf{C} &\to \mathbf{P}\left(T\mathbf{P}^2\mathbf{C}(-2)\right) \\ (u_2, v_2), [a_2 : b_2] &\mapsto (u_2, v_2), [-b_2 : a_2 : -v_2 \cdot a_2 + u_2 \cdot b_2] \end{aligned}$$

über U_2.

Für den Parameterraum M der Geraden in $F(1,2)$ gilt

$$M \cong \mathbf{P}^2\mathbf{C} \times \mathbf{P}^2\mathbf{C} \setminus F(1,2)$$

(Siehe [AHS78] Example 3 auf Seite 438).

Nun wollen wir zeigen, daß der Weyl-Tensor auf M in mindestens einem Punkt nicht verschwindet. Dazu beschreiben wir M als symmetrischen Raum. Die Operation von $SL_3(\mathbf{C})$ auf $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ induziert eine transitive Operation auf M. Durch die Einbettung

$$\begin{aligned} GL_2(\mathbf{C}) &\hookrightarrow SL_3(\mathbf{C}) \\ h &\mapsto \begin{pmatrix} (\det h)^{-1} & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \end{aligned}$$

operiert $GL_2(\mathbf{C})$ auf M und ist gerade die Isotropiegruppe des Punktes $([1:0:0], [1:0:0])$. Somit ergibt sich M als homogener Raum mit

$$M \cong SL_3(\mathbf{C}) / GL_2(\mathbf{C}) .$$

Darüberhinaus ist M ein symmetrischer Raum, denn $GL_2(\mathbf{C})$ ist gerade die Fixgruppe der Involution $s \in \mathrm{Aut}(SL_3(\mathbf{C}))$, die durch Konjugation mit der Matrix $\mathrm{diag}(-1,1,1)$ gegeben ist. Daher gilt für die Lie-Algebren $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ und $\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ von $SL_3(\mathbf{C})$ und $GL_2(\mathbf{C})$

$$\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C}) = \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C}) \oplus \mathfrak{m}$$

und

1. $\mathfrak{m}$ ist der Eigenraum von s zum Eigenwert -1
2. $[\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C}), \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$
3. $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$
4. Die Zerlegung ist orthogonal bezüglich der Killing-Form von $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$.

Siehe dazu [KN69] Kap. XI.2.

Die Krümmungsform F hat in symmetrischen Räumen eine sehr einfache Form. Es gilt:

$$F(X,Y)Z = -\left[[X,Y]\,,Z\right].$$

Siehe dazu [KN69] Kap. XI.3.

Nun können wir eine Basis für den Tangentialraum $T_pM \cong \mathfrak{m}$ im Punkt $p = ([1:0:0]\,,[1:0:0])$ angeben. Die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ entspricht den spurlosen komplexen 3×3-Matrizen und $\mathfrak{gl}_2(\mathbf{C})$ entspricht den komplexen 2×2-Matrizen. Die oben betrachtete Einbettung von $GL_3(\mathbf{C})$ in $SL_2(\mathbf{C})$ induziert die Einbettung

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{gl}_2(\mathbf{C}) & \hookrightarrow & \mathfrak{sl}_3(\mathbf{C}) \\ A & \mapsto & \begin{pmatrix} -Sp(A) & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \end{array}$$

Somit können wir

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ e_3 & = & e_1^t \\ e_4 & = & e_2^t \end{array}$$

als Basis vonT_pM wählen. Bezüglich der Killing-Form von $\mathfrak{sl}_3(\mathbf{C})$ ist $(e^1, e^2, e^3, e^4) = (e_3, e_4, e_1, e_2)$ die zu (e_1, e_2, e_3, e_4) duale Basis. Da die Krümmungsform F durch

$$F(X,Y)Z = -\left[[X,Y]\,,Z\right]$$

gegeben ist, erhalten wir für die Koeeffizienten $F_{ij} = -[e_i, e_j]$ von F

$$\begin{aligned}
F_{ii} &= 0, \\
F_{12} &= 0, \\
F_{34} &= 0, \\
F_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
F_{24} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
F_{14} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
F_{23} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die übrigen Koeffizienten ergeben sich aus $F_{ij} = -F_{ji}$.

Bezüglich der Basis $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4$ hat der Hodge-$*$ Operator die Gestalt:

$$\begin{aligned}
e_1 \wedge e_2 &\mapsto e_1 \wedge e_2 \\
e_3 \wedge e_4 &\mapsto e_3 \wedge e_4 \\
e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 &\mapsto e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 \\
e_1 \wedge e_4 &\mapsto -e_1 \wedge e_4 \\
e_2 \wedge e_3 &\mapsto -e_2 \wedge e_3 \\
e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4 &\mapsto e_2 \wedge e_4 - e_1 \wedge e_3
\end{aligned}$$

Berechnen wir den Riemannschen-Krümmungstensor bezüglich dieser Basis mittels $(e^i \wedge e^j, Re_k \wedge e_l) = (e^i, F_{kl} e^j)$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix des Krümmungstensors hat bezüglich der Basen
$e_1 \wedge e_2, e_3 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4$ von Λ_+ und
$e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4$ von Λ_- die Form

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & * & \\ 0 & 0 & 3 & & & \\ \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & * & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Somit gilt für den Weyl-Tensor

$$W_F = A - \frac{1}{3} tr(A) + C - \frac{1}{3} tr(C) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W_F = W_+, \quad W_- = 0.$$

Da $W_F \neq 0$ ist, sind die Geraden in $F(1,2)$ nicht tubular.

Kapitel IV

Die algebraische Reduktion

In diesem Kapitel wollen wir das Konzept der algebraischen Reduktion vorstellen. Grob gesagt, ordnet man dabei einer kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit ein algebraisches Modell zu. Die algebraische Reduktion ist ein wichtiges Werkzeug bei der bimeromorphen Klassifikation kompakter, komplexer Mannigfaltigkeiten.
Zuletzt erhalten wir mit der algebraischen Reduktion eine grobe Klassifikation von kompakten, komplexen dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Geraden.

1 Die algebraische Reduktion einer komplexen Mannigfaltigkeit

Es sei $S \subset \mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ eine projektive Varietät. Dann ist der Körper $\mathcal{K}(X)$ der rationalen Funktionen auf S eine endliche Körpererweiterung über dem Körper $\mathbf{C}$ und der Transzendenzgrad dieser Erweiterung stimmt mit der Dimension von S überein. (Vgl. dazu [AS71], [Rem56], [Sie55] und [Thi54].) Für eine beliebige kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit X ist der Körper $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf X ebenfalls eine endliche Erweiterung über $\mathbf{C}$, jedoch kann der Transzendenzgrad kleiner als die Dimension sein. Wie wir aus den Beispielen 3 auf Seite 14 leicht ableiten können, kann der Transzendenzgrad jeden Wert, der kleiner als die Dimension ist, erreichen.

1.1 Definition
Der Transzendenzgrad des Körpers $\mathcal{M}(X)$ der meromorphen Funktionen auf einer komplexen Mannigfaltigkeit X heißt algebraische Dimension von X und wird mit $a(X)$ bezeichnet.

Die algebraische Dimension kann auch in folgender Weise charakterisiert werden.
Es sei $\mathcal{L} \to X$ ein holomorphes Geradenbündel. Falls $H^0(X, \mathcal{L}) \neq 0$ ist, wird durch die Wahl einer Basis von $H^0(X, \mathcal{L})$ eine meromorphe Abbildung

$$\Phi(\mathcal{L}) : X \to \mathbf{P}^{\mathrm{N}}\mathbf{C}$$

induziert. Dabei ist $N = \dim \mathrm{H}^0\left(X, \mathcal{L}\right) - 1$.

1.2 Definition
Die durch

$$\kappa(X, \mathcal{L}) = \begin{cases} \max_{m \in \mathbf{N}} \left\{\dim \Phi\left(\mathcal{L}^{\otimes m}\right)(X)\right\} & , \textit{ falls } \dim \mathrm{H}^0\left(X, \mathcal{L}^{\otimes m}\right) \geq 1 \\ & \quad \textit{für } m >> 0 \\ -\infty & , \textit{ falls } \mathrm{H}^0\left(X, \mathcal{L}^{\otimes m}\right) = 0 \\ & \quad \textit{für alle } m \in \mathbf{N} \end{cases}$$

definierte Zahl, heißt G-Dimension des Geradenbündels $\mathcal{L}$.

1.3 Bemerkungen

1.3.1 Kodaira-Dimension. Die Kodaira-Dimension einer komplexen Mannigfaltigkeit ist gerade die G-Dimension des kanonischen Bündels.

1.3.2 Die algebraische Dimension von X ist genau dann Null, wenn die G-Dimension aller Geradenbündel den Wert $-\infty$ hat. Anderenfalls stimmt sie mit der größten vorkommenden G-Dimension von Geradenbündeln auf X überein.

Wir wollen nun einer komplexen Mannigfaltigkeit ein "algebraisches Modell" zuordnen.

1.4 Satz
Es sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n und von algebraischer Dimension k. Dann existiert folgendes kommutierendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X \arrow[rr, "\psi"'] & & S \end{tikzcd}$$

mit den Eigenschaften

1. *S ist eine glatte, kompakte projektive Mannigfaltigkeit.*
2. *ψ ist eine meromorphe Abbildung, f und g sind holomorphe Abbildungen.*
3. *Die Abbildung f entspricht einer Folge von Aufblasungen von X zu $\widetilde{X}$.*
4. *Die Abbildung ψ induziert einen Isomorphismus $\mathcal{M}(X) \cong K(S)$.*
5. *Die Abbildung g ist eine eigentliche, surjektive Abbildung mit zusammenhängenden Fasern.*

Beweis: Siehe [Uen75] Chapter I §3 Theorem 3.1 und Proposition 3.4. (Seite 26).

1.5 Definition
Eine surjektive, holomorphe Abbildung $g : \widetilde{X} \to S$ heißt algebraische Reduktion der Mannigfaltigkeit X, falls die in dem obigen Satz beschriebenen Eigenschaften gelten.

Die algebraische Reduktion ist eindeutig, bis auf bimeromorphe Äquivalenz. D.h. falls $g_1 : \widetilde{X_1} \to S$ und $g_2 : \widetilde{X_2} \to S$ algebraische Reduktionen von X sind, dann existieren bimeromorphe Abbildungen

$$\begin{aligned} h : S_1 &\to S_2 \\ \widetilde{h} : \widetilde{X_1} &\to \widetilde{S_2} \end{aligned}$$

so daß gilt: $g_2 \circ \widetilde{h} = h \circ g_1$.

Für Untermannigfaltigkeiten komplexer Mannigfaltigkeiten hat man die folgende Charakterisierung.

1.6 Satz
Es sei S eine Untermannigfaltigkeit der komplexen Mannigfaltigkeit X. Dann gilt

$$a(X) \leq a(S) + kodim(S).$$

Beweis: Siehe [Uen75] Chapter I §3 Theorem 3.8. (Seite 27).

Zur bimeromophem Klassifikation komplexer Mannigfaltigkeiten studiert man u.a. die Fasern der algebraischen Reduktion . Dazu ist der folgende Satz ein wichtiger Schlüssel.

1.7 Satz
Es sei $g : \widetilde{X} \to S$ die algebraische Reduktion einer komplexen Mannigfaltigkeit X und $\mathcal{L} \to \widetilde{X}$ ein holomorphes Geradenbündel. Dann existiert eine Zariski-dichte Menge $U \subset X$, so daß mit $\mathcal{L}_s := \mathcal{L}|_{g^{-1}(s)}$ und $\widetilde{X}_s := g^{-1}(s)$ für alle $s \in U$ gilt:

$$\kappa(\mathcal{L}_s, \widetilde{X}_s) \leq 0.$$

Beweis: Siehe [Uen75] Chapter V. §12 Theorem 12.1 (Seite 143).

Dazu gibt es das später häufig benutzte Korollar.

1.8 Korollar

1. *Falls $a(X) = \dim X - 1$ ist, so sind die Fasern der algebraischen Reduktion $g : \widetilde{X} \to S$ über einer offenen, Zariski-dichten Menge $U \subset X$ elliptische Kurven.*

2. *Falls $a(X) = \dim X - 2$ ist, so gilt für die Fasern der algebraischen Reduktion $g : \widetilde{X} \to S$ über einer offenen, Zariski-dichten Menge $U \subset X$*

$$\kappa(\widetilde{X}_s) \leq 0, \quad \widetilde{X}_s := g^{-1}(s) \text{ für } s \in U$$

und keine Faser über U ist isomorph zu $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$.

Beweis: Siehe [Uen75] Chapter V. §12 Theorem 12.4 (Seite 145).

Weitere Eigenschaften der Fasern der algebraischen Reduktion finden sich in [Uen75] und [Uen81].

2 Eine grobe Klassifikation dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten mit Geraden

Wir wollen die bisherige Diskussion zusammenfassen indem wir einen groben Überblick über dreidimensionale, kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten mit Geraden geben.

Bis auf das Verschwinden der holomorphen Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten mit Geraden wissen wir bisher nur wenig über die globale Struktur. Die algebraische Reduktion verschafft uns ein wenig mehr Informationen.

Es sei X eine kompakte, komplexe dreidimensionale Mannigfaltigkeit und $L \subset X$ eine Gerade. Die Beispiele in Kapitel I.3 auf Seite 14 haben gezeigt, daß die algebraische Dimension von X alle Werte von 0 bis 3 annehmen kann. Im einzelnen ergibt sich folgendes Bild.

Falls die algebraische Dimension $a(X) = 3$ ist und L eine tubulare Gerade ist, dann ist X unirational (Satz III.2.3, Seite 32).

Falls $a(X) = 2$ ist, dann hat man (eventuell nach Aufblasen) einen Morphismus $\pi : X \to S$ auf eine glatte projektive Fläche (Satz 1.4, Seite 44). Da wir injektive Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{H}^0\left(S, K_S^{\otimes 2}\right) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^0\left(X, K_X^{\otimes 2}\right) \\ \mathrm{H}^0\left(S, \Omega_S^1\right) & \hookrightarrow & \mathrm{H}^0\left(X, \Omega_X^1\right) \end{array}$$

haben, folgt aus I.2.1 (Seite 3), daß

$$\mathrm{H}^0\left(S, K_S^{\otimes 2}\right) = \mathrm{H}^0\left(S, \Omega_S^1\right) = 0$$

ist und somit ist S nach dem Satz von Castelnuovo-Enriques eine rationale Fläche.
Insgesamt erhalten wir einen eigentlichen Morphismus $\pi : X \to S$ auf eine rationale Fläche mit zusammenhängenden Fasern und elliptische Kurven als generische Fasern (Korollar 1.8 auf Seite 46).

Falls $a(X) = 1$ ist, können wir, eventuell nach Aufblasen von X annehmen, daß die algebraische Reduktion einen Morphismus $\pi : X \to C$ auf eine glatte Kurve C liefert. Da die Geraden nicht alle in den Fasern von π enthalten sein können, folgt für eine generische Gerade L, daß $\pi(L) = C$ ist. Daher ist C eine rationale Kurve.
Korollar 1.8 (Seite 46) besagt, daß für eine generische Faser F von π gilt:

$$\kappa(F) \leq 0.$$

Die folgende Tabelle enthält die minimalen Modelle der möglichen glatten Fasern. Dies ergibt sich aus der Kodaira-Enriques-Klassifikation von Flächen (siehe [BPV84]: Tabelle 10 auf Seite 188). Die Einschränkung im Fall 8. findet sich in [Uen75] (Chapt. V §12, Remark 12.5 auf Seite 146).

Kodaira-Dimension	Klasse der Fläche
$\kappa(F) = 0$	1. Enriques Flächen 2. Hyperelliptische Flächen 3. Kodaira-Flächen 4. K3 Flächen 5. Komplexe Tori
$\kappa(F) = -\infty$	6. Flächen der Klasse VII 7. $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ 8. Regelflächen über einer Kurve vom Geschlecht $g \leq 1$

Wir wollen uns nun den Mannigfaltigkeiten der algebraischen Dimension zwei zuwenden.

Geraden in elliptischen Faserungen

Kapitel V

Elliptische Hauptfaserbündel mit Geraden

In diesem Kapitel werden wir diejenigen elliptischen Hauptfaserbündel über Flächen beschreiben, die Geraden enthalten.

1 Elliptische Hauptfaserbündel

Dieser Abschnitt ist im wesentlichen eine Verallgemeinerung von [BPV84] V.5. Es sei $\Lambda \subset \mathbf{C}$ ein Gitter, erzeugt durch die Zahlen 1 und λ mit $Im(\lambda) > 0$. Dann ist $E \cong \mathbf{C}/\Lambda$ eine elliptische Kurve. Die Gruppe der Automorphismen von E bezeichnen wir mit $A(E)$. Nachdem wir einen Punkt $0 \in E$ fixieren, können wir die Automorphismengruppe $A(E)$ näher beschreiben. Die Gruppe E operiert auf sich selbst durch Translationen und der Quotient $A(E)/E$ entspricht denjenigen Automorphismen, die den Punkt $0 \in E$ stabilisieren. Es gilt:

$$A(E)/E \cong \begin{cases} \mathbf{Z}_4 & \text{falls } j(E) = 1728 \\ \mathbf{Z}_6 & \text{falls } j(E) = 0 \\ \mathbf{Z}_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $A(E) \cong E \times A(E)/E$ (semidirektes Produkt).

Zu einer kompakten komplexen Mannigfaltigkeit S sei $\mathcal{E}_S$ die Garbe der Keime der holomorphen Abbildungen $S \to E$ und $\mathcal{A}(E)_S$ sei die Garbe der

Keime der holomorphen Abbildungen $S \to A(E)$.
Holomorphe Faserbündel mit Basis S und Faser E werden durch $\mathrm{H}^1(S, \mathcal{A}(E)_S)$ parametrisiert.

1.1 Definition
Diejenigen Faserbündel, die den Elementen von $\mathrm{H}^1(B, \mathcal{E}_S) \subset \mathrm{H}^1(S, \mathcal{A}(E)_S)$ *entsprechen, heißen elliptische Hauptfaserbündel.*

Ist $\pi : X \to S$ ein elliptisches Hauptfaserbündel, so wollen wir dieses im folgenden mit dem korrespondierenden Element $\xi \in \mathrm{H}^1(S, \mathcal{E}_S)$ identifizieren.

Ausgehend von der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \Lambda \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{E}_S \to 0$$

erhalten wir eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$.. \to \mathrm{H}^1(S, \mathcal{O}_S) \to \mathrm{H}^1(S, \mathcal{E}_S) \xrightarrow{c^z} \mathrm{H}^2(S, \Lambda) \to ..$$

1.2 Definition
Ist $\xi \in \mathrm{H}^1(S, \mathcal{E}_S)$ *ein elliptisches Hauptfaserbündel, so nennen wir das Bild* $c^z(\xi) \in \mathrm{H}^2(S, \Lambda)$ *charakteristische Klasse von* ξ.

1.3 Bemerkungen

1.3.1 Charakteristische Klassen und Chernklassen. Wir wollen nun einer charakteristischen Klasse eines elliptischen Hauptfaserbündels ein Paar von Chernklassen zuordnen. Diese Zuordnung hängt allerdings von der Wahl einer Basis für das Gitter Λ ab. Trotzdem wird uns diese Konstruktion noch sehr nützlich sein.

Es sei (λ_1, λ_2) eine Basis von Λ. Diese induziert einen Isomorphismus $\mathrm{H}^2(S, \Lambda) \cong \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z}) \oplus \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z})$. Bezüglich dieses Isomorphismus können wir die charakteristische Klasse $c^z(\xi)$ als Tupel

$$(c_1^z(\xi), c_2^z(\xi)) \in \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z}) \oplus \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z})$$

schreiben. Zu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbf{Z})$ ist auch $(a \cdot \lambda_1 + b \cdot \lambda_2,\ c \cdot \lambda_1 + d \cdot \lambda_2)$ eine Basis von Λ und die induzierte Zerlegung der charakteristischen Klasse ist nun

$$(a \cdot c_1^z(\xi) + b \cdot c_2^z(\xi),\ c \cdot c_1^z(\xi) + d \cdot c_2^z(\xi)) .$$

Dies läßt sich auch geometrisch verstehen. Das Bündel $\pi : X \to S$ ist durch holomorphe Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to E$ gegeben. Die Wahl einer speziellen Basis von Λ induziert einen Diffeomorphismus $E \cong S^1 \times S^1$ und dadurch erhalten wir differenzierbare Übergangsfunktionen $\left(g^1_{\alpha\beta}, g^2_{\alpha\beta}\right)$ mit $g^i_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to S^1$. Das bedeutet, das Bündel $\pi : X \to S$ entspricht einem Faserprodukt $X \cong X^1 \times_S X^1$ von S^1-Bündeln $X^1 \to S$ und $X^2 \to S$ über S.

Bezeichnet man mit $\mathbf{C}_S$ das triviale Geradenbündel $\mathbf{C} \times S$ über S, so erhalten wir durch

$$\mathbf{C}_S \otimes_S X^1 =: \mathcal{L}^1 \text{ und } \mathbf{C}_S \otimes_S X^2 =: \mathcal{L}^2$$

zwei hermitesche Geradenbündel auf S. Für die Chernklassen $c_1(\mathcal{L}^1)$ und $c_1(\mathcal{L}^2)$ gilt dann

$$c^z(\xi) = \left(c_1(\mathcal{L}^1), c_1(\mathcal{L}^2)\right)$$

bezüglich der gewählten Basis.

1.3.2 Geradenbündel und elliptische Hauptfaserbündel. Wir wollen nun untersuchen, unter welchen Bedingungen elliptische Hauptfaserbündel durch $\mathbf{C}^*$-Bündel überlagert werden.

Ist (λ_1, λ_2) eine Basis von Λ, so erhalten wir mit

$$\exp(2\pi i \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot n), \; n \in \mathbf{Z}$$

eine Einbettung $\mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{C}^*$ und es gilt $\mathbf{C} / \Lambda \cong \mathbf{C}^* / \mathbf{Z}$. Dies führt auf die exakte Sequenz

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}^*_S \to \mathcal{E}_S \to 0.$$

Nun betrachten wir die Elemente in $\mathrm{H}^1(S, \mathcal{O}^*_S)$ nicht als Isomorphieklassen von holomorphen Geradenbündeln, sondern als Isomorphieklassen von $\mathbf{C}^*$-Hauptfaserbündeln.

Aus der langen Kohomologiesequenz

$$\ldots \to \mathrm{H}^1(S, \mathcal{O}^*_S) \to \mathrm{H}^1(S, \mathcal{E}_S) \xrightarrow{\widetilde{c}} \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z}) \to \ldots$$

ergibt sich, daß ein elliptisches Hauptfaserbündel $\xi \in \mathrm{H}^1(S, \mathcal{E}_S)$ durch ein $\mathbf{C}^*$-Bündel überlagert wird, falls wir eine Basis (λ_1, λ_2) von Λ so wählen können, daß $\widetilde{c}(\xi) = 0$ ist. Dann existiert ein holomorphes Geradenbündel $\mathcal{L} \to S$, so daß ξ sich wie folgt ergibt:

Es sei $\mathcal{L}^* := \mathcal{L} \setminus \{\text{Nullschnitt}\}$ und z die Koordinate einer Faser, die wir mit $\mathbf{C}^*$ identifizieren. Die durch

$$n, z \mapsto \exp(2\pi i \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot n) \cdot z$$

gegebene Operation von $\mathbf{Z}$ auf der Faser ist verträglich mit den Übergangsfunktionen und setzt sich daher auf ganz $\mathcal{L}^*$ fort. Als Quotient $\mathcal{L}^* / \mathbf{Z}$ erhalten wir ein elliptisches Hauptfaserbündel .

Wir wollen nun untersuchen, welche Rolle dabei die charakteristische Klasse eines elliptisches Hauptfaserbündels dabei spielt. Dazu betrachten wir folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathcal{O}_S^* & \longrightarrow & \mathcal{E}_S & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Lambda & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \mathcal{E}_S & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dies induziert die folgenden langen, exakten Sequenzen.

$$\begin{array}{ccccc} \ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1(S, \mathcal{O}_S^*) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(S, \mathcal{E}_S) & \xrightarrow{\widetilde{c}} & \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ldots \longrightarrow \mathrm{H}^1(S, \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(S, \mathcal{E}_S) & \xrightarrow{\widetilde{c^z}} & \mathrm{H}^2(S, \Lambda) \cong \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z}) \oplus \mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z}) \end{array}$$

Ist $c^z(\xi)$ linear abhängig in $\mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z})$, so können wir eine Basis von Λ wählen, daß $c^z(\xi)$ bezüglich dieser Basis die Gestalt $(c, 0)$ besitzt. Dann ist $\widetilde{c}(\xi) = 0$ und das Bündel ξ wird von einem C^*-Bündel überlagert.

1.3.3 Falls $\mathrm{H}^2(S, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ ist, so wird jedes elliptische Hauptfaserbündel durch ein $\mathbf{C}^*$-Bündel überlagert. Für Kurven ist dies stets erfüllt.

2 Elliptische Hauptfaserbündel, die Geraden enthalten

Ist $\pi : X \to S$ ein elliptisches Hauptfaserbündel über einer Fläche S und $L \subset X$ eine Gerade, so ist S eine rationale Fläche (siehe Kapitel 2, Seite 47). Wir setzen außerdem voraus, daß für eine generische Gerade $L \subset X$ das Bild $\pi(L)$ glatt ist. Dann ist mit Korollar I.2.2 (Seite 9)

$$\pi|_L : L \to C := \pi(L)$$

biholomorph.

Der Divisor $X|_L := \pi^{-1}(C)$ ist ein elliptisches Hauptfaserbündel mit Faser E über C mit Schnitt L. Daher ist $X|_L \cong E \times C$ (siehe Bemerkung B.4.3 auf Seite 109). Nun betrachten wir die Normalenbündelsequenz

$$0 \to N_{L \setminus X_L} \to N_{L \setminus X} \to N_{X_L \setminus X}|_L \to 0.$$

Es gilt $N_{L \setminus X_L} \cong \mathcal{O}_L$, $N_{L \setminus X} \cong \mathcal{O}_L(1) \oplus \mathcal{O}_L(1)$ und daher folgt $N_{X_L \setminus X}|_L \cong \mathcal{O}_L(2)$. Da $N_{X_L \setminus X}|_L \cong \pi^* N_{C \setminus S}|_L$ ist, gilt $C^2 = 2$.

Da S eine rationale Fläche ist, folgt aus

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C) \to \mathcal{O}_S(C)|_C \to 0,$$

daß

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^0\left(S, \mathcal{O}_S(C)\right) &= \dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_S(C)|_C\right) + 1 \\ &= \dim \mathrm{H}^0\left(S, \mathcal{O}_S(2)\right) + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ist. Die durch das Linearsystem $|\mathcal{O}_S(C)|$ induzierte Abbildung $\phi : S \to \mathbf{P}^3\mathbf{C}$ ist ein Morphismus, der biholomorph in einer Umgebung von C ist. Da $\phi(S) \subset \mathbf{P}^3\mathbf{C}$ durch eine quadratische Gleichung gegeben ist, gilt entweder $\phi(S) \cong \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ oder $\phi(S)$ entsteht durch die zweite Hirzebruch-Fläche $S_2 := \mathbf{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}\right)$, die längs des exzeptionellen Divisors $E \subset S_2$ abgeblasen wird.

1. Fall: $S = \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$
Die natürlichen Projektionen $p_i : S \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$, $i = 1, 2$ auf den i-ten Faktor ermöglichen es, jedes Geradenbündel in der Form

$$\mathcal{O}_S(a, b) = p_1^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(a) \otimes p_2^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(b)$$

zu schreiben. Für $C \in |\mathcal{O}_S(a, b)|$ mit $C^2 = 2$ folgt

$$C^2 = 2ab = 2, \text{ d.h. } a = b = 1.$$

Die charakteristische Klasse von $\xi = (\pi : X \to S)$ hat bezüglich einer Basis von Λ die Form

$$c^z(\xi) = \left((p_1, p_2), (q_1, q_2)\right), \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Z}.$$

Da $X_C \cong E \times C$ ist, gilt

$$c^z(\xi)|_C = ((0,0),(0,0)) .$$

Daraus folgt

$$p_1 + p_2 = 0 \text{ und } q_1 + q_2 = 0.$$

Somit sind (p_1, p_2) und (q_1, q_2) linear abhängig und wir können eine Basis von Λ finden, so daß $c^z(\xi) = ((0,0),(c,-c))$ ist. Der Raum X wird also durch ein $\mathbf{C}^*$-Bündel der Form $\mathcal{O}_S(c,-c)^*$ überlagert.

Für $X = (\mathcal{O}_S(1,-1))^* / \mathbf{Z}$ können wir die Existenz von Geraden zeigen. Dazu betrachten wir nochmals $\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ wie im Beispiel 3 (Seite 14) beschrieben. Wir haben den folgenden Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus L_1 & \cong & \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \\ {[x]} & \mapsto & \begin{cases} [x_0 : x_1], \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0} & \text{falls } x_0 \neq 0 \\ [x_0 : x_1], \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} & \text{falls } x_1 \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

und es gilt $\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2) \cong (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1))^*$.

Nun betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1))^* \arrow[r, "f"] & (\mathbf{P}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1))^*) \arrow[d, "p_i"] \\ & \mathbf{P}^1\mathbf{C} \end{tikzcd}$$

wobei $p_i,\ i = 1,2$ die Projektionen auf den i-ten Faktor sind. Es gilt:

$$(\mathbf{P}\,(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1))^*) = \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}.$$

Schränken wir die Abbildung f auf die Fasern von p_i ein, so erhalten wir jeweils

- $\mathcal{O}^*_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(-1)$ für $i = 1$

- $\mathcal{O}^*_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1)$ für $i = 2$, da $[x_2 : x_3] = konst.$ ein Unterbündel von $(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1))^*$ ergibt, dessen Projektionen auf die Komponenten biholomorph sind.

Da die faserweise $\mathbf{Z}$-Operation auf $(\mathcal{O}_{S_0}(1,-1))^*$ der in Beispiel 3 (Seite 14), Spezialfall a) beschriebenen Operation auf $\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2)$ entspricht, gibt es in $(\mathcal{O}_{S_0}(1,-1))^* / \mathbf{Z}$ Geraden. Diese sind sogar tubular .

Für beliebiges $c \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ erhalten wir eine c-fache Überlagerungen

$$(\mathcal{O}_S(1,-1))^* \to (\mathcal{O}_S(c,-c))^* .$$

Eine $\mathbf{Z}$-Operation auf $\mathcal{O}_{S_0}(c,-c)^*$ induziert eine Operation von $\mathbf{Z}/c\cdot\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ auf $\mathcal{O}_{S_0}(1,-1)$ und entspricht in $\mathbf{P}^3\mathbf{C} \setminus (L_1 \cup L_2) := X'$ der Operation

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Z}/c\cdot\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \times X' & \to & X' \\ \bar{m}, n, [x] & \mapsto & [\xi^m x_0 : \xi^m x_1 : \alpha^n x_2 : \alpha^n x_3] \end{array}$$

mit einer primitiven c-ten Einheitswurzel ξ. Die Rechnung für die Existenz von Geraden (Beispiel 3 auf Seite 14) in $X'/\mathbf{Z}$ läßt sich leicht modifizieren um zu sehen, daß auch $X'/(\mathbf{Z}/c\cdot\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})$ Geraden enthält.

2.1 Bemerkung
Die Quotientenräume $(\mathcal{O}_S(1,-1))^* / \mathbf{Z}$ waren die ersten bekannten Beispiele für kompakte Twistorräume der algebraischen Dimension zwei (siehe [Pon91]).

2. Fall: $S = S_2$
Wir haben eine natürliche Projektion

$$p : S_2 := \mathbf{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}\right) \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$$

und bezeichnen die Klasse einer Faser mit F und den exzeptionellen Divisor mit E. Effektive Linearsysteme entsprechen dann positiven Linearkombinationen von E und F und es gilt

$$E^2 = -2, \quad E.F = 1 \quad F^2 = 0.$$

Es sei $C \in |\mathcal{O}_{S_2}(a \cdot E + b \cdot F)|$ mit $C^2 = 2$. Daraus folgt $C^2 = -2a^2 + 2ab = 2$, bzw. $a(b-a) = 1$. Daher muß $a = 1$ und $b = 2$ sein. Dies entspricht gerade der Klasse eines Schnittes $\sigma : \mathbf{P}^1\mathbf{C} \to S_2$ und wir können annehmen $C \subset S_2 \setminus E$.

Nun betrachten wir wieder ein elliptisches Hauptfaserbündel $\xi = (\pi : X \to S_2)$ mit charakteristischer Klasse

$$c^z(\xi) = ((p_1, p_2), (q_1, q_2)), \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbf{Z}.$$

Aus $c^z(\xi)|_C = 0$ folgt

$$(E + 2F).(p_1 \cdot E + p_2 \cdot F) = -2p_1 + p_2 + 2p_1 = p_2 = 0.$$

Ebenso rechnet man $q_2 = 0$ nach. Das heißt, $(p_1, 0)$ und $(q_1, 0)$ sind linear abhängig und wir können durch Basiswahl von Λ erreichen, daß $c^z(\xi) = ((p, 0), (0, 0))$ ist. Somit wird X von einem $\mathbf{C}^*$-Bündel der Form $(\mathcal{O}_S(pE))^*$ überlagert.
Da das $\mathbf{C}^*$-Bündel $\mathcal{O}_{S_2}(pE)^*$ über $S_2 \setminus E$ trivial, ist auch das elliptische Hauptfaserbündel

$$\left(\mathcal{O}_{S_2}(pE)^*|_{S_2 \setminus E}\right)/\mathbf{Z}$$

trivial. Nun ist $C := \pi(L)$ in $S_2 \setminus E$ enthalten und $\pi|_L : L \to C$ ist nach Voraussetzung biholomorph. Der durch L gebene Schnitt in X_L läßt sich zu einem Schnitt σ über $S_2 \setminus E$ fortsetzen. Mit $\Sigma := \sigma(S_2 \setminus E)$ erhalten wir $L = \Sigma \cap X_L$ und es gilt $N_{L \setminus X} = N_{L \setminus \Sigma} \oplus N_{L \setminus X_L}$. Da $N_{L \setminus X_L} = \mathcal{O}_L$ ist, kann L keine Gerade sein.

2.2 Bemerkung
Einfach zusammenhängende elliptische Hauptfaserbündel.
Der Raum $X = (\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}}(1, -1))^* /\mathbf{Z}$ ist nicht einfach zusammenhängend. Allgemein gilt, daß ein elliptisches Hauptfaserbündel über einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit B einfach zusammenhängend ist, wenn die charakteristische Klasse einem Paar linear unabhängiger Chernklassen entspricht (vgl. [Höf93] Prop. 11.6 Seite 247). Indem man $S = \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ aufbläst, erhält man leicht einfach zusammenhängende elliptische Hauptfaserbündel mit Geraden.

Kapitel VI

Elliptische Faserungen

Wir wollen nun unsere Untersuchungen auf allgemeinere elliptische Faserungen ausdehnen. Dazu konstruieren wir zu einer bestimmten Klasse elliptischer Faserungen eine Normalform (Weierstraß-Normalform) und beschreiben, wie man daraus weitere elliptische Faserungen erhält.

0.1 Definition
Es sei X eine n dimensionale, kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit, S eine $n-1$ dimensionale Mannigfaltigkeit und

$$\pi : X \to S$$

eine holomorphe Abbildung, deren allgemeine Faser eine glatte elliptische Kurve ist. Dann heißt das Tripel (X, S, π)

1. *elliptische Faserung.*

2. *flache elliptische Faserung, falls π flach ist.*

1 Elliptische Faserungen mit Schnitt und das Weierstraßmodell

1.1 Satz (Mumford, Suominen [MS72])
Es sei $\pi : X \to S$ eine flache elliptische Faserung über einer projektiven Mannigfaltigkeit S mit einem Schnitt $\sigma : S \to X$. Das Bild $\sigma(S) \subset X$ bezeichnen wir mit A. Dann gilt:

1. *Der kanonische Homomorphismus*

$$\mathcal{O}_S \to \pi_* (\mathcal{O}_X)$$

ist ein Isomorphismus.

2. *Die Garbe* $\pi_* (\mathcal{O}_X(nA))$ *ist für* $n > 0$ *lokal frei vom Rang* n.

3. *Die Garbe*

$$R^1_{\pi_*} (\mathcal{O}_X(nA)) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } n > 0 \\ \textit{lokal frei vom Rang } 1, & \textit{falls } n = 0 \end{cases}$$

4. *Für alle* $n \in \mathbf{N}$ *gilt:*

$$R^i_{\pi_*} (\mathcal{O}_X(nA)) = 0, \; \textit{falls } i > 1 \textit{ ist.}$$

5. *Für alle* $i \geq 0$, $s \in S$ *und* $X_s := \pi^{-1}(s)$ *gilt:*

$$\left(R^i_{\pi_*} \mathcal{O}_X(nA)\right)_s \to H^i (X_s, \mathcal{O}_X(nA))$$

ist bijektiv.

Beweis:

1. Dies gilt, da die Fasern zusammenhängend sind.

2. Da alle Fasern Kurven vom arithmetischen Geschlecht 1 sind, gilt :

$$\dim \mathrm{H}^0 (X_s, \mathcal{O}_X(nA)|_{X_s}) = n \text{ für } n > 0.$$

Daher folgt die Behauptung, ebenso wie 5. aus dem Halbstetigkeitssatz von Grauert (siehe [GR84], Chap.10, §5.5 Theorem auf S.211).

3. Für alle Fasern X_s gilt:

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^1 (X_s, \mathcal{O}_X(nA)) &= 0 \text{ für } n > 0, \\ \dim \mathrm{H}^0 (X_s, \mathcal{O}_X|_{X_s}) &= 1. \end{aligned}$$

4. Da die Dimension der Fasern 1 ist, gilt:

$$H^i\left(X_s, \mathcal{O}_X(nA)|_{X_s}\right) = 0 \text{ für } i \geq 2$$

und daher ist $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X(nA) = 0$. ∎

1.2 Bemerkung
Die Garbe $\mathcal{L} := \pi_*\left(\mathcal{O}_X(A)/\mathcal{O}_X\right)$ entspricht gerade dem Normalenbündel $N_{A\backslash X}$ von A in X.

1.3 Korollar

1. *Der kanonische Homomorphismus*

$$\pi_*\mathcal{O}_X(nA) \to \pi_*\left(\mathcal{O}_X(nA)/\mathcal{O}_X((n-1)A)\right) = \mathcal{L}^{\otimes n}$$

ist für $n > 1$ surjektiv.

2. *Die natürliche Injektion $\mathcal{O}_S \to \pi_*\mathcal{O}_X(A)$ ist ein Isomorphismus. Insbesondere gilt:*

$$R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X \cong \pi_*\left(\mathcal{O}_X(A)/\mathcal{O}_X\right).$$

Beweis:

1. Wir betrachten die zu der kurzen exakten Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_X((n-1)A) \to \mathcal{O}_X(nA) \to \mathcal{O}_X(nA)/\mathcal{O}_X((n-1)A) \to 0$$

induzierte lange Sequenz

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}_X((n-1)A) \xrightarrow{i} \pi_*\mathcal{O}_X(nA) \xrightarrow{j} \pi_*\left(\mathcal{O}_X(nA)/\mathcal{O}_X((n-1)A)\right) \xrightarrow{k}$$

$$\xrightarrow{k} R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X((n-1)A) \to R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X(nA) \to \dots .$$

Für $n > 1$ folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 1.1 (Seite 58).

2. Für $n = 1$ erhalten wir

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{i} \pi_*\mathcal{O}_X(A) \xrightarrow{j} \pi_*\left(\mathcal{O}_X(A)/\mathcal{O}_X\right) \xrightarrow{k}$$

$$\xrightarrow{k} R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X \to R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X(A) \to \dots .$$

Aus dem Satz 1.1 (Seite 58) folgt

$$R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X(A) = 0$$

und $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X$ ist lokal frei vom Rang 1. Daher ist die Abbildung k surjektiv und lokal ist der Kern von k ein direkter Summand von $\mathcal{L} = \pi_*(\mathcal{O}_X(A)/\mathcal{O}_X)$. Da $\mathcal{L}$ invertierbar ist, ist der Kern $ker(k) = 0$ und

$$i : \pi_*\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_X(A)$$

ist ein Isomorphismus. ∎

1.4 Definition
Es sei $\pi : X \to S$ eine flache, elliptische Faserung. Dann ist $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X$ ein Geradenbündel auf S und heißt Weierstraßbündel der elliptischen Faserung.

Nun wollen wir zu einer elliptischen Faserung $\pi : X \to S$ mit Schnitt $\sigma : S \to X$ eine geometrische Charakterisierung herleiten.

1.5 Definition
Es sei S ein komplexer Raum der Dimension n, $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf S und

$$\begin{aligned} a &\in \mathrm{H}^0\left(S, (\mathcal{L}^\vee)^{\otimes 4}\right) \setminus \{0\}, \\ b &\in \mathrm{H}^0\left(S, (\mathcal{L}^\vee)^{\otimes 6}\right) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

globale Schnitte.
Es gelte $4 \cdot a^3 + 27 \cdot b^2$ ist nicht identisch null. Zu $\mathbf{P} := \mathbf{P}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3})$ sei $p : \mathbf{P} \to S$ die natürliche Projektion. Es sei (X, Y, Z) ein globales Koordinatensystem von $\mathbf{P}$ bezüglich $(\mathcal{L}^{\otimes 2}, \mathcal{L}^{\otimes 3}, \mathcal{O}_S)$. Dann erhalten wir mit dem durch die Gleichung

$$Y^2 Z = X^3 + a \cdot XZ + b \cdot Z^3$$

definierten Divisor $X(\mathcal{L}, a, b) \subset \mathbf{P}$ eine elliptische Faserung

$$\widetilde{p} = p|_{X(\mathcal{L},a,b)} : X(\mathcal{L}, a, b) \to S.$$

Diese Faserung besitzt einen Schnitt $\sigma : S \to X(\mathcal{L}, a, b)$, der durch $X = Z = 0$ und $Y = 1$ gegeben ist.

Die Faserung $\widetilde{p} : X(\mathcal{L}, a, b) \to S$ heißt Weierstraßmodell über S vom Typ $(\mathcal{L}, a, b)$ und die definierende Gleichung heißt Weierstraß-Normalform.

Wir erhalten den folgenden Satz über Weierstraßmodelle.

1.6 Satz
Es seien X und S kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. $n-1$, $\pi : X \to S$ eine flache elliptische Faserung mit irreduziblen Fasern und einem Schnitt $\sigma : S \to X$. Mit $\mathcal{L} := R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X$ ist X biholomorph zu einem Weierstraßmodell $\widetilde{X}$ über S vom Typ $(\mathcal{L}, a, b)$, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\widetilde{\pi}"'] & & X \arrow[dl, "\pi"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt auch:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^0\left(S, ((R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^\vee)^{\otimes 4}\right) &\neq 0 \\
\text{und } \mathrm{H}^0\left(S, ((R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^\vee)^{\otimes 6}\right) &\neq 0.
\end{aligned}$$

Beweis:
Zunächst eine Bemerkung zu den Fasern. Alle Fasern $X_s := \pi^{-1}(s)$ haben das arithmetische Geschlecht eins. Daraus folgt, daß die Normalisierung der singulären Fasern eine rationale Kurve ist. Somit haben wir drei Typen von Fasern:

1. Glatte elliptische Kurven.
2. Rationale Kurven mit einem Doppelpunkt.
3. Rationale Kurven mit einer Spitze.

Nun wollen wir zeigen, daß ein Cartierdivisor vom Grad 3 auf diesen Kurven sehr ampel ist.

Es sei C eine Kurve vom arithmetischen Geschlecht eins und $P \in C$ ein glatter Punkt.
Wir betrachten die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_C((n-1)P) \to \mathcal{O}_C(nP) \to \mathbf{C}_P \to 0.$$

Der Fall $n = 1$ ergibt

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C(P) \to \mathbf{C} \to 0$$

und

$$0 \to \mathbf{C} \to \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(P)\right) \to \mathbf{C} \to \mathbf{C} \to \mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(P)\right) \to 0.$$

Wäre $\dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(P)\right) > 1$, so gäbe es eine Abbildung vom Grad 1 auf $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$, dies ist jedoch nicht möglich da C nicht rational ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(P)\right) &= 1 \\ \text{und } \dim \mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(P)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Schnitte in $\mathcal{O}_C(P)$ haben den Punkt P als einzigen Basispunkt.

Der Fall $n = 2$ ergibt

$$0 \to \mathcal{O}_C(P) \to \mathcal{O}_C(2P) \to \mathbf{C}_P \to 0$$

und

$$0 \to \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(P)\right) \to \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(2P)\right) \to \mathbf{C} \to 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(2P)\right) &= 2 \\ \text{und } \dim \mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(2P)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Der Fall $n = 3$ ergibt

$$0 \to \mathcal{O}_C(2P) \to \mathcal{O}_C(3P) \to \mathbf{C} \to 0$$

und

$$0 \to \mathbf{C}^2 \to \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(3P)\right) \to \mathbf{C} \to 0.$$

Daraus folgt

$$\dim \mathrm{H}^3\left(C, \mathcal{O}_C(3P)\right) = 3.$$

Da P der einzige Basispunkt von $|\mathcal{O}_C(P)|$ ist und

$$\dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(2P)\right) = \dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(P)\right) + 1$$

ist, hat $|\mathcal{O}_C(2P)|$ keine Basispunkte und daher ist auch $|\mathcal{O}_C(3P)|$ basispunktfrei. Mit $|\mathcal{O}_C(3P)|$ erhalten wir einen Morphismus $C \to \mathbf{P}^2\mathbf{C}$, dessen Bild eine Kubik ist.

Es sei $Q \in C$ ein weiterer glatter Punkt. Aus den Sequenzen

$$0 \to \mathcal{O}_C(3P - Q) \to \mathcal{O}_C(3P) \to \mathbf{C}_Q \to 0$$

und

$$0 \to \mathrm{H}^0\left(C, 3P - Q\right) \to \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(3P)\right) \to \mathbf{C} \to \mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right) \to 0$$

folgt

$$0 < \dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right) \leq \dim \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(3P)\right) = 3$$

und

$$0 \leq \dim \mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right) \leq 1.$$

Für die Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right)$ und $\mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right)$ gibt es zwei Möglichkeiten. Im Fall

$$\mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right) = \mathbf{C} \text{ und } \mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right) = \mathbf{C}^3$$

muß Q Basispunkt von $|\mathcal{O}_C(3P)|$ sein. Dieses Linearsystem ist aber basispunktfrei.
Daher bleibt nur $\mathrm{H}^1\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right) = 0$ und $\mathrm{H}^0\left(C, \mathcal{O}_C(3P - Q)\right) = \mathbf{C}^2$.

Es bleibt zu zeigen, daß $|\mathcal{O}_C(3P - Q)|$ keine Basispunkte hat.
Annahme: Q ist Basispunkt von $|\mathcal{O}_C(3P - Q)|$.
Wir wählen eine Basis (σ_1, σ_2) von $|\mathcal{O}_C(3P - Q)|$ und einen Schnitt η von $\mathcal{O}_C(P)$. Dieser verschwindet im Punkt P.
Dann ist $(\sigma_1 \cdot \eta,\ \sigma_2 \cdot \eta,\ \eta^3)$ eine Basis von $|\mathcal{O}_C(3P)|$ mit Basispunkt P. Da dies nicht möglich ist, kann $\mathcal{O}_C(3P - Q)$ keine Basispunkte haben.

Zu zwei verschiedenen glatten Punkten Q_1, Q_2 in C gibt es Schnitte in $|\mathcal{O}_C(3P - Q_1)|$, die in Q_1 verschwinden, aber nicht in Q_2. Daher können wir glatte Punkte in C durch das Linearsystem $|\mathcal{O}_C(3P)|$ trennen. Wir erhalten einen Morphismus vom Grad eins von C auf eine Kubik im $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$. Da beide Kurven vom gleichen arithmetischen Geschlecht sind, ist dieser ein Isomorphismus.

Nun werden wir die Aussage des Satzes in der lokalen Situation zeigen. Es sei $U = Spec(R) \subset S$ eine affine, offene Menge, so daß $\mathcal{L}|_U$ frei ist. Ist t ein Erzeuger von $\Gamma(U, \mathcal{L})$, dann ist t^n ein Erzeuger von $\Gamma(U, \mathcal{L}^n)$. Aus dem Korollar 1.3 (Seite 60) folgt

$$\Gamma\left(X_U, \mathcal{O}_{X_U}(2A)\right) = R \oplus R \cdot f,$$

wobei das Bild von $f \in \Gamma\left(X_U, \mathcal{O}_{X_U}(2A)\right)/R = \Gamma(U, \mathcal{L}^2)\ t^2$ ist. Ebenso gilt

$$\Gamma\left(X_U, \mathcal{O}_{X_U}(3A)\right) = R \oplus R \cdot f \oplus R \cdot g,$$

wobei das Bild von $g \in \Gamma(U, \mathcal{L}^3)\ t^3$ ist. Wir kennen zwar nicht die Bilder von f^2, fg und f^3, aber die Leitterme müssen gerade t^4, t^5 und t^6 sein. Daher erhalten wir mit $1, f, g, f^2, fg, f^3$ eine Basis von $\Gamma(X_U, \mathcal{O}_{X_U}(6A))$ als R-Modul. Zu g^2 gibt es eine Relation

$$g^2 = a_1 fg + a_2 g + a_3 f^3 + a_4 f^2 + a_5 f + a_6$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $a_i \in R$. Die entsprechende Gleichung in $\Gamma(U, \mathcal{L}^{\otimes 6})$ für die Leitterme ergibt $a_3 = 1$. Als nächstes ersetzen wir g durch $g - \frac{1}{2}a_1 f - \frac{1}{2}a_2$ in der Gleichung für g^2 und erhalten:

$$\left(g - \frac{1}{2}a_1 f - \frac{1}{2}a_2\right)^2 = (a_1 f + a_2)\left(g - \frac{1}{2}a_1 f - \frac{1}{2}a_2\right) + f^3 + a_4 f^2 + a_5 f + a_6,$$

$$\left(g - \frac{1}{2}a_1 f - \frac{1}{2}a_2 - a_1 f - a_2\right)\left(g - \frac{1}{2}a_1 f - \frac{1}{2}a_2\right) = f^3 + a_4 f^2 + a_5 f + a_6,$$

$$\begin{aligned} g^2 &= g \cdot (\frac{1}{2}a_1 f + \frac{1}{2}a_2) + g \cdot (\frac{3}{2}a_1 f + \frac{3}{2}a_2) \\ &\quad - 3(\frac{1}{2}a_1 f + \frac{1}{2}a_2)^2 + f^3 + a_4 f + a_5 f + a_6 \\ &= 2a_1 fg + 2a_2 g - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}a_1 f + \frac{1}{2}a_2\right)^2 + f^3 + a_4 f + a_5 f + a_6. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der ursprünglichen Gleichung für g^2 liefert $2a_1 = a_1$ und $2a_2 = a_2$, das bedeutet $a_1 = a_2 = 0$. Nun ersetzen wir in

$g^2 = f^3 + a_4 f^2 + a_5 f + a_6$ f durch $f + \frac{1}{3}a_4$. Durch eine analoge Rechnung wie oben erhalten wir dann $a_4 = 0$. Somit ergibt sich

$$g^2 = f^3 + af + b$$

mit $a, b \in R$. Die Schnitte $1, f, g$ bilden eine Basis von $\Gamma(X_U, \mathcal{O}_{X_U}(3A))$ und erzeugen $\mathcal{O}_{X_U}(3A)$ auf jeder Faser, da

$$(\pi_* \mathcal{O}_X(3A))_s \to \mathrm{H}^0\left(X_s, \mathcal{O}_X(3A)|_{X_s}\right)$$

bijektiv ist (siehe Satz 1.1.5 auf Seite 58). Somit erzeugen $1, f, g$ ganz $\mathcal{O}_{X_U}(3A)$ und induzieren einen Morphismus

$$\phi_U : X_U \to \mathbf{P}\left(\pi_*\left(\mathcal{O}_{X_U}(3A)\right)\right) \cong \mathbf{P}^2\mathbf{C} \times U,$$

so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\phi_U : X_U \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbf{P}^2\mathbf{C} \times U \arrow[dl] \\
& U &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Nun beachten wir, daß wir einen Schnitt t in $\mathcal{L}|U$ auch durch einen Schnitt $\lambda \cdot t$ mit einer Einheit $\lambda \in R^*$ ersetzen können. Dann müssen wir auch f, g, a und b durch $\lambda^2 f, \lambda^3 g, \lambda^4 a$ und $\lambda^6 b$ ersetzen. Das heißt, die Koeffizienten a, b in der Weierstraß-Normalform

$$Y^2 Z = X^3 + aXZ^2 + bZ^3$$

sind bis auf Multiplikation mit einer invertierbaren Funktion bestimmt. Das heißt, wir können die lokal definierten Abbildungen global über ganz S zu einem Morphismus ϕ auf das Weierstraßmodell $\widetilde{X}$ fortsetzen.

Da S glatt ist und die Singularitäten von $\widetilde{X}$ in den Singularitäten der Fasern enthalten sind, ist $\widetilde{X}$ normal. Der Morphismus $\phi : X \to \widetilde{X}$ ist ein bijektiver Morphismus zwischen normalen Räumen, somit ein Isomorphismus.

∎

1.7 Bemerkung
Dieser Satz wurde zuerst von Mumford und Suominen (Siehe [MS72]) für Faserungen mit ausschließlich glatten Fasern bewiesen. Damit sind allerdings Faserungen über kompakten Mannigfaltigkeiten ausgeschlossen. Der allgemeinere Fall, der singuläre Fasern nicht ausschließt, wurde von Nakayama in [Nak87] gezeigt. Dort wird die Aussage des Satzes auch auf elliptische Faserungen, deren Fasern nicht notwendig irreduzibel sind, verallgemeinert. Dann werden diejenigen Komponenten der Fasern, die von dem Schnitt nicht getroffen werden unter dem Morphismus ϕ kontrahiert.
Man kann sogar die Vorraussetzungen, daß X und S glatt sein müssen, fallen lassen.

2 Elliptische Faserungen

In diesem Abschnitt zeigen wir, wie man zu einem Weierstraßmodell einer elliptischen Faserung weitere elliptische Faserungen konstruiert die lokal und faserweise isomorph sind. Diese besitzen dann nicht mehr notwendigerweise einen globalen Schnitt, haben aber isomorphe Weierstraßbündel. Außerdem zeigen wir, unter welchen Voraussetzungen eine elliptische Faserung sich aus einem Weierstraßmodell konstruieren läßt.

Es sei $\pi : X \to S$ eine flache elliptische Faserung mit einem Schnitt $\sigma : S \to X$ und ausschliesslich irreduziblen Fasern. Wir haben im Beweis von Satz 1.6 (Seite 62) gesehen, daß dann nur die folgenden Fasern möglich sind:

1. Glatte elliptische Kurven.

2. Rationale Kurven mit einem Doppelpunkt.

3. Rationale Kurven mit einer Spitze.

Da alle Fasern ebene Kurven von Grad drei sind, erhalten wir durch Wahl eines Nullpunktes eine Gruppenstruktur auf dem glatten Ort jeder Faser. Diese Gruppe ist für eine beliebige Faser F gerade $\mathrm{Pic}^0(F)$, die Gruppe der

Cartier-Divisoren vom Grad 0. Da der Schnitt σ alle Fasern in glatten Punkten schneidet, wird auf allen Fasern bzw. auf dem glatten Ort der Fasern eine Gruppenstruktur induziert. Zu je zwei Schnitten von π existiert ein Automorphismus von X, der die beiden Schnitte aufeinander abbildet (Siehe [Nak87] Lemma 1.3, Seite 410).
Wir wollen nun eine Garbe auf S, induziert durch die Gruppenstruktur in den Fasern, definieren.

2.1 Definition
Es sei (X, S, π) eine elliptische Faserung mit einem Schnitt σ. Da durch den Schnitt ein Nullpunkt ausgezeichnet ist, erhalten wir eine Gruppenstruktur auf den Fasern. Dann bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(X, S, \pi, \sigma)$ die Garbe der Keime der lokalen Schnitte von π.
Wenn keine Mißverständnisse möglich sind, schreiben wir auch $\mathcal{B}(X)$ statt $\mathcal{B}(X, S, \pi, \sigma)$.

Es sei F eine Faser von π und $F^\sharp$ der Ort der glatten Punkte von F. Wählt man einen Punkt in $F^\sharp$ als Nullpunkt, so erhält man durch die Gruppenstruktur eine Abbildung

$$F^\sharp \times F^\sharp \to F^\sharp$$

die sich stetig zu einer Abbildung

$$F \times F \to F$$

fortsetzen läßt. In diesem Sinne wollen wir im folgenden die Operation einer Faser von π auf sich selbst verstehen.

Nun wählen wir ein Element $\eta \in \mathrm{H}^1(S, \mathcal{B}(X, S, \pi, \sigma))$ und eine Darstellung von η in der Čech-Kohomologie, das heißt eine hinreichend feine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}$ von S und Schnitte $\eta_{ij} : U_i \cap U_j \to \pi^{-1}(U_i \cap U_j)$ mit $\eta_{ij} + \eta_{jk} = \eta_{ik}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$. Nun identifizieren wir $x_1 \in \pi^{-1}(U_i)$ und $x_2 \in \pi^{-1}(U_j)$, falls $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ und $x_1 = \eta_{ij}(\pi(x_2)) + x_2$ ist.

Diese Verklebung ergibt eine neue elliptische Faserung

$$\pi_\eta : X_\eta \to S,$$

die lokal und faserweise isomorph zu der elliptischen Faserung (X, S, π) ist.

Nun stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine elliptische Faserung lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell in der gerade beschriebenen Weise ist. Eine notwendige Voraussetzung ist die Existenz lokaler Schnitte. Der folgende Satz zeigt, daß dies auch eine hinreichende Bedingung ist.

2.2 Satz
Es sei $\pi : X \to S$ eine flache elliptische Faserung mit irreduziblen Fasern. Diese Faserung ist genau dann lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell, wenn es zu jedem Punkt $x \in S$ eine offene Umgebung $U(x)$ und einen Schnitt $\sigma_x : U(x) \to \pi^{-1}(U(x))$ gibt.

Beweis:
Ist X lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell, so ist die Behauptung unmittelbar klar. Für die umgekehrte Behauptung müssen wir die lokalen Faserungen so verkleben, daß die lokalen Schnitte sich zu einem globalen Schnitt zusammensetzen. Dazu wählen wir eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}$ von S mit lokalen Schnitten $\sigma_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$. Über dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ identifizieren wir zwei Punkte $x_1 \in \pi^{-1}(U_i),\ x_2 \in \pi^{-1}(U_j)$, falls $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ und $x_1 = x_2 + \sigma_i(\pi(x_1)) - \sigma_j(\pi(x_2))$ gilt. Damit erhalten wir eine elliptische Faserung $\tilde{\pi} : \tilde{X} \to S$, die einen Schnitt besizt. ∎

2.3 Bemerkung
Die Obstruktionen zur Existenz lokaler Schnitte sind nichtreduzierte Fasern und Fasern höherer Dimension.

2.4 Lemma
Für $\eta \in \mathrm{H}^1(S, \mathcal{B}(X))$ gilt

$$R^1_{\pi_{\eta *}} \mathcal{O}_{X_\eta} \cong R^1_{\pi_*} \mathcal{O}_X .$$

Beweis:
Wir wählen wieder eine Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_i\}$ von S und Isomorphismen

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to \pi_\eta^{-1}(U_i).$$

Es gilt $\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j$ ist durch Translation auf den Fasern gegeben. Die induzierten Isomorphismen

$$\phi_{i*} : R^1_{\pi_{\eta *}} \mathcal{O}_{X_\eta}|_{U_i} \to R^1_{\pi_*} \mathcal{O}_X|_{U_i}$$

stimmen für alle Paare (i, j) auf $U_i \cap U_j$ überein, da Translationen trivial auf $\mathrm{H}^1(E, \mathcal{O}_E)$ für eine glatte, elliptische Kurve E operieren. Die lokalen Isomorphismen setzten sich also global zu $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X \cong R^1_{\pi_{\eta_*}}\mathcal{O}_{X_\eta}$ fort. ∎

Als nächstes wollen wir eine kanonische Bündelformel für Weierstraßmodelle und dazu lokal isomorphe Faserungen herleiten.

2.5 Satz
Es sei $\pi : X \to S$ ein Weierstraßmodell mit Schnitt $\sigma : S \to X$ und $\eta \in \mathrm{H}^1(S, \mathcal{B}(X))$ mit

$$\pi_\eta : X_\eta \to S$$

eine elliptische Faserung. Dann gilt:

1. *Identifiziert man S mit $\sigma(S) \subset X$, so ist*

$$N_{S\backslash X} \cong R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X.$$

2. *Das kanonische Bündel von X ist*

$$K_X \cong \pi^*\left(K_S \otimes (R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^\vee\right).$$

3. *Das kanonische Bündel von X_η ist*

$$K_{X_\eta} \quad = \quad \pi^*_\eta\left(K_S \otimes (R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^\vee\right).$$

Beweis:

1. Wir betrachten die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(S) \to N_{S\backslash X} \to 0$$

und die daraus resultierende lange exakte Sequenz

$$0 \to \pi_*\mathcal{O}_X \to \pi_*\mathcal{O}_X(S) \to N_{S\backslash X} \to R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X \to R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X(S) \to \dots .$$

Da für eine beliebige Faser F von π $S.F = 1$ ist, gilt $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X(S) = 0$. Daher ist $N_{S\backslash X} \to R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X$ ein surjektiver Homomorphismus zwischen Geradenbündeln und somit ein Isomorphismus.

2. Das Normalenbündel glatter Fasern von π in X ist trivial und somit ist $K_X.F = 0$ für alle Fasern F von π. Daher gilt $K_X \cong \pi^*\left(K_X|_S\right)$. Mit der Adjunktionsformel

$$K_X|S \cong K_S \otimes N^{\vee}_{S\setminus X}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} K_X &= \pi^*\left(K_S \otimes N^{\vee}_{S\setminus X}\right) \\ &= \pi^*\left(K_S \otimes (R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^{\vee}\right). \end{aligned}$$

3. Es sei $X_\eta \in \mathrm{H}^1(S, \mathcal{B}(X))$. Dann gibt es eine Überdeckung $\bigcup U_i = S$ und es gilt

$$\begin{aligned} z_k &\in \mathrm{H}^0\left(U_k, \mathcal{B}(X|_{U_k})\right), \\ z_j &\in \mathrm{H}^0\left(U_j, \mathcal{B}(X|_{U_j})\right), \\ z_k \sim z_j &\iff z_k = \eta_{kj} + z_j. \end{aligned}$$

Diese Übergangsfunktion ist eine Translation auf den Fasern und läßt eine beliebige holomorphe n-Form ω_{jk} auf $X|_{U_i \cap U_j}$ dabei invariant. Daher gilt:

$$\begin{aligned} K_{X_\eta} &\cong \pi_\eta^*\left(K_S \otimes (R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^{\vee}\right) \\ &\cong \pi_\eta^*\left(K_S \otimes (R^1_{\pi_{\eta *}}\mathcal{O}_{X_\eta})^{\vee}\right). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem vorherigen Lemma.

■

2.6 Bemerkung
So wie für Flächen, gibt es auch in höheren Dimensionen eine kanonische Bündelformel für elliptische Faserungen. Diese berücksichtigt auch Fasern höherer Dimension und nichtreduzierte Fasern. Siehe dazu [Fuj86], [Uen73] und [Uen87].

Wir wollen nun die Garbe $\mathcal{B}(X)$ näher untersuchen.

Per Definition ist die Garbe $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_X$, die zur Prägarbe

$$U \mapsto \mathrm{H}^1\left(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}^*_X|_{\pi^{-1}(U)}\right),\ U \subset S \text{ offen}$$

assoziierten Garbe. Dies entspricht der Menge der holomorphen Geradenbündel auf $\pi^{-1}(U)$.

2.7 Definition
Ist $U \subset S$ eine offene Menge, dann ist $\pi^*(Pic(U))$ eine Prägarbe und die dazu assoziierte Garbe induziert eine Untergarbe von $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_X$ die wir mit $\mathcal{S}$ bezeichnen.

2.8 Lemma
Ist $\pi : X \to S$ eine flache elliptische Faserung mit einem Schnitt σ, so ist die Sequenz

$$0 \to \mathcal{B} \xrightarrow{\alpha} R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_X/\mathcal{S} \xrightarrow{deg} \mathbf{Z}_S \to 0$$

exakt und spaltet.

Beweis: Siehe [FM94]Lemma 5.8. (Chapter I, Seite 78).

Aus diesem Lemma können wir nun einige wichtige Folgerungen ziehen.

2.9 Korollar
Falls $\mathrm{H}^1(S, \mathbf{Z}) = 0$ ist, so gibt es einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^1(S, \mathcal{B}(X)) \cong \mathrm{H}^1\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_X/\mathcal{S}\right).$$

2.10 Lemma
Ist S eine Fläche mit $\mathrm{H}^2(S, \mathcal{O}^*_S) = 0$, dann gibt es eine Surjektion

$$\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}^*_X) \to \mathrm{H}^1\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_X/\mathcal{S}\right).$$

Beweis:

Da $\mathcal{S}$ kompakten Träger der Dimension eins besitzt, ist $\mathrm{H}^2(S, \mathcal{S}) = 0$ und es gibt eine Surjektion

$$\mathrm{H}^1\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_X\right) \to \mathrm{H}^1\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_X/\mathcal{S}\right).$$

Aus der Leray-Spektralfolge $E_2^{p,q} = H^p\left(S, R^q_{\pi_*}\mathcal{O}_X^*\right)$ und mit $\pi_*\mathcal{O}_X^* = \mathcal{O}_S^*$ ergibt sich

$$\begin{array}{|lll}
\mathrm{H}^0\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X^*\right) & \mathrm{H}^1\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X^*\right) & \mathrm{H}^2\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X^*\right) \\
\mathrm{H}^0\left(S, \mathcal{O}_S^*\right) & \mathrm{H}^1\left(S, \mathcal{O}_S^*\right) & \mathrm{H}^2\left(S, \mathcal{O}_S^*\right) \\
\hline
\end{array}$$

Da $\mathrm{H}^2\left(S, \mathcal{O}_S^*\right) = 0$ ist, erhalten wie einen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^2\left(X, \mathcal{O}_X^*\right) \cong \mathrm{H}^1\left(S, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X^*\right).$$

■

2.11 Bemerkung
Ist S eine Kurve, so ist die Surjektion in obigem Lemma ein Isomorphismus.

Kapitel VII

Geraden in elliptischen Faserungen über Flächen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Existenz von Geraden in elliptischen Faserungen über Flächen. Wir erhalten notwendige Bedingungen an die Weierstraßbündel und die Bilder der Geraden

Wir beschänken uns auf solche elliptische Faserungen, die lokale Schnitte besitzen. Diese Faserungen sind lokal und faserweise isomorph zu einem Weierstraßmodell.

1 Reduktion auf einen Spezialfall

Es sei $\pi : X \to S$ eine elliptische Faserung über einer kompakten Fläche S die lokal Schnitte besitzt und X enthalte Geraden. Dann wissen wir bereits:

- Für eine generische Gerade L ist $\pi|_L : L \to \pi(L)$ biholomorph (siehe Korollar I.2.2 auf Seite 9).

Darüberhinaus können wir annehmmen, daß $X_L := \pi^{-1}(C)$ eine glatte elliptische Fläche über $C \cong \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ ist. Die Kurve $L \subset X_L$ induziert einen Schnitt $\sigma : C \to X_L$ von $\pi|_{X_L}$. Aus der Sequenz

$$0 \to N_{L\backslash X_L} \to N_{L\backslash X} \to N_{X_L\backslash X}|_L \to 0$$

und dem Isomorphismus

$$N_{X_L\backslash X}|_L \cong \pi^* \left(N_{C\backslash S}\right)|_L$$

folgt die Gleichung

$$\left(L^2\right)_{X_L} + C^2 = 2.$$

Nun ist mit Bemerkung VI.1.2 (Seite 60) und Satz VI.1.6 (Seite 62)

$$\begin{aligned} \left(L^2\right)_{X_L} &= degN_{L\setminus X_L} \\ &= degR^1_{\pi_*}\mathcal{O}_{X_L} \\ &= R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X.C \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Daher muß $k := C^2 \geq 2$ sein.

Somit gibt es eine holomorphe Abbildung

$$\phi : S \to S_n$$

auf eine Hirzebruch-Fläche S_n mit $n \leq k$, die biholomorph auf einer Umgebung von C ist (Satz A.2.2 auf Seite 100). Es sei $D \subset S$ der exzeptionelle Divisor bezüglich ϕ und $\{p_1, ..., p_m\} = \phi(D)$. Die Einschränkung der Faserung $\pi : X \to S$ auf $\pi^{-1}(S \setminus D)$ über $S \setminus D$ können wir zu einer elliptischen Faserung $\widetilde{\pi} : \widetilde{X} \to S_n$ fortsetzen und die Faserung besitzt auch lokale Schnitte. Da wir die Faserung über einer Umgebung von C nicht verändert haben, gibt es auch in $\widetilde{X}$ Geraden. Die Picardgruppe von S hat die Gestalt

$$Pic(S) = \mathbf{Z} \cdot D_1 + ... + \mathbf{Z} \cdot D_k + \phi^* Pic(S_n),$$

wobei $D_i,\ i = 1, ..., k$ Divisoren in S sind, die in den Fasern von ϕ über den Punkten $p_1, ..., p_m$ enthalten sind. Für das Weierstraßbündel $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X$ von $\pi : X \to S$ gilt also

$$R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X \cong \mathcal{L}_D \otimes \phi^* \left(R^1_{\widetilde{\pi}_*}\mathcal{O}_{\widetilde{X}}\right),$$

wobei $\mathcal{L}_D \in < D_1, ...D_k >$ ist. Wir können uns somit für die weitere Argumentation auf elliptische Faserungen über Hirzebruch-Flächen beschränken.

2 Berechnung der Weierstraßbündel

Es sei $\pi : X \to S_n$ eine elliptische Faserung, lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell, über der n-ten Hirzebruch-Fläche S_n und X enthalte eine

Gerade.
Aus der Leray-Spektralfolge $E_2^{p,q} = H^q\left(S_n, R^p_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right)$ ergibt sich

$$\begin{array}{|llll}
\mathrm{H}^0\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right) & \mathrm{H}^1\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right) & \mathrm{H}^2\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right) & \mathrm{H}^3\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right) \\
\mathrm{H}^0\left(S_n, \pi_*\mathcal{O}_X\right) & \mathrm{H}^1\left(S_n, \pi_*\mathcal{O}_X\right) & \mathrm{H}^2\left(S_n, \pi_*\mathcal{O}_X\right) & \mathrm{H}^3\left(S_n, \pi_*\mathcal{O}_X\right) \\
\hline
\end{array}$$

Da $\pi_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{S_n}$ und S_n eine rationale Fläche ist, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) &\cong \mathrm{H}^0\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right) \\
\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) &\cong \mathrm{H}^1\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right) \\
\mathrm{H}^3(X, \mathcal{O}_X) &\cong \mathrm{H}^2\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right)
\end{aligned}$$

Satz VI.1.6 (Seite 62) besagt, daß $\mathrm{H}^0\left(S_n, \left((R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^\vee\right)^{\otimes 4}\right) \neq 0$ ist. Für Hirzebruch-Flächen ist dann schon $\mathrm{H}^0\left(S_n, (R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^\vee\right) \neq 0$.

Ist $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, so folgt $\mathrm{H}^0\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X\right) \neq 0$. Da auf jeden Fall $\mathrm{H}^0\left(S_n, (R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X)^\vee\right)$ nicht null ist, ist dies nur für $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$ möglich. Somit folgt aus $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$, daß X ein Hauptfaserbündel ist. Da wir diesen Fall schon ausführlich in Kapitel V (Seite 50) diskutiert haben, nehmen wir $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ an.

Die Existenz einer Geraden $L \subset X$ impliziert $\mathrm{H}^0(X, \Omega^3_X) = 0$ (siehe I.2.1 Seite 3) und mit der Kodaira-Serre-Dualität folgt $\mathrm{H}^3(X, \mathcal{O}_X) = 0$.
Wir schreiben fortan $\mathcal{L} := R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X$. Nun müssen wir $\mathcal{L}$ auf S_n so bestimmen, daß gilt:

$$\mathrm{H}^0(S_n, \mathcal{L}^\vee) \neq 0$$

und

$$\mathrm{H}^0(S_n, \mathcal{L}) = \mathrm{H}^2(S_n, \mathcal{L}) = 0.$$

Die Kohomologiegruppen von Geradenbündeln auf Hirzebruch-Flächen sind im Anhang A (Seite 89) berechnet. Für $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{O}_{S_n}(-a, -b)$ erhalten wir aus $\mathrm{H}^0(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-a, -b)) \neq 0$ die Bedingungen $a \leq 0$ und $b \leq 0$. Nun ist $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(a, b)$ mit $a \leq 0, \quad b \leq 0$ und $\mathrm{H}^0(S_n, \mathcal{L}) = \mathrm{H}^2(S_n, \mathcal{L}) = 0$ gesucht.

Anhang A.1 (Seite 90) entnehmen wir:

	$b < 0$	$\mathrm{H}^0(S_n, \mathcal{L}) = 0$
$a = 0$	$b \geq -1$	$\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) = 0$
	b beliebig	$\mathrm{H}^2(S_n, \mathcal{L}) = 0$
$a = -1$	$b \leq 0$	$H^i(S_n, \mathcal{L}) = 0$ für alle i
	$b \leq 0$	$\mathrm{H}^0(S_n, \mathcal{L}) = 0$
$a = -2$	$b + n \leq -1$	$\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) = 0$
	$b + n > -2$	$\mathrm{H}^2(S_n, \mathcal{L}) = 0$
	$b \leq 0$	$\mathrm{H}^0(S_n, \mathcal{L}) = 0$
$a < -2$	$b + n \leq an + 2n - 1 < 0$	$\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) = 0$
	$b + n > -2$	$\mathrm{H}^2(S_n, \mathcal{L}) = 0$

Wir wollen nun zwischen den Fällen $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ und $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ differenzieren.

1. Der Fall $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$.
   In diesem Fall ist $\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) \neq 0$. Dann ergibt sich aus der obigen Liste

   - $a = 0$.
     In diesem Fall muß $b \leq -2$ sein.
   - $a = -1$.
     In dieser Situation ist $\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L})$ stets null.
   - $a = -2$.
     Hier ergibt sich $b + n \geq 0$, das bedeutet $b \geq -n$ und schließlich $-n \leq b \leq 0$.
   - $a < -2$.
     Wir können $n > 0$ annehmen, sonst müßte $b = 0$ sein und für $S_0 = \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ sind a und b austauschbar, d.h. diese Situation ist schon in $a = 0$ enthalten.
     Somit müssen $b + n > an + 2n - 1 = (a+2)n - 1$ und $b + n > -2$ erfüllt sein. Da $(a+2)n - 1 \leq -2$ ist, ergibt sich $b + n > -2$ bzw. $0 \geq b \geq -(n+1)$.

2. Der Fall $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$.
   In diesem Fall ist $\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) = 0$. Dann ergibt sich das Folgende

- $a = 0$.
  Dann muß $b = -1$ sein.
- $a = -1$.
  In dieser Situation ist $b \leq 0$.
- $a = -2$.
  Hier ist $b + n = -1$.
- $a < -2$.
  Dies ist nur für $n = 0$ und $b = -1$ möglich. Diese Situation ist im Fall $a = -1$ enthalten und muß daher nicht weiter betrachtet werden.

Als nächstes werden wir eine Relation zwischen $\mathcal{L}$ und dem Linearsystem das durch die Geraden in X aus S_n induziert wird, herleiten.

Die Linearsysteme auf S_n, die rationale Kurven von positivem Selbstschnitt k enthalten, sind

$$\begin{array}{ll} \left|\mathcal{O}_{S_1}(2E+2F)\right|, & k = 4 \text{ und} \\ \left|\mathcal{O}_{S_n}\left(E + \frac{k+n}{2}F\right)\right|, & k \geq n. \end{array}$$

Siehe Lemma A.2.1 (Seite 97).

Nun müssen wir alle Kombinationen von $\mathcal{L} = R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X$ und C aus den folgenden Tabellen in der Gleichung

$$\mathcal{L}.C + C^2 = 2 \text{ mit } C^2 = k \geq 2$$

testen.

$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(a,b)$,	$\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) \neq 0$
$a = 0$	$b \leq -2$
$a = -2$	$-n \leq b \leq 0$
$a < -2$	$-(n+1) \leq b \leq 0$

$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(a,b)$,	$\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) = 0$
$a = 0$	$b = -1$
$a = -1$	$b \leq 0$
$a = -2$	$b = -(n+1)$

C
$\left|\mathcal{O}_{S_1}(2E+2F)\right|,\ k = 4,\ n = 1$
$\left|\mathcal{O}_{S_n}\left(E + \frac{k+n}{2}\right)\right|,\ k \geq n,\ k \geq 2$

1. $\mathrm{H}^1(S_n, \mathcal{L}) \neq 0$.

1.1. $C \in |\mathcal{O}_{S_1}(2E+2F)|\,,\ k=4,\ n=1.$

1.1.1. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(0,b), \quad b \leq -2,$
$C.\mathcal{L} = (0,b).(2,2) = 2b,$
$C^2 = k = 4,$
D.h. $4+2b = 2.$
Es existiert in dieser Situation keine Lösung mit $b \leq -2$.

1.1.2. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(-2,b), \quad -1 \leq b \leq 0,$
$C.\mathcal{L} = (-2,b).(2,2) = 4+2b-4 = 2b,$
D.h. $4+2b = 2.$
Mit $b=-1$ existiert eine Lösung.

1.1.3. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(a,b),\ a < -2,\ -2 \leq b \leq 0,$
$C.\mathcal{L} = (a,b).(2,2) = -2a+2a+2b = 2b,$
D.h. $2b+4 = 2.$
Auch hier existiert mit $b=-1$ eine Lösung.

1.2. $C \in \left|\mathcal{O}_{S_n}\left(E+\frac{k+n}{2}F\right)\right|,\ k \geq n,\ k \geq 2.$

1.2.1. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(0,b),\ b \leq -2,$
$C.\mathcal{L} = (1,\frac{k+n}{2}).(0,b) = b,$
D.h. $k+b = 2.$
Es existieren Lösungen mit $b = 2-k$ für $k \geq 4$.

1.2.2. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(-2,b),\ -n \leq b \leq 0.$

$$\begin{aligned} C.\mathcal{L} &= (-2,b).(1,\frac{k+n}{2}) \\ &= 2n-k-n+b \\ &= n-k+b. \end{aligned}$$

D.h. $n+b = 2.$
Mit $b = 2-n$ existieren für alle $n \geq 2$ Lösungen.

1.2.3. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(a,b),\ a < -2,\ -(n+1) \leq b \leq 0,$
$C.\mathcal{L} = (a,b).(1,\frac{k+n}{2}) = -an + a\frac{k+n}{2} + b,$
D.h. $b = 2 + an - a\frac{k+n}{2} - k = 2 - k + a\frac{n-k}{2}.$

2. $\mathrm{H}^1(S_n,\mathcal{L}) = 0.$

2.1. $C \in |\mathcal{O}_{S_1}(2E+2F)|\,,\ k=4,\ n=1.$

2.1.1. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(0, -1)$,
$C.\mathcal{L} = (2, 2).(0, -1) = -2.$
In diesem Fall erhalten wir eine Lösung.

2.1.2. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(-1, b),\ b \leq 0,$
$C.\mathcal{L} = (2, 2).(-1, b) = 2 + 2b - 2 = 2b,$
D.h. $2b + 4 = 2.$
Damit erhält man mit $b = -1$ eine Lösung.

2.1.3. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(-2, -2)$
$C.\mathcal{L} = (2, 2).(-2, -2) = 4 - 4 - 4 = -4$
Da $-4 + 4 \neq 2$ ist, gibt es hier keine Lösung.

2.2. $C \in \left|\mathcal{O}_{S_n}(E + \frac{k+n}{2}F)\right|,\ k \geq n,\ k \geq 2.$

2.2.1. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(0, -1)$,
$C.\mathcal{L} = (1, \frac{k+n}{2}).(0, -1) = -1,$
D.h. $-1 + k = 2.$
Da $k \geq n$ und $k \geq 2$ gelten muß folgt mit $k = 3$
$n = 1$ und $C \in |\mathcal{O}_{S_1}(E + 2F)|$ oder
$n = 3$ und $C \in |\mathcal{O}_{S_3}(E + 3F)|$.

2.2.2. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(-1, b),\ b \leq 0,$
$C.\mathcal{L} = (-1, b).(1, \frac{k+n}{2}) = n - \frac{k+n}{2} + b.$
D.h.

$$\begin{aligned} n + b - \frac{k+n}{2} + k &= 2 \\ 2n + 2b - k - n + 2k &= 4 \\ n + 2b + k &= 4. \end{aligned}$$

Damit liefert $b = 2 - \frac{k+n}{2}$ Lösungen.

2.2.3. $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(-2, -(n + 1))$,

$$\begin{aligned} C.\mathcal{L} &= (1, \frac{k+n}{2}).(-2, -(n+1)) \\ &= 2n - n - 1 - k - n \\ &= -(k+1). \end{aligned}$$

Das bedeutet, es gibt in diesem Fall keine Lösungen.

Die möglichen Fälle sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

C	$\mathcal{L}$	
$\lvert\mathcal{O}_{S_1}(2,2)\rvert$	$\mathcal{O}_{S_1}(a,-1),\ a \leq -2$	1.1.2. & 1.1.3.
$\lvert\mathcal{O}_{S_n}(1,\frac{k+n}{2})\rvert$	$\mathcal{O}_{S_n}(0,2-k),\ k \geq 4$	1.2.1.
$\lvert\mathcal{O}_{S_n}(1,\frac{k+n}{2})\rvert$	$\mathcal{O}_{S_n}(-2,2-n),\ n \geq 2$	1.2.2.
$\lvert\mathcal{O}_{S_n}(1,\frac{k+n}{2})\rvert$	$\mathcal{O}_{S_n}(a,2-k+a\frac{n-k}{2}),\ a \leq -2$	1.2.3.
$\lvert\mathcal{O}_{S_1}(2,2)\rvert$	$\mathcal{O}_{S_1}(0,-1),\ k=4$	2.1.1.
$\lvert\mathcal{O}_{S_1}(2,2)\rvert$	$\mathcal{O}_{S_1}(-1,-1)$	2.1.2.
$\lvert\mathcal{O}_{S_1}(1,2)\rvert$	$\mathcal{O}_{S_1}(0,-1)$	2.2.1.
$\lvert\mathcal{O}_{S_3}(1,3)\rvert$	$\mathcal{O}_{S_3}(0,-1)$	2.2.1
$\lvert\mathcal{O}_{S_n}(1,\frac{k+n}{2})\rvert$	$\mathcal{O}_{S_n}(-1,2-\frac{k+n}{2})$	2.2.2.

3 Weitere Einschränkungen

Als nächstes zeigen wir, daß es im Fall $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(0,b)$ und $C \in |\mathcal{O}_{S_n}(E+bF)|$ keine Geraden geben kann. Dies entspricht den Fällen 1.2.1. und 2.2.1.

3.1 Satz
Es sei $\pi : X \to S_n$ eine elliptische Faserung, lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell, über der Hirzebruch-Fläche $f_n : S_n \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ mit $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{S_n}(0,b)$. Dann gibt es eine elliptische Fläche $S \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ und ein kommutierendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ S_n & \xrightarrow{f_n} & \mathbf{P}^1\mathbf{C}. \end{array}$$

Die Faserung $X \to S_n$ ist dann die mit f_n zurückgezogene Faserung $S \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$.

Beweis:
Wir wählen einen Schnitt $E \subset S_n$ von f_n mit $E^2 = n$, so daß $X_E = \pi^{-1}(E)$ glatt ist.
Es seien $\widehat{\pi} : \widehat{X} \to S_n$ und $\widehat{\pi}_E : \widehat{X_E} \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ Weierstraßmodelle, zu denen $\pi : X \to S_n$, bzw. $\pi|_{X_E} : X_E \to E$ lokal isomorph sind.
Wir identifizieren E mit $f_n(S_n) = \mathbf{P}^1\mathbf{C}$. Da $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{S_n}(0,b)$ ist, können wir annehmen, daß $\widehat{X} = \widehat{X_E} \times_E S_n$ ist. Damit ist die Projektion $\widehat{X} \to \widehat{X_E}$ ein $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel und es gilt $\mathrm{H}^i\left(\widehat{X}, \mathcal{O}_{\widehat{X}}\right) \cong \mathrm{H}^i\left(\widehat{X_E}, \mathcal{O}_{\widehat{X_E}}\right)$ für $i = 0, ..., 3$.

Da S_n eine rationale Fläche ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}^*_{S_n}\right) &= 0, \\ \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathbf{Z}\right) &= 0, \\ \mathrm{H}^1\left(E, \mathbf{Z}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß

$$\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{B}(\widehat{X})\right) \cong \mathrm{H}^1\left(E, \mathcal{B}(\widehat{X_E})\right)$$

ist. Als erstes zeigen wir, daß es eine Injektion

$$\iota : \mathrm{H}^1\left(E, \mathcal{B}(\widehat{X_E})\right) \hookrightarrow \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{B}(\widehat{X})\right)$$

gibt. Dazu wählen wir ein Element $\eta \in \mathrm{H}^1\left(E, \mathcal{B}(\widehat{X_E})\right)$ und erhalten $\widehat{\eta} := \pi^{-1}(\eta) \in \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{B}(\widehat{X})\right)$. Ist $\widehat{\eta} = 0$ in $\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{B}(\widehat{X})\right)$, dann ist die zugehörige Faserung ismorph zu $\widehat{X} \to S_n$ und somit ist dann die zu η entsprechende Faserung isomorph zu $\widehat{X_E} \to E$. Dies zeigt die Injektivität.

Wir erhalten die Abbildungen

$$\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}^*_{S_n}\right) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^1\left(S_n, R^1_{\pi_*}\mathcal{O}^*_{\widehat{X}}/\mathcal{S}\right) \cong \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{B}(\widehat{X})\right)$$

wie folgt.
Die Surjektion folgt aus Lemma 2.10 (Seite 72), da $\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}^*_{S_n}\right) = 0$ ist. Der Isomorphismus ergibt sich aus $\mathrm{H}^1\left(E, \mathbf{Z}\right) = 0$ mit Korollar 2.9 (Seite 72). Darüberhinaus erhalten wir aus $\mathrm{H}^1\left(E, \mathbf{Z}\right) = 0$ mit Bemerkung 2.11 (Seite 73) und Korollar 2.9 (Seite 72) den Isomorphismus

$$\mathrm{H}^2\left(\widehat{X_E}, \mathcal{O}^*_{\widehat{X_E}}\right) \cong \mathrm{H}^1\left(E, \mathcal{B}(\widehat{X_E})\right).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^2\left(\widehat{X}, \mathcal{O}^*_{\widehat{X}}\right) & \twoheadrightarrow & \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{B}(\widehat{X})\right) \\ & & \uparrow \iota \\ \mathrm{H}^2\left(\widehat{X_E}, \mathcal{O}^*_{\widehat{X_E}}\right) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{H}^1\left(E, \mathcal{B}(\widehat{X_E})\right). \end{array}$$

Wenn wir nun zeigen, daß es eine surjektive Abbildung

$$\mathrm{H}^2\left(\widehat{X_E}, \mathcal{O}^*_{\widehat{X_E}}\right) \twoheadrightarrow \mathrm{H}^2\left(\widehat{X}, \mathcal{O}^*_{\widehat{X}}\right)$$

gibt, so sind $\mathrm{H}^1\left(E,\mathcal{B}(\widehat{X_E})\right)$ und $\mathrm{H}^1\left(S_n,\mathcal{B}(\widehat{X})\right)$ isomorph, was gerade die Behauptung des Satzes ist.

Da $\widehat{X}\to\widehat{X_E}$ ein $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel und somit insbesondere ein S^2-Bündel ist, erhalten wir die Gysin-Sequenz

$$...\to H^p\left(\widehat{X},\mathbf{Z}\right)\to H^{p+3}\left(\widehat{X_E},\mathbf{Z}\right)\to H^{p+3}\left(\widehat{X},\mathbf{Z}\right)\to H^{p+1}\left(\widehat{X_E},\mathbf{Z}\right)\to ...\,.$$

Für $p=0$ ergibt dies

$$H^3\left(\widehat{X_E},\mathbf{Z}\right)\to H^3\left(\widehat{X},\mathbf{Z}\right)\to H^1\left(\widehat{X_E},\mathbf{Z}\right).$$

Da elliptische Flächen über $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ mit einem Schnitt und mindestens einer singulären Faser einfach zusammenhängend sind (siehe [FM94] Chap. II, Prop. 2.1 auf Seite 157), ergibt sich $H^1(\widehat{X_E},\mathbf{Z})=0$. Somit ist

$$H^3\left(\widehat{X_E},\mathbf{Z}\right)\to H^3\left(\widehat{X},\mathbf{Z}\right)$$

ein Isomorphismus.

Aus

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathbf{Z}_{\widehat{X}} & \to & \mathcal{O}_{\widehat{X}} & \to & \mathcal{O}^*_{\widehat{X}} & \to & 0\\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathbf{Z}_{\widehat{X_E}} & \to & \mathcal{O}_{\widehat{X_E}} & \to & \mathcal{O}^*_{\widehat{X_E}} & \to & 0
\end{array}$$

erhalten wir die langen exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc}
...\to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X},\mathbf{Z}\right) & \to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X},\mathcal{O}_{\widehat{X}}\right) & \to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X},\mathcal{O}^*_{\widehat{X}}\right) & \to\\
 & \uparrow a & & \uparrow b & & \uparrow c & \\
...\to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X_E},\mathbf{Z}\right) & \to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X_E},\mathcal{O}_{\widehat{X_E}}\right) & \to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X_E},\mathcal{O}^*_{\widehat{X_E}}\right) & \to
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
\to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X},\mathcal{O}^*_{\widehat{X}}\right) & \to & \mathrm{H}^3\left(\widehat{X},\mathbf{Z}\right) & \to & 0\\
 & \uparrow c & & \uparrow d & & \\
\to & \mathrm{H}^2\left(\widehat{X_E},\mathcal{O}^*_{\widehat{X_E}}\right) & \to & \mathrm{H}^3\left(\widehat{X_E},\mathbf{Z}\right) & \to & 0.
\end{array}$$

Hierbei sind a und c injektiv und b und d Isomorphismen. Mit dem Fünferlemma folgt nun, daß c ein Isomorphismus ist. Dies war zu zeigen. ∎

3.2 Korollar
Es sei $\pi : X \to S_n$ eine elliptische Faserung über der Hirzebruch-Fläche S_n, lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell, mit $R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{S_n}(0,b)$. Dann gibt es keine Geraden in X deren Bild unter π glatt ist und die Fasern von f_n genau einmal schneidet.

Beweis:
Aus obigem Theorem folgt, daß eine elliptische Fläche $\tilde{\pi} : S \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ existiert, so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "F_n"'] & S_n \arrow[d, "f_n"] \\ S \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & \mathbf{P}^1\mathbf{C}. \end{tikzcd}$$

Dabei ist $F_n : X \to S$ ein $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel. Wir nehmen an, daß $L \subset X$ eine Gerade ist für die gilt: $C := \pi(L)$ ist glatt und C schneidet jede Faser von f_n genau einmal. Dann folgt mit Korollar I.2.2 (Seite 9), daß $\pi|_L : L \to C$ biholomorph ist.

Das bedeutet, das Bild $F_n(L)$ von L in S ist ein Schnitt von $\tilde{\pi}$. Daher ist $X_{S,L} := F_n^{-1}(F_n(L))$ ein glatter Divisor in X und mit $X_L := \pi^{-1}(C)$ gilt $L = X_L \cap X_{S,L}$. Somit ergibt sich für das Normalenbündel $N_{L\backslash X}$ von L in X:

$$N_{L\backslash X} = N_{L\backslash X_L} \oplus N_{L\backslash X_{S,L}}.$$

Da aber $N_{L\backslash X_{S,L}} \cong N_{C\backslash S_n} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(k)$ ist, mit $k \geq 2$, erhalten wir einen Widerspruch. ∎

4 Zusammenfassung

Nun wollen wir eine zusammenfassende Übersicht dieser Rechnungen geben.

4.1 Satz

Es sei $\pi : X \to S$ eine elliptische Faserung, lokal isomorph zu einem Weierstraßmodell und S entweder $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ oder die n-te Hirzebruch-Fläche. Enthält X eine Gerade L deren Bild in S glatt ist, so gilt mit den Bezeichnungen

$$
\begin{aligned}
h^1 &:= \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X),\\
h^2 &:= \dim \mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X),\\
\mathcal{L} &:= R^1_{\pi_*}\mathcal{O}_X,\\
C &:= \pi(L),\\
k &:= C^2,
\end{aligned}
$$

daß eine der Situationen aus der folgende Liste zutrifft.

C	$\mathcal{L}$	k	h^i
$\mathcal{O}_{S_0}(1,1)$	$\mathcal{O}_{S_0}$	$k=2$	$h^1 \neq 0$ $h^2 = 0$
$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}(2)$ $\mathcal{O}_{S_1}(2,2)$ $\mathcal{O}_{S_1}(2,2)$ $\mathcal{O}_{S_n}(1, \frac{k+n}{2})$	$\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2\mathbf{C}}(-1)$ $\mathcal{O}_{S_1}(a,-1);\ a=0,1$ $\mathcal{O}_{S_1}(-1,-1)$ $\mathcal{O}_{S_n}(-1, 2-\frac{k+n}{2})$	$k=4$ $k=4$ $k=4$ $k>2;\ k\geq n$	$h^1 = 0$ $h^2 = 0$
$\mathcal{O}_{S_1}(2,2)$ $\mathcal{O}_{S_n}(1, \frac{k+n}{2})$	$\mathcal{O}_{S_1}(a,-1);\ a \leq -2$ $\mathcal{O}_{S_n}(a, 2-k+a\frac{n-k}{2});\ a\leq -2$	$k=4$ $k>2;\ k\geq n$	$h^1 = 0$ $h^2 \neq 0$

Für die Situation in der letzten Zeile muß außerdem die Ungleichung $2-k+\frac{n-k}{2} \leq 0$ erfüllt sein.

Beweis: Wir erhalten diese Tabelle aus der Tabelle auf Seite 81. Mit dem Korollar 3.2 (Seite 84) werden die Fälle 1.2.1 und 2.2.1 ausgeschlossen.
Der Fall $C \in |\mathcal{O}_{S_0}(1,1)|$ und $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_0}$ entspricht der Situation eines elliptischen Hauptfaserbündels.
Der Fall $C \in |\mathcal{O}_{S_1}(2,2)|$ und $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(a,-1),\ a = 0,1$ entspricht den Fällen 2.1.1 und 2.1.2.
Der Fall $C \in |\mathcal{O}_{S_n}(1, \frac{k+n}{2})|$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(-1, 2-\frac{k+n}{2})$ entspricht der Situation 2.2.2. Den Fall $k=2$ können wir dabei ausschliessen. Denn dann gilt $C.\mathcal{L} = 0$. Das bedeutet, über jeder glatten Kurve aus $|\mathcal{O}_{S_n}(C)|$ ist X ein elliptisches Hauptfaserbündel. Da diese Kurven sich schneiden und eine offene Menge von S_n überdecken, ist X über einer offenen Menge ein elliptisches Hauptfaserbündel. Damit muß X aber selbst ein elliptisches Hauptfaserbündel sein. Diese Situation wurde in Kapitel V vollständig beschrieben.

Der Fall $C \in |\mathcal{O}_{S_1}(2,2)$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_1}(a,-1),\ a \leq -2$ entspricht den Fällen 1.1.2 und 1.1.3.
Der Fall $C \in |\mathcal{O}_{S_n}(1, \frac{k+n}{2})|$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(a, 2-k+a\frac{n-k}{2}),\ a \leq -2$ entspricht den Fällen 1.2.2 und 1.2.3. Dabei erhält man $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_n}(-2, 2-n)$ aus $\mathcal{O}_{S_n}(a, 2-k+a\frac{n-k}{2})$ für $a = -2$. Hier wird der Fall $k = 2$ genau wie oben ausgeschlossen. Die Bedingung $-(n+1) \leq 2-k+a\frac{n-k}{2}$ ist stets erfüllt:

$$\begin{aligned} -(n+1) &\leq 2-k+a\frac{n-k}{2} \\ 0 &\leq 3+n-k+a\frac{n-k}{2} \\ 0 &\leq 3+(n-k)(1+\frac{a}{2}). \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist für $a \leq -2$ und $n-k \leq 0$ stets erfüllt. ∎

4.2 Bemerkungen

4.2.1 Im Falle $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_0}$ ist X ein elliptisches Hauptfaserbündel über S_0 und enthält Geraden (siehe Kapitel V). In den anderen Fällen ist die Existenz von Geraden nicht bekannt.

Kapitel VIII

Ausblick

Wir wollen zum Abschluß einige Fragen zusammentragen die offen geblieben sind, bzw. sich nun stellen.

Es sei X eine kompakte, komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n, $L \subset X$ eine Gerade und W der Parameterraum der Geraden in X. Der zu L korrespondierende Punkt in W sei p_L.

1. Wir bezeichnen die Idealgarbe von L mit $\mathcal{I}_L$. Dann heißt $\mathcal{O}_X \big/ \mathcal{I}_L^{m+1}$ die m-te infinitesimale Umgebung von L in X.
   Es sei nun $\tilde{L}$ eine Gerade in $\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}$ und $\mathcal{I}_{\tilde{L}}$ ihre Idealgarbe. Da L eine Gerade ist, sind die ersten infinitesimalen Umgebungen von L und $\tilde{L}$ isomorph. Ist L eine tubulare Gerade, so sind alle infinitesimalen Umgebungen isomorph. Es stellt sich die Frage, ob es eine Zahl m_0 gibt, die möglicherweise von n abhängt, so daß aus $\mathcal{O}_X \big/ \mathcal{I}_L^{m_0+1} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{\mathrm{n}}\mathbf{C}} \big/ \mathcal{I}_{\tilde{L}}^{m_0+1}$ folgt, daß L eine tubulare Gerade ist.

2. Die Gerade L sei tubular und in der Zusammenhangskomponente $W_0 \subset W$ enthalten. Sind dann notwendigerweise alle Geraden, die durch W_0 parametrisiert werden, tubular?

3. In Kapitel III.4 (Seite 35) haben wir gesehen, daß der Weyl-Tensor auf W in p_L verschwindet, falls L eine tubulare Gerade ist.

   Folgt umgekehrt, aus dem Verschwinden des Weyl-Tensors in einem Punkt von W, daß die entsprechende Gerade tubular ist?

4. Zu der Liste aus SatzVII.4.1 (Seite 84), die die notwendigen Bedingungen zur Existenz von Geraden in elliptischen Faserungen über Hirzebruch-Flächen beschreibt, stellen sie die folgenden Fragen:
   Sind diese Bedingungen auch hinreichend?
   Falls nicht, kann man den Fall $\mathrm{H}^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$ ausschließen und erhalten wir dann hinreichende Bedingungen?

5. Ist es möglich in der Situation von Satz 4.1 (Seite 84) die Voraussetzung an die Glattheit des Bildes einer generischen Geraden fallenzulassen? Oder kann gezeigt werden, daß in dieser Situation die Bilder generischer Geraden stets glatt sind?

Anhang A

Linearsysteme auf Hirzebruch-Flächen

Hirzebruch-Flächen sind $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$-Bündel über $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$. Diese Flächen bilden zusammen mit der projektiven Ebene $\mathbf{P}^2\mathbf{C}$ die minimalen Modelle für alle rationalen Flächen. In diesem Kapitel wollen wir untersuchen, welche Linearsysteme auf Hirzebruch-Flächen rationale Kurven zu vorgebenen Selbstschnittzahlen enthalten und die Kohomologiegruppen von Geradenbündeln auf Hirzebruch-Flächen berechnen. Hirzebruch-Flächen wurden von F. Hirzebruch erstmals ausführlich studiert [Hir51].

0.1 Definition
Die durch $\mathbf{P}\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}\right) =: S_n$ *definierte Fläche heißt n-te Hirzebruch-Fläche.*

Notation:
Es sei $f_n : S_n \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ die natürliche Projektion. In S_n gibt es einen ausgezeichneten Divisor E mit $E^2 = -n$. Dieser Divisor entspricht einem ausgezeichneten Schnitt von f_n, dem sogenannten negativen Schnitt.
Bei Schnittzahlberechnungen bezeichnen wir auch die Klasse einer Faser F mit F. Die Picardgruppe von S_n wird von E und F erzeugt und effektive Linearsysteme entsprechen positiven Linearkombinationen von E und F.
Der Divisor A, der der Klasse eines Schnittes von f_n entspricht, hat die Selbstschnittzahl $A^2 = n$. Es gilt:

$$A^2 = n, \quad E^2 = -n, \quad F^2 = 0,$$

$$A.F = E.F = 1.$$

Das kanonische Bündel K_{S_n} von S_n ist

$$K_{S_n} = -2 \cdot E - (2+n) \cdot F.$$

Geradenbündel auf S_n sind von der Form

$$\mathcal{O}_{S_n}(a \cdot E + b \cdot F)$$

und wir schreiben hierfür auch $\mathcal{O}_{S_n}(a, b)$. Die Selbstschnittzahl beträgt

$$(a \cdot E + b \cdot F)^2 = -a^2 \cdot n + 2ab = a \cdot (2b - an).$$

Sind $D_1 \in |\mathcal{O}_{S_n}(a, b)|$ und $D_2 \in |\mathcal{O}_{S_n}(c, d)|$ zwei effektive Divisoren, so benutzen wir bei der Berechnung der Schnittzahl $D_1.D_2$ die Kurzschreibweise $D_1.D_2 = (a, b)(c, d) = -ac \cdot n + ad + bc$.

1 Kohomologie von Geradenbündeln auf Hirzebruch-Flächen

Wir benötigen mehrmals das Verschwinden von Kohomologiegruppen von Geradenbündeln auf S_n. Nun geben wir eine Übersicht über alle Kohomologiegruppen von Geradenbündeln $\mathcal{O}_{S_n}(a, b)$ auf S_n.

a	$\dim \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a, b)\right)$	b
-1	0	$\forall b$
0	$b+1$	$b \geq 0$
	0	$b < 0$
	0	$b < 0$
$a > 0$	$(a+1)\left(b+1-\frac{an}{2}\right)$	$b - an \geq 0$
	$(l+1)\left(b+1-\frac{nl}{2}\right)$ $l := \max\{k : b - kn \geq 0 \text{ und } k \geq 0\}$	$0 \leq b < an$
$a \leq -2$	0	$\forall b$

a	$\dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)$	b
-1	0	$\forall$ b
0	$-b-1$	$b \leq -1$
	0	$b \geq -1$
$a > 0$	0	$b - an \geq -1$
	$(a+1)(\frac{an}{2} - b - 1)$	$b \leq -2$
	$(a+1)\left(\frac{an}{2} - b - 1\right) + l\left(b + 1 - \frac{n(l-1)}{2}\right)$ $l := \min\{k : b - kn \leq -2 \text{ und } k \geq 0\}$	$-2 < b < an - 1$
-2	0	$b + n \leq -1$
	$b + n + 1$	$b + n > -1$
$a < -2$	0	$b \leq an + n - 1$
	$(a+1)(\frac{an}{2} - b - 1)$	$b + n > -1$
	$(a+1)(\frac{an}{2} - b - 1) - l\left(b + n + 1 + \frac{n(l-1)}{2}\right)$ $l := \min\{k : kn \geq -(b+n) \text{ und } k \geq 0\}$	$2n + an - 1 < b + n < 0$

a	$\dim \mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)$	b
$a \geq -1$	0	$\forall b$
-2	0	$b + n > -2$
	$-b - n - 1$	$b + n \leq -2$
$a < -2$	0	$b + n + 2 > 0$
	$(a+1)\left(b + 1 - \frac{an}{2}\right)$	$b + 2 \leq an + n$
	$-(l+1)\left(b + n + 1 + \frac{nl}{2}\right)$ $l := \max\{k : kn \leq -b - n - 2 \text{ und } k \geq 0\}$	$0 \geq b + n + 2 > 2n + an$

Zunächst bestimmen wir die direkten Bildgarben $f_{n*}\mathcal{O}_{S_n}(a,b)$.
Da $E.F = 1$ ist, gilt $f_{n*}\mathcal{O}_{S_n}(-E) = 0$.
Für $a \geq 0$ ist

$$
\begin{aligned}
f_{n*}\mathcal{O}_{S_n}(a \cdot E) &= \mathrm{S}^a\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(-n) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}\right) \\
&= \bigoplus_{k=0}^{a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(-k \cdot n).
\end{aligned}
$$

Wir wollen zunächst $\mathbf{a \geq -1}$ annehmen. Dann ist

$$\mathrm{H}^0\left(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(a)\right) = 0$$

und somit gilt

$$R^1_{f_{n*}}\mathcal{O}_{S_n}(a \cdot E) = 0, \text{ für } a \geq -1.$$

Die Leray-Spektralfolge $E_2^{p,q} = H^p\left(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, R^q_{f_{n*}}\mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)$ ergibt für $a \geq -1$

$$H^i\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = H^i\left(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, f_{n*}\mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right).$$

Wir erhalten daher für $i = 0$ und $i = 1$

$$H^i\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } a = -1, \\ H^i\left(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \bigoplus_{k=0}^{a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(b - k \cdot n)\right), & \text{falls } a \geq 0. \end{cases}$$

und

$$\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = 0.$$

Dies können wir noch etwas detaillierter aufschlüsseln.

1. Der Fall $a = -1$.

$$H^i\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-1,b)\right) = 0, \text{ für } i = 0, 1, 2.$$

2. Der Fall $a = 0$.

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(0,b)\right) &= \\ &= \dim \mathrm{H}^0\left(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(b)\right) \\ &= \begin{cases} b+1, & \text{falls } b \geq 0, \\ 0, & \text{falls } b < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(0,b)\right) &= \\ &= \dim \mathrm{H}^1\left(\mathbf{P}^1\mathbf{C}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(b)\right) \\ &= \begin{cases} -b-1, & \text{falls } b \leq -1, \\ 0, & \text{falls } b \geq -1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\dim \mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(0,b)\right) = 0.$$

3. Der Fall $a > 0$.

3.1. Berechnung von $\mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)$:

3.1.1. Der Fall $b < 0$.

$$\mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = 0.$$

3.1.2. Der Fall $b - an \geq 0$.

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{a}(b - kn + 1) \\ &= (a+1)(b+1) - n \cdot \frac{a\cdot(a+1)}{2} \\ &= (a+1)\left(b + 1 - \frac{a\cdot n}{2}\right). \end{aligned}$$

3.1.3. Der Fall $0 \leq b < an$.

Wir definieren $l := \max\{k : b - k\cdot n \geq 0 \text{ und } k \geq 0\}$.

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) \\ &= (l+1)(b+1) - n \cdot \frac{l\cdot(l+1)}{2} \\ &= (l+1)\left(b + 1 - \frac{n\cdot l}{2}\right). \end{aligned}$$

3.2. Berechnung von $\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)$:

3.2.1. Der Fall $b - a\cdot n \geq -1$.

$$\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = 0.$$

3.2.2. Der Fall $b \leq -2$.

$$\dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=o}^{a}(k\cdot n-b-1)\\
&= -(a+1)(b+1)+n\cdot\frac{a\cdot(a+1)}{2}\\
&= (a+1)\left(\frac{a\cdot n}{2}-b-1\right).
\end{aligned}$$

3.2.3. Der Fall $-2 < b < a\cdot n-1$.

Wir definieren $l := \min\{k : b-l\cdot n \leq -2 \text{ und } k \geq 0\}$.

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)\\
&= \sum_{k=l}^{a}(k\cdot n-b-1)\\
&= \sum_{k=0}^{a}(k\cdot n-b-1)-\sum_{k=0}^{l-1}(k\cdot n-b-1)\\
&= (a+1)\left(\frac{a\cdot n}{2}-b-1\right)\\
&\quad -\left(-l\cdot(b+1)+n\cdot\frac{l\cdot(l-1)}{2}\right)\\
&= (a+1)\left(\frac{a\cdot n}{2}-b-1\right)\\
&\quad -l\cdot\left(n\cdot\frac{l-1}{2}-b-1\right)\\
&= (a+1)\left(\frac{a\cdot n}{2}-b-1\right)\\
&\quad +l\cdot\left(b+1-\frac{n\cdot(l-1)}{2}\right).
\end{aligned}$$

3.3. $\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = 0$.

Die verbleibenden Fälle ($\mathbf{a \leq -2}$) können nun mittels Serre-Dualität berechnet werden. Das kanonische Bündel von S_n ist

$$K_{S_n} \cong \mathcal{O}_{S_n}(-2,-(n+2)).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) &= \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2-a,-b-n-2)\right) \text{ und}\\
\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) &= \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2-a,-b-n-2)\right).
\end{aligned}$$

4. Der Fall $a = -2$.

4.1. $\mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2, b)\right) = 0$.

4.2. Berechnung von $\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2, b)\right)$:

4.2.1. Der Fall $b + n \leq -1$.

$$\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2, b)\right) \cong \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(0, -b-n-2)\right) = 0.$$

4.2.2. Der Fall $b + n > -1$.

$$\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2, b)\right) \cong \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(0, -b-n-2)\right) = b+n+1.$$

4.3. Berechnung von $\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2, b)\right)$:

4.3.1. Der Fall $b + n > -2$.

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2, b)\right) = \\ &\quad = \ \dim \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(0, -b-n-2)\right) \\ &\quad = \ 0. \end{aligned}$$

4.3.2. Der Fall $b + n \leq -2$.

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2, b)\right) = \\ &\quad = \ \dim \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(0, -b-n-2)\right) \\ &\quad = \ -b-n-1. \end{aligned}$$

5. Der Fall $a < -2$.

5.1. $\dim \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a, b)\right) = 0$.

5.2. Berechnung von $\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a, b)\right)$:

5.2.1. Der Fall $b \leq a \cdot n + n - 1$.

$$\begin{aligned} &\dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a, b)\right) = \\ &\quad = \ \dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2-a, -b-n-2)\right) \\ &\quad = \ 0. \end{aligned}$$

5.2.2. Der Fall $b+n \geq 0$.

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = \\
&\quad = \dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2-a,-b-n-2)\right) \\
&\quad = (-2-a+1)\left(\frac{(-2-a)\cdot n}{2} - (-b-n-2) - 1\right) \\
&\quad = -(a+1)\cdot\left(-n - \frac{a\cdot n}{2} + b + n + 1\right) \\
&\quad = (a+1)\cdot\left(n + \frac{a\cdot n}{2} - b - n - 1\right) \\
&\quad = (a+1)\cdot\left(\frac{a\cdot n}{2} - b - 1\right).
\end{aligned}$$

5.2.3. Der Fall $2n + a\cdot n - 1 < b + n < 0$.
Wir definieren $l := \min\{k : k\cdot n \geq -(b+n) \text{ und } k \geq 0\}$.

$$\begin{aligned}
&\dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = \\
&\quad = \dim \mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2-a,-b-n-2\right) \\
&\quad = (-2-a+1)\cdot\left(\frac{(-2-a)\cdot n}{2} - (-b-n-2) - 1\right) \\
&\qquad + l\cdot\left((-b-n-2) + 1 - \frac{n\cdot(l-1)}{2}\right) \\
&\quad = -(a+1)\cdot\left(-n - \frac{a\cdot n}{2} + b + n + 1\right) \\
&\qquad + l\cdot\left(-b-n-1 - \frac{n\cdot(l-1)}{2}\right) \\
&\quad = (a+1)\cdot\left(\frac{a\cdot n}{2} - b - 1\right) \\
&\qquad - l\cdot\left(b+n+1 + \frac{n\cdot(l-1)}{2}\right).
\end{aligned}$$

6. Berechnung von $\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right)$:

6.1. Der Fall $b+n+2 > 0$.

$$\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = 0$$

6.2. Der Fall $b+2 \leq a\cdot n + n$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) = \\
&= \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2-a, -b-n-2)\right) \\
&= (-2-a+1)\cdot\left(-b-n-2+1-\frac{(-2-a)\cdot n}{2}\right) \\
&= (a+1)\cdot\left(b+n+1-\frac{(2+a)\cdot n}{2}\right) \\
&= (a+1)\left(b+1-\frac{a\cdot n}{2}\right).
\end{aligned}$$

6.3. Der Fall $0 \geq b+n+2 > 2\cdot n + a\cdot n$.
Wir definieren $l := \max\{k : k\cdot n \leq -b-n-2 \text{ und } k \geq 0\}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}^2\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(a,b)\right) &= \mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(-2-a, -b-n-2)\right) \\
&= (l+1)\cdot\left(-b-n-2+1-\frac{n\cdot l}{2}\right) \\
&= -(l+1)\cdot\left(b+n+1+\frac{n\cdot l}{2}\right).
\end{aligned}$$

Wir werden auf diese Berechnungen meistens dann zurückgreifen, wenn wir das Verschwinden bestimmter Kohomologiegruppen überprüfen wollen.

2 Rationale Kurven in Hirzebruch-Flächen

Wir wollen nun berechnen, welche basispunktfreien Linearsysteme auf S_n rationale Kurven zu vorgegebener positiver Selbstschnittzahl enthalten.

2.1 Lemma

Basispunktfreie Linearsysteme auf Hirzebruch-Flächen S_n, die rationale Kurven vom Selbstschnitt $k > 0$ enthalten, sind die folgenden:

- $\left|\mathcal{O}_{S_1}(2E+2F)\right|$ *mit* $k = 4$.
- $\left|\mathcal{O}_{S_n}\left(E + \frac{k+n}{2}F\right)\right|$ *mit* $k \geq n$.

Beweis:

Es sei $C \in |\mathcal{O}_{S_n}(a,b)|$ eine rationale Kurve vom Selbstschnitt $C^2 = k > 0$. Die Adjunktionsformel ergibt

$$-C^2 = 2 + K_{S_n}.C.$$

Der Selbstschnitt von C ist

$$C^2 = (a,b)(a,b) = -n \cdot a^2 + 2ab = k.$$

Zunächst berechnen wir $K_{S_n}.C$:

$$K_{S_n}.C = (-2, -(n+2))\,(a,b) = 2an - 2b - an - 2a$$

und setzen dies, sowie $C^2 = k$ in die Adjunktionsformel ein:

$$\begin{aligned} 2an - 2b - an - 2a + 2 &= -k \\ an - 2a + 2 + k &= 2b \\ a^2n - 2a^2 + 2a + ak &= 2ab \end{aligned}$$

Aus der Formel für C^2 ergibt sich $2ab = k + na^2$. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned} a^2n - 2a^2 + 2a + ka &= a^2 + k \\ 2a^2 - 2a - ak + k &= 0 \\ 2a(a-1) - k(a-1) &= 0 \\ (2a-k)(a-1) &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten als notwendige Bedingungen $a = 1$ beziehungsweise $a = \frac{k}{2}$. Setzen wir diese Werte in die Adjunktionsformel und in die Selbstschnittformel ein, so ergeben sich als Kandidaten die Linearsysteme

$$\left|\mathcal{O}_{S_n}\left(1, \frac{k+n}{2}\right)\right| \text{ und } \left|\mathcal{O}_{S_n}\left(\frac{k}{2}, \frac{nk}{4} + 1\right)\right|.$$

Wobei nur diejenigen Werte für n und k eingesetzt werden dürfen, die ganzzahlige Resultate liefern.

Um zu sehen, welche Linearsysteme der Form $\left|\mathcal{O}_{S_n}\left(a, \frac{k+n}{2}\right)\right|$ basispunktfrei sind, betrachten wir die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{S_n}\left(\frac{n+k}{2}F\right) \to \mathcal{O}_{S_n}\left(E + \frac{n+k}{2}F\right) \to \mathcal{O}_E\left(\frac{k-n}{2}\right) \to 0.$$

Der letzte Term ergibt sich aus $(E+\frac{n+k}{2}F).E = -n + \frac{n+k}{2} = \frac{k-n}{2}$. Da $\mathrm{H}^1\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}(\frac{n+k}{2}F)\right) = 0$ ist (siehe Appendix 1, Seite 90, $a=0$), folgt die Surjektivität der Abbildung

$$\mathrm{H}^0\left(S_n, \mathcal{O}_{S_n}\left(E+\frac{n+k}{2}F\right)\right) \to \mathrm{H}^0\left(E, \mathcal{O}_E\left(\frac{k-n}{2}\right)\right).$$

Die Basispunkte in $\left|\mathcal{O}_{S_n}(E+\frac{k+n}{2}F)\right|$ sind in einer Fixkomponente enthalten, deren Reduktion nur E sein kann. Im Falle $k \geq n$ gibt es keine Fixkomponente und somit auch keine Basispunkte.

Zur Untersuchung des Linearsystems $\left|\mathcal{O}_{S_n}(\frac{k}{2}, \frac{nk}{4}+1)\right|$ betrachten wir die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{S_n}\left(\left(\frac{k}{2}-1\right)E + \left(\frac{nk}{4}+1\right)F\right) \to \mathcal{O}_{S_n}\left(\frac{k}{2}E + \left(\frac{nk}{4}+1\right)F\right) \to$$

$$\to \mathcal{O}_E\left(1-\frac{nk}{4}\right) \to 0.$$

Falls $1-\frac{nk}{4} < 0$ ist, ist E eine Fixkomponente von $\left|\mathcal{O}_{S_n}\left(\frac{k}{2}E + (\frac{nk}{4}+1)F\right)\right|$. Also nehmen wir $nk = 0$ beziehungsweise $nk = 4$ an. Hierfür gibt es nur die folgenden Möglichkeiten:

1. $n = 0$ und $k > 0$. Da $S_0 = \mathbf{P}^1\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ ist, entspricht dies gerade dem Fall $a = 1$ und $b = \frac{k}{2}$, den wir in dem anderen Linearsystem schon betrachtet haben.

2. $n = 1$ und $k = 4$. Dies entspricht $\mathcal{O}_{S_1}(2E+2F)$.

3. $n = 2$ und $k = 2$. Dies entspricht $\mathcal{O}_{S_2}(E+2F)$ und wurde auch schon betrachtet.

Da $\mathrm{H}^1(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(E+2F)) = 0$ ist (siehe A.1, Seite 90, $a > 0$) induziert die Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{S_1}(E+2F) \to \mathcal{O}_{S_1}(2E+2F) \to \mathcal{O}_E \to 0$$

eine surjektive Abbildung

$$\mathrm{H}^0(S_1, \mathcal{O}_{S_1}(2E+2F)) \to \mathrm{H}^0(E, \mathcal{O}_E).$$

Damit ist auch dieses Linearsystem basispunktfrei. ■

Als Anwendung erhalten wir eine Beschreibung, wie Flächen mit rationalen Kurven mit Hirzebruch-Flächen zusammenhängen.

2.2 Satz
Es sei S eine glatte Fläche und $C \subset S$ eine glatte, rationale Kurve mit $C^2 = k \geq 2$. Dann existiert (eventuell nach Aufblasen von S außerhalb von C) eine holomorphe Abbildung

$$\Psi : S \to S_n$$

auf eine Hirzebruch-Fläche S_n mit $n \leq k$, die biholomorph auf einer Umgebung von C ist.

Beweis:

Die Existenz einer rationalen Kurve von positivem Selbstschnitt bedeutet, daß S eine rationale Fläche ist (siehe Kapitel 2, Seite 47). Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach k.

Für $k = 2$ haben wir die Aussage bereits im Kapitel V.2 (Seite 53) bewiesen.

Nun sei $k > 2$ und die Aussage für $k - 1$ bewiesen. Dann betrachten wir die Aufblasung

$$\sigma : S' \to S$$

von S in einem Punkt $P \in C$. Die eigentliche Transformierte $C' \subset S'$ von C hat den Selbstschnitt $k - 1$ und somit gibt es auf Grund der Induktionsvoraussetzung eine holomorphe Abbildung

$$\phi : S' \to S_{n'}$$

mit $n' \leq k - 1$. Die totale Transformierte von C ist

$$\sigma^*(C) = C' + R,$$

wobei R eine rationale Kurve ist und es gilt:

$$\begin{aligned} R^2 &= -1, \\ R.C &= 1. \end{aligned}$$

Längs C' ist ϕ biregulär und es gibt eine rationale Kurve $C_0' \subset S_{n'}$ mit $C' = \phi^*(C_0')$.
Als nächstes zeigen wir, daß die Einschränkung $\phi|_R$ biholomorph ist.
Es sind

$$\begin{aligned} \mathrm{H}^1\left(S', \mathcal{O}_{S'}(-R)\right) &= 0 \text{ und} \\ \mathrm{H}^1\left(C', \mathcal{O}_{S'}(k-2)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Daraus und aus den exakten Sequenzen

$$0 \to \mathcal{O}_{S'} \to \mathcal{O}_{S'}(C') \to \mathcal{O}_{C'}(k-1) \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_{S'}(-R) \to \mathcal{O}_{S'}(C'-R) \to \mathcal{O}_{C'}(k-2) \to 0$$

folgt

$$\mathrm{H}^1\left(S', \mathcal{O}_{S'}(C'-R)\right) = 0.$$

Somit folgt aus der Sequenz

$$0 \to \mathcal{O}_{S'}(C'-R) \to \mathcal{O}_{S'}(C') \to \mathcal{O}_{S'}(C')|_R \to 0$$

die Surjektivität

$$\mathrm{H}^0\left(S', \mathcal{O}_{S'}(C')\right) \to \mathrm{H}^0\left(R, \mathcal{O}_R(1)\right).$$

Daher ist $R \cong \phi(R) =: R_0$, mit $R_0.C_0' = 1$.
Nun wollen wir dasjenige Linearsystem bestimmen, welches R_0 enthält. Nach Lemma 2.1 (Seite 97) sind die beiden folgenden Fälle möglich.

1. $n = 1, \quad C_0' \in \left|\mathcal{O}_{S_1}(2E + 2F)\right|.$
   Aus $C_0'.R_0 = 1$ und $R_0 \in \left|\mathcal{O}_{S_1}(aE + bF)\right|$ ergibt sich

   $$\begin{aligned} C_0'.R_0 = (2,2)(a,b) &= -2a + 2b + 2a \\ &= 2b \\ &= 1. \end{aligned}$$

   Hierfür gibt es keine ganzzahlige Lösung.

2. n beliebig, $k - 1 \geq n'$ und $C_0 \in \left|\mathcal{O}_{S_n'}(E + \frac{k-1+n'}{2}F)\right|.$
   Aus $C_0'.R_0 = 1$ und $R_0 \in \left|\mathcal{O}_{S_n'}(aE + bF)\right|$ergibt sich

   $$\begin{aligned} C_0'.R_0 &= (1, \frac{k-1+n'}{2})(a,b) \\ &= -an' + b + \frac{a}{2}(k-1+n') \\ &= 1. \end{aligned}$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} -2an' + 2b + ak - a + an' &= 2 \\ 2b + ak - a - an' &= 2 \\ 2b + a(k - n' - 1) &= 2. \end{aligned}$$

Aus $k - 1 \geq n'$ folgt $a(k - n' - 1) \geq 0$. Daher gibt es nur die folgenden vier Möglichkeiten

1.: $b = 1;\ a = 0;\ k - 1 \geq n',$

2.: $b = 1;\ a \geq 0;\ k - 1 = n',$

3.: $b = 0;\ a = 1;\ k - n' - 1 = 2;\ k - n' = 3,$

4.: $b = 0;\ a = 2;\ k - n' - 1 = 1;\ k - n' = 2.$

Da R_0 eine rationale Kurve ist, gilt $R_0^2 + K_{S_{n'}}.R_0 = -2$. Dies testen wir für die vier Möglichkeiten im zweiten Fall.

1. $R_0 = (0, 1), \quad k - 1 \geq n'$

$$\begin{aligned} R_0^2 &= 0, \\ K_{S'_n}.R_0 &= (0,1)(-2, -(n'+2)) \\ &= -2. \end{aligned}$$

Dieser Fall ist möglich.

2. $R_0 = (a, 1), \quad k - 1 = n'$

$$\begin{aligned} R_0^2 &= (a,1)^2 \\ &= -a^2 n' + 2a. \\ K_{S'_n}.R_0 &= (-2, -(n'+2))(a,1) \\ &= 2an' - 2 - an' - 2a \\ &= an' - 2a - 2. \\ R_0^2 + K_{S'_n}.R_0 &= -a^2 n' + 2a + an' - 2a - 2 \\ &= -2 \\ an'(1-a) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung $a = 0$ wurde in 1. diskutiert. Die Lösung $n' = 0$ induziert $k = 1$, was den Voraussetzungen nicht entspricht. Es bleibt die Möglichkeit $a = 1$. Das ergibt $R_0 = (1,1)$ und $R_0^2 = 2 - n'$, mit $n' \geq 2$.

3. $R_0 = (1,0), \quad k - n' = 3$

$$\begin{array}{rcl} R_0^2 & = & -n' \\ R_0.K_{S'_n} & + & (1,0)(-2,-(n'+2)) \\ & = & 2n' - n' - 2 \\ & = & n' - 2. \\ R_0^2 + R_0.K_{S'_n} & = & -n' + n' - 2 \\ & = & -2. \end{array}$$

Dieser Fall ist möglich.

4. $R_0 = (2,0), \quad k - n' = 2$

$$\begin{array}{rcl} R_0^2 & = & -4n' \\ R_0.K_{S'_n} & = & (2,0)(-2,-(n'+2)) \\ & = & 4n' - 2n' - 4 \\ R_0^2 + R_0.K_{S'_n} & = & -4n' + 4n' - 3n' - 4 \end{array}$$

Nun müßte $-2n' - 4 = -2$ sein. Da dies mit nichtnegativem n' nicht möglich ist, kann dieser Fall ausgeschloßen werden.

Nun gilt $R = \phi^*(R_0) - E'$, wobei E' exzeptionell bezüglich ϕ ist, das bedeutet insbesondere $(E')^2 \leq 0$. Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} R^2 & = & R_0^2 + (E')^2 \\ & = & -1. \end{array}$$

Ist $R_0 = E$ oder $R_0 = (1,1)$ mit $R_0^2 < 0$, so folgt $(E')^2 = 0$ und $R_0^2 = -1$. Das heißt, die Abbildung ϕ ist in einer Umgebung von R biholomorph. Wir erhalten unmittelbar eine holomorphe Abbildung $\Psi : S \to S_n$ mit $n = n'$.

Ist $R_0 = F$ oder $R_0 = (1,1)$ mit $R_0^2 = 0$, so gilt $(E')^2 = -1$. Da $K_{S'}|_{E'} = \phi^* K_{S'_n}|_{E'} \otimes N_{E' \setminus S'}$ ist, folgt $K'_S.E' = (E')^2 = -1$. Somit ist E' eine rationale -1-Kurve. Als nächstes blasen wir S'_n in $\phi(E')$ auf. Die eigentliche Transformierte von R_0 hat nun den Selbstschnitt -1 und kann abgeblasen werden. Damit wird S'_n zu S_n, mit $n = n' + 1$ transformiert und wir erhalten die gewünschte Abbildung $\Phi : S \to S_n$. ∎

Anhang B

Hopf-Flächen

In diesem Kapitel wollen wir die prominentesten nichtprojektiven Flächen, die Hopf-Flächen, beschreiben. Diese waren die ersten Beispiele für Mannigfaltigkeiten ohne Kähler-Metrik (siehe [Hop48]) und wurden später ausführlich in den Kodaira Arbeiten zu komplexen Flächen untersucht (insbesondere [Kod66b] und [Kod69]).

0.1 Definition
Eine kompakte, komplexe Fläche F heißt Hopf-Fläche, falls ihre universelle Überlagerung $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ ist.
Eine Hopf-Fläche heißt primäre Hopf-Fläche, falls ihre Fundamentalgruppe isomorph zu $\mathbf{Z}$ ist und sonst sekundäre Hopf-Fläche.

Ist eine Hopf-Fläche F mit universeller Überlagerung $\pi : \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} \to F$ gegeben und G die Gruppe der Decktransformationen, so operiert G auf $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ und es gilt

$$F \cong \left(\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}\right)/G\ .$$

Die Isomorphietypen von G sind für primäre Hopf-Flächen bekannt und werden in dem folgenden Satz beschrieben.

0.2 Satz (Kodaira)
Jede Hopf-Fläche wird durch eine primäre Hopf-Fläche endlich und unverzweigt überlagert.
Zu einer primären Hopf-Fläche F existieren Zahlen $m \in \mathbf{N},\ a,b,t \in \mathbf{C}$ mit

$$0 < |a| \le |b| < 1 \text{ und } (b^m - a)t = 0,$$

so daß $F \cong (\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\})/G$ ist und G ist die durch den folgenden Automorphismus γ von $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ erzeugte Gruppe:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} &\rightarrow \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} \\ (z_1, z_2) &\mapsto (az_1 + tz_2^m, bz_2). \end{aligned}$$

Sind umgekehrt $m \in \mathbf{N}$, $a, b, t \in \mathbf{C}$ wie oben gegeben, so operiert die dazu korrespondierende Gruppe frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ und der Quotient ist eine Hopf-Fläche.

Beweis: Siehe [Kod66b] Theorem 30.

1 Diffeomorphietyp einer primären Hopf-Fläche.

Wir zeigen nun, daß eine primäre Hopf-Fläche diffeomorph zu $S^1 \times S^3$ ist. Wir können $t = 0$ wählen. Nun betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} &\rightarrow S^1 \times S^3 \\ (z_1, z_2) &\mapsto \left(\exp\left(2\pi i \left(\frac{\log(z_1\overline{z_1})}{\log(a\overline{a})} + \frac{\log(z_2\overline{z_2})}{\log(b\overline{b})}\right)\right), \right. \\ &\qquad \left. \exp\left(2\pi i \frac{\log z_1}{\log a}\right), \exp\left(2\pi i \frac{\log z_2}{\log b}\right)\right). \end{aligned}$$

Dabei ist $S^3 \hookrightarrow \mathbf{C}^4$ als Einheitssphäre eingebettet. Dies ist eine C^∞-Abbildung, invariant unter der Abbildung γ und induziert einen Diffeomorphismus zwischen $S^1 \times S^3$ und der Hopf-Fläche $(\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\})/<\gamma>$.

1.1 Bemerkungen

1.1.1 Umgekehrt ist jede kompakte, komplexe Fläche, die homöomorph zu $S^1 \times S^3$ ist, eine Hopf-Fläche (siehe [Kod66a]).

1.1.2 Aus dem Diffeomorphietyp einer Hopf-Fläche folgt, daß es keine Kähler-Metrik auf einer Hopf-Fläche geben kann. Für Kähler-Mannigfaltigkeiten hat man die Hodge-Zerlegung und diese impliziert, daß die ungeraden Betti-Zahlen gerade sind. Nun ist aber $b_1(F) = b_3(F) = 1$. Insbesondere sind Hopf-Flächen nicht projektiv.

Bevor wir die algebraische Dimension einer Hopf-Fläche bestimmen, wollen wir einige Kohomologiegruppen und das kanonische Bündel berechnen.

2 Kohomologiegruppen primärer Hopf-Flächen.

Für Mannigfaltigkeiten ohne Kähler-Struktur gilt die Hodge-Zerlegung nicht. Der folgende Satz zeigt, daß es für beliebige kompakte Flächen eine Abschätzung der Hodge-Zahlen durch die Betti-Zahlen gibt. Dies ist in höheren Dimensionen nicht mehr möglich (siehe Bemerkung III.1.1 auf Seite 27).

2.1 Satz
Es sei S eine kompakte, komplexe Fläche. Dann gilt

1.
$$b_1(S) = \mathrm{h}^0(\Omega^1_S) + \mathrm{h}^1(\mathcal{O}_S)$$
$$\mathrm{h}^1(\mathcal{O}_S) = \Big(\mathrm{h}^0(\Omega^1_S) + b_1(S)\Big) \bmod 2$$

2. *Falls $k = 2$ oder $k = 1$ und $b_1(S)$ gerade ist, so gilt*
$$\mathrm{H}^k(S, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \mathrm{H}^p(S, \Omega^q_S).$$

Beweis:
Siehe [Kod64] Theorem 3 (Seite 755) und [BPV84] Chapter IV Theorem 2.9. (Seite 118).

2.2 Bemerkung
Da eine primäre Hopf-Fläche diffeomorph zu $S^1 \times S^3$ ist, folgt aus dem ersten Teil des Satzes
$$\mathrm{h}^1(\mathcal{O}_F) = 1 \text{ und } \mathrm{h}^0(\Omega^1_F) = 0.$$
Da $b_2(F) = 0$ ist, impliziert der zweite Teil des Satzes
$$\mathrm{h}^2(\mathcal{O}_F) = \mathrm{h}^1(\Omega^1_F) = \mathrm{h}^0(\Omega^2_F) = 0.$$

Setzen wir $\mathrm{h}^1(\mathcal{O}_F) = 1$, $\mathrm{h}^2(\mathcal{O}_F) = 0$ und $c_2(F) = 0$ in die Noether'sche Formel
$$1 - \mathrm{h}^1(\mathcal{O}_F) + \mathrm{h}^2(\mathcal{O}_F) = \frac{1}{12}\Big(c_1^2(F) + c_2(F)\Big)$$
ein, so ergibt sich $(c_1(F))^2 = 0$.

3 Das kanonische Bündel.

Wir bestimmen das kanonische Bündel der primären Hopf-Fläche, $(\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}) /< \gamma >$ indem wir auf $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ eine meromorphe, γ-invariante 2-Form konstruieren. Der Automorphismus $\gamma : \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ sei durch

$$(z_1, z_2) \mapsto (az_1 + tz_2^m, bz_2)$$

gegeben. Wir sehen, daß $\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} : z_2 = 0\}$ eine γ-invariante Menge ist, deren Bild $C = \mathbf{C}^* /< \gamma >$ in $F = \mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\} /< \gamma >$ eine elliptische Kurve ist. Für $t = 0$ erhalten wir mit $z_1 = 0$ ebenfalls eine γ-invariante elliptische Kurve $C_0 = \mathbf{C}^* /< \gamma >$. Nun existiert auf F die folgende 2-Form.

$$\Psi := \begin{cases} \frac{1}{z_2^{m+1}} dz_1 \wedge dz_2 & \text{falls } t \neq 0 \\ \\ \frac{1}{z_1 z_2} dz_1 \wedge dz_2 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

Im Falle $t \neq 0$ benutzen wir dabei, daß $a = b^m$ ist.
Damit erhalten wir für das kanonische Bündel K_F von F:

$$K_F = \begin{cases} -(m+1)\,[C] & \text{falls } t \neq 0 \\ \\ -[C_0] - [C] & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

4 Die algebraische Dimension einer Hopf-Fläche.

Kennt man zu einer primären Hopf-Fläche F die Gruppe der Decktransformationen, so läßt sich daraus die algebraische Dimension ermitteln.

4.1 Satz
Es sei $F = (\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}) /< \gamma >$ eine Hopf-Fläche mit $\gamma(z_1, z_2) = (az_1 + tz_2^m, bz_2)$. Dann ist die algebraische Dimension $a(F)$ von F höchstens eins und es gilt:

$$\begin{aligned} a(F) = 0, &\quad \textit{falls} \quad t \neq 0 \textit{ oder } a^k \neq b^l \textit{ für } k, l \in \mathbf{N} \setminus \{0\}, \\ a(F) = 1, &\quad \textit{falls} \quad t = 0 \textit{ und } a^k = b^l \textit{ für einige } k, l \in \mathbf{N} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Beweis:
Es sei f eine meromorphe Funktion auf F und $\tilde{f}$ der Lift von f auf $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$.

Auf $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ kann man jede meromorphe Funktion auf ganz $\mathbf{C}^2$ fortsetzen. Es sei $\sum c_{ij} z_1^i z_2^j$ die Laurent-Reihenentwicklung von $\tilde{f}$ im Nullpunkt. Diese Funktion muß nun invariant sein unter der Operation von $< \gamma >$, das bedeutet

$$\sum c_{ij} z_1^i z_2^j = \sum c_{ij} \left(az_1 + tz_2^m\right)^i b^j z_2^j.$$

Dies ist für $t \neq 0$ nur für die konstante Funktion möglich. Wir nehmen nun also $t = 0$ an. Dann muß gelten:

$$\sum c_{ij} z_1^i z_2^j = \sum c_{ij} a^i b^j z_1^i z_2^j.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt sein, wenn für einige Zahlen i und j gilt $a^i b^j = 1$. In diesem Fall ist die algebraische Dimension von F eins. ∎

4.2 Satz

Jedes elliptische Hauptfaserbündel über $\mathbf{P}^1\mathbf{C}$ *ist entweder ein Produkt oder eine Hopf-Fläche.*

Beweis:

In Bemerkung V.1.3.3 (Seite 53) hatten wir gesehen, daß elliptische Hauptfaserbündel über Kurven durch $\mathbf{C}^*$-Bündel überlagert werden.

Es sei $S \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ ein elliptisches Hauptfaserbündel und $\mathcal{L}^* \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ das überlagernde $\mathbf{C}^*$-Bündel. Dann ist $\mathcal{L}^*$ von der Gestalt $(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(d))^*$. Ist $d = 0$, so ist S isomorph zu dem Produkt aus *pec* und einer elliptischen Kurve. Wir können im weiteren annehmen, daß $d \neq 0$ ist. Durch eine faserweise definierte Abbildung der Form $z \mapsto z^{-d}$ erhalten wir eine Überlagerung

$$(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(-1))^* \to \mathcal{L}^*.$$

Nun ist aber $(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1\mathbf{C}}(-1))^*$ isomorph zu $\mathbf{C}^2 \setminus \{0,0\}$ und daher ist S eine Hopf-Fläche. ∎

4.3 Bemerkung

Ist $\pi : S \to \mathbf{P}^1\mathbf{C}$ ein elliptisches Hauptfaserbündel mit Faser E und einem Schnitt $\sigma : \mathbf{P}^1\mathbf{C} \to S$, so ist $S \cong E \times \mathbf{P}^1\mathbf{C}$.

Beweis:

Aus der Existenz des Schnittes folgt, daß S projektiv ist. Da die algebraische Dimension von Hopf-Flächen höchstens eins ist, folgt die Aussage aus obigem Satz.

5 Hopf-Flächen in der Kodaira-Klassifikation.

Der folgende Satz ordnet die Hopf-Flächen in die Klassifikation der Flächen ein.

5.1 Satz
Es sei F eine kompakte, komplexe Fläche. Dann gilt

1. *Ist F eine minimale Fläche der algebraischen Dimension $a(F) = 1$ und $\kappa(F) = -\infty$, so ist F eine Hopf-Fläche.*

2. *Es sei $a(F) = 0$. Die Fläche F ist genau dann eine Hopf-Fläche, wenn $b_1(F) = 1$ und $b_2(F) = 0$ ist und F mindestens eine Kurve enthält.*

Beweis:
Siehe [Kod66b] Theorem 34 (Seite 699) und Theorem 35 (Seite 707).

Anhang C

Deformationstheorie

In diesem Abschnitt werden einige Resultate aus der Deformationstheorie aufgeführt, so wie sie in dieser Arbeit benötigt werden. Eine ausführliche Übersicht zur Deformationstheorie und Literatur dazu, findet sich in [Pal90].

1 Definition
Es seien X und W kompakte, komplexe Mannigfaltigkeiten und

$$\begin{aligned} \pi_X : \quad X \times W &\longrightarrow X, \\ \pi_W : \quad X \times W &\longrightarrow W \end{aligned}$$

die kanonischen Projektionen. Eine analytische Familie komplexer Untermannigfaltigkeiten der komplexen Mannigfaltigkeit X mit dem Modulraum W ist eine komplexe Untermannigfaltigkeit $Z \subset X \times W$, so daß die Einschränkung

$$\mu := \pi_W|_Z : Z \to W$$

eine eigentliche, flache und reguläre Abbildung ist.

2 Bemerkung
Mit der Abbildung $\nu := \pi_X|_Z : Z \to X$ erhalten wir zu jedem Punkt $w \in W$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit $X_w := \nu(\mu^{-1}(w))$. Wir benutzen auch die Schreibweise $\{X_w \hookrightarrow X : w \in W\}$ für eine analytische Familie mit dem Modulraum W.

Die exakte Folge

$$N^\vee_{Z \backslash X \times W} \to \Omega^1_{X \times W}|_Z \to \Omega^1_Z \to 0$$

und die Projektion $\mu^*\Omega^1_W \oplus \nu^*\Omega^1_X \to \mu^*\Omega^1_W$ induzieren die Abbildung

$$\rho : TW \to \mu_* N_{Z\backslash X\times W}.$$

Da μ eine flache Abbildung ist, gilt für alle $w \in W$ und $Z_w := \mu^{-1}(w)$ die Isomorphie $N_{Z\backslash X\times W}|_{Z_w} = N_{Z_w\backslash X}$. Somit induziert die Abbildung ρ in jedem Punkt $w \in W$ einen Homomorphismus

$$\rho_w : T_wW \to \mathrm{H}^0\left(Z_w, N_{Z_w\backslash X}\right).$$

3 Definition
Es sei $\{X_w \hookrightarrow X : w \in W\}$ eine analytische Familie komplexer Untermannigfaltigkeiten von X. Die Abbildung

$$\rho_w : T_wW \to \mathrm{H}^0\left(X_w, N_{X_w\backslash X}\right)$$

heißt Kodaira-Spencer-Abbildung im Punkt w.

Eine analytische Familie heißt vollständig, falls die Kodaira-Spencer-Abbildung ρ_w in jedem Punkt $w \in W$ ein Isomorphismus ist.

Eine Familie heißt maximal in einem Punkt $w_0 \in W$, falls für jede andere Familie $\{X_{\tilde{w}} \hookrightarrow X : \tilde{w} \in \tilde{W}\}$, in der ein Punkt $\tilde{w}_0 \in \tilde{W}$ mit $X_{w_0} \cong X_{\tilde{w}_0}$ existiert, gilt:
Es gibt eine Umgebung $\tilde{U} \subset \tilde{W}$ von $\tilde{w}_0$ und eine holomorphe Abbildung $f : \tilde{U} \to W$ mit $f(\tilde{w}_0) = w_0$ und $X_{f(\tilde{w})} \cong X_{\tilde{w}}$ für alle $\tilde{w} \in \tilde{U}$.

Die Familie heißt maximal, wenn sie in jedem Punkt maximal ist.

Der folgende Satz beschreibt die Existenz maximaler Familien.

4 Satz (Kodaira, 1962)
Es sei Y eine kompakte, komplexe Untermannigfaltigkeit der kompakten, komplexen Mannigfaltigkeit X und es gelte $\mathrm{H}^1\left(Y, N_{Y\backslash X}\right) = 0$. Dann gehört Y zu einer vollständigen, analytischen Familie $\{Y_w : w \in W\}$ kompakter, komplexer Untermannigmannigfaltigkeiten von X. Diese Familie ist maximal und ihr Modulraum ist von der Dimension $\dim_{\mathbf{C}} \mathrm{H}^0\left(Y, N_{Y\backslash X}\right)$.

Beweis: Siehe [Kod62].

5 Bemerkung
Die Menge aller kompakten komplexen Unterräume eines kompakten komplexen Raumes X wird stets durch einen komplexen Raum parametrisiert. Dies wurde von Douady in [Dou66] gezeigt. Dabei ist der Parameterraum nicht notwendigerweise kompakt. Ist X eine Kähler-Mannigfaltigkeit, so ist der Parameterraum kompakt.

Literaturverzeichnis

[AHS78] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer:
Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry.
Proc. R. Soc. London A., 362: 425–461, 1978.

[AS71] A. Andreotti, W. Stoll:
Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions.
Number 234 in Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971).

[Bes87] A. L. Besse:
Einstein manifolds.
(Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987).

[BPV84] W. Barth, C. Peters, A. V. de Veen:
Compact complex surfaces.
(Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984).

[BS95] M. Beltrametti, A. J. Sommese:
The adjunction theory of complex projective varieties.
Expos. in Math (deGruyter, 1995).

[Dou66] A. Douady:
Le probleme des modules pour les sous-espaces analitiques compacts d'un espace analitique dome.
Ann. Inst. Fourier, 16(1), 1966.

[FM94] R. Friedman, J. W. Morgan:
Smooth four-manifolds and complex surfaces.
(Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1994).

[Fuj86] T. Fujita:
Zariski decomposition and canonical rings of elliptic threefolds.
J. Math. Soc. Japan, 38(1): 19–37, 1986.

[Ger62] J. C. H. Gerretsen:
Lectures on tensor calculus and differential geometry.
(Wolters-Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1962).

[GR84] H. Grauert, R. Remmert:
Coherent analytic sheaves.
(Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1984).

[Gun78] R. Gunning:
On uniformization of complex manifolds: The role of connections.
Number 22 in Math. Notes (University Press, Princeton, 1978).

[Har70] R. Hartshorne:
Ample vector bundles.
Number 156 in Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970).

[Höf93] T. Höfer:
Remarks on torus principal bundles.
J. Math. Kyoto Univ., 33(1): 227–259, 1993.

[Hir51] F. Hirzebruch:
Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.
Mathematische Annalen, 124: 77–86, 1951.

[Hop48] H. Hopf:
Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten.
In *Studies and Essays presented to R. Courant*, 167–185 (Interscience, 1948).

[Kat82] M. Kato:
Examples of simply connected complex 3-folds.
Tokyo J. Math., 5(2): 341–364, 1982.

[Kat85] M. Kato:
On compact complex 3-folds with lines.
Japan J. Math., 11(1): 1–58, 1985.

[Kat89] M. Kato:
Factorization of compact complex 3-folds which admit certain projective structures.
Tohoku Math. J., 41: 359–397, 1989.

[KM71] K. Kodaira, J. Morrow:
Complex manifolds.
(Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1971).

[KN69] S. Kobayashi, K. Nomizu:
Foundations in differential geometry. II.
(John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, 1969).

[KO80] S. Kobayashi, T. Ochiai:
Holomorphic projective structure on compact complex surfaces.
Math. Ann., 249: 75–94, 1980.

[KO81] S. Kobayashi, T. Ochiai:
Holomorphic projective structures on compact complex surfaces. II.
Math. Ann., 255: 519–521, 1981.

[Kod62] K. Kodaira:
A theorem of completeness of characteristic systems for analytic families of compact submanifolds of complex manifolds.
Ann. Math., 75: 146–162, 1962.

[Kod64] K. Kodaira:
On the structure of compact complex analytic surfaces. I.
Am. J. Math., 86: 751–798, 1964.

[Kod66a] K. Kodaira:
Complex structures on $S^1 \times S^3$.
Proc. nat. Acad. Sci. USA, 55: 240–243, 1966.

[Kod66b] K. Kodaira:
On the structure of compact complex analytic surfaces. II.
Am. J. Math., 88: 682–721, 1966.

[Kod69] K. Kodaira:
On the structure of compact complex analytic surfaces. III.
Am. J. Math., 90: 55–83, 1969.

[KW83] S. Kobayashi, H. Wu:
Complex differential geometry.
volume 3 of *DMV-Seminar* (Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1983).

[KY86] M. Kato, A. Yamada:
Examples of simply connected compact complex 3-folds. II.
Tokyo J. Math., 9(1): 1–28, 1986.

[Lan98] A. Langer:
Twistor spaces of small degree.
Q. J. Math. Oxford (2), 49: 43–58, 1998.

[Mor79] S. Mori:
Projective manifolds with ample tangent bundles.
Ann. Math., 110: 593–606, 1979.

[MP97] Y. Miyaoka, T. Peternell:
Geometry of higher dimensional algebraic varieties.
volume 26 of *DMV-Seminar* (Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1997).

[MS72] D. Mumford, K. Suominen:
Introduction to the theory of moduli.
In *Proc. 5th Nordic Summer-School in Math, Oslo 1970*, 171–222 (Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, The Netherlands, 1972).

[Nak87] N. Nakayama:
On Weierstrass models.
In *Algebraic geometry and commutative algebra, in Honor of Masayoshi Nagata* (H. Hijikato, H. Hironaka, M. Maruyama, H. Matumura, M. Miyanishi, T. Oda, K. Ueno, eds.), volume II, 405–431. Editorial Commitee for Algebraic Geometry and Commutative Algebra (Academic Press, Orlando, Florida, 1987).

[Oxb94] W. M. Oxbury:
Twistor spaces and Fano varieties.
Q. J. Math. Oxford (2), 45: 343–366, 1994.

[Pal90] V. P. Palamodov:
Deformations of complex spaces.
In *Several complex variables. IV.*, number 10 in Encycl. Math. Sci., 105–194 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1990).

[Pon91] M. Pontecorvo:
Hermitian surfaces and a twistor space of algebraic dimension 2.
Proc. Am. Math. Soc., 113(1): 177–186, 1991.

[Rem56] R. Remmert:
Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Räumen.
Math.Ann., 132: 277–288, 1956.

[Sie55] C. Siegel:
Meromorphe Funktionen auf kompakten analytischen Mannigfaltigkeiten.
Nach. Acad. Wiss. Göttingen, 71–77, 1955.

[Thi54] W. Thimm:
Meromorphe Abbildungen von Riemannschen Bereichen.
Math. Zeitschrift, 60: 435–457, 1954.

[Uen73] K. Ueno:
Classification of algebraic varieties. I.
Comp. Math, 27: 277–342, 1973.

[Uen75] K. Ueno:
Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces.
Number 439 in Lecture Notes in Mathematics (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975).

[Uen81] K. Ueno:
Bimeromorphic geometry of algebraic and analytic threefolds.
In *Algebraic threefolds.* (A. Comte, ed.), 1–34 (Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), 1981).

[Uen87] K. Ueno:
On compact analytic threefolds with non-trivial Albanese tori.
Math. Ann., 278: 41–70, 1987.

[Yam86] A. Yamada:
Small deformations of certain compact manifolds of class L.
Tohoku Math. Journ., 38: 99–122, 1986.

Index