Banachbündel über q-konvexen Mannigfaltigkeiten

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)
im Fach Mathematik

eingereicht an der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin

von
Matjaž Erat
geboren am 02.02.1975 in Berlin

Präsident der Humboldt-Universität zu Berlin:
Prof. Dr. Christoph Markschies

Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II:
Prof. Dr. Uwe Küchler

Gutachter:

1. Prof. Dr. Jürgen Leiterer
2. Dr. George Marinescu
3. Dr. Egmont Porten

eingereicht am: 10. Januar 2006
Tag der Verteidigung: 01. Juni 2006

Zusammenfassung

Sei V ein holomorphes Vektorbündel über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X. Die Andreotti-Grauert-Theorie sagt, daß $\dim H^r(X,V) < \infty$ für $r \geq q$, wobei die Kohomologie verschwindet, falls X q-vollständig ist. Ist $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel, dann ist bekannt, daß $H^r(X,E) = 0$ für $r \geq 1$, falls X Steinsch ist.

Kapitel I gibt einen ausführlichen Überblick über die Arbeit.
In Kapitel II wird gezeigt, daß es holomorphe Hilbertbündel über 1-konvexen Mannigfaltigkeiten gibt, für die die erste Kohomologie nicht Hausdorffsch ist.
In Kapitel III wird folgender Endlichkeitssatz gezeigt: Ist E ein holomorph triviales Banachbündel oder ein holomorphes Banachbündel von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X, und ist $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel mit $H^q(X,V) = 0$, dann gilt $\dim H^q(X, V \otimes E) < \infty$. Ist X q-vollständig, dann gilt $H^r(X, V \otimes E) = 0$ für $r \geq q$. Für $r > q$ kann dies auch für beliebige holomorphe Banachbündel E gezeigt werden. Im Anhang wird skizziert, wie der Ansatz der L^2-Methode im Fall $r = q$ für Hilbertbündel zu einem Verschwindungssatz führen könnte.

Schlagwörter:
holomorphe Banachbündel, q-konvexe Mannigfaltigkeiten, Kohomologie, Hausdorff-Eigenschaft

Abstract

Let V be a holomorphic vector bundle over a q-convex manifold X.
The Andreotti-Grauert theory says that $\dim H^r(X,V) < \infty$ for $r \geq q$, and the cohomology is vanishing if X is q-complete. If $E \to X$ is a holomorphic Banach bundle, it is known that $H^r(X,E) = 0$ for $r \geq 1$ if X is Stein.

Chapter I gives a detailed overview of the work.
In chapter II it is shown that there are holomorphic Hilbert bundles over 1-convex manifolds such that the first cohomology of the bundle is not Hausdorff.
In chapter III the following finiteness theorem is shown: If E is a holomorphically trivial Banach bundle or a holomorphic Banach bundle of compact type with the compact approximation property over a q-convex manifold X, and if $V \to X$ is a holomorphic vector bundle with $H^q(X,V) = 0$, then $\dim H^q(X, V \otimes E) < \infty$. If X is q-complete, then $H^r(X, V \otimes E) = 0$ for $r \geq q$. If $r > q$, this is shown also for arbitrary holomorphic Banach bundles E. In the appendix it is sketched how for $r = q$ the L^2 method could yield a vanishing theorem for Hilbert bundles.

Keywords:
holomorphic Banach bundles, q-convex manifolds, cohomology, Hausdorff property

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung **1**

II Hausdorff-Eigenschaft der Kohomologie **5**

1. Ein Hilbertbündel über $\mathbb{P}^1$ 8
2. Das Bündel über $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ 11

III Endlich-dimensionale Kohomologie **13**

1. Approximation in Banachbündeln 14
2. Faserweise kompakte Operatoren 16
3. Banach-wertige (p, q)-Formen 23
4. Globale Homotopieformel 25
   - 4.1. q-Konvexität 25
   - 4.2. Homotopieformel 26
   - 4.3. Endlichkeitssatz 31
5. q-konvexe Erweiterung 37
6. Endliche Dimension auf q-konvexen Mannigfaltigkeiten 42

A Die L^2-Methode für Hilbertbündel **47**

Literatur **57**

Kapitel I

Einleitung

Unter einem holomorphen **Banachbündel** versteht man ein topologisches Vektorbündel, dessen charakteristische Faser ein komplexer Banachraum ist und dessen Struktur durch einen Kozyklus holomorpher Übergangsfunktionen mit Werten in der Automorphismengruppe der charakteristischen Faser definiert ist (vgl. [Bun68]). Die Dimension der charakteristischen Faser heißt auch *Rang* des Bündels. Im folgenden werden holomorphe Banachbündel endlichen Rangs wie üblich als holomorphe **Vektorbündel** bezeichnet.

Sei nun $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit X. Mit $H^r(X, \mathcal{O}^E)$ oder kurz $H^r(X, E)$ werden die Čech-Kohomologiegruppen der Garbe $\mathcal{O}^E$ der Keime holomorpher Schnitte in E bezeichnet. Sie sind isomorph zu den Dolbeault-Kohomologiegruppen $H^{0,r}(X, E)$. Für holomorphe Vektorbündel $V \to X$, d.h. Banachbündel mit endlichem Rang, gilt nach der Oka-Cartan-Theorie auf Steinschen Mannigfaltigkeiten

$$H^r(X, V) = 0 \qquad \text{wenn } X \text{ Steinsch und } \ r \geq 1 \ .$$

Die offenen Riemannschen Flächen sind Steinsch, und jedes holomorphe Vektorbündel über einer offenen Riemannschen Fläche ist holomorph trivial [For99]. Der Endlichkeitssatz von Kodaira sagt

$$\dim H^r(X, V) < \infty \quad \text{wenn } X \text{ kompakt und } \ r \geq 0 \ .$$

Beides zusammen ist enthalten in der Andreotti-Grauert-Theorie [AG62]. Eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension n heißt q-**konvex**, $1 \leq q \leq n$, wenn es eine kompakte Menge $K \subset X$ und eine C^∞-Ausschöpfungsfunktion ϱ von X gibt, so daß die Levi-Form von ϱ auf $X \setminus K$ mindestens $n - q + 1$ positive Eigenwerte hat. Kann man dabei $K = \emptyset$ wählen, so heißt X q-**vollständig**. Dabei ist 1-vollständig gleichbedeutend mit Steinsch. Eine komplexe Mannigfaltigkeit heißt 0-konvex, wenn sie kompakt ist. Kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten

sind trivialerweise 1-konvex (aber nicht 1-vollständig). Ist nun V ein holomorphes Vektorbündel über X, dann wird in der ANDREOTTI-GRAUERT-Theorie gezeigt:

$$\begin{aligned} \text{Ist } X\ q\text{-konvex, } q \geq 0\text{, dann gilt} \quad & \dim H^r(X,V) < \infty \quad \text{für} \quad r \geq q \text{ , und} \\ \text{ist } X\ q\text{-vollständig, } q \geq 1\text{, dann gilt} \quad & \dim H^r(X,V) = 0 \quad \text{für} \quad r \geq q \text{ .} \end{aligned}$$

Ist nun E ein holomorphes Banachbündel über einer Steinschen Mannigfaltigkeit X, dann gilt immer noch $H^r(X,E) = 0$ für $r \geq 1$, und auch das OKA-GRAUERT-Prinzip überträgt sich (siehe [Bun68]). Banachbündel über offenen Riemannschen Flächen müssen nicht trivial sein, da die Automorphismengruppe eines Banachraums nicht zusammenhängend sein muß [Dou65]. Dafür gilt für Hilbertbündel unendlichen Rangs, daß sie über Steinschen Mannigfaltigkeiten trivial sind, was (mit dem OKA-GRAUERT-Prinzip) daraus folgt, daß die Automorphismengruppe eines unendlich-dimensionalen Hilbertraums zusammenziehbar ist [Kui65, Bun68]. (Hilbertbündel sind Banachbündel, deren charakteristische Faser ein Hilbertraum ist.)
Der Endlichkeitssatz von KODAIRA für kompakte Mannigfaltigkeiten gilt für Hilbertbündel unendlichen Rangs nicht mehr. Für die Linienbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ über der Riemannschen Sphäre $\mathbb{P}^1$ gilt

$$\dim H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) = \begin{cases} 0 & , \quad k < 0 \\ k+1 & , \quad k \geq 0 \end{cases} ,$$

$$\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)) = \begin{cases} 0 & , \quad k \geq -1 \\ -k-1 & , \quad k < -1 \end{cases} .$$

Zum Beispiel gilt für $k = -2$: $\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)) = 1$.
Ist nun B ein unendlich-dimensionaler Banachraum, dann sind

$$B(k) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k) \otimes (\mathbb{P}^1 \times B)$$

holomorphe Banachbündel. Die Fasern, die in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2)$ isomorph zu $\mathbb{C}$ waren, werden in $B(-2)$ noch mit B tensoriert. Daher ist $\dim H^1(\mathbb{P}^1, B(-2)) = \infty$. Betrachtet man allerdings holomorphe Banachbündel über $\mathbb{P}^1$, die durch Übergangsfunktionen der Form $\mathrm{id}+K$ definiert sind, wobei die Werte von K kompakte Operatoren sind, so ändert sich die Situation: [Lei04] folgend werden solche Bündel **Banachbündel von kompaktem Typ** genannt. In [Goh64] und [GL73] wird gezeigt, daß ein solches holomorphe Banachbündel E über $\mathbb{P}^1$ spaltet in eine endliche Summe von Linienbündeln und ein triviales Banachbündel. Folglich gilt dann $\dim H^1(\mathbb{P}^1, E) < \infty$. Für den Fall von holomorphen Vektorbündeln ist dies der Spaltungssatz von GROTHENDIECK.

Für holomorphe Banachbündel E über $\mathbb{P}^1$ von kompaktem Typ ist $H^1(\mathbb{P}^1, E)$ trivialerweise Hausdorffsch (da endlich-dimensional). Aber auch für die Bündel $B(k)$ hat $H^1(\mathbb{P}^1, B(k))$ die Hausdorff-Eigenschaft, auch wenn für $k \leq -2$ die Dimension nicht endlich ist. Der Quotientenraum $H^1(\mathbb{P}^1, B(k))$ ist genau dann Hausdorffsch, wenn der Raum der exakten 1-Koketten (Koränder) topologisch abgeschlossen ist im Raum der geschlossenen 1-Koketten (Kozykel).

In Kapitel II wird gezeigt, daß es holomorphe Hilbertbündel E über $\mathbb{P}^1$ gibt, so daß $H^1(\mathbb{P}^1, E)$ nicht Hausdorffsch ist. Kompakte Mannigfaltigkeiten sind trivialerweise 1-konvex. Bläst man den Ursprung in $\mathbb{C}^2$ zu $\mathbb{P}^1$ auf, erhält man die 1-konvexe Mannigfaltigkeit $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, die weder kompakt noch Steinsch ist. Liftet man ein Bündel E über $\mathbb{P}^1$, für das $H^1(\mathbb{P}^1, E)$ nicht Hausdorffsch ist, auf $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, so wird in Kapitel II noch gezeigt, daß dann auch H^1 des gelifteten Bündels nicht Hausdorffsch ist. Diese Ergebnisse sind bereits in der Arbeit [Era03] des Verfassers dieser Dissertation enthalten.

Ist X eine q-konvexe Mannigfaltigkeit und $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über X, dann wird in [AG62] (Čech-Kohomologie) oder auch in [HL88] (Dolbeault-Kohomologie) die Hausdorff-Eigenschaft von $H^q(X, V)$ gebraucht, um die Injektivität der Einschränkungsabbildung $H^q(X, V) \to H^q(D, V)$ zu zeigen, wenn X q-konvexe Erweiterung eines relativ kompakten streng q-konvexen Gebietes D ist. Die Surjektivität überträgt sich auch auf Banachbündel, da aber Banachbündel die Hausdorff-Eigenschaft im allgemeinen nicht haben, gelingt es auch nicht, mit der Grauert-Methode das Verschwinden der Kohomologie im Fall q-vollständiger Mannigfaltigkeiten zu beweisen.

Für Banachbündel von kompaktem Typ über $\mathbb{P}^1$ ist die erste Kohomologiegruppe endlich-dimensional. Es wird vermutet, daß dies auch allgemein für kompakte Mannigfaltigkeiten X der Fall ist, wenn dort $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ gilt. Für den Beweis wird zur Zeit noch eine *Approximationseigenschaft* für die Fasern des Banachbündels vorausgesetzt, siehe [Lei04].

In Kapitel III wird gezeigt, wie die Methode von [Lei04] auf kompakte Teilmengen übertragen werden kann, die einen streng q-konvexen Rand haben. Damit wird dann folgendes bewiesen:

Sei V ein holomorphes Vektorbündel über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X mit $H^q(X, V) = 0$. Ist $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel von kompaktem Typ mit Approximationseigenschaft, dann gilt $\dim H^q(X, V \otimes E) < \infty$.

Sei nun X eine q-vollständige Mannigfaltigkeit. Für ein beliebiges holomorphes Banachbündel $E \to X$ kann mit der Grauert-Methode gezeigt werden, daß $H^r(X, E) = 0$ für $r > q$ gilt. Für den Fall $r = q$ allerdings kann mit der Grauert-Methode allein die Hausdorff-Eigenschaft und somit das Verschwinden der Kohomologie auf q-vollständigen Mannigfaltigkeiten nicht gezeigt werden.

Im Anhang wird skizziert, wie die L^2-Methode aus [Dem97] für Hilbertbündel formuliert werden kann. Der Ansatz dabei ist, auf Faser-Koordinaten für das Bündel zu verzichten.

In [Dem97] wird gezeigt, daß für holomorphe Vektorbündel auf q-vollständigen Mannigfaltigkeiten die q-te Kohomologiegruppe verschwindet. Eine notwendige Voraussetzung für das Verschwinden ist die Abgeschlossenheit des Bild des $\overline{\partial}$-Operators. In der Andreotti-Grauert-Theorie für holomorphe Vektorbündel folgte die Abgeschlossenheit mit dem Satz von Ascoli. In der L^2-Theorie wird ein Skalarprodukt auf dem Raum der quadratisch integrierbaren Formen mit Werten in dem Vektorbündel eingeführt, das diesen Raum zu einem Hilbertraum macht. Auf diesem Hilbertraum wird nun der $\overline{\partial}$-Operator betrachtet und die Abgeschlossenheit des Bildes mit Hilfe des adjungierten Operators beurteilt.

Im unendlich-dimensionalen Fall von holomorphen Banachbündeln kann der Satz von Ascoli nicht verwendet werden, weswegen die Beulenmethode der Andreotti-Grauert-Theorie für q-vollständige Mannigfaltigkeiten nicht ohne weiteres auf holomorphe Banachbündel übertragen werden kann. Auf Hilbertbündeln kann man jedoch wie im Fall von Vektorbündeln (endlichen Rangs) Hilberträume einführen, in denen man nach Lösungen für die $\overline{\partial}$-Gleichung suchen kann. Mit der rahmenfreien Formulierung (d.h. ohne Faser-Koordinaten) sieht man, daß sich für Hilbertbündel die Bedingungen für die Lösbarkeit nicht vom Fall endlichen Rangs unterscheiden. Damit soll gezeigt werden, daß für holomorphe Hilbertbündel E über q-vollständigen Mannigfaltigkeiten X auch $H^q(X, E) = 0$ gilt.

Kapitel II

Hausdorff-Eigenschaft der Kohomologie

Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und E ein holomorphes Banachbündel über X. Die j-te Čech-Kohomologiegruppe der Garbe $\mathcal{O}^E$ der Keime holomorpher Schnitte in E wird mit $H^j(X, \mathcal{O}^E)$ oder kurz mit $H^j(X, E)$ bezeichnet. Ist $\mathcal{U}$ eine Überdeckung von X mit Steinschen Mengen, dann ist $H^j(X, E) = H^j(\mathcal{U}, E)$.

Sei $\mathbb{P}^1$ die Riemannsche Sphäre mit der Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_+, U_-\}$, wobei $U_+ = \mathbb{P}^1 \backslash \infty$ und $U_- = \mathbb{P}^1 \backslash 0$. Sei $V \to \mathbb{P}^1$ ein holomorphes Vektorbündel über $\mathbb{P}^1$. Da jede offene Riemannsche Fläche Steinsch ist, gilt $H^j(\mathbb{P}^1, V) = H^j(\mathcal{U}, V)$, und über $U_\pm$ ist V trivial. Seien $T_+ : V_{U_+} \to U_+ \times \mathbb{C}^r$ und $T_- : V_{U_-} \to U_- \times \mathbb{C}^r$ die Trivialisierungen, und $g_{+-} : U_+ \cap U_- \to \mathrm{GL}(r)$ mit $(z, g_{+-}(z)) = \left(T_+ \circ T_-^{-1}\right)|_{\{z\} \times \mathbb{C}^r}$ die Übergangsmatrix. Mit $\mathcal{O}(k) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k)$ wird das Linienbündel über $\mathbb{P}^1$ bezeichnet, das durch die Übergangsmatrix $g_{+-}(z) = z^k$ definiert ist. Der Spaltungssatz von Grothendieck besagt, daß $V \to \mathbb{P}^1$ isomorph ist zu $\mathcal{O}(k_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(k_r)$ mit eindeutig bestimmten ganzen Zahlen $k_1 \geq \ldots \geq k_r$. ([Gro57], siehe auch [Lei90].) Dabei gilt

$$\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) = \begin{cases} 0 & , \quad k \geq -1 \\ -k-1 & , \quad k < -1 \ . \end{cases}$$

Insbesondere ist also $\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2)) = 1$. Tensoriert man $\mathcal{O}(-2)$ mit einem unendlich-dimensionalen Banachraum B bzw. mit dem trivialen Banachbündel $X \times B$, dann ist $\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2) \otimes B) = \infty$. Der Raum $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(-2) \otimes B)$ bleibt aber immer noch Hausdorffsch. Dies bedeutet folgendes: Ist $E \to \mathbb{P}^1$ ein holomorphes Banachbündel und $U \subset \mathbb{P}^1$ eine offene Teilmenge, dann wird der Raum der holomorphen Schnitte $\mathcal{O}(U, E)$ als Fréchetraum betrachtet mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von U. Der Raum der 1-Kozykel ist dann $\mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, E) = \mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$. Der Unterraum

der 1-Koränder $\mathcal{B}^1(\mathcal{U}, E) = \mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E)$ besteht aus all den Schnitten $f \in \mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$, die als Differenz zweier Schnitte $f_+ - f_-$ dargestellt werden können, wobei $f_+ \in \mathcal{O}(U_+, E)$ und $f_- \in \mathcal{O}(U_-, E)$. Dann ist

$$H^1(\mathbb{P}^1, E) = \frac{\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)}{\mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E)} \quad ,$$

und die (Faktor-)Topologie von $H^1(\mathbb{P}^1, E)$ ist Hausdorffsch genau dann, wenn $\mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E)$ topologisch abgeschlossen ist in $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$.

Für einige Bündel kann die Kohomologie recht leicht berechnet werden. Sei $U \subset \mathbb{P}^1$ und $g : U_+ \cap U_- \to \mathrm{GL}(B)$ die Übergangsfunktion von E. Ein Schnitt $f \in \mathcal{O}(U, E)$ kann dann auch mit dem Paar (f^+, f^-) identifiziert werden, wobei $f^+ \in \mathcal{O}(U \cap U_+, B)$, $f^- \in \mathcal{O}(U \cap U_-, B)$ und $f^+(z) = g(z)f^-(z)$ für $z \in U \cap U_+ \cap U_-$. Dies bedeutet $(z, f^+(z)) = T_+ \circ f(z)$ und $(z, f^-(z)) = T_- \circ f(z)$ für die Trivialisierungen T_+ und T_- über U_+ und U_-. Holomorphe Schnitte über $U_+ = \mathbb{C}$, $U_- = \mathbb{P}^1 \setminus 0$ und $U_+ \cap U_- = \mathbb{C}^*$ können so mit Hilfe von Laurent-Reihen untersucht werden. Ein Schnitt $f = (f^+, f^-) \in \mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$ hat z.B. eine Laurent-Reihe für $f^+ : \mathbb{C}^* \to B$,

$$f^+(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j \ , \quad a_j \in B \ .$$

Ein Schnitt $h = (h^+, h^-) \in \mathcal{O}(U_+, E)$ hat für $h^+ : \mathbb{C} \to B$ die Laurent-Reihe

$$h^+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j \ , \quad b_j \in B \ .$$

Ein Element in $H^0(\mathbb{P}^1, E) = \mathcal{Z}^0(\mathcal{U}, E)$ ist ein globaler holomorpher Schnitt $h : \mathbb{P}^1 \to E$ mit seinen Darstellungen h^+ und h^- über U_+ und U_-. Ein Element $f \in \mathcal{B}^1(\mathcal{U}, E)$ ist Bild des Korandoperators δ eines Elementes $u \in C^0(\mathcal{U}, E)$, d.h. Differenz zweier holomorpher Schnitte $u_\pm : U_\pm \to E$. Für die Gleichung $f = \delta u = u_+ - u_-$ können wieder die Laurent-Reihen in den Trivialisierungen betrachtet werden. Für die Linienbündel $\mathcal{O}(k)$ mit den Übergangsfunktionen $g(z) = z^k$ erhält man durch Koeffizientenvergleich die erste Kohomologiegruppe. Dazu betrachtet man für $(f^+, f^-) \in \mathcal{O}(U_+ \cap U_-, \mathcal{O}(k))$ die Laurent-Reihe von $f^+ : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$,

$$f^+(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j - \left(- \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j z^j \right) = \phi_+^+(z) - \phi_-^+(z) \ ,$$

wobei ϕ_+^+ und $-\phi_-^+$ die Aufteilung in Nebenteil und Hauptteil darstellt. Wechselt man zu f^-, erhält man $f^-(z) = z^{-k} f^+(z) = z^{-k}\phi_+^+(z) - z^{-k}\phi_-^+(z)$.

Definiert man $\phi_+^-(z) = z^{-k}\phi_+^+(z)$, so ist $\phi_+ = (\phi_+^+, \phi_+^-) \in \mathcal{O}(U_+, \mathcal{O}(k))$.
Sei $\phi_-^-(z) = z^{-k}\phi_-^+(z)$, dann gilt

$$\phi_-^-(z) = -\, z^{-k} \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j z^j = -\sum_{j=-\infty}^{-k-1} a_{j+k} z^j \ .$$

Für $k \geq -1$ definiert $\phi_- = (\phi_-^+, \phi_-^-)$ einen Schnitt in $\mathcal{O}(U_-, \mathcal{O}(k))$. Somit gehört $f = \phi_+ - \phi_-$ zu $\mathcal{B}^1(\mathcal{U}, E)$, und das bedeutet $H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) = 0$.
Ist $k < -1$, so gibt es $b_1, \ldots, b_{-k-1} \in \mathbb{C}$ mit

$$f^+(z) = \phi_+^+(z) - \widetilde{\phi}_-^+(z) + \sum_{j=1}^{-k-1} b_j z^{j+k} \ ,$$

so daß $\phi_+ = (\phi_+^+, \phi_+^-) \in \mathcal{O}(U_+, \mathcal{O}(k))$ und $\widetilde{\phi}_- = \left(\widetilde{\phi}_-^+, \widetilde{\phi}_-^-\right) \in \mathcal{O}(U_-, \mathcal{O}(k))$. So sieht man, daß dann $\dim H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(k)) = -k-1$.
Für das triviale Linienbündel verschwindet also H^1, und die gleiche Rechnung liefert $H^1(\mathbb{P}^1, B) = 0$ für jedes holomorph triviale Banachbündel $B \to \mathbb{P}^1$.

Eine weitere Klasse von holomorphen Banachbündeln über $\mathbb{P}^1$ bilden die vom *kompakten Typ*. Dies sind Banachbündel, für die die Werte der Übergangsfunktion die Form $g_{+-}(z) = \mathrm{id} + K(z)$ haben, wobei $K(z) : B \to B$ kompakte Operatoren sind. Für diese Bündel gilt der Spaltungssatz von Gohberg, der besagt, daß ein solches Bündel spaltet in eine endliche Summe von Linienbündeln und ein triviales Banachbündel (siehe [Goh64] und [GL73]). Dies ist eine Verallgemeinerung des Spaltungssatzes von Grothendieck. Insbesondere ist die erste Kohomologiegruppe endlich-dimensional und somit Hausdorffsch.

Sei nun $F_\lambda \to \mathbb{P}^1$ das Vektorbündel vom Rang 2, das definiert ist durch die Übergangsmatrix $g_{+-}(z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ \lambda & z^{-2} \end{pmatrix}$.
Für $\lambda = 0$ ist $F_0 = \mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(-2)$. Ist $\lambda \neq 0$, dann läßt sich g_{+-} faktorisieren,

$$g_{+-}(z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ \lambda & z^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^2 & -\lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda^{-1} z^{-2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_+^{-1}(z)\, g_-(z) \ ,$$

wobei $g_\pm : U_\pm \to \mathrm{GL}(2)$. Dies bedeutet, daß F_λ für $\lambda \neq 0$ holomorph trivial ist und somit $H^1(\mathbb{P}^1, F_\lambda) = 0$. Ist $f = (f^+, f^-) \in \mathcal{O}(U_+ \cap U_-, F_\lambda)$, so ist $f = \phi_+ - \phi_-$ mit $\phi_+ = (\phi_+^+, \phi_+^-) \in \mathcal{O}(U_+, F_\lambda)$ und $\phi_- = (\phi_-^+, \phi_-^-) \in \mathcal{O}(U_-, F_\lambda)$.
Nun hat $f^+ : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^2$ die Laurent-Reihe

$$f^+(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j z^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} a_j^{(1)} \\ a_j^{(2)} \end{pmatrix} z^j \ .$$

Dann definiert zum Beispiel

$$\phi_+^+(z) = \begin{pmatrix} -\frac{a_{-1}^{(2)}}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} z + \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j \quad , \quad \phi_-^+(z) = \begin{pmatrix} -\frac{a_{-1}^{(2)}}{\lambda} \\ 0 \end{pmatrix} z - \sum_{j=-\infty}^{-1} a_j z^j$$

eine Lösung für $f = \delta\phi$. Man kann zeigen, daß alle weiteren Lösungen den gleichen Koeffizienten erster Ordnung haben müssen. Diese Lösungen werden nun immer schlechter, je kleiner λ wird. Was passiert nun, wenn $\lambda \to 0$?

Sei $\lambda_j \to 0$ eine Nullfolge mit $\lambda_j \neq 0$. Zum einen gilt also $H^1(\mathbb{P}^1, F_{\lambda_j}) = 0$, jedoch ist $H^1(\mathbb{P}^1, F_0) \neq 0$. Sei $V_N = F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_N}$. Im folgenden soll nun das Hilbertbündel betrachtet werden, das als Grenzwert $E = \lim V_N$ definiert wird. Die Unterbündel V_N haben verschwindende erste Kohomologie. Es wird gezeigt, daß die erste Kohomologie des Hilbertbündels E nicht verschwindet und die Topologie sogar nicht-Hausdorff ist. Liftet man dieses Bündel über $\mathbb{P}^1$ auf die 1-konvexe Mannigfaltigkeit $X = \mathcal{O}(-1)$, erhält man ein Hilbertbündel $\widetilde{E} \to X$, für das $H^1(X, \widetilde{E})$ nicht Hausdorffsch ist, wobei die 1-konvexe Mannigfaltigkeit X weder kompakt noch Steinsch ist.

II.1 Ein Hilbertbündel über $\mathbb{P}^1$

Die Übergangsfunktion $g_{+-}(z) = \begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ \lambda & z^{-2} \end{pmatrix}$ des Bündels F_λ läßt sich auch mit Hilfe der linearen Abbildungen $P, S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$P \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad , \quad S \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda v_1 \end{pmatrix} \quad ,$$

beschreiben, nämlich $g_{+-}(z) = z^2(\mathrm{id} - P) + z^{-2}P + S$. Ist $\lambda \neq 0$ und $z \in U_+ \cap U_-$, dann ist $g_{+-}^{-1}(z) = z^{-2}(\mathrm{id} - P) + z^2 P - S$ das Inverse zu $g_{+-}(z)$.

Das Hilbertbündel, das die Bündel F_λ als Unterbündel haben soll, wird nun analog definiert. Sei dazu ℓ^2 der Hilbertraum der quadrat-summierbaren komplexen Folgen (d.h. Folgen $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\sum |x_j|^2 < \infty$) und $\mathrm{GL}(\ell^2)$ die Gruppe der invertierbaren stetigen linearen Isomorphismen von ℓ^2.
Sei $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2$ eine Folge mit $\lambda_k \neq 0$ für alle k (z.B. $\lambda_k = 1/k$). Da $\lambda \in \ell^2$, ist $\{\lambda_k\}$ insbesondere beschränkt. Sei nun $\xi \in \ell^2$, dann definiert

$$(S\xi)_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ ungerade} \\ \lambda_{k/2}\, \xi_{k-1} & , \quad k \text{ gerade} \end{cases}$$

einen stetigen linearen Operator $S : \ell^2 \to \ell^2$.
Ebenso ist die Projektion $P : \ell^2 \to \ell^2$ stetig, die definiert ist durch

$$(P\xi)_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ ungerade} \\ \xi_k & , \quad k \text{ gerade} \; . \end{cases}$$

Sei

$$g(z) = z^2(\mathrm{id} - P) + z^{-2}P + S \qquad \text{für} \quad z \in U_+ \cap U_- \quad .$$

Nun sind $S^2 = 0$, $SP = 0$ und $PS = S$, und somit ist $g(z)$ invertierbar für alle $z \in U_+ \cap U_-$ mit der Inversen $g^{-1}(z) = z^{-2}(\mathrm{id} - P) + z^2P - S$. Daher ist g eine holomorphe Operatorfunktion auf $U_+ \cap U_-$ mit Werten in $\mathrm{GL}(\ell^2)$ und somit Übergangsfunktion eines holomorphen Hilbertbündels $E \to \mathbb{P}^1$.

Satz II.1.1. *Es gilt:* $\mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E)$ *liegt dicht in* $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$,

$$\textit{jedoch} \quad \mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E) \subsetneqq \mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E) \quad .$$

Insbesondere ist $\mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E)$ *nicht abgeschlossen in* $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$. *Daher ist* $H^1(\mathbb{P}^1, E)$ *nicht-Hausdorff.*

Beweis.
1. Behauptung: $\mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E)$ liegt dicht in $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$.
Sei ℓ^2_N der 2-dimensionale Unterraum von ℓ^2, der aus all den Elementen $\xi \in \ell^2$ besteht mit $\xi_k = 0$ für $k \notin \{2N-1, 2N\}$, $N = 1, 2, \ldots$. Aus der Definition von $g : U_+ \cap U_- \to \mathrm{GL}(\ell^2)$ folgt, daß $g(z)\ell^2_N = \ell^2_N$. Dies definiert wiederum die Unterbündel $F_N = F_{\lambda_N}$ von E, die dadurch charakterisiert sind, daß ein Schnitt $f = (f^+, f^-) \in \mathcal{O}(U, E)$ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{P}^1$ genau dann ein Schnitt in $\mathcal{O}(U, F_N)$ ist, wenn die Werte von f^+ und f^- in ℓ^2_N liegen. Da die lineare Hülle aller $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, F_N)$, $N = 1, 2, \ldots$, dicht liegt in $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$, genügt es zu zeigen, daß $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, F_N) \subset \mathcal{O}(U_+, F_N) - \mathcal{O}(U_-, F_N)$, d.h.

$$H^1(\mathbb{P}^1, F_N) = 0 \quad \text{für alle } N \ .$$

Dies folgte aber daher, daß F_N durch die Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} z^2 & 0 \\ \lambda_N & z^{-2} \end{pmatrix}$ definiert wird, die wegen $\lambda_N \neq 0$ faktorisiert werden kann.
2. Behauptung: $\mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E) \subsetneqq \mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$.
Sei $\eta \in \ell^2$ definiert durch

$$\eta_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ ungerade} \\ \lambda_{k/2} & , \quad k \text{ gerade} \quad , \end{cases}$$

und bezeichne $f = (f^+, f^-)$ den Schnitt in $\mathcal{O}(U_+ \cap U_-, E)$ definiert durch

$$f^+(z) = \frac{1}{z}\eta \quad , \quad z \in U_+ \cap U_- \quad .$$

Es reicht zu zeigen, daß $f \notin \mathcal{O}(U_+, E) - \mathcal{O}(U_-, E)$. Angenommen, es gäbe Schnitte $\phi_+ = (\phi_+^+, \phi_+^-) \in \mathcal{O}(U_+, E)$ und $\phi_- = (\phi_-^+, \phi_-^-) \in \mathcal{O}(U_-, E)$ so, daß $f = \phi_+ - \phi_-$, d.h.

$$\frac{1}{z}\eta = \phi_+^+(z) - \phi_-^+(z) = \phi_+^+(z) - g(z)\phi_-^-(z) \quad , \quad z \in U_+ \cap U_- \quad .$$

Da ϕ_+^+ holomorph ist in U_+ und ϕ_-^- holomorph in U_-, haben die Laurent-Reihen die Form

$$\phi_+^+(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\phi_+^+\right)_\nu z^\nu \qquad \text{und} \qquad \phi_-^-(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \left(\phi_-^-\right)_\nu z^\nu \quad .$$

Nun ist η konstant in z und

$$\frac{1}{z}\eta = \phi_+^+(z) - \left(z^2(\mathrm{id} - P) + z^{-2}P + S\right)\phi_-^-(z) \ .$$

Somit folgt durch Koeffizientenvergleich

$$\eta = -(\mathrm{id} - P)\left(\phi_-^-\right)_{-3} - S\left(\phi_-^-\right)_{-1} \ .$$

Mit den Definitionen von P und S erhält man

$$\Big((\mathrm{id} - P)\left(\phi_-^-\right)_{-3}\Big)_k = \begin{cases} \Big(\left(\phi_-^-\right)_{-3}\Big)_k & , \quad k \text{ ungerade} \\ 0 & , \quad k \text{ gerade} \end{cases}$$

und

$$\Big(S\left(\phi_-^-\right)_{-1}\Big)_k = \begin{cases} 0 & , \quad k \text{ ungerade} \\ \lambda_{k/2}\Big(\left(\phi_-^-\right)_{-1}\Big)_{k-1} & , \quad k \text{ gerade} \quad . \end{cases}$$

Zusammen ergibt dies also

$$\eta_k = \Big(-(\mathrm{id} - P)\left(\phi_-^-\right)_{-3} - S\left(\phi_-^-\right)_{-1}\Big)_k = \begin{cases} -\Big(\left(\phi_-^-\right)_{-3}\Big)_k & , \ k \text{ ungerade} \\ -\lambda_{k/2}\Big(\left(\phi_-^-\right)_{-1}\Big)_{k-1} & , \ k \text{ gerade} \quad . \end{cases}$$

Andererseits ist $\eta_k = \lambda_{k/2}$ für gerade k (und $\eta_k = 0$ für ungerade k). Jedoch würde

$$\lambda_{k/2} = \eta_k = -\lambda_{k/2}\Big(\left(\phi_-^-\right)_{-1}\Big)_{k-1} \qquad \text{für} \quad k = 2, 4, 6, \ldots$$

bedeuten, daß

$$\Big(\left(\phi_-^-\right)_{-1}\Big)_{k-1} = -1 \qquad \text{für} \quad k = 2, 4, 6, \ldots \quad ,$$

im Widerspruch dazu, daß $\left(\phi_-^-\right)_{-1}$ zu ℓ^2 gehören soll. $\square$

II.2 Das Bündel über $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$

Seien X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten und $\rho : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung. Sei $\pi : E \to Y$ ein holomorphes Banachbündel über Y. Dann ist die Zurückziehung $\rho^* E = \{(x, e) \in X \times E \mid \rho(x) = \pi(e)\}$ ein holomorphes Banachbündel über X. Ist $\mathcal{U} = \{U_j\}$ eine Überdeckung von Y, dann ist $\mathcal{V} = \{V_j\} := \{\rho^{-1}(U_j)\}$ Überdeckung von X.

Lemma II.2.1. *Besitzt $\rho : X \to Y$ ein holomorphes Rechtsinverses, dann ist die induzierte Abbildung $\rho^* : H^1(\mathcal{U}, E) \to H^1(\mathcal{V}, \rho^* E)$ injektiv.*

Beweis. Sei $h \in H^1(\mathcal{U}, E)$ repräsentiert durch den Kozyklus $h_{\alpha\beta} \in \mathcal{O}(U_\alpha \cap U_\beta, E)$. Angenommen $\rho^* h = 0$.
Dann ist $\rho^* h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} \circ \rho = \tilde{h}_\alpha - \tilde{h}_\beta$ mit $\tilde{h}_\alpha \in \mathcal{O}(V_\alpha, \rho^* E)$ und $\tilde{h}_\beta \in \mathcal{O}(V_\beta, \rho^* E)$. Sei $\sigma : Y \to X$ holomorphes Rechtsinverses von ρ. Setzt man $h_\alpha := \tilde{h}_\alpha \circ \sigma$, erhält man Schnitte $h_\alpha \in \mathcal{O}(U_\alpha, E)$, so daß $h_\alpha - h_\beta = (\tilde{h}_\alpha - \tilde{h}_\beta) \circ \sigma = h_{\alpha\beta} \circ \rho \circ \sigma = h_{\alpha\beta}$. Daraus folgt $h = 0$. $\square$

Ist $\rho : X \to Y$ ein holomorphes Vektorbündel, dann ist der Null-Schnitt ein holomorphes Rechtsinverses von ρ. Da die induzierte Abbildung $\rho^* : \mathcal{Z}^1(\mathcal{U}, E) \to \mathcal{Z}^1(\mathcal{V}, \rho^* E)$ stetig ist, folgt daraus

Lemma II.2.2. *Sei $\rho : X \to Y$ ein holomorphes Vektorbündel und $E \to Y$ ein holomorphes Banachbündel. Ist $H^1(Y, E)$ nicht-Hausdorff, dann ist auch $H^1(X, \rho^* E)$ nicht-Hausdorff.*

Sei nun $X = \{(p, z) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 \mid z \in p\}$ die 1-konvexe Mannigfaltigkeit, die man erhält, wenn man in $\mathbb{C}^2$ den Ursprung zu $\mathbb{P}^1$ aufbläst. Sei $\rho : X \to \mathbb{P}^1$ die Projektion auf die erste Komponente. Dann ist X gleich dem universellem Linienbündel $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$ über $\mathbb{P}^1$. Ist nun $E \to \mathbb{P}^1$ das Hilbertbündel aus Satz II.1.1, dann ist $\rho^* E \to X$ ein holomorphes Hilbertbündel über der 1-konvexen Mannigfaltigkeit X, für das $H^1(X, \rho^* E)$ nicht Hausdorffsch ist.

Kapitel III

Endlich-dimensionale Kohomologie

In [Lei04] wird für kompakte Mannigfaltigkeiten X folgendes gezeigt:

Sei E ein holomorphes Banachbündel über der kompakten Mannigfaltigkeit X und $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel mit $H^q(X, V) = 0$. Ist E von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft, dann gilt $\dim H^q(X, V \otimes E) < \infty$.

Dabei ist ein Banachbündel von *kompaktem Typ*, wenn es durch Übergangsfunktionen der Form $\mathrm{id} + K$ definiert ist, wobei die Werte von K kompakte Operatoren sind, und es hat die *kompakte Approximationseigenschaft*, wenn die Fasern die kompakte Approximationseigenschaft besitzen. Die meisten bekannten Banachräume haben die kompakte Approximationseigenschaft, es gibt allerdings auch welche, die diese nicht haben [LT96]. Hilberträume jedoch haben diese Eigenschaft. Ist X die Riemannsche Sphäre, so kann sogar auf die Approximationseigenschaft verzichtet werden (siehe [GL73]).

Hier soll nun das Ergebnis von [Lei04] auf kompakte Gebiete übertragen werden, die einen C^1-Rand haben, der streng q-konvex ist. Ist nun X eine q-konvexe Mannigfaltigkeit, dann gibt es ein relativ kompaktes streng q-konvexes Gebiet mit glattem Rand, so daß X streng q-konvexe Erweiterung von D ist. Es wird gezeigt, daß analog zu den kompakten Mannigfaltigkeiten $\dim H^{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) < \infty$ für diese Bündel gilt. Mit der Beulenmethode von Grauert kann nun gezeigt werden, daß die Einschränkungsabbildung $H^{0,q}(X, V \otimes E) \to H^{0,q}(\overline{D}, V \otimes E)$ ein Isomorphismus ist und somit auch $\dim H^{0,q}(X, V \otimes E) < \infty$ gilt. Da für holomorphe Banachbündel auch der Dolbeault-Isomorphismus $H^r(X, E) \cong H^{0,r}(X, E)$ gilt, bedeutet dies $\dim H^q(X, V \otimes E) < \infty$.

III.1 Approximation in Banachbündeln

Sei $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit X der Dimension n. Die Karten von X werden mit $\varphi_k : V_k \to \mathbb{C}^n$ bezeichnet, die Trivialisierungen von E mit $\Phi_j : E_{U_j} \to U_j \times B$, wobei B ein Banachraum ist. Man kann annehmen, daß $U_k = V_k$ für einen Atlas (φ_k, V_k) und eine trivialisierende Überdeckung $\{U_k\}$. Sei Ω eine kompakte Teilmenge von X. $K_\mu \subset \Omega$ seien kompakte Teilmengen von Ω, so daß $K_\mu \subset\subset V_\mu$ für eine Karte $\varphi_\mu : V_\mu \to \mathbb{C}^n$ und E über V_μ trivial ist, $\Phi_\mu : E_{V_\mu} \to V_\mu \times B$. Da Ω kompakt ist, gibt es endlich viele K_μ, so daß $K_1 \cup \ldots \cup K_M = \Omega$. Die Halbnormen

$$p_\mu^r(f) := \|\Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(K_\mu)} = \max_{\beta \le r} \max_{\varphi_\mu(K_\mu)} \|D^\beta \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|$$

erzeugen die Topologie von $C^r(\Omega, E)$.
Sei nun $0 < \alpha < 1$ und

$$L_\mu^{r+\alpha}(f) := \sup_{\substack{x,y \in \varphi_\mu(K_\mu) \\ x \neq y}} \frac{\|D^r \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}(x) - D^r \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}(y)\|}{|x-y|^\alpha} \quad .$$

Die Halbnormen in dem Hölder-Raum $C^{r+\alpha}(\Omega, E)$ werden definiert durch

$$p_\mu^{r+\alpha}(f) = \max\left(p_\mu^r(f), L_\mu^{r+\alpha}(f)\right) \quad .$$

Da die Überdeckung $\{K_\mu\}$ von Ω endlich ist, definieren $p(f) := \max_\mu p_\mu^r(f)$ bzw. $p'(f) := \max_\mu p_\mu^{r+\alpha}(f)$ Normen in $C^r(\Omega, E)$ bzw. $C^{r+\alpha}(\Omega, E)$. Zu einer Familie von Halbnormen (bzw. Norm) gehört also immer eine (endliche) Überdeckung $\{K_\mu\}$. Mit dem Begriff **Fasernorm** auf E wird eine C^∞-Funktion $\|\cdot\|$ bezeichnet, deren Einschränkung auf die Faser E_x eine Norm ist, die die Topologie von E_x definiert.

Sei von nun an $D \subset\subset X$ ein relativ kompaktes Gebiet mit C^1-Rand. Dabei meint *Gebiet* eine offene Menge, die im Gegensatz zur Funktionentheorie einer Veränderlichen nicht unbedingt zusammenhängend sein muß.

Lemma III.1.1. *Sei $f \in C^r(\overline{D}, E)$, $p \in \partial D$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U_p von p und ein $F_p \in C^r(\overline{U}_p, E)$, so daß*

$$\|\Phi_\mu F_p \varphi_\mu^{-1} - \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(\overline{U}_p \cap K_\mu)} < \varepsilon \quad \forall\ \mu \in \{1, \ldots, M\} \quad .$$

Beweis. Sei V_p eine kleine Umgebung von p, für die eine Karte $\varphi : V_p \to \mathbb{C}^n$ existiert und eine Trivialisierung $\Phi : E_{V_p} \to V_p \times B$. Sei $\tilde{V}_p := \varphi(V_p)$ und $\tilde{D}_p := \varphi(V_p \cap D)$, und $\tilde{S}_p := \varphi(V_p \cap \partial D) \subset \partial \tilde{D}_p$. Weiter sei $\tilde{p} := \varphi(p)$ und v_p der (nach außen gerichtete) Einheitsnormalenvektor in $\tilde{p}$ an $\partial \tilde{D}_p$. Wenn $v(z)$ den

Einheitsnormalenvektor in $z \in \tilde{S}_p$ bezeichnet, wähle eine relativ offene Umgebung K_p von $\tilde{p}$ in $\tilde{S}_p$, in der $|\langle v(z), v_p\rangle| < \pi/3 \quad \forall z \in K_p$ gilt und mit $K_p \subset\subset \tilde{V}_p$. Sei $K_p(t) := \{z + tv_p \mid z \in K_p\}$, und wähle $t_0 > 0$ so, daß sowohl $L_p := \{K_p(t) \mid -t_0 < t < 0\} \subset \tilde{D}_p$ als auch $\{K_p(t) \mid -t_0 < t < t_0\} \subset \tilde{V}_p$. Für $0 < r_p < t_0$ definiere $\tilde{U}_p := \{z + r_p v_p \mid z \in L_p\}$, $U_p := \varphi^{-1}(\tilde{U}_p)$, und $\tilde{T}_p(z) := z - r_p v_p$, $T_p := \varphi^{-1}\tilde{T}_p\varphi$, wofür $T_p(U_p) \subset V_p \cap D$ gilt. Sei $f_p := \mathrm{pr}_2\Phi f : V_p \cap \overline{D} \to B$ und $\tilde{f}_p := f_p T_p : \overline{U}_p \to B$, dann definiert $F_p(z) := \Phi^{-1}\left(z, \tilde{f}_p(z)\right)$, $F_p \in C^r(\overline{U}_p, E)$, einen von f etwas verschobenen Schnitt. Da f in $V_p \cap \overline{D}$ gleichmäßig C^r-stetig ist, kann man r_p so klein wählen, daß

$$\|\Phi_\mu F_p \varphi_\mu^{-1} - \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(\overline{U}_p \cap K_\mu)} < \varepsilon \quad \forall\, \mu \in \{1, \ldots, M\} \quad .$$

□

Bemerkung: Wenn $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, dann kann man $U'_p \subset U_p$ so wählen, daß $U'_p \cap D = U_p \cap D$, indem man $r'_p < r_p$ geeignet wählt, und dann das neue U'_p mit U_p schneidet.

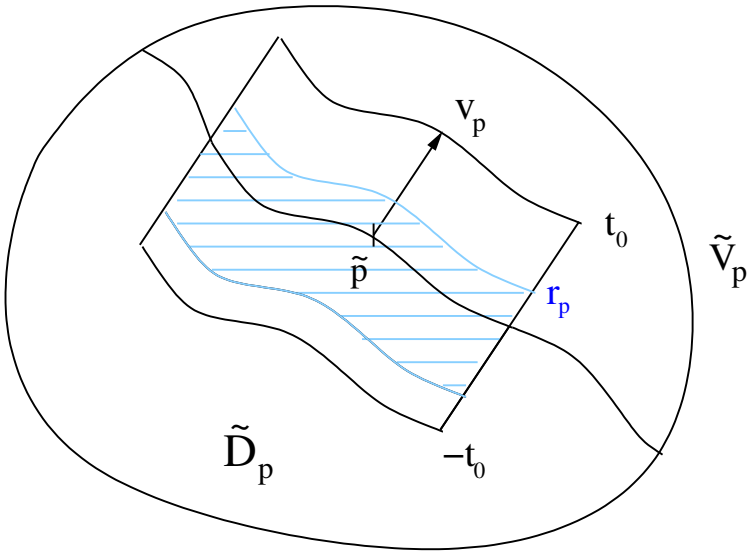

Bild 1. Die Umgebung $\tilde{U}_p$ in einer Karte.

Satz III.1.2. *Sei $f \in C^r(\overline{D}, E)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von $\overline{D}$ und ein $F \in C^r(U, E)$, so daß*

$$p^r_\mu(F - f) < \varepsilon \quad \forall\, \mu \in \{1, \ldots, M\} \quad .$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Lemma III.1.1 kann man endlich viele offene Mengen $U_1, \ldots, U_N$ finden, die ∂D überdecken, und dazu $\tilde{F}_\nu \in C^r(\overline{U}_\nu, E)$ mit

$$\|\Phi_\mu \tilde{F}_\nu \varphi_\mu^{-1} - \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(\overline{U}_\nu \cap K_\mu)} < \varepsilon \quad \forall\, \mu \in \{1, \ldots, M\} \quad .$$

Setze $U_0 := D$, $\tilde{F}_0 := f$, und wähle zu $\{U_\nu\}_0^N$ eine Zerlegung der Eins $\{\chi_\nu\}_0^N$, $\chi_\nu \in C^\infty(U_\nu)$, supp $\chi_\nu \subset\subset U_\nu$, $\sum_{\nu=0}^N \chi_\nu|_{\overline{D}} = 1$. Definiere

$$\tilde{F} := \sum_{\nu=0}^N \chi_\nu \tilde{F}_\nu \quad .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p_\mu^r(\tilde{F} - f) &\leq \sum_{\nu=1}^N C_{r,\nu} \|\chi_\nu \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(\overline{U}_\nu \cap K_\mu)} \|\Phi_\mu \tilde{F}_\nu \varphi_\mu^{-1} - \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(\overline{U}_\nu \cap K_\mu)} \\ &< C_r \cdot \varepsilon \quad , \end{aligned}$$

wobei

$$C_r := N \cdot \max_{\mu \in \{1,\ldots,M\}} \max_{\nu \in \{1,\ldots,N\}} C_{r,\nu} \|\chi_\nu \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(\overline{U}_\nu \cap K_\mu)} \quad .$$

Wegen der Bemerkung zu Lemma III.1.1 kann man auch eine Überdeckung $\{U'_\nu\}_0^N$ finden mit $F_\nu \in C^r(\overline{U}'_\nu, E)$, für die

$$\|\Phi_\mu F_\nu \varphi_\mu^{-1} - \Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(\overline{U}_\nu \cap K_\mu)} < \varepsilon / C_r \quad \forall\, \mu \in \{1, \ldots, M\}$$

gilt. Da $U'_\nu \cap D = U_\nu \cap D$, kann man (in $\overline{D}$) die χ_ν beibehalten, so daß sich C_r nicht ändert. Für $F := \sum_{\nu=0}^N \chi_\nu F_\nu$ erhält man also $p_\mu^r(F - f) < \varepsilon$. Setze $U := U'_0 \cup \ldots \cup U'_N$, dann ist $\overline{D} \subset U$ und $F \in C^r(U, E)$. □

III.2 Faserweise kompakte Operatoren

Sei nun $V \to X$ ein Vektorbündel über X vom Rang m mit den Trivialisierungen $\widetilde{\Phi}_\mu : V_{U_\mu} \to U_\mu \times \mathbb{C}^m$. Ist B ein Banachraum, dann hat das Banachbündel $E = V \otimes B$ die Trivialisierungen $\Phi_\mu = \widetilde{\Phi}_\mu \otimes \mathrm{id}_B : (V \otimes B)_{U_\mu} \to U_\mu \times \mathbb{C}^m \otimes B = U_\mu \times B^m$, wobei $B^m = B \times \ldots \times B$. D.h. ist $v \otimes b \in V \otimes B$, dann gilt $\Phi_\mu(v \otimes b) = \widetilde{\Phi}_\mu(v) \otimes b$. Seien wieder $\overline{D} \subset\subset X$ mit C^1-Rand und der endlichen Überdeckung $\{K_\mu\}$, $p_\mu^r(f) = \|\Phi_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(K_\mu)}$ die Halbnormen von $C^r(\overline{D}, V \otimes B)$ und $\varrho_\mu^r(f) = \|\widetilde{\Phi}_\mu f \varphi_\mu^{-1}\|_{r,\varphi_\mu(K_\mu)}$ die analogen Halbnormen von $C^r(\overline{D}, V)$. Da die kompakten Mengen K_μ eine endliche Überdeckung von $\overline{D}$ bilden, definieren $p := \max_\mu p_\mu^r$ bzw. $\varrho := \max_\mu \varrho_\mu^r$ auch Normen in den jeweiligen Funktionenräumen.

Satz III.2.1. *$C^\infty(\overline{D}, V) \otimes B \subset C^r(\overline{D}, V \otimes B)$ liegt dicht bzgl. der C^r-Topologie.*

Beweis. Aus Satz III.1.2 folgt, daß ein Schnitt aus $C^r(\overline{D}, V \otimes B)$ durch Schnitte approximiert werden kann, die in einer Umgebung von $\overline{D}$ definiert sind. Für offene Mengen aber ist Satz III.2.1 wohlbekannt, siehe [Lei04, Prop.2.1]. □

Sei nun $f \in C^r(\overline{D}, V) \otimes B$. Dann läßt sich dieser Schnitt als endliche Summe $f = \sum_j f_j \otimes b_j$ schreiben, wobei $f_j \in C^r(\overline{D}, V)$ und $b_j \in B$. Ist $\{v_1, \ldots, v_m\}$ ein Rahmen von V über $U \subset X$, dann läßt sich ein Schnitt $f \in C^r(U, V \otimes B)$ als $f = \sum_{j=1}^m v_j \otimes f_j$ schreiben, wobei $f_j \in C^r(U, B)$. Da $\overline{D}$ kompakt ist, kann man so jeden Schnitt aus $C^r(\overline{D}, V \otimes B)$ als endliche Summe darstellen. Für ein stetiges lineares Funktional $\Psi : B \to \mathbb{C}$ und $f = \sum_j v_j \otimes f_j$ bezeichne $\Psi_V f := \sum_j \Psi(f_j) v_j$. Es gilt

$$p(f) = \sup_{\|\Psi\|=1} \varrho(\Psi_V f) \quad .$$

Sei nun V' ein weiteres Vektorbündel über X und $0 < \alpha < 1$. Die Halbnormen $p_\mu^{r'+\alpha}$ und $\varrho_\mu^{r'+\alpha}$ in den Hölder-Räumen $C^{r'+\alpha}(\overline{D}, V' \otimes B)$ bzw. $C^{r'+\alpha}(\overline{D}, V')$ seien definiert bezüglich der Trivialisierungen Φ_μ und $\widetilde{\Phi}_\mu$. Seien p' und ϱ' die Normen von $C^{r'+\alpha}(\overline{D}, V' \otimes B)$ bzw. $C^{r'+\alpha}(\overline{D}, V')$. Ebenso gilt dann $p'(f) = \sup_{\|\Psi\|=1} \varrho'(\Psi_{V'} f)$.

Satz III.2.2. *Zum stetigen linearen Operator*

$$A : C^r(\overline{D}, V) \to C^{r'+\alpha}(\overline{D}, V')$$

gibt es einen eindeutig bestimmten stetigen linearen Operator

$$A_B : C^r(\overline{D}, V \otimes B) \to C^{r'+\alpha}(\overline{D}, V' \otimes B)$$

mit

$$A_B = A \otimes \mathrm{id} \quad \textit{auf} \quad C^r(\overline{D}, V) \otimes B \quad .$$

Beweis. Man zeigt, daß $A \otimes \mathrm{id}$ auf $C^r(\overline{D}, V) \otimes B$ stetig ist bzgl. p und p'. Da $C^r(\overline{D}, V) \otimes B \subset C^r(\overline{D}, V \otimes B)$ dicht liegt, gibt es dann auch eine stetige Fortsetzung A_B. Der Beweis von [Lei04, Prop.2.2] kann für $X = \overline{D}$ übernommen werden, wobei man für das kompakte $\overline{D}$ eine endliche Überdeckung $\omega_\mu = K_\mu$, $\mu \in \{1, \ldots, M\}$, von $\overline{D}$ nehmen kann. Die Aussagen von [Lei04] lassen sich dann mit Hilfe der Normen p, p' und ϱ, ϱ' schreiben: Es wird gezeigt, daß

$$p(f) = \sup_{\|\Psi\|=1} \varrho(\Psi_V f) \qquad \text{und} \qquad \Psi_{V'}(A \otimes \mathrm{id}) f = A \Psi_V f \quad .$$

Daraus folgt

$$\varrho'(\Psi_{V'}(A \otimes \mathrm{id}) f) = \varrho'(A \Psi_V f) \leq C \varrho(\Psi_V f)$$

und

$$p'((A \otimes \mathrm{id})f) = \sup_{\|\Psi\|=1} \varrho'(\Psi_{V'}(A \otimes \mathrm{id})f)$$
$$\leq C \sup_{\|\Psi\|=1} \varrho(\Psi_V f) = Cp(f) \quad .$$

□

Im Fall $r = 0$ kann man auf die Voraussetzung, daß $\overline{D}$ einen C^1-Rand haben muß, verzichten, wenn man den Fortsetzungssatz von TIETZE anwendet. Demnach gibt es eine Umgebung U von $\overline{D}$, so daß für jedes stetige $f \in C^0(\overline{D}, V \otimes B)$ ein $F \in C^0(U, V \otimes B)$ existiert mit $F|_{\overline{D}} = f$.

Definition III.2.3. Sei Ω eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes und B ein Banachraum. Sei $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $C^0(\Omega, B)$.
Dann heißt $\mathcal{F}$ **gleichgradig stetig**, wenn gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|x - y| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathcal{F} \quad .$$

Satz III.2.4. (ASCOLI) *Sei Ω eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes und B ein Banachraum. Sei $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $C^0(\Omega, B)$. Dann gilt:*
$\mathcal{F}$ ist relativ kompakt genau dann, wenn:

(i) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig, und

(ii) für jedes $x \in \Omega$ ist $\mathcal{F}(x) := \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ relativ kompakt.

Der Beweis findet sich in [Lan93]. Mit dem Satz von ASCOLI folgt folgendes

Lemma III.2.5. *Sei Ω eine kompakte Teilmenge einer komplexen Mannigfaltigkeit X, $E \to X$ ein Banachbündel und $\{f_j\}$ eine beschränkte Folge in $C^\alpha(\Omega, E)$, $0 < \alpha < 1$. Sei $E' \to X$ ein weiteres Banachbündel und $T : \Omega \to \mathrm{Hom}(E, E')$ eine stetige Operatorfunktion. Für jedes $z \in \Omega$ sei $\{Tf_j(z)\}$ relativ kompakt. Dann hat $\{Tf_j\}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $\{Tf_{j_k}\}$.*

Beweis. Die Überdeckung $K_1 \cup \ldots \cup K_M = \Omega$ mit kompakten Mengen sei wieder so gewählt, daß E über K_μ trivial ist und daß Karten existieren, die K_μ in den $\mathbb{C}^n$ abbilden. Man kann also annehmen, daß $K_\mu \subset \mathbb{C}^n$ und $f_j \in C^\alpha(K_\mu, B)$, wobei B ein Banachraum ist. Weiter kann man annehmen, daß $T : K_\mu \to \mathrm{Hom}(B, B')$, wobei B' ein weiterer Banachraum ist.

$$L_\alpha(f) = \sup_{\substack{x,y \in K_\mu \\ x \neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{|x - y|^\alpha} \quad , \qquad \|f\|_\alpha := \max\left(\|f\|, L_\alpha(f)\right)$$

bezeichnen die Hölderkonstante bzw. die Höldernorm in $C^\alpha(K_\mu, B)$. Da $\{f_j\}$ beschränkt ist in $C^\alpha(K_\mu, B)$, kann man annehmen, daß $\|f_j\|_\alpha \leq 1$, also auch $L_\alpha(f_j) \leq 1$. Dann gilt für $|x-y| < \delta$

$$\|f_j(x) - f_j(y)\| \leq |x-y|^\alpha L_\alpha(f_j) < \delta^\alpha \quad .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wählt man $\delta < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}$, sieht man, daß $\{f_j\}$ in K_μ gleichgradig stetig ist. Da T stetig ist, ist auch $\{Tf_j\}$ gleichgradig stetig, denn:

$$\begin{aligned}\|T(x)f_j(x) - T(y)f_j(y)\| &\leq \|T(x)f_j(x) - T(y)f_j(x)\| + \|T(y)f_j(x) - T(y)f_j(y)\| \\ &\leq \|T(x) - T(y)\|\,\|f_j(x)\| + \|T(y)\|\,\|f_j(x) - f_j(y)\| \quad .\end{aligned}$$

Sei $\|T\| = \max_{x \in K_\mu} \|T(x)\|$. Wähle $\delta_1 > 0$ so, daß $\|T(x) - T(y)\| < \varepsilon/2$ für $|x-y| < \delta_1$, und $\delta_2 > 0$ so, daß $\|f_j(x) - f_j(y)\| < \frac{\varepsilon}{2\|T\|}$ für $|x-y| < \delta_2 \;\; \forall\, j \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|x-y| < \delta \;\Rightarrow\; \|Tf_j(x) - Tf_j(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad .$$

Betrachtet man nun wieder $\{Tf_j\}$ in $C^0(\Omega, E')$, folgt mit Ascoli, daß eine Teilfolge existiert, die in K_1 konvergiert. Diese Teilfolge hat eine Teilfolge, die in K_2, also auch in $K_1 \cup K_2$ konvergiert. So gelangt man zu einer Teilfolge, die in Ω konvergiert. □

Definition III.2.6. Seien E und F Banachbündel über X und $U \subset X$. Ein Schnitt $K : U \to \mathrm{Hom}(E, F)$ heißt **faserweise kompakt**, wenn $K(\zeta)$ für jedes $\zeta \in U$ ein kompakter Operator zwischen den Fasern E_ζ und F_ζ ist. ([Lei04, Def.2.3])

Lemma III.2.7. *Seien E und E' Banachbündel über X, und sei $K : X \to \mathrm{Hom}(E, E')$ stetig und faserweise kompakt. Weiter sei $\|\cdot\|$ eine Fasernorm in E. Dann ist für jedes kompakte $\Omega \subset\subset X$ die Menge*

$$\{K(\zeta)v \mid \zeta \in \Omega, v \in E_\zeta, \|v\| \leq 1\}$$

prä-kompakt in E'.

Beweis. Dies ist [Lei04, Lemma 2.4]. Der Vollständigkeit wegen wird der Beweis wiederholt.
Da Ω kompakt ist, gibt es endlich viele Teilmengen $U_j \subset X$, die Ω überdecken, so daß für jedes U_j eine Karte in den $\mathbb{C}^n$ existiert und zudem E und E' über U_j trivial sind. Indem man jedes U_j betrachtet, kann man auch annehmen, daß X eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ ist, $E = X \times B$ und $E' = X \times B'$ triviale Bündel sind und $K : X \to \mathrm{Hom}(B, B')$. Bezeichne nun $\|\cdot\|$ die Norm in B und B'. Dann muß gezeigt werden, daß

$$\{K(\zeta)v \mid \zeta \in \Omega, v \in B, \|v\| \leq 1\}$$

prä-kompakt in B' ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da die Werte von K kompakt sind, gibt es für jedes $\eta \in X$ eine endliche Menge $\Lambda(\eta) \in B'$, so daß

$$\{K(\eta)v \mid v \in B, \|v\| \leq 1\}$$

enthalten ist in einer $\varepsilon/2$-Umgebung von $\Lambda(\eta)$. Da K stetig ist, gibt es zudem eine Umgebung $U(\eta)$ von $\eta \in X$, so daß

$$\|K(\zeta) - K(\eta)\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } \zeta \in U(\eta) \ .$$

Also auch $\|K(\zeta)v - K(\eta)v\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $v \in B$ mit $\|v\| \leq 1$. Daher ist die Menge

$$\{K(\zeta)v \mid \zeta \in U(\eta), v \in B, \|v\| \leq 1\}$$

enthalten in einer ε-Umgebung von $\Lambda(\eta)$. Da Ω kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $\eta_1, \ldots, \eta_N \in \Omega$, so daß $U(\eta_1), \ldots, U(\eta_N)$ eine Überdeckung von Ω bilden. Dann ist

$$\bigcup_{j=1}^{N} \{K(\zeta_j)v \mid \zeta \in U(\eta_j), v \in B, \|v\| \leq 1\}$$

enthalten in einer ε-Umgebung der endlichen Menge $\Lambda(\eta_1) \cup \ldots \cup \Lambda(\eta_N)$. Insbesondere ist somit

$$\{K(\zeta)v \mid \zeta \in \Omega, v \in B, \|v\| \leq 1\}$$

in der ε-Umgebung dieser endlichen Menge enthalten. □

Satz III.2.8. *Seien E, E', E'' Banachbündel über X und $\overline{D} \subset\subset X$ eine kompakte Teilmenge von X. Sei*

$$K : \overline{D} \to \mathrm{Hom}(E', E'')$$

stetig und faserweise kompakt, und sei

$$A : C^0(\overline{D}, E) \to C^\alpha(\overline{D}, E')$$

ein stetiger linearer Operator. Dann ist

$$KA : C^0(\overline{D}, E) \to C^0(\overline{D}, E'')$$

ein kompakter Operator.

Beweis. siehe [Lei04, Prop.2.5].
Sei $\{f_j\}$ eine beschränkte Folge in $C^0(\overline{D}, E)$. Dann ist $\{Af_j\}$ eine beschränkte Folge in $C^\alpha(\overline{D}, E')$. Da $\overline{D}$ kompakt ist, folgt aus Lemma III.2.7, daß

$$\Lambda := \left\{ (KAf_j)(\zeta) \;\middle|\; \zeta \in \overline{D},\ j \in \mathbb{N} \right\}$$

prä-kompakt in E'' ist. Somit folgt mit Ascoli/Lemma III.2.5, daß diese Folge eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, d.h. $KA : C^0(\overline{D}, E) \to C^0(\overline{D}, E'')$ ist kompakt. □

Lemma III.2.9. *Sei $V \to X$ ein Vektorbündel über einer Mannigfaltigkeit X, B ein Banachraum und F ein Unterraum von B. Weiter sei $\|\cdot\|$ eine Fasernorm auf $V \otimes B$ und $\varepsilon > 0$.*
Ist $D \subset X$ und $f : \overline{D} \to V \otimes B$ ein stetiger Schnitt mit

$$\inf_{w \in (V \otimes F)_\zeta} \|f(\zeta) - w\| < \varepsilon \quad \textit{für alle } \zeta \in \overline{D},$$

dann gibt es einen stetigen Schnitt $f_\varepsilon : \overline{D} \to V \otimes F$, so daß

$$\|f(\zeta) - f_\varepsilon(\zeta)\| < \varepsilon \quad \textit{für alle } \zeta \in \overline{D}.$$

Beweis. siehe [Lei04, Lem.2.6].
Sei $\zeta \in \overline{D}$. Dann gibt es einen Vektor $v_\zeta \in (V \otimes F)_\zeta$ mit $\|f(\zeta) - v_\zeta\| < \varepsilon$. Nimmt man einen stetigen Schnitt $f_\zeta : \overline{D} \to V \otimes F$ mit $f_\zeta(\zeta) = v_\zeta$, dann gibt es eine Umgebung U_ζ von ζ mit $\|f(\eta) - f_\zeta(\eta)\| < \varepsilon$ für alle $\eta \in U_\zeta$. Da X lokal kompakt ist, gibt es eine Familie von Punkten $\{\zeta_j\}_{j \in I}$, $\zeta_j \in \overline{D}$, stetige Schnitte f_{ζ_j} und Umgebungen $\{U_{\zeta_j}\}_{j \in I}$, die eine lokal-endliche Überdeckung von $\overline{D}$ bilden, so daß $\|f(\eta) - f_{\zeta_j}(\eta)\| < \varepsilon$ für alle $\eta \in U_{\zeta_j}$. Sei $\{\chi_j\}_{j \in I}$ eine Zerlegung der Eins bzgl. dieser Überdeckung. Dann ist $f_\varepsilon(\eta) := \sum_{j \in I} \chi_j(\eta) f_{\zeta_j}(\eta)$ der gesuchte Schnitt. □

Lemma III.2.10. *Sei $V \to X$ ein Vektorbündel, B ein Banachraum und $\|\cdot\|$ eine Fasernorm auf $V \otimes B$. Weiter sei $\overline{D} \subset\subset X$ und Ω eine kompakte Teilmenge des Totalraums $V \otimes B|_{\overline{D}}$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen endlich-dimensionalen Unterraum F von B mit*

$$\inf_{w \in (V \otimes F)_\zeta} \|v - w\| < \varepsilon \quad \textit{für alle } \zeta \in \overline{D} \textit{ und } v \in \Omega \cap (V \otimes B)_\zeta \quad .$$

Beweis. siehe [Lei04, Lem.2.7].
Sei $K_1 \cup \ldots \cup K_M = \overline{D}$ eine endliche Überdeckung von $\overline{D}$ mit kompakten Mengen, so daß jedes $K_\mu \subset U_\mu$ in einer Trivialisierung $\vartheta_\mu : V|_{U_\mu} \to U_\mu \times \mathbb{C}^r$ enthalten ist. $\Theta_\mu = \vartheta_\mu \otimes \mathrm{id}_B : (V \otimes B)|_{U_\mu} \to U_\mu \times B^r$ definiert dann Trivialisierungen für $(V \otimes B)|_{\overline{D}}$. Sei $\Theta_\mu(\Omega \cap (V \otimes B)) = \Omega_1 \times \Omega_2$, d.h. $\Omega_2 \subset\subset B^r$. Dann gibt es endlich viele $b_1, \ldots, b_m \in B^r$, so daß Ω_2 enthalten ist in einer δ-Umgebung der Punkte $\{b_j\}_1^m$. Sei F_μ der endlich-dimensionale Unterraum von B, der durch die Vektoren $b_{j,\nu} \in B$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\nu \in \{1, \ldots, r\}$, aufgespannt wird. Sind nun $\zeta \in K_\mu$, $v \in (V \otimes B)_\zeta$ und $w \in (V \otimes F_\mu)_\zeta$, dann gilt (mit den Bezeichnungen $\Theta_\mu(v) = (\zeta, \tilde{v})$, $\tilde{v} \in B^r$ und $\Theta_\mu(w) = (\zeta, \tilde{w})$, $\tilde{w} \in F_\mu^r$):

$$\|v - w\| = \|\Theta_{\mu,\zeta}^{-1}(\tilde{v}) - \Theta_{\mu,\zeta}^{-1}(\tilde{w})\| \leq \max_{\zeta \in K_\mu} \|\Theta_{\mu,\zeta}^{-1}\| \cdot \|\tilde{v} - \tilde{w}\|_{B^r} \quad .$$

Nun ist aber F_μ so gewählt, daß es auch ein $w' \in (V \otimes F_\mu)_\zeta$ gibt mit $\|\tilde{v} - \tilde{w}'\|_{B^r} < \delta$. So kann man für jedes K_μ einen endlich-dimensionalen Unterraum F_μ von B finden, so daß $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_M$ die gewünschte Eigenschaft besitzt: Für jedes $\zeta \in \overline{D}$ und $v \in (V \otimes B)_\zeta$ gibt es ein $w \in (V \otimes F)_\zeta$ mit $\|v - w\| < \varepsilon$. □

Satz III.2.11. *Seien V, V' und V'' Vektorbündel über X, B ein Banachraum und $\overline{D} \subset\subset X$. Weiter sei der stetige Schnitt $K : \overline{D} \to \mathrm{Hom}(V \otimes B, V' \otimes B)$ faserweise kompakt, und zu dem stetigen linearen Operator $A : C^0(\overline{D}, V') \to C^\alpha(\overline{D}, V'')$ sei*

$$A_B : C^0(\overline{D}, V' \otimes B) \to C^\alpha(\overline{D}, V'' \otimes B)$$

ein stetiger linearer Operator mit $A_B = A \otimes \mathrm{id}_B$ auf $C^0(\overline{D}, V') \otimes B$. Dann ist

$$A_B K : C^0(\overline{D}, V \otimes B) \to C^0(\overline{D}, V'' \otimes B)$$

ein kompakter Operator.

Beweis. siehe [Lei04, Prop.2.8].
Die Fasernorm in $V \otimes B$, $V' \otimes B$ und $V'' \otimes B$ wird jeweils mit $\|\cdot\|$ bezeichnet. Sei nun $\{f_j\}$ eine beschränkte Folge in $C^0(\overline{D}, V \otimes B)$ und

$$C := \sup_{j \in \mathbb{N}, \zeta \in \overline{D}} \|f_j(\zeta)\| < \infty \quad .$$

Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen, daß eine Folge $\{f_j''\}$ in $C^0(\overline{D}, V'' \otimes B)$ existiert mit

$$\max_{\zeta \in \overline{D}} \|A_B K f_j(\zeta) - f_j''(\zeta)\| < \varepsilon \quad \forall\, j \in \mathbb{N} \quad ,$$

so daß $\{f_j''\}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

Sei $\|A_B\|$ die Operatornorm von $A_B : C^0(\overline{D}, V' \otimes B) \to C^0(\overline{D}, V'' \otimes B)$, wobei in $C^0(\overline{D}, V' \otimes B)$ bzw. $C^0(\overline{D}, V'' \otimes B)$ die Maximumnorm bzgl. der oben gewählten Fasernormen betrachtet wird. Nach Lemma III.2.7 ist

$$\Omega := \left\{ K(\zeta) f_j(\zeta) \;\middle|\; \zeta \in \overline{D}, j \in \mathbb{N} \right\}$$

prä-kompakt in $V' \otimes B$. Nach Lemma III.2.10 gibt es also einen endlich-dimensionalen Unterraum F von B, so daß

$$\inf_{w \in (V' \otimes F)_\zeta} \|K(\zeta) f_j(\zeta) - w\| < \frac{\varepsilon}{\|A_B\|} \quad \text{für alle } \zeta \in \overline{D} \text{ und } j \in \mathbb{N}.$$

Daher gibt es nach Lemma III.2.9 eine Folge $\{f_j'\}$ in $C^0(\overline{D}, V' \otimes F)$, so daß

$$\max_{\zeta \in \overline{D}} \|K(\zeta) f_j(\zeta) - f_j'(\zeta)\| < \frac{\varepsilon}{\|A_B\|} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Für $f_j'' := A_B f_j'$ gilt also $\max_{\zeta \in \overline{D}} \|A_B K f_j(\zeta) - f_j''(\zeta)\| < \varepsilon$. Da F endlich-dimensional ist, ist $A_B = A \otimes \mathrm{id}$ auf $C^0(\overline{D}, V' \otimes F)$, und folglich ist das Bild $A_B(C^0(\overline{D}, V' \otimes F))$ enthalten in $C^\alpha(\overline{D}, V'' \otimes F)$. Daher ist A_B ein stetiger Operator von $C^0(\overline{D}, V' \otimes F)$ nach $C^\alpha(\overline{D}, V'' \otimes F)$. Da K stetig ist und $\{f_j\}$ beschränkt, so ist auch $\{f_j'\}$ beschränkt in $C^0(\overline{D}, V' \otimes F)$. Somit ist die Folge $\{f_j''\}$ beschränkt in $C^\alpha(\overline{D}, V'' \otimes F)$, und da $V'' \otimes F$ endlichen Rang hat, folgt mit Ascoli, daß $\{f_j''\}$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. $\square$

III.3 Banach-wertige (p,q)-Formen

Sei E ein holomorphes Banachbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit X. Dann bezeichne $\Lambda^{p,q}T_X^*$ das Vektorbündel der (p,q)-Formen auf X. Tensoriert mit E bekommt man das Banachbündel der E-wertigen (p,q)-Formen. Der Raum der C^r-Schnitte in diesem Bündel wird mit $C^r_{p,q}(X,E) = C^r(X, \Lambda^{p,q}T_X^* \otimes E)$ bezeichnet. Sei $U \subset X$ eine offene Menge, so daß über U ein Rahmen $\{dz_I \wedge d\overline{z}_J\}_{IJ}$ für $\Lambda^{p,q}T_X^*$ existiert. Eine (p,q)-Form $\omega \in C^r_{p,q}(U,E)$ läßt sich dann schreiben als $\omega = \sum_{IJ} \omega_{IJ} dz_I \wedge d\overline{z}_J$, wobei $\omega_{IJ} \in C^r(U,E)$ die Koeffizienten von ω sind. Für eine Abbildung $H : C^r(U,E) \to C^s(U,E)$ sei definiert

$$H\omega := \sum_{IJ} (H\omega_{IJ}) dz_I \wedge d\overline{z}_J \quad .$$

Definition III.3.1. Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ und B ein Banachraum. Ist $f \in C^0_{p,q}(U,B)$, dann heißt $\overline{\partial} f$ **stetig**, falls ein $g \in C^0_{p,q+1}(U,B)$ existiert mit

$$\int_U \overline{\partial}\psi \wedge f = (-1)^{p+q} \int_U \psi \wedge g \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{D}_{n-p,n-q-1}(U,\mathbb{C}) \quad ,$$

wobei $\mathcal{D}_{n-p,n-q-1}(U,\mathbb{C})$ die Schnitte in $C^\infty_{n-p,n-q-1}(U,\mathbb{C})$ bezeichnet, die kompakten Träger in U haben. Die Form g ist dann eindeutig bestimmt und wird mit $\overline{\partial} f$ bezeichnet. Weiter sei $\widetilde{C}^0_{p,q}(U,B) := \{f \in C^0_{p,q}(U,B) \mid \overline{\partial} f \text{ ist stetig }\}$.

Somit ist $\overline{\partial}$ ein abgeschlossener Operator zwischen den Fréchetträumen $C^0_{p,q}(U,B)$ und $C^0_{p,q+1}(U,B)$ mit $\widetilde{C}^0_{p,q}(U,B)$ als Definitionsbereich.

Lemma III.3.2. *Sei $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ und B ein Banachraum. Für $f \in \widetilde{C}^0_{p,q}(U,B)$ gilt:*
(i) Ist $\chi \in C^\infty(U,\mathbb{C})$, dann ist $\chi f \in \widetilde{C}^0_{p,q}(U,B)$ und $\overline{\partial}(\chi f) = \overline{\partial}\chi \wedge f + \chi \overline{\partial} f$.
(ii) Ist $H : U \to \mathrm{End}(B)$ holomorph, dann ist $Hf \in \widetilde{C}^0_{p,q}(U,B)$ und $\overline{\partial} Hf = H\overline{\partial} f$.

Dies wird in [Lei04, Kapitel 3] gezeigt. So kann man $\overline{\partial}$ für E-wertige Formen einführen mit den gewohnten Eigenschaften.

Definition III.3.3. Sei E ein holomorphes Banachbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit X. Sei $f \in C^0_{p,q}(X,E)$. Dann heißt $\overline{\partial} f$ **stetig**, falls ein $g \in C^0_{p,q+1}(X,E)$ existiert, so daß $\overline{\partial}\Phi f = \Phi g$ für jede holomorphe Trivialisierung $\Phi : E_U \to U \times B$.
Man setzt wieder $\overline{\partial} f = g$ und $\widetilde{C}^0_{p,q}(X,E) := \{f \in C^0_{p,q}(X,E) \mid \overline{\partial} f \text{ ist stetig }\}$.

Sei nun wieder $D \subset\subset X$ ein relativ kompaktes Gebiet mit C^1-Rand. Wie in Lemma III.1.1 kann man einen Schnitt $f \in \widetilde{C}^0_{p,q}(\overline{D}, E)$ in einer Umgebung U_ν von $p_\nu \in \partial D$ mittels T_ν verschieben. Sei $\phi_{\mu,z} = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi_{\mu,z} : E_z \to B$. Mit

$$\hat{T}_\nu^{-1}(z) := \phi_{j_\nu,z}^{-1} \phi_{j_\nu,T_\nu(z)} : E_{T_\nu(z)} \to E_z$$

definiert

$$F_\nu(z) := H_\nu f(z) := \hat{T}_\nu^{-1} f \circ T_\nu(z)$$

den stetigen Schnitt $F_\nu \in C^0_{p,q}(U_\nu, E)$ wie in Lemma III.1.1. Dann gilt $H_\nu f \to f$ für $T_\nu \to \mathrm{id}$, und $\overline{\partial} H_\nu f = H_\nu \overline{\partial} f$, denn für $\phi_\mu : E_{U_\mu} \to B$ ist $\phi_\mu \phi_{j_\nu}^{-1} : U_\mu \cap U_\nu \to \mathrm{GL}(B)$ holomorph und

$$\begin{aligned} \overline{\partial}\left(\phi_{\mu,z}\phi_{j_\nu,z}^{-1}\phi_{j_\nu,T_\nu(z)} f \circ T_\nu\right)(z) &= \phi_{\mu,z}\phi_{j_\nu,z}^{-1}\overline{\partial}(\phi_{j_\nu,T_\nu(z)} f \circ T_\nu)(z) \\ &= \phi_{\mu,z}\phi_{j_\nu,z}^{-1}\phi_{j_\nu,T_\nu(z)}\overline{\partial} f \circ T_\nu(z) \quad . \end{aligned}$$

Da $\overline{\partial} f$ stetig ist, ist somit auch $\overline{\partial} F_\nu = \overline{\partial} H_\nu f = H_\nu \overline{\partial} f$ stetig und $\overline{\partial} F_\nu \to \overline{\partial} f$. Somit ist auch $\sum_\nu \chi_\nu F_\nu$ stetig.

Satz III.3.4. *Sei $f \in \widetilde{C}^0_{p,q}(\overline{D}, E)$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine Umgebung U von $\overline{D}$ und ein $F \in \widetilde{C}^0_{p,q}(U, E)$, so daß für alle $\mu \in \{1, \ldots, M\}$ gilt:*

$$\|\Phi_\mu F - \Phi_\mu f\|_{K_\mu} < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \|\Phi_\mu \overline{\partial} F - \Phi_\mu \overline{\partial} f\|_{K_\mu} < \varepsilon \quad .$$

Beweis. Sei $f \in \widetilde{C}^0_{p,q}(\overline{D}, E)$ und $F = \sum_\nu \chi_\nu F_\nu \in \widetilde{C}^0_{p,q}(U, E)$ wie in Satz III.1.2, so daß $\|\Phi_\mu F - \Phi_\mu f\|_{K_\mu} < \varepsilon \quad \forall\, \mu \in \{1, \ldots, M\}$. Dann gilt

$$\overline{\partial} F = \sum_{\nu=0}^{N} \chi_\nu \overline{\partial} F_\nu + \overline{\partial}\chi_\nu \wedge F_\nu \quad .$$

Da beim Verkleinern von U die χ_ν beibehalten werden, bleibt auch $\|\overline{\partial}\chi_\nu\|$ gleich, so daß man mit einem eventuell kleinerem U auch $\|\Phi_\mu \overline{\partial} F - \Phi_\mu \overline{\partial} f\|_{K_\mu} < \varepsilon$ für alle $1 \leq \mu \leq M$ erreichen kann. □

Daraus folgt

Satz III.3.5. *Zu jedem $f \in \widetilde{C}^0_{p,q}(\overline{D}, E)$ gibt es eine Folge $\{f_\nu\}$ in $C^\infty_{p,q}(\overline{D}, E)$, so daß $f_\nu \to f$ und $\overline{\partial} f_\nu \to \overline{\partial} f$.*

Beweis. Für Schnitte, die auf einer offene Umgebung von $\overline{D}$ definiert sind, ist das Ergebnis wiederum bekannt ([Lei04, Prop.3.5]). Analog zu Satz III.2.1 kann man auch hier einen Schnitt aus $\widetilde{C}^0_{p,q}(\overline{D}, E)$ durch Schnitte, die in einer Umgebung von $\overline{D}$ definiert sind, annähern. □

III.4 Globale Homotopieformel

Sei U eine Teilmenge einer komplexen Mannigfaltigkeit X und $E \to X$ ein Banachbündel. Dann bezeichne $\mathcal{Z}^0_{p,q}(U,E) := \{f \in \widetilde{C}^0_{p,q}(U,E) \mid \overline{\partial} f = 0\}$ und $\mathcal{B}^0_{p,q}(U,E) := \overline{\partial}\widetilde{C}^0_{p,q-1}(U,E)$. Weiter sei $H^{p,q}(U,E) := \mathcal{Z}^0_{p,q}(U,E)/\mathcal{B}^0_{p,q}(U,E)$.

III.4.1 q-Konvexität

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, und sei $\varrho : X \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Ein Punkt $p \in X$ heißt **kritischer Punkt** von ϱ, falls $d\varrho(p) = 0$ ist. Ein kritischer Punkt heißt **nicht-degenerierter** kritischer Punkt, falls die Matrix der zweiten Ableitungen

$$\left(\frac{\partial^2 \varrho(p)}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{j,k=1}^{2n}$$

invertierbar ist, wobei $\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ reelle Koordinaten in einer Umgebung von p sind. Andernfalls heißt der Punkt **degeneriert**.
Sind $\{z_1, \ldots, z_n\}$ holomorphe Koordinaten in einer Umgebung von p, dann ist $T^{1,0}_{X,p}$ der holomorphe Tangentialraum in p, der durch $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ aufgespannt wird. Die **Levi-Form** $L_\varrho(p)$ auf dem holomorphen Tangentialraum ist definiert durch

$$L_\varrho(p)\xi = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho(p)}{\partial \overline{z}_j \partial z_k} \overline{\xi}_j \xi_k \qquad \text{für} \quad \xi = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial z_j}(p) \in T^{1,0}_{X,p} \quad ,$$

eine hermitesche Form, die unabhängig ist von der Wahl der holomorphen Koordinaten. Sei nun $1 \le q \le n$. Eine C^2-Funktion $\varrho : X \to \mathbb{R}$ heißt q-**konvex** in $p \in X$, falls ihre Levi-Form $n-q+1$ positive Eigenwerte in p besitzt. Sie heißt **Ausschöpfungsfunktion** für X, falls für jedes $\alpha < \sup_{z \in X} \varrho(z)$ die Menge $\{z \in X \mid \varrho(z) < \alpha\}$ relativ kompakt in X ist. X heißt q-**konvex**, falls es eine kompakte Menge $K \subset\subset X$ und eine Ausschöpfungsfunktion ϱ in X gibt, so daß ϱ in jedem Punkt von $X \setminus K$ q-konvex ist. Falls $K = \emptyset$ gewählt werden kann, heißt X auch q-**vollständig**.
Die 1-konvexen Funktionen werden auch **streng pseudokonvex** genannt, und die 1-konvexen Mannigfaltigkeiten heißen auch **pseudokonvexe** Mannigfaltigkeiten. Die 1-vollständigen Mannigfaltigkeiten sind genau die Steinschen Mannigfaltigkeiten. Zudem sollen als 0-konvexe Mannigfaltigkeiten die kompakten Mannigfaltigkeiten bezeichnet werden.
Ein relativ kompaktes Gebiet $D \subset\subset X$ heißt **streng** q-**konvex**, falls es eine q-konvexe Funktion ϱ in einer Umgebung U von ∂D gibt, so daß $D \cap U = \{z \in U \mid \varrho(z) < 0\}$. D heißt **nicht-degeneriert**, falls ϱ ohne degenerierte kritische Punkte in U gewählt werden kann.

III.4.2 Homotopieformel

Ist V ein holomorphes Vektorbündel über X und $D \subset X$. Dann gibt es lokal kleine Umgebungen $U \subset D$, in denen für Schnitte $f \in \mathcal{Z}^0_{p,q}(\overline{D}, V)$ auch eine Lösung $u \in \widetilde{C}^0_{p,q-1}(U, V)$ existiert, die $\overline{\partial} u = f|_U$ löst. Ist nun $D \subset\subset X$ ein nicht-degeneriertes streng q-konvexes Gebiet und $r \geq q \geq 1$, dann kann man die lokalen Lösungsoperatoren so zusammenfügen, daß man einen globalen Operator erhält, der bis auf einen kompakten Teil global in $\overline{D}$ löst. Dies führt zu dem Ergebnis $\dim H^{p,r}(\overline{D}, V) < \infty$, d.h. $\mathcal{B}^0_{p,r}(\overline{D}, V)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{D}, V)$ von endlicher Codimension. [HL88]
Ist nun zusätzlich $H^{p,q}(\overline{D}, V) = 0$, so kann man auch global eine Homotopieformel erhalten, die für $f \in \mathcal{Z}^0_{p,q}(\overline{D}, V)$ eine Lösung $u \in \widetilde{C}^0_{p,q-1}(\overline{D}, V)$ findet, die $\overline{\partial} u = f$ (in D) erfüllt. Diese Homotopie-Operatoren sind sogar Hölder-stetig mit Exponent $1/2$. Die Homotopieformel gilt auch weiter, wenn man Schnitte betrachtet mit Werten in $V \otimes B$, wobei B ein Banachraum ist.

Lemma III.4.1. *Sei X ein Vektorraum und seien $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$ linear unabhängige Funktionale. Dann gibt es linear unabhängige $x_1, \ldots, x_n \in X$ mit $x'_i(x_j) = \delta_{ij}$.*

Beweis. Beweis durch Induktion. ($n = 1$ ist klar.)
($n = 2$):
Zu $x'_1 \in X'$ gibt es $\tilde{x}_1 \in X$ mit $x'_1(\tilde{x}_1) = 1$, da $x'_1 \neq 0$. Suche $x_2 \in \operatorname{Ker} x'_1$ mit $x'_2(x_2) = 1$. Dazu betrachte $H_1(x) = x - x'_1(x)\tilde{x}_1$. $H_1 : X \to \operatorname{Ker} x'_1$, denn $x'_1(H_1(x)) = x'_1(x - x'_1(x)\tilde{x}_1) = x'_1(x) - (x'_1\tilde{x}_1)x'_1(x) = 0 \quad \forall\, x \in X$.
Angenommen $\operatorname{Ker} x'_1 \subset \operatorname{Ker} x'_2$, d.h. $x'_2(x) = 0 \quad \forall\, x \in \operatorname{Ker} x'_1$, dann ist insbesondere $x'_2(H_1(x)) = 0 \quad \forall\, x \in X$, also $0 = x'_2(H_1(x)) = x'_2(x) - x'_2(\tilde{x}_1)x'_1(x) \quad \forall\, x \in X$, also $x'_2 = x'_2(\tilde{x}_1)x'_1$ - im Widerspruch dazu, daß $\{x'_1, x'_2\}$ linear unabhängig sind. Also gibt es $x_2 \in \operatorname{Ker} x'_1$ mit $x'_2(x_2) = 1$. Sei nun $x'_2(\tilde{x}_1) =: \mu$, dann definiere $x_1 := \tilde{x}_1 - \mu x_2$. Dann gilt $x'_2(x_1) = x'_2(\tilde{x}_1) - \mu x'_2(x_2) = \mu - \mu = 0$ und $x'_1(x_1) = x'_1(\tilde{x}_1) - \mu x'_1(x_2) = 1$. Zusammen $x'_i(x_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$.
$(n-1) \to (n)$:
Gelte nun für $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-1} \in X$: $x'_i(\tilde{x}_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n-1$. Sei $N := \bigcap_{j=1}^{n-1} \operatorname{Ker} x'_j$, $H : X \to N$, $Hx := x - \sum_{j=1}^{n-1} x'_j(x)\tilde{x}_j$. Analog zu ($n = 2$) gibt es $x_n \in N$ mit $x'_n(x_n) = 1$, denn sonst wäre $x'_n(x) = 0 \;\forall\, x \in N$, insbesondere $x'_n(Hx) = 0 \;\forall\, x \in X$, also $x'_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} x'_n(\tilde{x}_j)x'_j(x) \;\forall x \in X$, d.h. $x'_n = \sum_{j=1}^{n-1} x'_n(\tilde{x}_j)x'_j$ im Widerspruch dazu, daß $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ linear unabhängig sind. Also $x'_n(x_n) = 1$ und $x'_j(x_n) = 0$, $j < n$ (da $x_n \in N$). Definiere $x'_n(\tilde{x}_j) =: \mu_j$, $j < n$, $x_j := \tilde{x}_j - \mu_j x_n$. Dann gilt $x'_n(x_j) = x'_n(\tilde{x}_j) - \mu_j x'_n(x_n) = \mu_j - \mu_j = 0$ und $x'_i(x_j) = x'_i(\tilde{x}_j) - \mu_j x'_i(x_n) = x'_i(\tilde{x}_j) = \delta_{ij}$, $i, j < n$.
Da $x'_i(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) = \lambda_i$, müssen die $\{x_1, \ldots, x_n\}$ auch linear unabhängig sein. $\square$

Sei V ein Vektorbündel über der Mannigfaltigkeit X und V^* das duale Bündel, dann bezeichnet $\mathcal{D}(X, V^*)$ die glatten Schnitte in V^* mit kompakten Träger in X.

Lemma III.4.2. *Seien $f_1, \ldots, f_m \in C^0(X, V)$ linear unabhängig. Dann gibt es linear unabhängige $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{D}(X, V^*)$ mit*

$$\int_X f_i \wedge \varphi_j = \delta_{ij} \quad .$$

Beweis.
Wenn $\{f_1, \ldots, f_m\}$ linear unabhängig sind, dann auch $T_{f_1}, \ldots, T_{f_m} \in \mathcal{D}'(X, V^*)$ definiert durch

$$T_{f_j}(\varphi) := \int_X f_j \wedge \varphi \quad .$$

Also gibt es linear unabhängige $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{D}(X, V^*)$ mit

$$\int_X f_i \wedge \varphi_j = \delta_{ij} \ , \quad \text{d.h.} \quad T_{f_i}(\varphi_j) = \delta_{ij} \quad .$$

□

Satz III.4.3. *Sei X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel. Weiter sei $D \subset\subset X$ ein nicht-degeneriertes streng q-konvexes Gebiet und $q \geq 1$ so, daß*

$$H^{0,q}(\overline{D}, V) = 0 \quad .$$

Dann gibt es stetige lineare Operatoren ($A_{n+1} := 0$)

$$A_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^{1/2}_{0,r-1}(\overline{D}, V) \quad , \qquad r = q, q+1 \quad ,$$

mit

$$\overline{\partial} A_q f + A_{q+1} \overline{\partial} f = f \qquad \textit{für alle} \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,q}(\overline{D}, V) \quad .$$

Beweis.
Theorem 11.2 in [HL88] besagt, daß es für $q \geq 1$ stetige lineare Operatoren

$$T_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^{1/2}_{0,r-1}(\overline{D}, V) \quad \text{und} \quad K_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^{1/2}_{0,r}(\overline{D}, V)$$

für $r \geq q$ gibt, so daß

$$\overline{\partial} T_r f + T_{r+1} \overline{\partial} f = f + K_r f \qquad \text{für alle} \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,r}(\overline{D}, V) \ , \quad r \geq q \ .$$

Sei also $q \geq 1$. Dann folgt

$$\overline{\partial} K_r f = K_{r+1} \overline{\partial} f \qquad \text{für alle} \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,r}(\overline{D}, V) \ , \quad r \geq q \ ,$$

denn einerseits

$$\overline{\partial}(f+K_r)f = \overline{\partial}(\overline{\partial}T_r f + T_{r+1}\overline{\partial}f) = \overline{\partial}T_{r+1}\overline{\partial}f \quad ,$$

aber andererseits wenn man $\overline{\partial}f$ statt f betrachtet

$$\overline{\partial}f + K_{r+1}\overline{\partial}f = \overline{\partial}T_{r+1}\overline{\partial}f + T_{r+2}\overline{\partial}\overline{\partial}f = \overline{\partial}T_{r+1}\overline{\partial}f \quad .$$

Setze $\mathcal{B}_r := \mathcal{B}^0_{0,r}(\overline{D},V)$, $\mathcal{Z}_r := \mathcal{Z}^0_{0,r}(\overline{D},V)$ und $D_r := \widetilde{C}^0_{0,r}(\overline{D},V)$. Für $r \geq q$ ist $\mathcal{B}_r$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{Z}_r$ von endlicher Codimension, d.h. $\dim \mathcal{Z}_r/\mathcal{B}_r = \dim H^{0,r}(\overline{D},V) < \infty$.
Da $H^{0,q}(\overline{D},V) = 0$, ist $\mathcal{B}_q = \mathcal{Z}_q = \overline{\partial}D_{q-1}$. Sei N_r die Einschränkung von $\mathrm{id} + K_r$ auf $\mathcal{B}_r$, und seien $\mathrm{Ker}\ N_r = \{f \in \mathcal{B}_r \mid N_r f = 0\}$ und $\mathrm{Im}\ N_r = N_r(\mathcal{B}_r)$ Kern bzw. Bild von N_r. Da $K_r(\mathcal{B}_r) \subset \mathcal{B}_r$, gilt auch $\mathrm{Im}\ N_r \subset \mathcal{B}_r$. Nun ist K_r stetig zwischen $\mathcal{B}_r$ und $C^{1/2}_{0,r}(\overline{D},V)$, also nach Ascoli ein kompakter Endomorphismus von $\mathcal{B}_r$. Somit ist N_r ein Index-0 Fredholm-Operator in $\mathcal{B}_r$. Daher hat $\mathrm{Im}\ N_r$ endliche Codimension m_r in $\mathcal{B}_r$ und $m_r = \dim \mathrm{Ker}\ N_r$. Sei $\{h^{(r)}_1, \ldots, h^{(r)}_{m_r}\}$ eine Basis von $\mathrm{Ker}\ N_r$, und die Formen $g^{(r)}_1, \ldots, g^{(r)}_{m_r} \in \mathcal{B}_r$ seien so gewählt, daß $\mathcal{B}_r$ durch $\mathrm{Im}\ N_r \cup \{g^{(r)}_1, \ldots, g^{(r)}_{m_r}\}$ aufgespannt wird. Da $C^\infty_{0,r-1}(\overline{D},V)$ dicht liegt in D_{r-1} bzgl. der Graphennorm (Satz III.3.5), kann man annehmen, daß $g^{(r)}_\nu \in \overline{\partial}C^\infty_{0,r-1}(\overline{D},V)$. Zu den $g^{(r)}_\nu$ gibt es Formen $u^{(r-1)}_\nu \in C^\infty_{0,r-1}(\overline{D},V)$ mit $\overline{\partial}u^{(r-1)}_\nu = g^{(r)}_\nu$. Sei V^* das duale Bündel zu V und $\mathcal{D}_{n,n-r}(\overline{D},V^*)$ der Raum der V^*-wertigen C^∞-Formen vom Grad $(n,n-r)$ mit kompakten Träger in D. So gibt es Formen $\varphi^{(r)}_1, \ldots, \varphi^{(r)}_{m_r} \in \mathcal{D}_{n,n-r}(\overline{D},V^*)$ mit

$$\int_D h^{(r)}_\mu \wedge \varphi^{(r)}_\nu = \delta_{\mu,\nu} \quad .$$

Definiere folgende stetige lineare Operatoren mit endlichen Rang

$$\begin{aligned} S_r &: C^0_{0,r}(\overline{D},V) \to C^\infty_{0,r-1}(\overline{D},V) \\ K'_r, K''_r &: C^0_{0,r}(\overline{D},V) \to C^\infty_{0,r}(\overline{D},V) \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} S_r f &= \sum_{\nu=1}^{m_r} \left(\int_D f \wedge \varphi^{(r)}_\nu \right) u^{(r-1)}_\nu \quad , \\ K'_r f &= \sum_{\nu=1}^{m_r} \left(\int_D f \wedge \varphi^{(r)}_\nu \right) g^{(r)}_\nu \quad , \\ K''_r f &= (-1)^{p+r+1} \sum_{\nu=1}^{m_r} \left(\int_D f \wedge \overline{\partial}\varphi^{(r+1)}_\nu \right) u^{(r)}_\nu \quad . \end{aligned}$$

Für $f \in D_r$ folgt $K_r' f = \overline{\partial} S_r f$ und mit STOKES $K_r'' f = S_{r+1}\overline{\partial} f$. Setze

$$\widetilde{A}_r := T_r + S_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^{1/2}_{0,r-1}(\overline{D}, V) \quad .$$

Dann gilt

$$\overline{\partial}\widetilde{A}_r f + \widetilde{A}_{r+1}\overline{\partial} f = f + (K_r + K_r' + K_r'')f \quad \text{für} \quad f \in D_r \quad .$$

Setze $M_r := \mathrm{id} + K_r + K_r' + K_r''$. Wenn man nun f und $\overline{\partial} f$ in

$$\overline{\partial}\widetilde{A}_r f + \widetilde{A}_{r+1}\overline{\partial} f = M_r f$$

einsetzt, ergibt sich

$$\overline{\partial} M_r f = \overline{\partial}(\overline{\partial}\widetilde{A}_r f + \widetilde{A}_{r+1}\overline{\partial} f) = \overline{\partial}\widetilde{A}_{r+1}\overline{\partial} f + \widetilde{A}_{r+2}\overline{\partial}\overline{\partial} f = M_{r+1}\overline{\partial} f \quad .$$

Die Einschränkung $M_r|_{\mathcal{B}_r}$ ist ein Isomorphismus, da $K_r'' = S_{r+1}\overline{\partial}$ auf $\mathcal{Z}_r$ verschwindet und so $M_r|_{\mathcal{B}_r} = N_r + K_r'|_{\mathcal{B}_r}$, wobei K_r' den Kern von N_r isomorph auf ein Komplement von Im N_r in $\mathcal{B}_r$ abbildet. Weiter gilt

$$M_r(\mathcal{Z}_r) = \mathcal{B}_r \quad ,$$

denn

$$(\mathrm{id} + K_r)(\mathcal{Z}_r) \subset \mathcal{B}_r \quad \text{und} \quad K_r'(\mathcal{Z}_r) \subset \mathcal{B}_r \quad .$$

Sei nun $\mathcal{H}^r$ ein endlich-dimensionales Komplement von $\mathcal{B}_r$ in $\mathcal{Z}_r$, $\mathcal{H}^r \oplus \mathcal{B}_r = \mathcal{Z}_r$, und $Q_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^0_{0,r}(\overline{D}, V)$ eine stetige Projektion mit

$$\mathrm{Im}\ Q_r = \mathcal{H}^r \quad \text{und} \quad \mathrm{Ker}\ Q_r \supset \mathcal{B}_r \quad .$$

Dann gilt

$$\overline{\partial} Q_r f = 0 \quad \text{und} \quad Q_{r+1}\overline{\partial} f = 0 \quad .$$

Definiere

$$\widehat{M}_r := M_r + Q_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \quad .$$

Auf $\mathcal{Z}_r$ ist $\widehat{M}_r|_{\mathcal{Z}_r}$ ein Isomorphismus und es gilt

$$\overline{\partial}\widehat{M}_r f = \widehat{M}_{r+1}\overline{\partial} f \quad \text{für } f \in D_r \quad .$$

Es gilt $\widehat{M}_r(D_r) = D_r$:
Wegen $\overline{\partial} K_r f = K_{r+1}\overline{\partial} f$ gilt $K_r(D_r) \subset D_r$. Ebenso gilt Im $Q_r \subset \mathcal{Z}_r \subset D_r$. Die Werte von K_r' und K_r'' liegen sogar in $C^\infty_{0,r}(\overline{D}, V)$. Somit gilt $\widehat{M}_r(D_r) \subset D_r$.
Für "$\supset$" sei $f \in D_r$, also $\overline{\partial} f \in \mathcal{B}_{r+1}$. Da $\widehat{M}_{r+1}|_{\mathcal{B}_{r+1}}$ ein Isomorphismus ist, folgt

$$\begin{aligned} \overline{\partial} f &= \widehat{M}_{r+1}\overline{\partial} u \quad \text{für ein } u \in D_r \\ &= \overline{\partial}\widehat{M}_r u \quad . \end{aligned}$$

Somit ist $\overline{\partial}(f - \widehat{M}_r u) = 0$, also $f - \widehat{M}_r u \in \mathcal{Z}_r$. Da auch $\widehat{M}_r|_{\mathcal{Z}_r}$ ein Isomorphismus ist, folgt $f - \widehat{M}_r u = \widehat{M}_r v$ für ein $v \in \mathcal{Z}_r$, also $f = \widehat{M}_r(u + v)$.
$\widehat{M}_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^0_{0,r}(\overline{D}, V)$ ist zudem ein Index-0 Fredholmoperator, da $K_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^{1/2}_{0,r}(\overline{D}, V)$ und die Einbettung $C^{1/2}_{0,r}(\overline{D}, V) \hookrightarrow C^0_{0,r}(\overline{D}, V)$ nach Ascoli kompakt ist, und da die Operatoren K'_r, K''_r und Q_r endlichen Rang haben. Da $D_r \subset C^0_{0,r}(\overline{D}, V)$ dicht liegt, ist $\widehat{M}_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V) \to C^0_{0,r}(\overline{D}, V)$ ein Isomorphismus.
Setze nun

$$A_r := \widetilde{A}_r \widehat{M}_r^{-1} = (T_r + S_r)(M_r + Q_r)^{-1} \quad .$$

Für $f \in D_r$ und $r \geq q$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} A_r f + A_{r+1} \overline{\partial} f &= \overline{\partial} \widetilde{A}_r \widehat{M}_r^{-1} f + \widetilde{A}_{r+1} \widehat{M}_{r+1}^{-1} \overline{\partial} f \\
&= \overline{\partial} \widetilde{A}_r \widehat{M}_r^{-1} f + \widetilde{A}_{r+1} \overline{\partial} \widehat{M}_r^{-1} f \\
&= M_r \widehat{M}_r^{-1} f = (\widehat{M}_r - Q_r) \widehat{M}_r^{-1} f \\
&= f - Q_r \widehat{M}_r^{-1} f \quad .
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\mathcal{H}^q = 0$, d.h. $Q_q \widehat{M}_q^{-1} f = 0$. □

Bemerkung: (i) Insbesondere erhält man also für $r \geq q$

$$H^{0,r}(\overline{D}, V) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\partial} A_r f + A_{r+1} \overline{\partial} f = f \quad .$$

Dies ist auch klar, da q-Konvexität $(q+1)$-Konvexität impliziert.
(ii) Sei nun $\overline{D} \subset\subset X$ ein nicht-degeneriertes 1-konvexes Gebiet und $H^{0,0}(\overline{D}, V) = 0$. Dann gilt $A_1 \overline{\partial} f = f$:
Da $\widehat{M}_1|_{\mathcal{B}_1} = M_1|_{\mathcal{B}_1}$ ein Isomorphismus ist, gilt auch $\widehat{M}_1^{-1} \overline{\partial} f \in \mathcal{B}_1$, und so

$$Q_1 \widehat{M}_1^{-1} \overline{\partial} f = 0 \quad .$$

Daraus folgt

$$\overline{\partial} A_1 \overline{\partial} f = \overline{\partial} f - Q_1 \widehat{M}_1^{-1} \overline{\partial} f = \overline{\partial} f \quad ,$$

d.h. $A_1 \overline{\partial} f - f \in \mathcal{Z}_0 = H^{0,0}(\overline{D}, V) = 0$. Setzt man $A_0 := 0$, erhält man für den 1-konvexen Fall

$$H^{0,r}(\overline{D}, V) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\partial} A_r f + A_{r+1} \overline{\partial} f = f \quad , \qquad r \geq 0 \quad .$$

(iii) Ist X eine kompakte Mannigfaltigkeit, dann gibt es für $r \geq 1$ und $0 < \alpha < 1$ stetige lineare Operatoren

$$T_r : C^0_{0,r}(X, V) \to C^\alpha_{0,r-1}(X, V) \quad \text{und} \quad K_r : C^0_{0,r}(X, V) \to C^\alpha_{0,r}(X, V) \ ,$$

so daß

$$\overline{\partial} T_r f + T_{r+1}\overline{\partial} f = f + K_r f \qquad \text{für alle} \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,r}(X,V)\ .$$

Man erhält also wie in (ii)

$$H^{0,r}(X,V) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{\partial} A_r f + A_{r+1}\overline{\partial} f = f \quad , \qquad r \geq 0 \quad .$$

Satz III.4.4. *Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel und B ein Banachraum. Weiter sei $D \subset\subset X$ ein relativ kompaktes Gebiet mit C^1-Rand, $0 < \alpha < 1$ und $q \geq 0$. Sind*

$$A_r : C^0_{0,r}(\overline{D},V) \to C^\alpha_{0,r-1}(\overline{D},V) \quad , \qquad r = q, q+1$$

stetige lineare Operatoren mit

$$\overline{\partial} A_q f + A_{q+1}\overline{\partial} f = f \qquad \textit{für alle} \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,q}(\overline{D},V) \quad ,$$

dann gibt es stetige lineare Operatoren

$$A^B_r : C^0_{0,r}(\overline{D},V\otimes B) \to C^\alpha_{0,r-1}(\overline{D},V\otimes B) \quad , \qquad r = q, q+1 \quad ,$$

mit

$$\overline{\partial} A^B_q f + A^B_{q+1}\overline{\partial} f = f \qquad \textit{für alle} \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,q}(\overline{D},V\otimes B) \quad .$$

Beweis. [Satz III.2.2; Satz III.2.1, Satz III.3.5]
Für $B = \mathbb{C}$ ist $A^B_r = A_r$. Ist B nun ein beliebiger komplexer Banachraum, dann folgt aus Satz III.2.2, daß es stetige lineare Operatoren $A^B_r : C^0_{0,r}(\overline{D},V\otimes B) \to C^\alpha_{0,r-1}(\overline{D},V\otimes B)$ gibt mit

$$A^B_r \sum_{j=1}^N f_j \otimes b_j = \sum_{j=1}^N A_r(f_j)\otimes b_j \quad \text{für } f_j \in C^0_{0,r}(\overline{D},V),\ b_j \in B.$$

Ist $f \in \widetilde{C}^0_{0,q}(\overline{D},V\otimes B)$, dann gibt es nach Satz III.3.5 und Satz III.2.1 eine Folge $f_\nu \in C^\infty_{0,q}(\overline{D},V)\otimes B$, so daß $f_\nu \to f$ und $\overline{\partial} f_\nu \to \overline{\partial} f$. Da für die f_ν die Homotopieformel $\overline{\partial} A^B_q f_\nu + A^B_{q+1}\overline{\partial} f_\nu = f_\nu$ gilt und die A^B_r stetig sind, folgt die Behauptung, wenn man zum Grenzwert übergeht. □

III.4.3 Endlichkeitssatz

Definition III.4.5. Ein Banachraum B hat die **kompakte Approximationseigenschaft**, wenn es für jede kompakte Menge $\Gamma \subset\subset B$ und jedes $\varepsilon > 0$ einen kompakten Operator $K : B \to B$ gibt mit $\|x - Kx\| \leq \varepsilon$ für alle $x \in \Gamma$.
Ein Banachbündel hat die **kompakte Approximationseigenschaft**, wenn die Fasern die kompakte Approximationseigenschaft haben.
Ein Banachbündel ist von **kompaktem Typ**, wenn die Übergangsfunktionen die Form $\mathrm{id} + K$ annehmen, wobei die Werte von K an jeder Stelle kompakte Operatoren sind.

Satz III.4.6. *Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel und $D \subset\subset X$ ein nicht-degeneriertes streng q-konvexes Gebiet mit C^1-Rand und $H^{0,q}(\overline{D}, V) = 0$. Sei E ein holomorphes Banachbündel über X.*

(i) Ist E holomorph trivial, dann ist $H^{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) = 0$.

(ii) Ist E von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft, dann gilt $\dim H^{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) < \infty$.

Zusatz: *Ist $D \subset\subset X$ ein nicht-degeneriertes streng 1-konvexes Gebiet mit $H^{0,0}(\overline{D}, V) = 0$, dann gilt ebenso*
(i) $H^{0,0}(\overline{D}, V \otimes E) = 0$ bzw. (ii) $\dim H^{0,0}(\overline{D}, V \otimes E) < \infty$.
Ist X eine kompakte Mannigfaltigkeit und $q \geq 0$, dann gilt analog:
(i) Ist E holomorph trivial, dann ist $H^{0,q}(X, V \otimes E) = 0$.
(ii) Ist E von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft, dann gilt $\dim H^{0,q}(X, V \otimes E) < \infty$.

Bemerkung:
Ist eine Mannigfaltigkeit (oder ein relativ kompaktes Gebiet) (streng) q-konvex, dann natürlich auch $(q+1)$-konvex. Ist $D \subset\subset X$ streng q-konvex, dann ist dies eine Eigenschaft des Randes. Wenn also $D = X$ eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, dann ist X zum einen eine 1-konvexe Mannigfaltigkeit mit $K = X$ (sie ist nach Definition sogar 0-konvex), zum anderen ist X auch ein streng 1-konvexes Gebiet, da $\partial X = \emptyset$. Dies sind Zusatz (i) und (ii).

Für den Beweis von Satz III.4.6 wird noch folgendes Lemma benötigt.

Lemma III.4.7.

(i) Seien $V \subset U$ Unterräume des Banachraums X. Ist V abgeschlossen und $\dim X/V < \infty$, dann ist auch U abgeschlossen.

(ii) Ist $T : X \to Y$ Fredholm-Operator zwischen den Banachräumen X und Y und U abgeschlossener Unterraum von X, dann ist das Bild $T(U)$ abgeschlossen.

Beweis.
(i) Sei $\omega : X \to X/V$ die Quotientenabbildung. Das Bild $\omega(U)$ ist abgeschlossen in X/V, da $\dim \omega(U) \leq \dim X/V < \infty$. Da $V \subset U$, gilt $U = \omega^{-1}\omega(U)$, und da ω stetig ist, ist U abgeschlossen in X.
(ii) Da T Fredholm-Operator ist, ist Ker T endlich-dimensional und Im $T = T(X)$ abgeschlossen. Die Quotientenabbildung $\omega : X \to X/\text{Ker } T$ ist stetig und offen. Sei $\widehat{T} : X/\text{Ker } T \to \text{Im } T$ die Abbildung mit $T = \widehat{T}\omega$. Da Im T abgeschlossen ist, ist $\widehat{T}$ ein Isomorphismus. Nach Definition der Quotiententopologie ist eine

Menge $V \subset X/\mathrm{Ker}\ T$ genau dann abgeschlossen, wenn $\omega^{-1}(V)$ abgeschlossen in X ist. Nun ist $\omega^{-1}\omega(U) = U + \mathrm{Ker}\ T$. Da $\mathrm{Ker}\ T$ endlich-dimensional ist, hat auch der Unterraum $U \cap \mathrm{Ker}\ T = Z$ endliche Dimension, und es gibt einen endlich-dimensionalen Unterraum W mit $\mathrm{Ker}\ T = W \oplus Z$. Daher ist $U \cap W = \{0\}$ und $U + \mathrm{Ker}\ T = U \oplus W = \omega(U)$ abgeschlossen. Da $\widehat{T}$ Isomorphismus ist, ist auch $T(U) = \widehat{T}\omega(U)$ abgeschlossener Unterraum. $\square$

Beweis von Satz III.4.6.
(i) Dies folgt aus Satz III.4.3 und Satz III.4.4.
(ii) Die Norm in B und die Fasernormen in den Bündeln werden jeweils mit $\|\cdot\|$ bezeichnet. Wähle endliche Überdeckungen $\{U_1, \ldots, U_N\}$ und $\{U'_1, \ldots, U'_N\}$ von $\overline{D}$ mit $\overline{U}_j \subset\subset U'_j$, so daß E über U'_j trivial ist. Da E von kompaktem Typ ist, gibt es holomorphe Trivialisierungen

$$\Phi_j : E|_{U'_j} \to U'_j \times B \quad ,$$

so daß

$$\Gamma_{jk} := \Phi_j \Phi_k^{-1} - \mathrm{id} : U'_j \cap U'_k \to X \times \mathrm{End}(B)$$

faserweise kompakt ist. Dann folgt mit Lemma III.2.7, daß die Menge

$$\Gamma := \left\{ \Gamma_{jk} b \mid b \in (\overline{U}_j \cap \overline{U}_k) \times B, \|b\| = 1 \right\}$$

relativ kompakt in $(\overline{U}_j \cap \overline{U}_k) \times B$ ist.
Sei $\varepsilon > 0$. Da B die kompakte Approximationseigenschaft besitzt, gibt es einen kompakten Operator $Q : B \to B$, so daß

$$\|x - Qx\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in \Gamma.$$

Sei $P := \mathrm{id} - Q$. Dann gilt $\|P\Gamma_{jk} b\| < \varepsilon \|b\|$ für alle $b \in (\overline{U}_j \cap \overline{U}_k) \times B$.
Die mit id_V tensorierten Operatoren in $V \otimes B$ bzw. $V \otimes E$ werden wieder mit P, Q, Γ, Φ bezeichnet. Da

$$\Phi_j \Phi_k^{-1} = \mathrm{id}_{V \otimes B} + \Gamma_{jk} \quad \text{auf} \quad U'_j \cap U'_k,$$

gilt dort auch

$$\Phi_j^{-1} P(\Phi_j - \Phi_k) = \Phi_j^{-1} P(\Phi_j \Phi_k^{-1} - \mathrm{id}_{V \otimes B})\Phi_k = \Phi_j^{-1} P \Gamma_{jk} \Phi_k \quad .$$

Nun kann man $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß für $f \in C^0_{p,q}(\overline{D}, V \otimes E)$ gilt

$$\|\Phi_j^{-1} P \Gamma_{jk} \Phi_k f\| \leq \frac{1}{2}\|f\| \quad \text{auf} \quad \overline{U}_j \cap \overline{U}_k \quad .$$

Wähle nun C^∞-Funktionen $\chi_j : X \to [0,1]$, so daß $\lambda_j = \chi_j^2$ eine Zerlegung der Eins für $U_1, \cdots, U_N$ bzgl. $\overline{D}$ bilden, also mit der Eigenschaft

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j|_{\overline{D}} = 1 \quad .$$

Definiere stetige lineare Operatoren

$$T'_r, T''_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V \otimes E) \to C^0_{0,r-1}(\overline{D}, V \otimes E) \quad , \qquad r = q, q+1 \ ,$$

durch

$$T'_r f := \sum_{j,k=1}^{N} \lambda_j \Phi_j^{-1} A_r P \Phi_k \lambda_k f \quad ,$$

$$T''_r f := \sum_{j=1}^{N} \chi_j \Phi_j^{-1} A_r Q \Phi_j \chi_j f \quad ,$$

wobei

$$A_r : C^0_{0,r}(\overline{D}, V \otimes B) \to C^{1/2}_{0,r-1}(\overline{D}, V \otimes B) \quad , \qquad r = q, q+1 \quad ,$$

$$\overline{\partial} A_q f + A_{q+1} \overline{\partial} f = f \qquad \text{für alle} \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes B) \quad ,$$

die Operatoren aus Satz III.4.3 bzw. Satz III.4.4 sind.
Dann ergeben sich mit den Bezeichnungen

$$Sf := -\sum_{j,k=1}^{N} \lambda_j \Phi_j^{-1} P \Gamma_{jk} \Phi_k \lambda_k f = -\sum_{j,k=1}^{N} \Phi_j^{-1} P \Gamma_{jk} \Phi_k \lambda_j \lambda_k f \quad ,$$

$$K'f := \sum_{j,k=1}^{N} \overline{\partial} \lambda_j \wedge \Phi_j^{-1} A_q P \Phi_k \lambda_k f \quad , \quad L'f := -\sum_{j,k=1}^{N} \lambda_j \Phi_j^{-1} A_{q+1} P \Phi_k \overline{\partial} \lambda_k \wedge f \quad ,$$

$$K''f := \sum_{j=1}^{N} \overline{\partial} \chi_j \wedge \Phi_j^{-1} A_q Q \Phi_j \chi_j f \quad , \quad L''f := -\sum_{j=1}^{N} \chi_j \Phi_j^{-1} A_{q+1} Q \Phi_j \overline{\partial} \chi_j \wedge f \quad ,$$

für $f \in \widetilde{C}^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E)$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \overline{\partial} T'_q f + T'_{q+1} \overline{\partial} f &= (K' + L')f + \sum_{j,k=1}^{N} \lambda_j \Phi_j^{-1} P \Phi_k \lambda_k f \\ &= (K' + L' + S)f + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \Phi_j^{-1} P \Phi_j f \end{aligned}$$

und

$$\overline{\partial} T''_q f + T''_{q+1}\overline{\partial} f = (K'' + L'')f + \sum_{j=1}^{N} \chi_j^2 \Phi_j^{-1} Q \Phi_j f \quad .$$

Da $P + Q = \mathrm{id}$, gilt also für $T_r := T'_r + T''_r$:

$$\overline{\partial} T_q f + T_{q+1}\overline{\partial} f = f + Sf + (K' + L' + K'' + L'')f \quad , \quad f \in \widetilde{C}^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) \quad .$$

Behauptung:
Für die Operatoren S, K', L', K'', L'' gilt:

$$\mathrm{id} + tS : C^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) \to C^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) \quad \text{ist Isomorphismus } \forall\, t \in [0,1] \ ,$$

$$K', L', K'', L'' : C^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) \to C^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) \quad \text{sind kompakte Operatoren.}$$

Denn:
Die Operatornorm von tS ist $\|tS\| \leq t/2$, da $\|\Phi_j^{-1} P \Gamma_{jk} \Phi_k f\| \leq \frac{1}{2}\|f\|$, und daher ist $\mathrm{id} + tS$ invertierbar.
Da Q als Schnitt in $V \otimes B$ faserweise kompakt ist, folgt mit Satz III.2.11, daß $A_q Q : C^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes B) \to C^0_{0,q-1}(\overline{D}, V \otimes B)$ ein kompakter Operator ist, und somit ist auch K'' kompakt. Ebenso folgt die Kompaktheit von L''.
Da $\Phi_j^{-1} = \Phi_\nu^{-1} - \Phi_j^{-1}\Gamma_{j\nu}$ in $U_j \cap U_\nu$ und $\sum \lambda_\nu \equiv 1$, $\sum \overline{\partial}\lambda_j \equiv 0$, folgt

$$\begin{aligned}
K'f &= \sum_{j,k=1}^{N} \overline{\partial}\lambda_j \wedge \Phi_j^{-1} A_q P \Phi_k \lambda_k f \\
&= \sum_{\nu,j,k=1}^{N} \lambda_\nu \overline{\partial}\lambda_j \wedge (\Phi_j^{-1} - \Phi_\nu^{-1} + \Phi_\nu^{-1}) A_q P \Phi_k \lambda_k f \\
&= -\sum_{\nu,j,k=1}^{N} \lambda_\nu \overline{\partial}\lambda_j \wedge \Phi_j^{-1}\Gamma_{j\nu} A_q P \Phi_k \lambda_k f + \sum_{\nu,k=1}^{N} \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \overline{\partial}\lambda_j \wedge \lambda_\nu \Phi_\nu^{-1} A_q P \Phi_k \lambda_k f}_{=0} \quad .
\end{aligned}$$

Mit Satz III.2.8 folgt nun, daß K' kompakt ist.
Analog folgt mit $\Phi_k = \Phi_\nu - \Gamma_{\nu k}\Phi_k$, daß

$$L'f = \sum_{\nu,j,k=1}^{N} \lambda_j \Phi_j^{-1} A_{q+1} P \Gamma_{\nu k} \Phi_k \lambda_\nu \overline{\partial}\lambda_k \wedge f \quad ,$$

womit nach Satz III.2.11 auch die Kompaktheit von L' folgt.

Folglich ist für jedes $t \in [0,1]$

$$M(t) := \mathrm{id} + t(S + K' + L' + K'' + L'')$$

Fredholm-Operator in $C^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)$. Da $\overline{\partial}T_q + T_{q+1}\overline{\partial} = M(1)$, ist $\mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)$ ein invarianter Unterraum von $M(1)$ und so auch von $M(1) - \mathrm{id}$. Daher ist

$$N(t) := M(t)|_{\mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)}$$

ein Endomorphismus von $\mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)$ für alle $t \in [0,1]$. Da $M(t)$ Fredholm-Operator ist, ist der Kern von $N(t)$ endlich-dimensional und das Bild von $N(t)$ topologisch abgeschlossen. Es gilt $N(0) = \mathrm{id}$, und da $N(t)$ stetig von t abhängt, hat $N(t)$ für jedes $t \in [0,1]$ endliche Codimension in $\mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)$. Insbesondere hat auch

$$Y = (\mathrm{id} + S + K' + L' + K'' + L'')(\mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E))$$

endliche Codimension in $\mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)$. Für ($q = 0$ ist $Y = 0$ und) $q \geq 1$ ist Y enthalten in $\mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E) = \overline{\partial}\widetilde{C}^0_{0,q-1}(\overline{D}, V\otimes E)$, so daß auch $\mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)$ von endlicher Codimension in $\mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}, V\otimes E)$ ist, d.h.

$$\dim H^{0,q}(\overline{D}, V\otimes E) < \infty \quad .$$

□

Bemerkung: Aus dem Beweis folgte, daß $N(t) : \mathcal{Z}^q \to \mathcal{Z}^q$ Index-0 Fredholm-Operator ist für alle $t \in [0,1]$. Das gleiche folgt auch für $\tilde{N}(t) = N(t)|_{\mathcal{B}^q} : \mathcal{B}^q \to \mathcal{B}^q$. Da $\tilde{N}(1) = \overline{\partial}T$ mit $T : \mathcal{B}^q \to C_{q-1}$ und $\overline{\partial} : \widetilde{C}_{q-1} \to \mathcal{B}^q$, und $\mathcal{B}^q$ Banachraum ist, zeigt das folgende Lemma, daß es auch einen stetigen Operator $\widetilde{T} : \mathcal{B}^q \to C_{q-1}$ gibt mit $\overline{\partial}\widetilde{T} = \mathrm{id}$ auf $\mathcal{B}^q$.

Lemma III.4.8. *Seien E, F Banachräume und $\overline{\partial} : E \to F$ ein abgeschlossener linearer Operator mit $\mathrm{dom}(\overline{\partial}) \subset E$. Angenommen folgendes sei erfüllt:*

(i) $\overline{\partial}(\mathrm{dom}(\overline{\partial})) = F$, d.h. $\overline{\partial}$ ist surjektiv (folglich offen).

(ii) Es gibt einen beschränkten linearen Operator $T : F \to E$ mit $T(F) \subset \mathrm{dom}(\overline{\partial})$, so daß $\overline{\partial}T$ ein Index-0 Fredholm-Operator ist.

Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator $\widetilde{T} : F \to E$ mit $\widetilde{T}(F) \subset \mathrm{dom}(\overline{\partial})$ und $\overline{\partial}\widetilde{T} = \mathrm{id}$.

Beweis. Seien $M, N \subset F$ abgeschlossene Unterräume mit $F = \mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}T) \oplus M = \mathrm{Im}\ (\overline{\partial}T) \oplus N$. Dann gilt $\dim N = \dim \mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}T) < \infty$, und es gibt eine lineare Abbildung $S : \mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}T) \to E$ mit $\overline{\partial}(S(\mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}T))) = N$. So ist $\overline{\partial}S$ injektiv. Definiere

$$Bx := \begin{cases} Tx\ , & x \in M \\ Sx\ , & x \in \mathrm{Ker}\ (\overline{\partial}T) \end{cases} \quad .$$

Dann ist $\overline{\partial}B$ bijektiv und abgeschlossen, also ist $(\overline{\partial}B)^{-1}$ sogar stetig.
Definiere $\widetilde{T} := B(\overline{\partial}B)^{-1}$ □

III.5 q-konvexe Erweiterung

Sei X eine n-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und $n \geq q \geq 1$. Um Ergebnisse auf q-konvexen Mannigfaltigkeiten zu erhalten, wird folgende Methode benutzt, die auf Grauert zurückgeht: Die Mannigfaltigkeit wird durch relativ kompakte streng q-konvexe Gebiete $D_\alpha = \{\varrho < \alpha\}$ einer Ausschöpfungsfunktion ϱ ausgeschöpft, wobei D_β streng q-konvexe Erweiterung von D_α für $\beta > \alpha$ ist. Diese Erweiterung wird mittels endlich vieler kleiner Beulen erreicht, durch die bestimmte Eigenschaften der Kohomologie auf das etwas erweiterte Gebiet übertragen werden können. Folgende Definitionen stammen aus [HL88].

Definition III.5.1.

a) Sei $D \subset X$ ein Gebiet. X heißt q-**konvexe Erweiterung** von D, falls:

(i) ∂D ist kompakt.

(ii) Es gibt eine q-konvexe Funktion $\varrho : U \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung U von $X \setminus D$, so daß $D \cap U = \{z \in U \mid \varrho(z) < 0\}$, und für jedes $0 < \alpha < \sup\{\varrho(z) \mid z \in U\}$ ist die Menge $\{z \in U \mid 0 \leq \varrho(z) \leq \alpha\}$ kompakt.

Falls die Funktion ϱ in (ii) so gewählt werden kann, daß sie in U keine degenerierten kritischen Punkte besitzt, dann heißt X **nicht-degenerierte** q-konvexe Erweiterung von D.

b) Seien $D \subset G \subset X$ zwei Gebiete in X. Dann heißt G **streng q-konvexe Erweiterung von D in X**, falls G q-konvexe Erweiterung von D ist, so daß zudem $G \setminus D$ relativ kompakt in X ist und folgendes gilt:

(ii)' Es gibt eine q-konvexe Funktion $\varrho : U \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung U von $\overline{G \setminus D}$, so daß $D \cap U = \{z \in U \mid \varrho(z) < 0\}$ und $G \cap U = \{z \in U \mid \varrho(z) < 1\}$.

Falls die Funktion ϱ in (ii)' so gewählt werden kann, daß sie in U keine degenerierten kritischen Punkte besitzt, dann heißt G **nicht-degenerierte** q-konvexe Erweiterung von D in X.

Sei $W \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und $\varrho : W \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Dann heißt

$$F_\varrho(z,w) = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varrho(w)}{\partial w_j}(w_j - z_j) - \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho(w)}{\partial w_j \partial w_k}(z_j - w_j)(z_k - w_k)$$

für $w \in W$, $z \in \mathbb{C}^n$ das **Levi-Polynom** von ϱ.
Die Funktion ϱ heißt **normalisierte q-konvexe** Funktion, falls sie streng pseudokonvex (d.h. 1-konvex) bzgl. $z_1, \ldots, z_{n-q+1}$ ist und falls es Konstanten $\beta > 0$ und $C < \infty$ gibt, so daß

$$\operatorname{Re} F_\varrho(z,w) \geq \varrho(w) - \varrho(z) + \beta \sum_{j=1}^{n-q+1} |w_j - z_j|^2 - C \sum_{j=n-q+2}^{n} |w_j - z_j|^2 \quad .$$

Definition III.5.2.

a) $[W, \varrho, \varphi, D]$ heißt q-**konvexe Konfiguration**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) W ist konvexes Gebiet im $\mathbb{C}^n$, und $\varphi : W \to \mathbb{R}$ ist eine konvexe C^2-Funktion, so daß das Gebiet $\{z \in W \mid \varphi(z) < 0\}$ nicht leer und relativ kompakt in W ist.

(ii) $\varrho : W \to \mathbb{R}$ ist eine normalisierte q-konvexe Funktion, die höchstens einen kritischen Punkt besitzt, und falls ein solcher Punkt $y \in W$ existiert, dann ist $\varphi(y) < 0$ und y ist nicht-degenierter kritischer Punkt von ϱ, in dem ϱ kein lokales Minimum annimmt.

(iii) $d\varrho(z) \wedge d\varphi(z) \neq 0$ für alle $z \in W$ mit $\varrho(z) = \varphi(z) = 0$.

(iv) $D = \{z \in W \mid \varrho(z) < 0, \varphi(z) < 0\}$ und $\emptyset \neq D \neq \{z \in W \mid \varphi(z) < 0\}$.

b) Seien A_1, A_2 und U Gebiete in X, so daß $A_1 \subset A_2$ und $A_2 \setminus A_1 \subset\subset U \subset\subset X$. Dann heißt $[A_1, A_2, U]$ q-**konvexes Erweiterungselement in** X, falls es q-konvexe Konfigurationen $[W, \varrho, \varphi_j, D_j]$, $j \in \{1, 2\}$, im $\mathbb{C}^n$ gibt mit einer biholomorphen Abbildung h, die W auf eine Umgebung von $\overline{U}$ abbildet, so daß

$$U = h(\{z \in W \mid \varphi(z) < 0\}) \quad \text{und} \quad V \cap A_j = h(D_j) \ , \quad j = 1, 2 \quad .$$

c) Für zwei Gebiete $A_1 \subset A_2$ in X sagt man, A_2 **geht aus** A_1 **mittels** q-**konvexen Erweiterungselements in** X **hervor**, falls es ein Gebiet $U \subset X$ gibt, so daß $[A_1, A_2, U]$ q-konvexes Erweiterungselement in X ist.

Bemerkung: Im Anschluß an die Definition wird in [HL88] noch folgendes gezeigt: Sei $[A_1, A_2, U]$ q-konvexes Erweiterungselement in X, dann gibt es zu jeder kompakten Menge $K \subset\subset U$ ein Gebiet U' mit $K \subset\subset U' \subset\subset U$, so daß $[A_1, A_2, U']$ ebenfalls q-konvexes Erweiterungselement in X ist.

Folgendes Lemma faßt zwei Ergebnisse aus Kapitel 12 in [HL88] zusammen.

Lemma III.5.3. *Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit X.*

(i) Ist $[A_1, A_2, U]$ ein q-konvexes Erweiterungselement in X, so daß V über einer Umgebung von $\overline{U}$ holomorph trivial ist, dann ist die Einschränkungsabbildung $H^{p,r}(\overline{A}_2, V) \to H^{p,r}(\overline{A}_1, V)$, $r \geq q$, ein Isomorphismus.

(ii) Ist X eine q-konvexe Erweiterung eines streng q-konvexen Gebietes $D \subset\subset X$, dann ist die Einschränkungsabbildung $H^{p,r}(X,V) \to H^{p,r}(\overline{D},V)$, $r \geq q$, ein Isomorphismus.

Sei $E \to X$ ein Banachbündel. Ist $\Omega \subset\subset X$ kompakt, dann ist $C^0_{p,q}(\Omega, E)$ ein Banachraum. Sei $M \subset X$ eine Teilmenge, die enthalten ist im Abschluß ihrer inneren Punkte. Dann wird $C^0_{p,q}(M,E)$ als Fréchetraum betrachtet mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmenge von M. Da dem Beweis von [HL88, Cor.12.5] Integraloperatoren zu Grunde liegen, läßt sich der skalare Fall für den Fall Banach-wertiger Formen übernehmen:

Lemma III.5.4. *Sei $[A_1, A_2, U]$ ein q-konvexes Erweiterungselement in X und B ein Banachraum.*

(i) Es gibt stetige lineare Operatoren

$$T^j_r : \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A_j \cap U}, B) \to C^{1/2}_{p,r-1}(\overline{A}_j \cap U, B) \ , \quad r \geq q \ ,$$

so daß $\overline{\partial} T^j_r f = f$ auf $\overline{A}_j \cap U$ für alle $f \in \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A_j \cap U}, B)$.

(ii) Die Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{Z}^0_{p,r}(U,B) \to \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A}_j \cap U, B) \ , \quad r \geq q-1 \ ,$$

hat dichtes Bild.

Das zentrale Lemma 12.4 in [HL88] kann teilweise für holomorphe Banachbündel übernommen werden.

Satz III.5.5. *Sei $[A_1, A_2, U]$ ein q-konvexes Erweiterungselement in X und $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über X, das über einer Umgebung von $\overline{U}$ holomorph trivial ist.*

(i) Sei $U' \subset U$ eine Umgebung von $\overline{A_2 \setminus A_1}$ und $r \geq q$.
Dann gibt es zu jedem $f_1 \in \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A}_1, E)$ ein $f_2 \in \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A}_2, E)$ mit $f_1 - f_2 \in \mathcal{B}^0_{p,r}(\overline{A}_1, E)$ und $f_1 = f_2$ auf $\overline{A}_1 \setminus U'$.

(ii) Für $r > q$ gilt:
Ist $f \in \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A}_2, E)$ mit $f|_{\overline{A}_1} \in \mathcal{B}^0_{p,r}(\overline{A}_1, E)$, dann ist $f \in \mathcal{B}^0_{p,r}(\overline{A}_2, E)$.

Beweis.
(i) Sei $f_1 \in \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A}_1, E)$. Nach Lemma III.5.4(i) gibt es ein $u \in C^0_{p,r-1}(\overline{A}_1 \cap U, E)$ mit $f_1|_{\overline{A}_1 \cap U} = \overline{\partial} u$. Sei $\chi \in C^\infty(X)$ mit supp $\chi \subset\subset U'$ und $\chi = 1$ auf $\overline{A_2 \setminus A_1}$. Dann hat

$$f_2 := \begin{cases} f_1 - \overline{\partial}(\chi u) & \text{auf} \quad \overline{A}_1 \ , \\ 0 & \text{auf} \quad \overline{A}_2 \setminus \overline{A}_1 \ , \end{cases}$$

die gewünschten Eigenschaften.
(ii) Sei $f \in \mathcal{Z}^0_{p,r}(\overline{A}_2, E)$ mit $f|_{\overline{A}_1} \in \mathcal{B}^0_{p,r}(\overline{A}_1, E)$. So gibt es $u_1 \in C^0_{p,r-1}(\overline{A}_1, E)$ mit $\overline{\partial} u_1 = f|_{\overline{A}_1}$. Nach Lemma III.5.4(i) gibt es auch $u_2 \in C^0_{p,r-1}(\overline{A}_2 \cap U, E)$ mit $\overline{\partial} u_2 = f|_{\overline{A}_2 \cap U}$. Sei $U' \subset\subset U$ eine Umgebung von $\overline{A_2 \setminus A_1}$, so daß auch $[A_1, A_2, U']$ ein q-konvexes Erweiterungselement in X ist. Da $\overline{\partial}(u_1 - u_2) = 0$ auf $\overline{A_1 \cap U'}$, d.h. $u_1 - u_2 \in \mathcal{Z}^0_{p,r-1}(\overline{A_1 \cap U'}, E)$ gibt es wieder mit Lemma III.5.4(i) ein $v \in C^0_{p,r-2}(\overline{A}_1 \cap U', E)$ mit $\overline{\partial} v = u_1 - u_2$ auf $\overline{A}_1 \cap U'$. Sei $\chi \in C^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp} \chi \subset\subset U'$ und $\chi = 1$ auf $\overline{A_2 \setminus A_1}$. Da $u_1 - \overline{\partial}(\chi v) = u_2 + \overline{\partial}((1-\chi)v)$ auf $\overline{A}_1 \cap U'$, ist

$$u := \begin{cases} u_1 - \overline{\partial}(\chi v) & \text{auf} \quad \overline{A}_1 \ , \\ u_2 + \overline{\partial}((1-\chi)v) & \text{auf} \quad \overline{A}_2 \setminus \overline{A}_1 \ , \end{cases}$$

auf ganz $\overline{A}_2$ wohldefiniert und erfüllt $\overline{\partial} u = f$. □

Satz III.5.6. *Sei $[A_1, A_2, U]$ ein q-konvexes Erweiterungselement in X und $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über X, das über einer Umgebung von $\overline{U}$ holomorph trivial ist. Ist $\mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E) = \overline{\mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)}$ topologisch abgeschlossen, dann gilt:*

(i) Ist $f \in \mathcal{Z}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$ mit $f|_{\overline{A}_1} \in \mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_1, E)$, dann ist $f \in \mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$.

(ii) Ist $f \in \mathcal{Z}^0_{p,q-1}(\overline{A}_1, E)$, dann gibt es eine Folge $f_j \in \mathcal{Z}^0_{p,q-1}(\overline{A}_2, E)$ mit

$$\|f - f_j\|_{\overline{A}_1} \to 0 \quad .$$

Beweis.
(i) Sei $f \in \mathcal{Z}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$ mit $f|_{\overline{A}_1} \in \mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_1, E)$. So gibt es $u_1 \in C^0_{p,q-1}(\overline{A}_1, E)$ mit $\overline{\partial} u_1 = f|_{\overline{A}_1}$. Nach Lemma III.5.4(i) gibt es auch $u_2 \in C^0_{p,q-1}(\overline{A}_2 \cap U, E)$ mit $\overline{\partial} u_2 = f|_{\overline{A}_2 \cap U}$. Sei nun $\chi \in C^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp} \chi \subset\subset U$ und $\chi = 1$ auf $\overline{A_2 \setminus A_1}$. Nun ist $u_1 - u_2 \in \mathcal{Z}^0_{p,q-1}(\overline{A}_1 \cap U, E)$ und läßt sich nach Lemma III.5.4(ii) durch $v_k \in \mathcal{Z}^0_{p,q-1}(U, E)$ approximieren, d.h. $v_k \to u_1 - u_2$ auf $\overline{A}_1 \cap U$. Definiere $w_k := (1-\chi)u_1 + \chi(u_2 + v_k) \in \widetilde{C}^0_{p,q-1}(\overline{A}_2, E)$. Dann gilt $\overline{\partial} w_k \in \mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$ und $\overline{\partial} w_k \to f$. Da $\mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E) = \overline{\mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)}$ nach Voraussetzung topologisch abgeschlossen ist, folgt $f \in \mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$.
(ii) Sei $f \in \mathcal{Z}^0_{p,q-1}(\overline{A}_1, E)$ und $\chi \in C^\infty(X)$ mit $\operatorname{supp} \chi \subset\subset U$ und $\chi = 1$ auf einer Umgebung von $\overline{A}_2 \setminus \overline{A}_1$. Dann gibt es nach Lemma III.5.4(ii) wieder $v_j \in \mathcal{Z}^0_{p,q-1}(\overline{A}_2 \cap U, E)$, so daß

$$\|f - v_j\|_{\overline{A}_1 \cap \operatorname{supp} \chi} \to 0 \quad .$$

Dann ist

$$\overline{\partial}\chi \wedge (f - v_j) \in C^0_{p,q}(\overline{A}_2, E) \quad \text{und} \quad \|\overline{\partial}\chi \wedge (f - v_j)\|_{\overline{A}_2} \to 0 \quad .$$

Zudem gilt

$$\overline{\partial}\chi \wedge (f - v_j) = \overline{\partial}(\chi(f - v_j)) - \chi\overline{\partial}(f - v_j) \quad .$$

Da $\overline{\partial}(f - v_j) = 0$ auf $\overline{A}_1$, ist $\overline{\partial}\chi \wedge (f - v_j)$ ein Element in $\mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_1, E)$. Zudem ist $\overline{\partial}(\chi\overline{\partial}(f - v_j)) = \overline{\partial}\chi \wedge \overline{\partial}(f - v_j) = 0$ auf $\overline{A}_2$, da $\overline{\partial}\chi = 0$ auf $\overline{A}_2 \setminus \overline{A}_1$. Also gilt auch $\overline{\partial}\chi \wedge (f - v_j) \in \mathcal{Z}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$. Somit gibt es nach (i) auch $w_j \in \widetilde{C}^0_{p,q-1}(\overline{A}_2, E)$ mit

$$\overline{\partial} w_j = \overline{\partial}\chi \wedge (f - v_j) \quad .$$

Da $\mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$ topologisch abgeschlossen und $\overline{\partial} : \widetilde{C}^0_{p,q-1}(\overline{A}_2, E) \to \mathcal{B}^0_{p,q}(\overline{A}_2, E)$ ein abgeschlossener und surjektiver Operator ist, kann man die w_j so wählen, daß $\|w_j\|_{\overline{A}_2} \leq k\|\overline{\partial} w_j\|_{\overline{A}_2}$ für eine Konstante $k < \infty$.
Defniere

$$f_j := \begin{cases} f - \chi(f - v_j) + w_j & \text{auf} \quad \overline{A}_1 \ , \\ v_j + w_j & \text{auf} \quad \overline{A}_2 \setminus \overline{A}_1 \ . \end{cases}$$

Dann gilt

$$\overline{\partial} f_j = \begin{cases} \overline{\partial} f - \overline{\partial}(\chi(f - v_j)) + \overline{\partial} w_j & \text{auf} \quad \overline{A}_1 \ , \\ \overline{\partial} v_j + \overline{\partial} w_j & \text{auf} \quad \overline{A}_2 \setminus \overline{A}_1 \ . \end{cases}$$

Daraus folgt $\overline{\partial} f_j = 0$, also $f_j \in \mathcal{Z}^0_{p,q-1}(\overline{A}_2, E)$, und

$$f - f_j = \chi(f - v_j) - w_j \to 0 \quad \text{auf } \overline{A}_1, \text{ d.h.} \quad \|f - f_j\|_{\overline{A}_1} \to 0 \quad .$$

□

Das folgendes Lemma findet man in [HL88, Lem.12.3].

Lemma III.5.7.
Sei G eine nicht-degenerierte streng q-konvexe Erweiterung von D in X.
($D \cap U = \{z \in U \mid \varrho(z) < 0\}$, $G \cap U = \{z \in U \mid \varrho(z) < 1\}$, wobei $U \supset \overline{G \setminus D}$.)
Zudem habe die definierende q-konvexe Funktion ϱ kein lokales Minimum in U.
Dann gibt es endlich viele Gebiete

$$D = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_N = G \quad ,$$

so daß A_j aus A_{j-1} mittels q-konvexen Erweiterungselements in X hervorgeht. Die Beulen $A_j \setminus A_{j-1}$ können beliebig klein und ohne kritische Punkte auf ∂A_j gewählt werden.

Lemma III.5.8.
Sei $\varrho : U \to \mathbb{R}$ q-konvex ohne degenerierte kritische Punkte, und sei $y \in U$ ein Punkt, in dem ϱ sein globales Minimum annimmt. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so daß $\mathcal{B}^0_{0,r}(\overline{D}_\varepsilon, E) = \mathcal{Z}^0_{0,r}(\overline{D}_\varepsilon, E)$ für alle $r \geq 1$, wobei $D_\varepsilon := \{z \in U \mid \varrho(z) < \varrho(y) + \varepsilon\}$.

Bemerkung: Dieses Lemma behandelt den Fall, wenn ein Minimum angetroffen wird, siehe [HL88, Lem.12.6]. Interessant ist die Zusammenhangskomponente, in der das (lokale) Minimum angenommen wird. Deshalb kann man auch ein globales Minimum betrachten. Ist nun y der Punkt, in dem ϱ sein Minimum annimt (ein strenges Minimum, da ϱ nicht-degeneriert ist), gibt es ein kleines $\varepsilon > 0$, so daß D_ε streng pseudokonvex ist.

Lemma III.5.9. *Sei X eine q-konvexe Mannigfaltigkeit. Dann gibt es ein relativ kompaktes streng q-konvexes Gebiet $D \subset\subset X$ mit C^∞-Rand, so daß X eine nicht-degenerierte q-konvexe Erweiterung von D ist. Weiterhin gibt es eine C^∞-Ausschöpfungsfunktion $\varrho : X \to \mathbb{R}$, die in einer Umgebung von $X \setminus D$ q-konvex ist und dort keine degenerierten kritischen Punkte besitzt. Die nicht-degenerierten kritischen Punkte liegen diskret. Zudem kann man annehmen, daß auf jedem Level $\{\varrho = t\}$ höchstens ein solcher kritischer Punkt existiert. Für die nicht-degenerierten streng q-konvexen Gebiete $D_0 := D$, $D_k := \{\varrho < k\} \subset\subset X$, $k = 1, 2, \ldots$, gilt, daß jedes D_{k+1} nicht-degenerierte streng q-konvexe Erweiterung von D_k ist, und die Vereinigung der D_k überdeckt X.*

Bemerkung: Dies ist eine wohlbekannte Eigenschaft von q-konvexen Mannigfaltigkeiten, siehe [HL88, Obs.4.15, Prop.0.5 App.B, Lem.5.7].

III.6 Endliche Dimension auf q-konvexen Mannigfaltigkeiten

Sei E ein holomorphes Banachbündel über der komplexen Mannigfaltigkeit X. Mit $H^r(X, E) := H^r(X, \mathcal{O}^E)$ wird die r-te Čech-Kohomologiegruppe der Garbe $\mathcal{O}^E$ der holomorphen Schnitte von E bezeichnet.
Aus [Lei04, Th.3.7] folgt der Dolbeault-Isomorphismus $H^r(X, E) \cong H^{0,r}(X, E)$.

Theorem III.6.1.
Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X mit $H^q(X, V) = 0$ und $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel.

(i) Ist E holomorph trivial, dann gilt $H^q(X, V \otimes E) = 0$.

(ii) Ist E von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft, dann gilt $\dim H^q(X, V \otimes E) < \infty$.

Beweis. Ist X 0-konvex, d.h kompakt, dann ist dies der Zusatz zu Satz III.4.6. Sei nun $q \geq 1$. Aus Lemma III.5.9 folgt, daß es ein streng q-konvexes Gebiet $D \subset\subset X$ mit C^∞-Rand gibt, so daß X eine nicht-degenerierte q-konvexe Erweiterung von D ist. Da wegen Lemma III.5.3 $H^{0,q}(\overline{D}, V) = 0$, folgt aus Satz III.4.6 $\dim H^{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) < \infty$. Es ist also zu zeigen, daß die Einschränkungsabbildung

$$H^{0,q}(X, V \otimes E) \to H^{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) \quad \text{injektiv}$$

ist, d.h. daß

$$\mathcal{B}^0_{0,q}(X, V \otimes E) = \mathcal{Z}^0_{0,q}(X, V \otimes E) \cap \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E) \quad .$$

Sei also $f \in \mathcal{Z}^0_{0,q}(X, V \otimes E)$ mit $f|_{\overline{D}} \in \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E)$ gegeben. Sei $D_0 = D, D_1, D_2, \ldots$ die Ausschöpfung von X aus Lemma III.5.9. Wenn es zwischen D_{j+1} und D_j kein lokales Minimum von ϱ gibt, dann folgt mit Lemma III.5.7, daß D_{j+1} aus D_j durch Erweiterung mit endlich vielen q-konvexen Beulen entsteht. Angefangen bei $A_1 = D_j$ sei $[A_1, A_2, U]$ das erste Erweiterungselement, so daß $V \otimes E$ über einer Umgebung von $\overline{U}$ trivial ist. Da $H^{0,q}(\overline{A}_2, V) = 0$, sind die Voraussetzungen von Satz III.5.6 erfüllt, wobei (i) besagt, daß für $f|_{\overline{A}_2} \in \mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{A}_2, V \otimes E)$ mit $f|_{\overline{A}_1} \in \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{A}_1, V \otimes E)$ auch $f|_{\overline{A}_2} \in \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{A}_2, V \otimes E)$ gilt. Sei also $f|_{\overline{A}_1} = \overline{\partial} v_1$ und $f|_{\overline{A}_2} = \overline{\partial} v_2$, dann ist $v_1 - v_2 \in \mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{A}_1, V \otimes E)$, das nach Satz III.5.6(ii) beliebig genau durch $\tilde{v} \in \mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{A}_2, V \otimes E)$ approximiert werden kann. Also kann $\tilde{v}_2 = v_2 + \tilde{v} \in \widetilde{C}^0_{0,q-1}(\overline{A}_2, V \otimes E)$, $\overline{\partial}\tilde{v}_2 = f|_{\overline{A}_2}$, so gewählt werden, daß $\|\tilde{v}_2 - v_1\|_{\overline{A}_1}$ beliebig klein wird. So gelangt man in endlich vielen Schritten zu

$$\mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}_{j+1}, V \otimes E) = \mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}_{j+1}, V \otimes E) \cap \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}_j, V \otimes E)$$

mit $f|_{\overline{D}_r} = \overline{\partial} u_r$ für $u_r \in \widetilde{C}^0_{0,q-1}(\overline{D}_r, V \otimes E)$, $r = j, j+1$, und $\|u_{j+1} - u_j\| < 2^{-j}$. Gibt es allerdings ein $\gamma \in [j, j+1)$, so daß $\varrho(y) = \gamma$ ein lokales Minimum ist, dann ist D_γ q-konvexe Erweiterungen von D_j, die durch endlich viele q-konvexe Erweiterungselemente entsteht. (Man kann annehmen, daß γ das kleinste lokale Minimum in $[j, j+1)$ ist.) Um aber über den kritischen Punkt y zu springen, kann nun Lemma III.5.8 benutzt werden: Seien W_1 und W_2 disjunkte offene Umgebungen von $\overline{D}_\gamma$ bzw. y, die keine weiteren kritischen Punkte enthalten. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$\begin{aligned} D^1_{\gamma+\varepsilon} &= \{z \in X \setminus \{y\} \mid \varrho(z) < \gamma + \varepsilon\} \subset W_1 \quad , \\ D^2_{\gamma+\varepsilon} &= \{z \in X \setminus \overline{D}_\gamma \mid \varrho(z) < \gamma + \varepsilon\} \subset W_2 \quad . \end{aligned}$$

D_γ kann nach $D^1_{\gamma+\varepsilon}$ wieder mit Lemma III.5.7 durch endlich viele Beulen in W_1 erweitert werden, so daß $\mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}^1_{\gamma+\varepsilon}, V \otimes E) = \mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}^1_{\gamma+\varepsilon}, V \otimes E) \cap \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}_\gamma, V \otimes E)$

gilt und Schnitte in $\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}_\gamma, V\otimes E)$ durch solche in $\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}^1_{\gamma+\varepsilon}, V\otimes E)$ approximiert werden können. Nach Lemma III.5.8 ist $D^2_{\gamma+\varepsilon}$ sogar streng pseudokonvex mit $\mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}^2_{\gamma+\varepsilon}, V\otimes E) = \mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}^2_{\gamma+\varepsilon}, V\otimes E)$. Da $D_{\gamma+\varepsilon} = D^1_{\gamma+\varepsilon}\cup D^2_{\gamma+\varepsilon}$ eine disjunkte Vereinigung ist, können Schnitte in $\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}^1_{\gamma+\varepsilon}, V\otimes E)$ trivialerweise nach $\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}_{\gamma+\varepsilon}, V\otimes E)$ fortgesetzt werden. Daher gilt auch

$$\mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}_{\gamma+\varepsilon}, V\otimes E) = \mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{D}_{\gamma+\varepsilon}, V\otimes E) \cap \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}_j, V\otimes E)$$

mit der gewünschten Approximierbarkeit.
So erhält man $u_j \in \widetilde{C}^0_{0,q-1}(\overline{D}_j, V\otimes E)$ mit $f|_{\overline{D}_j} = \overline{\partial} u_j$ und $\|u_{j+1}-u_j\|_{\overline{D}_j} < 2^{-j}$ für alle $j\in\mathbb{N}$, d.h. $u_j \to u$ konvergiert gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von X, und der Grenzwert löst $\overline{\partial} u = f$ auf X. □

Ist X q-vollständig, dann ist X q-konvexe Erweiterung der leeren Menge. Für holomorphe Vektorbündel verschwindet somit die q-te Kohomologiegruppe. Sei nun E ein holomorphes Banachbündel und $D \subset\subset X$ ein nicht-degeneriertes streng q-konvexes Gebiet, so daß dieses X nicht-degenerierte q-konvexe Erweiterung von D ist. Mit Satz III.5.5 folgt, daß für $r > q$ die Einschränkungsabbildung $H^{0,r}(X,E) \to H^{0,r}(\overline{D},E)$ ein Isomorphismus ist. Ist $\varrho \in C^2(X)$ eine q-konvexe Ausschöpfungsfunktion für X und $\varrho_m := \min_X \varrho$, dann gibt es $\varepsilon > 0$, so daß $X_0 := \{\varrho < \varrho_m + \varepsilon\}$ Steinsch ist, also 1-vollständig. Somit ist $H^{0,q}(X_0,E) = 0$. Ist $[A_1, A_2, U]$ q-konvexes Erweiterungselement mit $H^{0,q}(\overline{A}_1, E) = 0$, dann gilt

$$H^{0,q}(\overline{A}_2, E) \to H^{0,q}(\overline{A}_1, E) \text{ ist injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{A}_2, E) \text{ ist abgeschlossen .}$$

Allgemein liegt $\mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{A}_2, E) \subset \mathcal{Z}^0_{0,q}(\overline{A}_2, E)$ dicht. Für holomorph triviale Banachbündel oder solche von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft folgt jedoch auch die Abgeschlossenheit. Damit ist gezeigt:

Theorem III.6.2.
Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel und X eine komplexe Mannigfaltigkeit, die q-vollständig ist. Ist $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel, dann ist $H^r(X, V\otimes E) = 0$ für $r > q$.
Falls E holomorph trivial ist oder von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft, dann gilt $H^q(X, V\otimes E) = 0$.

Mit Satz III.5.5 und Satz III.5.6 kann man auch folgende Sätze wie in [HL88] zeigen.

Satz III.6.3. *Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X mit $H^q(X,V) = 0$ und $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über X, das holomorph trivial ist oder von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft. Sind $D \subset\subset G \subset\subset X$ nicht-degenerierte streng q-konvexe Gebiete, so daß G nicht-degenerierte streng q-konvexe Erweiterung von D in X ist, dann gilt:*

(i) Für jedes $f_D \in \mathcal{Z}^0_{0,r}(\overline{D}, V \otimes E)$ und jede Umgebung U von ∂D gibt es eine Form $f_G \in \mathcal{Z}^0_{0,r}(\overline{G}, V \otimes E)$ mit $f_D - f_G \in \mathcal{B}^0_{0,r}(\overline{D}, V \otimes E)$ und $f_D = f_G$ in $D \setminus U$, $r \geq q$.

(ii) $\mathcal{B}^0_{0,r}(\overline{G}, V \otimes E) = \mathcal{Z}^0_{0,r}(\overline{G}, V \otimes E) \cap \mathcal{B}^0_{0,r}(\overline{D}, V \otimes E)$, $\quad r \geq q$.

(iii) Das Bild der Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{G}, V \otimes E) \to \mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}, V \otimes E)$$

liegt dicht in $\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}, V \otimes E)$.

Satz III.6.4. *Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X mit $H^q(X,V) = 0$ und $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über X, das holomorph trivial ist oder von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft. Ist $D \subset\subset X$ nicht-degeneriertes streng q-konvexes Gebiet, so daß X nicht-degenerierte q-konvexe Erweiterung von D ist, dann gilt:*

(i) Für jedes $f_D \in \mathcal{Z}^0_{0,r}(\overline{D}, V \otimes E)$ und jede Umgebung U von ∂D gibt es eine Form $f_X \in \mathcal{Z}^0_{0,r}(X, V \otimes E)$ mit $f_D - f_X \in \mathcal{B}^0_{0,r}(\overline{D}, V \otimes E)$ und $f_D = f_X$ in $D \setminus U$, $r \geq q$.

(ii) $\mathcal{B}^0_{0,q}(X, V \otimes E) = \mathcal{Z}^0_{0,q}(X, V \otimes E) \cap \mathcal{B}^0_{0,q}(\overline{D}, V \otimes E)$.

(iii) Das Bild der Einschränkungsabbildung

$$\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(X, V \otimes E) \to \mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}, V \otimes E)$$

liegt dicht in $\mathcal{Z}^0_{0,q-1}(\overline{D}, V \otimes E)$.

Bemerkung: Satz III.6.4(i) sagt aus, daß die Einschränkungsabbildung

$$H^{0,r}(X, V \otimes E) \to H^{0,r}(\overline{D}, V \otimes E)$$

surjektiv ist für $r \geq q$. Satz III.6.4(ii) zeigt, daß sie für $r = q$ auch injektiv ist, also ein Isomorphismus.

Satz III.6.5. *Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X mit $H^q(X,V) = 0$ und $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über X, das holomorph trivial ist oder von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft. Ist $D \subset\subset X$ nicht-degeneriertes streng q-konvexes Gebiet, so daß X nicht-degenerierte q-konvexe Erweiterung von D ist, dann gilt: Die Einschränkungsabbildung*

$$H^{0,r}(\overline{D}, V \otimes E) \to H^{0,r}(D, V \otimes E) \ , \quad r \geq q \ ,$$

ist ein Isomorphismus.

Satz III.6.6. *Sei $V \to X$ ein holomorphes Vektorbündel über einer q-konvexen Mannigfaltigkeit X mit $H^q(X,V) = 0$ und $E \to X$ ein holomorphes Banachbündel über X, das holomorph trivial ist oder von kompaktem Typ mit kompakter Approximationseigenschaft. Ist $D \subset\subset X$ streng q-konvexes Gebiet, so daß X eine q-konvexe Erweiterung von D ist, dann ist die Einschränkungsabbildung*

$$H^{0,q}(X, V \otimes E) \to H^{0,q}(D, V \otimes E)$$

ein Isomorphismus.

Anhang A

Die L^2-Methode für Hilbertbündel

Die L^2-Methode zur Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung geht im Fall kompakter Mannigfaltigkeiten im wesentlichen zurük auf Kodaira und Nakano (1954) und für offene Mannigfaltigkeiten auf Andreotti/Vesentini [AV65] und Hörmander [Hör65] (1965) (siehe auch das Buch [Hör90]). Den Zugang, die $\overline{\partial}$-Gleichung durch Dualisierung zu lösen, gibt es in vielen Varianten. Bei der L^2-Methode betrachtet man Hilberträume quadratisch integrierbarer Formen. Der Vorteil dabei liegt darin, daß diese Hilberträume zu sich selbst dual sind. Eine umfangreiche Übersicht über die L^2-Methode bietet Demailly [Dem97], wo viele Weiterentwicklungen vorgestellt werden. Dieser Anhang folgt dem Weg von [Dem97]. Es soll ein Programm skizziert werden, wie die L^2-Methode für Hilbertbündel formuliert werden kann. Der Ansatz ist eine Formulierung ohne Faser-Koordinaten. Dabei werden folgende Punkte vorgestellt:

- Definition eines Skalarprodukts auf einem Hilbertbündel, das das Bündel zu einem Hilbertraum macht.
- Begriffe der Differentialgeometrie wie *Zusammenhang* und *Krümmung* für Hilbertbündel. Eine besondere Rolle spielt der Chern-Zusammenhang für holomorphe Hilbertbündel.
- Die Bochner-Kodaira-Nakano (BKN) Identität, und wie sie als Hilfsmittel zur Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung dient.
- Hilbertraum-Erweiterung des $\overline{\partial}$-Operators und des adjungierten Operators auf vollständigen Mannigfaltigkeiten.
- Modifizierung der Metrik des Bündels und wie sie auf q-vollständigen Mannigfaltigkeiten eine Abschätzung der BKN-Ungleichung erlauben und zu einer Lösung der $\overline{\partial}$-Gleichung führen soll.

Hierbei beschränkt sich die Darstellung auf Kähler-Mannigfaltigkeiten. In [Dem97] wird auch die allgemeinere Situation behandelt, in der noch ein zusätzlicher Torsionsterm in die BKN-Identität hinzukommt.

- Hilbertbündel

Sei $E \to X$ ein holomorphes Hilbertbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit X der Dimension n. Auf E sei die hermitesche Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ definiert. Dann definiert

$$\langle u, w \rangle_{L^2(X,E)} = \int_X \langle u, w \rangle_E \, dV$$

ein Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $L^2(X, E)$ der meßbaren Schnitte in E, $u : X \to E$, für die $\int_X \langle u, u \rangle_E \, dV < \infty$. Analog sind die Hilberträume $L^2_{p,q}(X, E)$ definiert.
Faltung: Sei μ das euklidische Maß im $\mathbb{R}^m$ und $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^m)$. Ist B ein Banachraum und $f : \mathbb{R}^m \to B$ mit $\int_{\mathbb{R}^m} \|f\| \, d\mu < \infty$ eine integrierbare Banachraumwertige Funktion, dann ist die Faltung definiert als

$$\varphi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x - y) f(y) \; d\mu(y) \; .$$

Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\varphi(x) = 0$ für $|x| > 1$ und $\int \varphi \, d\mu = 1$.
Weiter sei $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m} \varphi(x/\varepsilon)$ und $T_\varepsilon f = \varphi_\varepsilon * f$. Wegen $\|T_\varepsilon f - f\|_{L^2} \to 0$ kann man zeigen, daß $\mathcal{D}(X, E) \subset L^2(X, E)$ dicht liegt. Ein wichtiges Lemma, das die Existenz von Lösungen der $\overline{\partial}$-Gleichung liefern soll, ist folgendes

Lemma A.1. *Ist $T : H_1 \to H_2$ dicht definiert und abgeschlossen, dann gilt*

$$\begin{gathered} |\langle f, \alpha \rangle| \leq C \; \|T^* \alpha\| \quad \forall \; \alpha \in \operatorname{dom} T^* \\ \Updownarrow \\ \exists \; g \in \operatorname{dom} T : \; \|g\| \leq C \; , \; Tg = f \quad . \end{gathered}$$

- Chern-Zusammenhang und Krümmung

Wenn $f, g \in C^0(X, E)$ und $\sigma \in C^0(X, \Lambda^{p,q} T^*_X)$, $\tau \in C^0(X, \Lambda^{r,s} T^*_X)$, dann sei

$$\{f \otimes \sigma, g \otimes \tau\}_E = \langle f, g \rangle_E \, \sigma \wedge \overline{\tau} \; .$$

Ein Zusammenhang $D : C^\infty_{\bullet,\bullet}(X, E) \to C^\infty_{\bullet+1,\bullet+1}(X, E)$ ist ein *hermitescher* oder *metrischer* Zusammenhang, wenn für $u \in C^\infty_{p,q}(U, E)$ und $v \in C^\infty_{r,s}(U, E)$ gilt

$$d\{u, v\}_E = \{Du, v\}_E + (-1)^{p+q} \{u, Dv\}_E \; .$$

Man kann D aufteilen in $D = D' + D''$, wobei $D' : C^\infty_{\bullet,\bullet}(X,E) \to C^\infty_{\bullet+1,\bullet}(X,E)$ ein ∂-Zusammenhang und $D'' : C^\infty_{\bullet,\bullet}(X,E) \to C^\infty_{\bullet,\bullet+1}(X,E)$ ein $\overline{\partial}$-Zusammenhang ist. $D^2 = \Theta(E) \in C^\infty_{1,1}(X, \mathrm{End}(E))$ ist die Krümmung.
Lokal gilt: $D \simeq d + \Gamma$, und $D' \simeq \partial + \Gamma'$, $D'' \simeq \overline{\partial} + \Gamma''$.
Ist E ein holomorphes Hilbertbündel mit hermitescher Metrik $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, dann gibt es genau einen hermiteschen Zusammenhang, für den $D'' \simeq \overline{\partial}$ gilt in jeder holomorphen Trivialisierung. Dieser Zusammenhang heißt Chern-Zusammenhang.
Sei $\varphi : E|_U \to U \times F$ eine holomorphe Trivialisierung. Für $\widetilde{u}, \widetilde{v} \in L^2(U,F)$ gilt $\langle \varphi^{-1}\widetilde{u}, \varphi^{-1}\widetilde{v} \rangle_E = \langle \varphi^{-1^*}\varphi^{-1}\widetilde{u}, \widetilde{v} \rangle_F$. Sei $H = \varphi^{-1^*}\varphi^{-1}$. Dann gilt für den Chern-Zusammenhang $D' \simeq \partial + H^{-1}\partial H$ und $\Theta(E) \simeq \overline{\partial}(H^{-1}\partial H)$.

- normalisierte Trivialisierung

Für jeden Punkt $a \in X$ gibt es eine Umgebung U und eine holomorphe Trivialisierung $\varphi : E|_U \to U \times F$, so daß für holomorphe Koordinaten $z = (z_1, \ldots, z_n)$ mit $z(a) = 0$ gilt

$$H(z) = \mathrm{id} + \sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z}_k \widetilde{C}_{jk} + O(|z|^3) \ .$$

Die holomorphe Trivialisierung heißt dann *normalisiert* im Punkt a. Die Chernsche Krümmungsform $\Theta(E) \in C^\infty_{1,1}(X, \mathrm{End}(E))$ hat in a die Form

$$\Theta(E)_a = \sum_{j,k=1}^{n} C_{jk} \ dz_j \wedge d\overline{z}_k \quad \text{wobei} \ \ C_{jk} : E \to E \quad .$$

Somit gilt $C_{jk} = \varphi_a^{-1}\widetilde{C}_{jk}\varphi_a$, und wegen $H = H^*$ gilt $\widetilde{C}^*_{jk} = \widetilde{C}_{kj}$.

- Bochner-Kodaira-Nakano Identität

Sei X eine Kähler-Mannigfaltigkeit und ω die Kähler-Form. Sei $D = D' + D''$ der Chern-Zusammenhang, für den lokal in einer Umgebung U gilt

$$D'u = \sum_{k=1}^{n} D'_k u \ dz_k \quad \text{und} \quad D''u = \sum_{k=1}^{n} D''_k u \ d\overline{z}_k \ .$$

Dann erhält man für $u, v \in C^\infty(U,E)$

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\langle u, v \rangle_E = \langle D'_k u, v \rangle_E + \langle u, D''_k v \rangle_E \quad ,$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\langle u, v \rangle_E = \langle D''_k u, v \rangle_E + \langle u, D'_k v \rangle_E \quad .$$

Sei nun $u \in \mathcal{D}_{p,q}(U,E)$, $u = \sum_{IJ} u_{IJ}\ dz_I \wedge d\overline{z}_J$. Es gilt

$$D'u = \sum_{IJk} D'_k u_{IJ}\ dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J \quad , \quad D''u = \sum_{IJk} D''_k u_{IJ}\ d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J\ .$$

Definiere

$$P'u = \sum_{IJk} D'_k u_{IJ}\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J) \quad , \quad P''u = \sum_{IJk} D''_k u_{IJ}\ \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J)\ .$$

Satz A.2. *Sei X eine Kähler-Mannigfaltigkeit und $a \in X$. Sei $z = (z_1, \ldots, z_n)$ ein in einer Umgebung U von a definiertes holomorphes Koordinatensystem mit $z(a) = 0$, das im Punkt a normalisiert ist. Dann gilt*

$$D''^* u = -P'u + O(|z|) \quad \textit{und} \quad D'^* u = -P''u + O(|z|)\ .$$

Beweis. Sei $dV = \phi dS$, wobei $dS = dz_1 \cdots d\overline{z}_n$ (und $\phi \sim 1 + O(|z|^2)$).
Für $f, g \in \mathcal{D}(U,E)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \left(\langle f, g \rangle_E \langle \sigma, \tau \rangle_\Lambda \phi \right) dS \\ &= \int_U \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \langle f, g \rangle_E \langle \sigma, \tau \rangle_\Lambda dV + \int_U \langle f, g \rangle_E \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \left(\langle \sigma, \tau \rangle_\Lambda \phi \right) \phi^{-1} dV \quad . \end{aligned}$$

Daher folgt für $v \in \mathcal{D}_{p,q}(U,E)$ und $u \in \mathcal{D}_{p,q+1}(U,E)$ durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \langle v, D''^* u \rangle_{L^2} = \langle D''v, u \rangle_{L^2} &= \int_U \langle D''v, u \rangle_{E \otimes \Lambda} dV \\ &= \sum_{\substack{IJk \\ KL}} \int_U \langle D''_k v_{IJ}, u_{KL} \rangle_E \langle d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J, dz_K \wedge d\overline{z}_L \rangle_\Lambda dV \\ &= -I_1 - I_2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{\substack{IJk \\ KL}} \int_U \langle v_{IJ}, D'_k u_{KL} \rangle_E \langle d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J, dz_K \wedge d\overline{z}_L \rangle_\Lambda dV \quad , \\ I_2 &= \sum_{\substack{IJk \\ KL}} \int_U \langle v_{IJ}, u_{KL} \rangle_E \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \big(\langle d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J, dz_K \wedge d\overline{z}_L \rangle_\Lambda \phi \big) \phi^{-1} dV \quad . \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\langle\ d\overline{z}_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J\ ,\ dz_K \wedge d\overline{z}_L\ \rangle\ =\ \langle\ dz_I \wedge d\overline{z}_J\ ,\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_K \wedge d\overline{z}_L)\ +\ \psi''_{kKL}\ \rangle$$

mit $\psi''_{kKL} = O(|z|^2)$, und daher

$$I_1 = \int_U \langle v, P'u + O(|z|^2)\rangle_{E\otimes\Lambda} dV = \langle v, P'u + O(|z|^2)\rangle_{L^2} \quad .$$

Für I_2 gilt $I_2 = \langle v, O(|z|)\rangle_{L^2}$. Somit folgt

$$\langle v, D''^* u\rangle_{L^2} = \langle D''v, u\rangle_{L^2} = -I_1 - I_2 = -\langle v, P'u + O(|z|)\rangle_{L^2}$$

also $D''^* u = -P'u + O(|z|)$, und analog folgt $D'^* u = -P''u + O(|z|)$. □

Sei L der Operator definiert durch $Lu = \omega \wedge u$ und $\Lambda = L^*$.

Satz A.3. *Sei X kählersch. Dann gilt* $[D''^*, L] = \frac{i}{2} D'$.

Beweis. Es gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_j \wedge d\overline{z}_j) = -dz_k$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_j \wedge d\overline{z}_j \wedge dz_K \wedge d\overline{z}_L) \;&=\; \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_j \wedge d\overline{z}_j) \wedge dz_K \wedge d\overline{z}_L \\ &+\; dz_j \wedge d\overline{z}_j \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_K \wedge d\overline{z}_L) \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P'(\omega \wedge u) = &= \frac{i}{2} \sum_{IJkj} D'_k u_{IJ} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_j \wedge d\overline{z}_j) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J \\ &\quad + \frac{i}{2} \sum_{IJkj} D'_k u_{IJ}\; dz_j \wedge d\overline{z}_j \wedge \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_L) + O(|z|) \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{IJk} D'_k u_{IJ}\; dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J \\ &\quad + \omega \wedge \sum_{IJk} D'_k u_{IJ} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \lrcorner\, (dz_I \wedge d\overline{z}_J) + O(|z|) \\ &= -\frac{i}{2} D'u + \omega \wedge P'u + O(|z|) \end{aligned}$$

und somit

$$D''^*(\omega \wedge u) - \omega \wedge D''^* u = \frac{i}{2} D'u + O(|z|) \quad .$$

□

Satz A.4. *Sei X kählersch. Dann gilt* $[D'^*, L] = -\frac{i}{2}D''$.

Beweis. Nun gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner\, (dz_j \wedge d\overline{z}_j) = d\overline{z}_k \quad .$$

Daraus folgt

$$P''(\omega \wedge u) = \frac{i}{2}D''u + \omega \wedge P''u + O(|z|) \quad ,$$

$$D'^*(\omega \wedge u) - \omega \wedge D'^*u = -\frac{i}{2}D''u + O(|z|) \quad .$$

□

Die formal adjungierten Gleichungen lauten

$$[\Lambda, D''] = -\frac{i}{2}D'^* \quad \text{und} \quad [\Lambda, D'] = \frac{i}{2}D''^* \ .$$

Definiere die Laplace-Beltrami-Operatoren

$$\Delta = [D, D^*] \ , \quad \Delta' = [D', D'^*] \ , \quad \Delta'' = [D'', D''^*] \ .$$

Ist D der Chern-Zusammenhang, dann folgt mit der Jacobi-Identität

$$\Delta = \Delta' + \Delta'' \quad \text{und} \quad \Delta'' = \Delta' + [2i\Theta, \Lambda] \ .$$

Sei weiter $A_{p,q} = [2i\Theta, \Lambda]|_{\Lambda^{p,q}T_X^* \otimes E}$. So gilt für $u \in \mathcal{D}_{p,q}(X, E)$

$$\|\overline{\partial}^* u\|^2_{L^2_{p,q-1}} + \|\overline{\partial} u\|^2_{L^2_{p,q+1}} \geq \int_X \langle A_q u, u\rangle \, dV \ .$$

- Differentialoperatoren

Sei X eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit,

$$P : C^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$$

ein Differentialoperator und $\Phi : E_U \to U \times H$ eine Trivialisierung. Dann ist

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq r} \sigma_\alpha \Phi^{-1} \partial_\alpha(\Phi u) \ , \quad \sigma_\alpha(x) : E \to F \ ,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \ , \quad \partial_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} \quad .$$

Dazu gibt es den formal adjungierten Operator P^*, für den gilt

$$\langle Pu, v\rangle_{L^2(X,F)} = \langle u, P^*v\rangle_{L^2(X,E)}$$

für alle $u \in \mathcal{D}(U,E)$ und $v \in \mathcal{D}(U,F)$.
Ist P ein Differentialoperator, dann kann man (lokal) L^2-Fortsetzung betrachten, indem man Pu im Sinne der Distributionstheorie ausrechnet (schwache Ableitung in L^2). Diese Erweiterung $P_{\mathcal{H}} : L^2(X,E) \to L^2(X,F)$ heißt Hilbertraum-Erweiterung und der dazu adjungierte Operator $(P_{\mathcal{H}})^*$ Hilbertraum-adjungierter. Zudem gibt es den adjungierten Operator P^* und seine Erweiterung $(P^*)_{\mathcal{H}}$.

- Die Hilbertraum-Erweiterung $P_{\mathcal{H}}$ eines dicht definierten Differentialoperators P ist abgeschlossen (und dicht definiert).
- $(P_{\mathcal{H}})^* \subset (P^*)_{\mathcal{H}}$.
- Ist T ein dicht definierter *abgeschlossener* Operator, so ist $T^{**} = T$.

Seien $T : L_{p,q-1}(X,E) \to L_{p,q}(X,E)$ und $S : L_{p,q}(X,E) \to L_{p,q+1}(X,E)$ die Hilbertraum-Erweiterungen von $\overline{\partial}_{q-1} : \mathcal{D}_{p,q-1}(X,E) \to \mathcal{D}_{p,q}(X,E)$ bzw. $\overline{\partial}_q$.

Lemma A.5 (*Hopf-Rinow*)**.**
Ist (X,ω) eine vollständige Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine Ausschöpfung von X mit kompakten Mengen K_ν und cut-off-Funktionen ψ_ν mit $\psi_\nu = 1$ auf K_ν, supp $\psi_\nu \subset K_{\nu+1}$ *und* $|d\psi_\nu|_\omega \leq 1$.

Lemma A.6 (*Andreotti-Vesentini*)**.**
Ist X eine vollständige Mannigfaltigkeit, so liegt $\mathcal{D}_{p,q}(X,E) \subset \operatorname{dom} S \cap \operatorname{dom} T^*$ dicht bzgl. der Graphennorm. Weiter folgt $(P_{\mathcal{H}})^* = (P^*)_{\mathcal{H}}$.

Damit kann die BKN-Ungleichung auf $L^2_{p,q}(X,E)$ ausgedehnt werden.

Satz A.7. *Sei X eine Kähler-Mannigfaltigkeit und $A_{p,q} > 0$.*
Sei $f \in L^2_{p,q}(X,E)$ mit $\overline{\partial} f = 0$ und

$$C = \int_X \left\langle A_{p,q}^{-1} f, f \right\rangle \, dV < \infty \ .$$

Dann gibt es ein $u \in L^2_{p,q-1}(X,E)$ mit $\overline{\partial} u = f$ und $\|u\|_{L^2} \leq \sqrt{C}$.

Der Operator $A_{p,q}$ ist selbstadjungiert, und wenn $\langle A_{p,q} f, f\rangle$ positiv ist, d.h. $A_{p,q}$ ist positiv definit, dann ist $A_{p,q}$ invertierbar (und hat auch eine Wurzel). Der Beweis geht wie in [Dem97].

- Nakano-Form

Sei $E \to X$ ein holomorphes Hilbertbündel über einer komplexen Mannigfaltigkeit X der Dimension n. Sei $a \in X$.
Die Chernsche Krümmungsform $\Theta(E) \in C^\infty_{1,1}(X, \mathrm{End}(E))$ hat in a die Form

$$\Theta(E)_a = \sum_{j,k=1}^{n} C_{jk}\ dz_j \wedge d\overline{z}_k \quad \text{wobei} \quad C_{jk} : E_a \to E_a \quad .$$

Ist X eine Kähler-Mannigfaltigkeit, so findet man in jedem Punkt normalisierte holomorphe Koordinaten, mit denen für die Kähler-Form ω gilt

$$\omega \stackrel{a}{=} \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j \ .$$

Sei L der Operator definiert durch $Lu = \omega \wedge u$, $\Lambda = L^*$, und sei

$$A_{p,q} = [2i\Theta, \Lambda]|_{\Lambda^{p,q} T^*_X \otimes E} \ .$$

Für die (p,q)-Form $u = \sum_{JK} u_{JK}\ dz_J \wedge d\overline{z}_K$, wobei $J \in \mathcal{I}_p$ und $K \in \mathcal{I}_q$, gilt

$$\begin{aligned} A_{p,q} u \stackrel{a}{=} & -\sum_j \sum_{JK} C_{jj}(u_{JK})\ dz_J \wedge d\overline{z}_K \\ & + \sum_{jk} \sum_{JK} C_{jk}(u_{JK})\ dz_j \wedge \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \lrcorner\, dz_J \right) \wedge d\overline{z}_K \\ & + \sum_{jk} \sum_{JK} C_{jk}(u_{JK})\ dz_J \wedge d\overline{z}_k \wedge \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \lrcorner\, d\overline{z}_K \right) \quad . \end{aligned}$$

Ist L ein Linienbündel, dann läßt sich die Krümmung schreiben als $\Theta(L) = \partial\overline{\partial}\varphi$ für eine Ausschöpfungsfunktion $\varphi : X \to \mathbb{R}$. Sind $\gamma_1 \leq \ldots \leq \gamma_n$ die Eigenwerte der Levi-Form $i\partial\overline{\partial}\varphi$ von φ im Punkt a, dann gibt es holomorphe Koordinaten in einer Umgebung von a, so daß

$$\omega \stackrel{a}{=} \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z}_j \quad \text{und} \quad \Theta(L) \stackrel{a}{=} \sum_{j=1}^{n} \gamma_j\ dz_j \wedge d\overline{z}_j \ .$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} A_{p,q} u \stackrel{a}{=} & -\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \sum_{JK} u_{JK}\ dz_J \wedge d\overline{z}_K + \sum_{JK} \sum_{j \in J} \gamma_j\, u_{JK}\ dz_J \wedge d\overline{z}_K \\ & + \sum_{JK} \sum_{k \in K} \gamma_k\, u_{JK}\ dz_J \wedge d\overline{z}_K \end{aligned}$$

und

$$\langle A_{p,q}u, u\rangle_a \geq \left(\sum_{k=1}^{q}\gamma_k - \sum_{j=p+1}^{n}\gamma_j\right)\|u\|_a \ .$$

Seien $z = (z_1, \ldots, z_n)$ holomorphe Koordinaten in einer Umgebung von a, so daß $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n})$ in a eine Orthonormalbasis von T_aX bilden.
Statt geordneter Indizes $K \in \mathcal{I}_q$ seien nun alle q-Tupel $|K| = q$ zugelassen,

$$\tilde{u}_{s_1,\ldots,s_q} = \frac{1}{q!}\mathrm{sgn}(s_1, \ldots, s_q)\ u_{\mathcal{I}(s_1,\ldots,s_q)} \quad , \quad u_K = \sum_{s_j \in K}\mathrm{sgn}(s_1, \ldots, s_q)\ \tilde{u}_{s_1,\ldots,s_q} \ ,$$

$$u = \sum_{K\in\mathcal{I}_q} u_K\ d\overline{z}_J = \sum_{|K|=q}\tilde{u}_K\ d\overline{z}_K \ .$$

Dann gilt für die (n, q)-Form $u \overset{a}{=} dz \wedge \sum\limits_{K\in\mathcal{I}_q} u_K\ d\overline{z}_K$

$$\langle A_q u, u\rangle_a = (q-1)!\, q^2 \sum_{|S|=q-1}\sum_{j,k=1}^{n}\langle C_{jk}(\tilde{u}_{jS}), \tilde{u}_{kS}\rangle_{E_a} \ .$$

- Krümmung und Metrik

Sei h die Metrik von E und $\tilde{h} = e^{-\varphi}$ eine weitere Metrik. Dann gilt

$$\Theta_{\tilde{h}}(E) = \Theta_h(E) + \partial\overline{\partial}\varphi \otimes \mathrm{id}_E$$

und

$$[2i\Theta_{\tilde{h}}(E), \Lambda] = [2i\Theta_h(E), \Lambda] + [2i\partial\overline{\partial}\varphi, \Lambda] \otimes \mathrm{id}_E \ .$$

Somit

$$\begin{aligned}\langle[2i\Theta_{\tilde{h}}(E), \Lambda]u, u\rangle_{\tilde{h}} &= e^{-\varphi}\,\langle[2i\Theta_{\tilde{h}}(E), \Lambda]u, u\rangle_h \\ &= e^{-\varphi}\,\langle[2i\Theta_h(E), \Lambda]u, u\rangle_h + e^{-\varphi}\,\big\langle[2i\partial\overline{\partial}\varphi, \Lambda] \otimes \mathrm{id}_E\ u, u\big\rangle_h \ .\end{aligned}$$

Für (n, q)-Formen gilt

$$\big\langle[2i\partial\overline{\partial}\varphi, \Lambda] \otimes \mathrm{id}_E\ u, u\big\rangle_h \geq \sum_{j=1}^{q}\gamma_j\,\|u\|_h^2 \ .$$

Sei X q-vollständig und ψ die q-konvexe Ausschöpfungsfunktion. Wählt man ω geeignet, so gilt $-\varepsilon < \gamma_1 \leq \ldots \leq \gamma_q = 1$ mit $\varepsilon \leq 1/q$, d.h.

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_q > 0 \ .$$

Wählt man ρ geeignet, so daß $\tilde{\omega} = e^{\rho}\omega$ vollständig ist, so sind die neuen Eigenwerte $\widetilde{\gamma}_j = e^{-\rho}\gamma_j$. Ist $\varphi = \chi \circ \psi$, so wird

$$\Theta_{\tilde{h}}(E) = \Theta_h(E) + (\chi' \circ \psi)\, \partial\overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{id}_E + (\chi'' \circ \psi)\, \partial\psi \wedge \overline{\partial}\psi \otimes \mathrm{id}_E \ .$$

Es gilt

$$\left\langle [2i\partial\psi \wedge \overline{\partial}\psi, \Lambda] \otimes \mathrm{id}_E \ u, u \right\rangle_h > 0 \ .$$

Für geeignetes χ ist $\chi' > 0$ und $\chi'' > 0$, und

$$\begin{aligned}(\chi' \circ \psi) \left\langle [2i\partial\overline{\partial}\psi, \Lambda] \otimes \mathrm{id}_E \ u, u \right\rangle_h &\geq (\chi' \circ \psi)\, e^{-\rho}(\gamma_1 + \ldots + \gamma_q) \left\langle u, u \right\rangle_h \\ &> \left\langle [2i\Theta_h(E), \Lambda] u, u \right\rangle_h \ .\end{aligned}$$

Sei $f \in C^{\infty}_{n,q}(X, E)$ mit $\overline{\partial} f = 0$. Dann ist f lokal quadratisch integrierbar, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}$. Weiter sei $\psi : X \to \mathbb{R}$ die q-konvexe Ausschöpfungsfunktion und $h = \langle \cdot, \cdot \rangle_E$ eine Metrik auf E. Nun kann $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend gewählt werden, daß

$$\int_X \langle f, f \rangle_h \ e^{-\chi \circ \psi} \ dV \ < \infty \ .$$

Weiter kann χ so gewählt werden, daß

$$\left\langle A_h u, u \right\rangle_h + (\chi' \circ \psi)\, e^{-\rho}(\gamma_1 + \ldots + \gamma_q) \left\langle u, u \right\rangle_h > 0 \ , \quad u \neq 0 \ ,$$

und auch so, daß

$$\left\langle A_h u, u \right\rangle_h + (\chi' \circ \psi)\, e^{-\rho}(\gamma_1 + \ldots + \gamma_q) \left\langle u, u \right\rangle_h \geq \left\langle u, u \right\rangle_h \ .$$

Dann ist $\left\langle A_{\tilde{h}} u, u \right\rangle_h \geq \left\langle u, u \right\rangle_h$. Da A selbstadjungiert ist, hat $A_{\tilde{h}}$ eine Wurzel und ist invertierbar. Es gilt $\|A_{\tilde{h}}^{1/2} u\|_h \geq \|u\|_h$ und $\|A_{\tilde{h}}^{-1/2} v\|_h \leq \|v\|_h$. Damit ist $A_{\tilde{h}} > 0$ und $\left\langle A_{\tilde{h}}^{-1} f, f \right\rangle_{\tilde{h}} \leq \langle f, f \rangle_{\tilde{h}}$. Also gibt es $u \in L^2_{n,q-1}(X, E)$ mit

$$\int_X \langle u, u \rangle_{\tilde{h}} \ dV \leq \int_X \left\langle A_{\tilde{h}}^{-1} f, f \right\rangle_{\tilde{h}} \ dV \leq \int_X \langle f, f \rangle_{\tilde{h}} \ dV < \infty$$

und $\overline{\partial} u = f$. Wegen der Regularität von $\overline{\partial}$ ist $u \in C^{\infty}_{n,q-1}(X, E)$.

Literaturverzeichnis

[AG62] Andreotti, A. ; Grauert, H.: Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. In: *Bull. Soc. Math. France* 90 (1962), S. 193–259

[AV65] Andreotti, A. ; Vesentini, E.: Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds. In: *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* 25 (1965), S. 81–130

[Bun68] Bungart, L.: On analytic fiber bundles. In: *Topology* 7 (1968), S. 55–68

[Dem97] Demailly, J.-P.: *Complex Analytic und Differential Geometry.* (ebook) `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly`, 1997

[Dou65] Douady, A.: Un espace de Banach dont le groupe lineare n'est pas connexe. In: *Indagationes Math.* 27 (1965), S. 787–789

[Era03] Erat, M.: The cohomology of Banach space bundles over 1-convex manifolds is not always Hausdorff. In: *Math. Nachr.* 248–249 (2003), S. 97–101

[For99] Forster, O.: *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer, 1999

[GL73] Gohberg, I. ; Leiterer, J.: The local principle for the factorization problem of continuous operator functions. In: *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* 18 (1973), S. 1585–1600

[Goh64] Gohberg, I.: The factorization problem for operator functions. In: *Izv. Akad. Nauk SSSR* 28 (1964), S. 1055–1082

[Gro57] Grothendieck, A.: Sur la classification des fibrès holomorphes sur la sphère de Riemann. In: *Am. J. Math.* 79 (1957), S. 121–138

[HL88] Henkin, G. ; Leiterer, J.: *Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas.* Birkhäuser, 1988

[Hör65] Hörmander, L.: L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator. In: *Acta Math.* 113 (1965), S. 89–152

[Hör90] Hörmander, L.: *Complex Analysis in Several Variables.* North-Holland, 1990

[Kui65] Kuiper, N. H.: The homotopy type of the unitary group of Hilbert space. In: *Topology* 3 (1965), S. 19–30

[Lan93] Lang, S.: *Real and Functional Analysis.* Springer, 1993

[Lei90] Leiterer, J.: Holomorphic Vector Bundles and the Oka-Grauert Principle. In: Gingikin, S. G. (Hrsg.) ; Khenkin, G. M. (Hrsg.): *Several Complex Variables IV* Bd. 10. Springer, 1990, S. 63–103

[Lei04] Leiterer, J.: *A finiteness theorem for holomorphic Banach bundles.* 2004. – manuscript *(19 pages)*

[LT96] Lindenstrauss, J. ; Tzafriri, L.: *Classical Banach spaces I and II.* Springer, 1996

Selbständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, daß die Dissertation selbständig und ohne unerlaubte Hilfsmittel angefertigt wurde.

Matjaž Erat

10. Januar 2006