Kabinett der Formen. Anschauungsmodelle in der mathematischen Forschung 1860–1890

HANNES JUNKER

Abstract

Die Anfertigung plastischer Anschauungsmodelle war in den Jahren 1860–1890 unter deutschen Mathematikern weit verbreitet. Noch heute befinden sich an vielen Instituten im In- und Ausland Sammlungen mit Abgüssen und Nachbauten ihrer Entwürfe. In jüngerer Zeit brachten die Wissenschaften den Modellen, vor allem jenen, die nach 1875 im Modellierkabinett der Polytechnischen Hochschule in München entstanden, verstärkt Aufmerksamkeit entgegen. Wenig beachtet blieb dabei jedoch die Verwendung der Objekte in der mathematischen Forschung. Dabei gibt es zahlreiche Anzeichen dafür, dass sich ihr Nutzen nicht in der Lehre erschöpfte.

Der vorliegende Beitrag gibt eine Einführung in das Thema, das den Gegenstand einer Dissertation bildet, die derzeit am Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg entsteht. Er erörtert den Gebrauch von Anschauungsmodellen in der mathematischen Forschung im Zeitraum 1860–1890. Der Schwerpunkt liegt auf dem Gebiet des Deutschen Reichs, wo die meisten Objekte zu jener Zeit entstanden. Aufgezeigt werden soll insgesamt, wie eng Modellbau und Forschung während jener Jahrzehnte miteinander verbunden waren.

Einleitung

An vielen deutschen Instituten für Mathematik befinden sich Sammlungen historischer Modelle, die geometrische Formen und Figuren zeigen. Die ältesten Bestände stammen aus dem letzten Viertel des 19. Jahrhunderts. In den vergangenen Jahren brachten die Wissenschaften den Objekten und ihrer Geschichte verstärkt Interesse entgegen. Oft wurden die Objekte jedoch als bloße Lehrmittel betrachtet. Ihr Nutzen für die mathematische Forschung blieb weitestgehend unbeachtet. Dabei gibt es zahlreiche Anzeichen dafür, dass viele der Anschauungsmodelle primär wissenschaftlichen Zwecken dienten, worauf einzelne Mathematikhistoriker auch aufmerksam gemacht haben.[1] Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass die Geschichte der Objekte und die Entwicklung der Mathematik miteinander eng verbunden sind.

Der vorliegende Aufsatz beginnt mit einem Überblick über eine rege Phase der serienmäßigen Produktion, die 1875 begann. Sie prägt bis heute den Blick auf die Geschichte der Gegenstände. Der Schwerpunkt des Beitrages liegt jedoch auf der Zeit davor, in der es nur vereinzelte Initiativen zur Herstellung von Modellen gab. Anhand der Arbeiten zweier der bedeutendsten deutschen Mathematiker ihrer Zeit, Julius Plücker (1801–1868) und Ernst E. Kummer (1810–1893), aus den 1860er Jahren soll gezeigt werden, wie die Objekte in der Forschung verwendet worden sind. Am Schluss ist die Frage zu beantworten, welche Tendenzen innerhalb der Wissenschaft das Interesse an den Modellen im 19. Jahrhundert beeinflusst haben.

Die Hallesche Sammlung

Das Institut für Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg besitzt eine umfangreiche Sammlung mathematischer Modelle und Instrumente. Zu dem Bestand zählen Zeicheninstrumente wie frühe mechanische Ellipsenzirkel, Rechenmaschinen und astronomische Dias aus dem 19. Jahrhundert. Den Kern der Sammlung bilden jedoch Anschauungsmodelle, die geometrische Körper, Flächen und Kurven darstellen. Es handelt sich um mehr als 200 Objekte aus verschiedenen Materialien und unterschiedlicher Größe, wobei sie in der Regel weniger als 40 Zentimeter in jede Raumrichtung messen. Viele Modelle bestehen aus Marmorgips. Das Material ist häufig verwendet worden, um gekrümmte Formen nachzubilden. Es bot den Vorteil, dass sich charakteristische Kurven eingravieren ließen, die auf der abgebildeten Fläche verlaufen. Die Konstruktion der Modelle richtet sich häufig nach den geometrischen Charakteristika der dargestellten Gebilde. Für die regelmäßige und scharfkantige Form platonischer Körper eignet sich Karton,

1 Vor allem David E. Rowe hat nachdrücklich darauf aufmerksam gemacht, dass die Anschauungsmodelle auch wichtige Instrumente für die mathematische Forschung waren, und dabei auf die Entwürfe Ernst E. Kummers verwiesen (Rowe 2013). Herbert Mehrtens sprach von einem heuristischen Wert, den die Objekte besessen hätten (Mehrtens 2004).

Abb. 1: Orthogonalsystem auf einer Kugel (links); sterneckiges Zwölffach (Mitte); Fadenmodell eines einschaligen elliptischen Hyperboloids mit Asymptotenkegel (rechts). Fotos: Sascha Herrmann, 2019

der sich leicht verarbeiten lässt. Regelflächen wie Zylinder und Doppelkegel unterdessen, die sich dadurch auszeichnen, dass durch jeden ihrer Punkte mindestens eine Gerade verläuft, welche vollständig auf der Fläche liegt, ließen sich mit Stab- und Fadenkonstruktionen nachbilden. Insbesondere Seidenfäden sind häufig genutzt worden, um Modelle dieser Flächen herzustellen. In Holz- und Metallrahmen straff eingespannt, zeigen sie den Verlauf der Geraden an. Abb. 1 zeigt ein solches Fadenmodell eines einschaligen elliptischen Hyperboloids aus der Sammlung. Mit derselben Technik ließen sich auch Raumkurven veranschaulichen, da ihre Tangenten ebenfalls eine Regelfläche bilden.

Brill-Schilling-Modelle

Die Anfänge der Halleschen Sammlung liegen in den Jahren vor 1900. Die meisten Objekte kamen jedoch in den ersten Jahrzehnten nach der Jahrhundertwende an das Institut. Sie sind von der Leipziger Verlagshandlung von Martin Schilling bezogen worden, der sie als „Lehrmittel für den höheren mathematischen Unterricht" vertrieb. Die Vorlagen für viele Artikel aus Schillings Programm entstanden in den 1870er und 1880er Jahren an der Polytechnischen Hochschule in München. Felix Klein (1849–1925) und Alexander W. Brill (1842–1935) waren 1875 an die Einrichtung berufen worden, um ein mathematisches Institut einzurichten. Kleins Name ist noch heute weit bekannt und eng mit dem späteren Aufstieg Göttingens zu einem Zentrum der Mathematik verbunden. Noch bevor er seine Professur in München antrat, warb er beim Direktorium der Hochschule in einem Brief um die Einrichtung eines Modellierkabinetts. Seinem Schreiben lässt sich entnehmen, dass er damit nicht nur didaktische Absichten verfolgte: „Es ist für mich zu wiederholten Malen Gegenstand andauernder Beschäftigung gewesen, durch wirkliche Herstellung von Modellen abstracte geometrische Verhältnisse zu versinnlichen und so unmittelbar eindringender Forschung zugänglich zu machen" (Tobies 1992, 771). Die ersten Erfahrungen, auf die er in seinem Brief verweist, hatte er als Schüler des Mathematikers Julius Plücker gesammelt. Für Klein waren die Modelle offenbar nicht nur pädagogische Anschauungsmittel, die ihren Wert in der Lehre besaßen. Er schätzte sie auch als Studienobjekte.

In der Werkstatt, die 1875 auf seine Bitten hin an der Polytechnischen Hochschule eingerichtet wurde, stellten bis zu Alexander Brills Fortgang im Jahr 1884 Studenten des Ingenieurswesens und angehende Lehrer unter der Leitung verschiedener Dozenten über 100 Modelle her, vorwiegend aus Gips. Oftmals wurde die Arbeit im Rahmen von Seminar- und Abschlussarbeiten durchgeführt. Brill betreute während dieser Zeit mit Abstand die meisten Projekte. Er führte die Arbeit auch nach Kleins Weggang 1880 fort, bis er selbst vier Jahre später München verließ, um in Tübingen eine Professur anzutreten. Über die dortige Sammlung berichtete er bei einer Rede später: „Die Meisten dieser Modelle sind jedoch bestimmt zur Förderung geometrischer Spezialstudien. Die Untersuchung der gestaltlichen Verhältnisse auch von Gebilden, die dem Geometer sonst wohl bekannt sind, fordert zu neuen und oft folgenreichen Fragestellungen auf. Selbst eine Frucht oft mühsamer Einzelforschungen wenden sich viele dieser Modelle von Flächen und räumlichen Kurven mit ihren meist vorher unbekannten oder schwer vorstellbaren Formen an den Forscher, dem sie Aufschluss geben über Fragen, die ihn vielleicht sonst schon beschäftigten oder zu denen das Modell selbst Anlass gab. In diesem Sinn ist eine solche Sammlung wie eine Bibliothek anzusehen oder wie ein Naturalienkabinett, nur dass sie nicht mit Zufälligkeiten und Unwesentlichem zu kämpfen hat, wie auch die beste systematische Anordnung eines solchen" (Brill 1889). Brill bestätigte, dass sich der Zweck vieler Modelle nicht in der Lehre erschöpfte. In seinen Augen waren sie Forschungsgegenstände, die Anlass für neue und Aufschluss über offene Fragen boten, gleichermaßen Ausgangspunkt und das Ergebnis wissenschaftlicher Arbeit. Die Sammlungen verglich er mit einem Kabinett, das Auskunft über die Gestalt geometrischer Formen gewährt.

Die Münchener Modelle fanden große Verbreitung. Nach der Eröffnung der Werkstatt beauftragten Brill und Klein einen ortsansässigen Gipsmodelleur damit, Abgüsse der Entwürfe anzufertigen, um am neugegründeten Institut eine Sammlung aufzubauen. Brills Bruder Ludwig begann 1877, Kopien der Modelle über seinen Darmstädter Verlag zu vertreiben. Er verschickte die Artikel auch ins Ausland, wo sie heute noch an einigen Instituten aufbewahrt werden. Den Grundstock seines Programms erweiterte er in den folgenden Jahrzehnten erheblich, bis er 1899 die Rechte an Martin Schilling abtrat. Schilling führte seine Arbeit fort, änderte nur wenig an der Ausrichtung des Programms, fügte jedoch viele neue Artikel hinzu, neben Modellen auch Zeicheninstrumente. In den 1920er Jahren ging die Anzahl der Neuerscheinungen zurück. 1932 teilte der Verlag dem Göttinger Institut für Mathematik, wo heute die größte und bedeutendste Sammlung seiner Modelle überliefert ist, mit, dass in den vergangenen Jahren keine neuen Serien erschienen seien (Fischer 1985, xiii).

Die Bewerbung der Modelle als Unterrichtsmittel durch Brill und Schilling ist sicherlich ein Grund dafür, weshalb die Objekte lange Zeit vorrangig unter dem Gesichtspunkt der Lehre betrachtet worden sind. Allerdings war sich bereits Ludwig Brill bewusst, dass das Gros seiner Waren nicht etablierte Gegenstände der Mathematik veranschaulicht, sondern Objekte anhaltender Forschung. So heißt es im Vorwort zur dritten Auflage des Kataloges: „Wie seither, so wird auch zukünftig das Bestreben der Verlagshandlung sein, denjenigen wissenschaftlichen Kreisen zu dienen, welche in dem Gebrauch von Modellen und Zeichnung ein Hülfsmittel und eine kräftige Stütze zur Förderung und Belebung mathematischer Studien erblicken" (Brill 1885, iv). Der enge Bezug zur Forschung, den Ludwig Brill herstellt, wird durch einen Blick in den Katalog bestätigt. Die Auflage von 1885 listet etwa 150 Artikel auf, größtenteils Gips- und Fadenmodelle, die in zwölf Serien unterteilt sind. Die Vorlagen dafür entstanden zwischen 1877 und 1884, die meisten davon an der Münchener Hochschule. Typisch für die Art von Modellen, die Brill vor Augen standen, sind die Entwürfe Karl Rohns (1855–1920) von 1877. Sie zeigen Kummer'sche Flächen, die Rohn während seiner Promotion bei Felix Klein untersuchte. Klein präsentierte die Modelle nach ihrer Fertigstellung bei der jährlichen Versammlung der 1822 gegründeten Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in der Sektion Mathematik, wo er zu „Gestalten der Kummer'schen Fläche" sprach (Tobies & Volkert 1998). Nach 1860 wurden regelmäßig Anschauungsmodelle bei Sitzungen wissenschaftlicher Gesellschaften und Akademien präsentiert. Einen weiteren Beleg für den engen Forschungsbezug der Objekte bildet die siebente Serie des Brill-Kataloges, die 27 Gipsmodelle des Mathematikers Carl F. Rodenberg (1851–1933) zeigt. Ihr baldiges Erscheinen hatte er zuvor in einem Artikel über die Klassifikation von Flächen dritter Ordnung mit den Worten angekündigt, dass sie „das concrete Erfassen der Singularitäten erleichtern werden" (Rodenberg 1878). Rodenbergs Arbeit erschien 1878 in den „Mathematischen Annalen", die seit ihrer Gründung 1862 zu einer der wichtigsten und renommiertesten Fachzeitschriften gehörte.

Die Entwürfe Rohns und Rodenbergs zeigen, was für viele Prototypen von Brill-Schilling-Modellen gilt. Sie entstanden im Zusammenhang mit mathematischen Studien, in denen geometrische Gebilde untersucht worden sind, häufig mit dem Ziel einer systematischen Klassifikation. Einzelne Typen wurden dabei anhand von äußerlichen Kriterien unterschieden (die die Gestalt betrafen), etwa durch die Anzahl markanter Punkte und Kurven. Die Modelle gaben einen Überblick über die klassifizierten Formen. In der Regel sind sie erst nach dem Abschluss der Studien veröffentlicht worden. Ihre Anfertigung, die teilweise mit aufwendigen Rechnungen verbunden war, geschah jedoch während der Forschungsarbeit.

Plückers Modelle von Komplexflächen

Insbesondere für die erste Phase der Modellherstellung von 1860 bis 1875 im deutschen Sprachraum lässt sich eine enge Verbindung zur Forschung beobachten.[2] Zu den wichtigsten Vertretern dieser Periode gehörten die beiden Mathematiker Julius Plücker und Ernst Kummer. In den 1860er Jahren entdeckten sie unabhängig voneinander neue Arten von Flächen, von denen sie zahlreiche Modelle herstellen ließen, die sie anschließend bei verschiedenen Vorträgen präsentierten.

Plücker hat 1866 beim 36. Meeting der British Association for the Advancement of the Science (BAAS) in Nottingham einen Vortrag unter dem Titel „On Complexes of the Second Order" gehalten, bei dem er dem Publikum auch einige Holzmodelle vorführte.[3] Sie sollten der Zuhörerschaft dabei helfen, den Gegenstand seiner Ausführungen besser zu verstehen. Plücker entwarf während jener Zeit die Grundzüge einer neuen Geometrie, die auf Linien anstelle von Punkten basierte. Die Idee zu einer solchen Theorie kam ihm bereits in den 1840er Jahren. Sie hing mit einer interessanten Beobachtung zusammen, die er beim Studium von ebenen Kurven machte. Eine Kurve lässt sich nicht nur als Menge der Punkte auffassen, die von ihr durchlaufen werden. Ihr Verlauf kann stattdessen auch mithilfe der Geraden beschrieben werden, von denen sie berührt wird, ihren sogenannten Tangenten (vgl. Abb. 3). Für das Studium von Kurven ist es mitunter von Vorteil, sie unter die-

2 Die ersten Anschauungsmodelle entstanden während der Französischen Revolution, als der Mathematiker Gaspard Monge (1746–1818), Gründer der École polytechnique in Paris, ihren Bau anregte.

3 Ein Bericht von Plückers Vortrag findet sich in dem Band der BAAS zu dem Meeting in Nottingham (BAAS 1867, 6).

sem Gesichtspunkt zu betrachten. Die maximale Anzahl von Tangenten etwa, die sich in einem festen Punkt der Ebene schneiden, ist ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal bei der Klassifikation planer Kurven. In derselben Weise lassen sich auch Flächen untersuchen. Plücker hatte den Vorteil dieses Perspektivwechsels früh erkannt. Mitte der 1840er Jahre äußerte er sogar die Idee, in völliger Analogie zu den Punktobjekten der klassischen Geometrie auch solche Gebilde zu erforschen, die wie Regelflächen gänzlich aus Linien zusammengesetzt sind. Er dachte daran, diese Liniengebilde um ihrer selbst willen zu studieren. Diese Idee ließ Plücker in den folgenden Jahren nicht los. In den verbleibenden Jahren bis zu seinem Tod 1868 erforschte er verschiedene Gebilde aus Linien, die er mithilfe von Koordinaten und Gleichungen definierte. Die mathematische Beschreibung solcher Kongruenzen und Komplexe, wie er sie nannte, war jedoch weitaus schwieriger als die gewöhnlicher Punktflächen. Die allgemeine Gleichung eines Komplexes des zweiten Grades involviert beispielsweise 19 Koeffizienten, während sie für eine Fläche derselben Ordnung nur neun unbestimmte Größen umfasst. Neben den Problemen, die mit der algebraischen Beschreibung und Behandlung einhergingen, erschwerte noch ein anderer Umstand Plückers Arbeit. Es gelingt nicht, sich ein Bild von der Gestalt eines allgemeinen quadratischen Komplexes zu machen. Plücker selbst konnte zeigen, dass bei einem solchen Gebilde durch jeden Punkt des Raumes unendlich viele Linien gehen, die auf einem Kegel liegen.

Um dieses Problem zu umgehen, beschränkte sich Plücker bei seiner Forschung vorerst auf jene Punktflächen, die von Teilen eines Komplexes umhüllt werden. Von der Untersuchung dieser Komplexflächen erhoffte er sich einerseits, neue Erkenntnisse über die zugrunde liegenden Liniengebilde zu erhalten. Anderseits studierte er sie jedoch auch, weil sie selber interessante Eigenschaften aufwiesen. Im Vorwort zum ersten Band seines zweibändigen Werks „Neue Geometrie des Raumes“, das posthum nach Plückers Tod 1868 erschien, schreibt der Herausgeber Alfred Clebsch (1833–1872) über den Autor: „In der letzteren [Theorie der Komplexe zweiten Grades] beschäftigt ihn insbesondere eine Classe von merkwürdigen Flächen vierter Ordnung und Classe, welche er Complexflächen genannt hat, und deren Darstellung durch anschauliche Modelle ihm bei seiner Methode der Forschung wesentlich Unterstützung darbot“ (Clebsch 1868). Der Klassifikation dieser Flächen ist ein ganzes Kapitel des zweiten Bandes gewidmet, der durch seinen Assistenten Felix Klein herausgegeben wurde. Plücker interessierte sich besonders für das Aussehen jener Flächen, nicht nur aufgrund einer Neigung, die ihm Clebsch in seinem Nachruf mit den Worten „Freude an der Gestalt“ attestierte (Clebsch 1871). Für ihn war die Anschauung stattdessen ein wichtiges Mittel der Erkenntnis. Sie half ihm bei seinem Studium, die Gleichungen besser zu verstehen, mit denen er es während seiner Arbeit zu tun bekam. Klein, der ihm bei der Konstruktion vieler seiner Modelle geholfen hatte, berichtete später über die Arbeitsweise seines Lehrers: „Plücker selbst erzählte mir einmal, daß er namentlich durch den Verkehr mit Faraday dazu angeregt worden sei; dieser selbst habe die Modellkonstruktion als Mittel benutzt, um sich als Nichtfachmann die ihm jeweils notwendigen mathematischen Formel verständig zu machen“ (Klein 1892). Zwar lässt sich nicht mehr ermessen, ob Michael Faraday (1791–1867) tatsächlich der Ideengeber war. Der englische Physiker hat jedenfalls wie viele andere seiner Kollegen und Landsleute Modelle entworfen, um physikalische Gesetze zu veranschaulichen. Plücker besaß außerdem enge Verbindungen nach England.[4]

Nach seinem Vortrag in Nottingham sandte er auf Bitten des englischen Mathematikers Thomas A. Hirst (1830–1892) 14 Holzmodelle auf die Insel, die sich heute im Besitz der London Mathematical Society befinden. Später fertigte er eine weitere Reihe, bestehend aus 27 Modellen, an, die ebenfalls charakteristische Typen von Komplexflächen zeigen. Er ließ sie mit Zinkguss anfertigen, womöglich in der Absicht, sie zu vervielfältigen. Klein ergänzte sie nach Plückers Tod um vier weitere Exemplare. Die Mathematischen Institute in Göttingen und Tübingen besitzen Abgüsse dieser Modelle (Abb. 2).

Abb. 2: Zinkgussmodell einer Äquatorialfläche in der Tübinger Sammlung. Foto: V. Marquardt, 2021 © Museum der Universität Tübingen MUT

4 Die Dissertation von Mechthild U. Plump (2014) enthält wichtige biographische Hinweise zu der Frage, woher Plücker seine Anregungen zum Bau von Anschauungsmodellen bezog.

Kummers Brennflächen

Ernst Kummer ist heute für seine Beiträge zur Zahlentheorie bekannt. Er interessierte sich jedoch wie Plücker auch für physikalische Probleme. 1860 befasste sich der Berliner Professor intensiv mit Phänomenen der geometrischen Optik. Er veröffentlichte seine „Allgemeine Theorie gradliniger Strahlensysteme", mit der er an die Arbeiten des irischen Mathematikers Williams R. Hamiltons (1805–1865) anknüpfte. Der geometrischen Optik liegt die Annahme zugrunde, dass sich Licht, welches von einer Quelle ausgeht, entlang von Strahlen ausbreitet. Die Richtung der Ausbreitung lässt sich in vielen Situationen mit einer Fläche beschreiben, auf der die Strahlen des Systems senkrecht stehen, der sogenannten Leitfläche. Wenn das Licht jedoch zuvor in speziellen Kristallen gebrochen wird, lässt sich die Ausbreitung nicht mehr durch eine einzelne Fläche beschreiben. Kummer verallgemeinerte Hamiltons Theorie für solche Systeme.

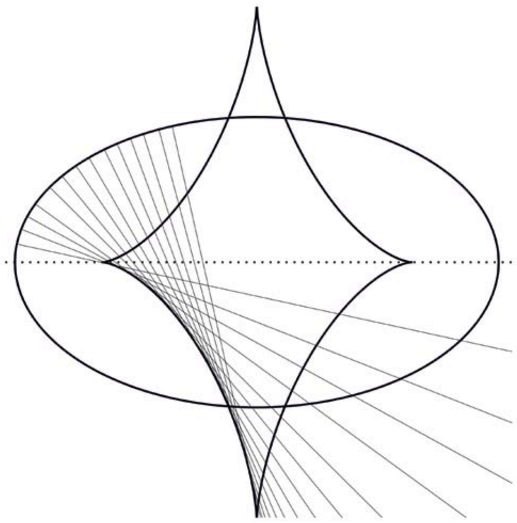

Abb. 3: Die gestrichelten Linien deuten den Verlauf von Strahlen an, die senkrecht auf der Ellipse stehen. Sie bilden die Tangenten an die Brennlinie, in der das Licht gebündelt wird. Grafik: Hannes Junker

Im Zuge dieser Arbeit untersuchte der Berliner Professor Strahlenbündel. Er verstand darunter sämtliche Strahlen, die sich beim Durchtritt durch eine Oberfläche unendlich nahekommen. Die Gestalt eines Bündels hängt maßgeblich von der Krümmung der Fläche ab. Er unterschied drei Arten, von denen er jeweils ein Fadenmodell entwarf. Die Ausführung überließ er dem Universitätsmechaniker W. Apel in Göttingen (Finsterwalder 1892). Seine Modelle zeigen jeweils die Strahlen, welche wie die äußersten Halme einer Garbe das Bündel begrenzen. Noch heute befinden sich gut erhaltene Nachbauten seiner Entwürfe in der Tübinger Sammlung. Kummer untersuchte in diesem Zusammenhang auch verschiedene Brennflächen, die in der geometrischen Optik von großem Interesse sind. Sie beschreiben die Orte, in denen das Licht eines Strahlensystems gebündelt wird, das sich senkrecht zu einer Leitfläche ausbreitet. Abb. 3 zeigt die Brennlinie (Kaustik), die von einer Ellipse als Leitkurve definiert wird. Kummer entdeckte während seiner Arbeit eine Klasse äußerst interessanter Brennflächen, die nach ihm benannt werden sollten. Auf ihnen liegen exakt 16 Doppelpunkte, in deren Umgebung eine Fläche einem Doppelkegel ähnelt, in dessen Spitze sich zwei Teile berühren. Noch interessanter als die bloße Anzahl ist jedoch die Konfiguration der Doppelpunkte auf den Flächen, auf die Kummer gestoßen war. Er bewies 1864, dass es wiederum 16 Ebenen gibt, auf denen jeweils sechs dieser ausgezeichneten Punkte entlang von Kegelschnitten wie Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln liegen, und dass durch jeden der 16 Doppelpunkte exakt sechs dieser Ebenen gehen.

Von seinen Flächen entwarf Kummer in den folgenden Jahren mehrere Gipsmodelle, von denen Ludwig Brill ab 1883 Kopien vertrieb. Einen ersten Entwurf aus Draht präsentierte er bereits in dem Jahr seiner Entdeckung bei einer Sitzung der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin. Das Modell zeigte die 16 Kegelschnitte, die sich in den Doppelpunkten zu sechst kreuzen. Der Bericht gibt Auskunft über sein Motiv: „Um über die Lage dieser 16 Punkte, 16 Ebenen und 16 Kegelschnitte eine möglichst klare Anschauung zu gewinnen, habe ich dieselben in dem vorliegenden aus Drähten angefertigten Modell dargestellt" (Kummer 1864). Offenbar hatte Kummer es entworfen, um sich von seiner Entdeckung eine genauere Vorstellung verschaffen zu können. Um die Anschauung beim

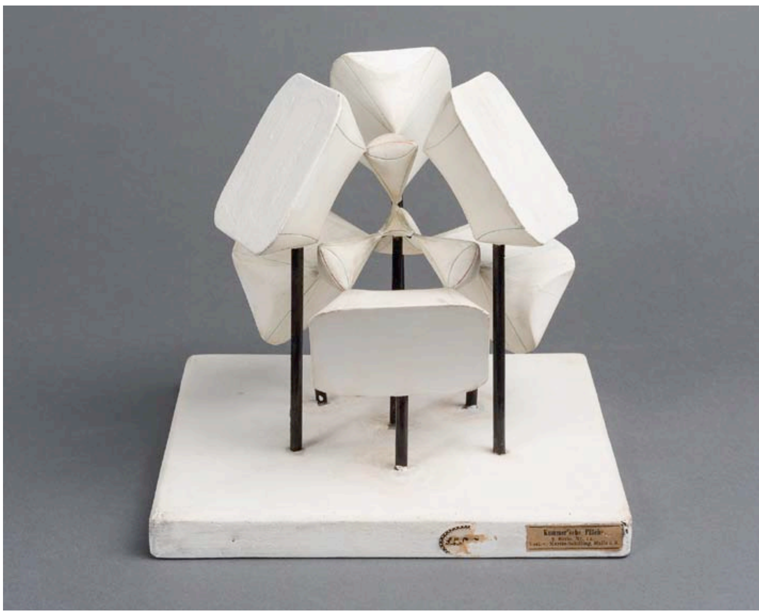

Abb. 4: Gipsmodell einer Kummer'schen Fläche mit 16 Doppelpunkten. Farbige Linien stellen die Kegelschnitte dar, die jeweils sechs der Punkte miteinander verbinden. Foto: Sascha Herrmann, 2019

Publikum zu fördern, gab er im Anschluss an die Präsentation des Modells eine ausführliche Erläuterung, in dem er den Verlauf der Fläche beschreibt. Seine Ausführungen sind so detailliert, dass eine Rekonstruktion des leider inzwischen verschollenen Modells möglich wäre. Er entwarf in den darauffolgenden Jahren noch mehrere Gipsmodelle, von denen immer noch Abgüsse existieren. Für lange Zeit waren sie das einzig verfügbare Mittel, um sich einen Eindruck von dem Aussehen einer Kummer'schen Fläche zu verschaffen.

Fazit

Die Arbeiten Kummers und Plückers zeigen, dass die Modelle bereits, Jahre bevor sie als Lehrmittel vertrieben worden sind, ihren festen Platz in der Forschung besaßen. Die deutschen Mathematiker verwendeten sie bereits in den 1860er Jahren in geometrischen Studien, um sich ein Bild von dem Gegenstand ihrer Untersuchungen zu machen. Modelle verschafften ihnen neue Erkenntnisse und letzte Gewissheiten über die Gestalt ihrer Forschungsobjekte. Die plastische Darstellung der studierten Flächen war ein wichtiges Mittel, um die räumliche Anordnung ausgezeichneter Punkte und Kurven oder den Zusammenhang verschiedener Teile nachzuvollziehen. Dreidimensionale Modelle besaßen dabei einen entscheidenden Vorteil gegenüber Skizzen. Draht- und Kartonkonstruktionen gestatteten es, die tatsächlichen Verhältnisse mit einem Blick zu erfassen. Selbst fotorealistische Zeichnungen schaffen es hingegen kaum, die räumliche Gestalt einer Fläche wiederzugeben. Das gilt insbesondere dann, wenn es sich um eine Form handelt, die der Betrachter nie zuvor gesehen hat. Von dem Aussehen der komplizierten Flächen, die Kummer und Plücker studierten, hätten selbst mehrere Ansichten aus verschiedenen Perspektiven nur eine unzureichende Vorstellung vermittelt.

Die Verwendung von plastischen Modellen in geometrischen Untersuchungen nach 1860 zeigt, welche Bedeutung die Anschauung für die damalige Forschung besaß. Die Modelle bezeugen nicht nur die Freude der Geometer an der Gestalt von Körpern, Kurven und Flächen. Sie verweisen auch auf die Probleme der Wissenschaftler, sich die Gegenstände ihrer Untersuchungen vorzustellen. Die Geschichte der Modelle ist eng verwoben mit der Entwicklung der Geometrie während jener Zeit. So wurde etwa das systematische Studium von algebraischen Gebilden durch Fortschritte begünstigt, die sich vor 1850 bei der Behandlung geometrischer Probleme mit algebraischen Methoden verzeichnen ließen. Gleichzeitig waren es jedoch auch diese Tendenzen zur Algebraisierung, welche dazu beitrugen, dass die Mathematik am Ende des 19. Jahrhunderts immer abstraktere Züge annahm, was auch das Interesse an anschaulichen Darstellungen nicht unberührt ließ. In dem laufenden Dissertationsprojekt des Verfassers werden die skizzierten Verbindungen zwischen der Geschichte der Modelle und der Wissenschaft weiter erforscht.

Literatur

BAAS 1867. On Complexes of the Second Order. In: *Report of the 36. Meeting of the British Association for the Advancement of Science in Nottingham 1866*. London: John Murray, 36

Brill, A. 1889. Über die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen. In: Böklen, O. (Hg.). *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen* Bd. 2. Stuttgart: J. B. Metzler, 69–80

Brill, L. 1885. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. Darmstadt: Verlagshandlung Brill

Clebsch, A. 1868. Vorwort. In: Plücker, J.; Clebsch, A. (Hg.). *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*. Bd. 1. Leipzig: Teubner, III–IV

Clebsch, A. 1871. Zum Gedächtnis an Julius Plücker. *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 16: 1–40

Finsterwalder, S. 1892. Drei Arten unendlich dünner Strahlenbündel. In: Dyck, W. von (Hg.). *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.* München: C. Wolf und Sohn, 280

Fischer, G. 1985. Vorwort. In: Fischer, G. (Hg.). *Mathematische Modelle: Aus den Sammlungen von Universitäten und Museen.* Springer: Wiesbaden, IX–XV

Klein, F. 1892. Vier Modelle zur Theorie der Linienkomplexe zweiten Grades. In: Dyck, W. von (Hg.). *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente.* München: C. Wolf und Sohn, 283–285

Kummer, E. 1864. Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulären Punkten. *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1864): 246–260

Mehrtens, H. 2004. Mathematical Models. In: Chadarevian, S.; Hopwood, N. (Hg.). *Models: The Third Dimension of Science.* Stanford: Stanford University Press, 276–306

Plump, M. U. 2014. *Julius Plücker – Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert.* Diss. Bergische Universität Wuppertal

Rodenberg, C. 1878. Zur Classification der Flächen dritter Ordnung. *Mathematische Annalen* 14, 1: 46–110

Rowe, D. 2013. Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces. *Mathematische Semesterberichte* 60, 1: 1–24

Seidl, E.; Loose, F.; Bierende, E. (Hg.) 2018. *Mathematik mit Modellen. Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung*. Tübingen: MUT

Tobies, R. 1992. Felix Klein in Erlangen und München: ein Beitrag zur Biographie. In: Demidov, S.; Rowe, D.; Folkerts, M.; Scriba, C. (Hg.). *Amphora: Festschrift für Hans Wussing zu seinem 65. Geburtstag*. Basel: Birkhäuser, 751–772

Tobies, R.; Volkert, K. 1998. *Mathematik auf den Versammlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte: 1843–1890*. Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft

Zum Autor

Hannes Junker wechselte nach einem dreijährigen Grafikdesignstudium an der Kunsthochschule Burg Giebichenstein 2009–2012 in Halle (Saale) sein Studienfach. 2016 beendete er sein Bachelor- und 2018 sein Masterstudium der Mathematik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg. Seitdem ist er als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik tätig. Derzeit schreibt er an einer Dissertation zu dem Thema „Geschichte von Anschauungsmodellen 1860–1890 im Kontext mathematischer Forschung". Die Arbeit wird von Prof. Dr. Karin Richter (Professorin für Didaktik der Mathematik in Halle) und Prof. Dr. Frank Loose (Professor für Geometrie an der Universität Tübingen) betreut.

Kontakt
Hannes Junker M.A.
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Theodor-Lieser-Str. 5, 06120 Halle (Saale)
hannes.junker[at]mathematik.uni-halle.de