Iterationsverfahren mit unvollständigen Korrekturen und die Lösung nichtlinearer Gleichungen

M. A. Krasnosel'skii[1), N. A. Kuznetsov[1), D. J. Rachinskii[1), R. März[2)

Auf der Grundlage der Theorie dynamischer Systeme mit unvollständigen Korrekturen [1-2] werden verschiedene Methoden vom Gauß-Seidel-Typ zur numerischen Lösung nichtlinearer Gleichungen formuliert und analysiert. Für spezielle Klassen von Gleichungen ist eine Reihe dieser Methoden schon früher diskutiert worden (z. B. [3-5]).
Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit liefern zugleich auch Aussagen über die asymptotische Stabilität von Gleichgewichtszuständen für neue Klassen nichtlinearer dynamischer Systeme.

---

1) Russische Akademie der Wissenschaften Institut für Probleme der Informationstransmission, Moskau

2) Humboldt-Universität Berlin, Institut für Mathematik

1 Die Methode der sukzessiven Approximation

1.1 Wir befassen uns mit der näherungsweisen Lösung der Gleichung

$$(1) \qquad x = F(x), \quad x = \{\xi_1, \dots, \xi_N\} \in I\!R^N.$$

Dabei sei $F(x) = \{f_1(x), \dots, f_N(x)\}$ auf $I\!R^N$ definiert mit skalaren Funktionen $f_i(x) = f_i(\xi_1, \dots, \xi_N)$. Der Raum $I\!R^N$ sei halbgeordnet (vgl. [6-8]) in bezug auf den Konus $K_+ = \{x = \{\xi_1, \dots, \xi_N\} : \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, N\}$ der nichtnegativen Vektoren, das heißt, wir definieren $x \leq y$ für $x, y \in I\!R^N$, falls $y - x \in K_+$ gilt. Sei auf $I\!R^N$ eine Norm $\|.\|$ gegeben. Zu $x = \{\xi_1, \dots, \xi_N\} \in I\!R^N$ bezeichne $|x|$ den Vektor $\{|\xi_1|, \dots, |\xi_N|\} \in I\!R^N$. Für die Funktion F setzen wir voraus, daß die Bedingung

$$(2) \qquad |F(x) - F(y)| \leq A|x - y|, \quad x, y \in I\!R^N$$

gelten möge mit einer $N \times N$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit nichtnegativen Einträgen und einem Spektralradius

$$(3) \qquad r(A) < 1.$$

Koordinatenweise formuliert, hat (1) die Gestalt

$$(4) \qquad \xi_i = f_i(\xi_1, \dots, \xi_N), \quad i = 1, \dots, N,$$

und (2) entspricht der Lipschitz-Bedingung

$$(5) \qquad |f_i(\xi_1, \dots, \xi_N) - f_i(\varsigma_1, \dots, \varsigma_N)| \leq a_{i1}|\xi_1 - \varsigma_1| + \dots + a_{iN}|\xi_N - \varsigma_N|$$

für die skalaren Funktionen f_i

1.2 Für das klassische Iterationsverfahren nach Picard

$$(6) \qquad x_n = F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

in Koordinatenform geschrieben als

$$(7) \qquad \xi_i^n = f_i\left(\xi_i^{n-1}, \dots, \xi_N^{n-1}\right), \quad i = 1, \dots, N; \; n = 1, 2, \dots$$

mit $x_n = \{\xi_1^n, \dots, \xi_N^n\}$, sind die folgenden Konvergenzaussagen wohlbekannt (z. B. [9-11]).

Theorem 1 *:*

(i) Die Gleichung (1) besitzt genau eine Lösung $x_* \in \mathbb{R}^N$. Für beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}^N$ konvergiert die Folge (6) im $\mathbb{R}^N$ gegen x_*.

(ii) Die Abschätzung

$$\|x_n - x_*\| \leq C(\varepsilon)(r(A)+\varepsilon)^n \|x_0 - x_*\|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$ mit einer von ε und der gewählten Norm $\|.\|$ abhängigen Konstanten $C(\varepsilon) < \infty$.

(iii) Wenn es zu denjenigen Eigenwerten λ der Matrix A mit $|\lambda| = r(A)$ keine Hauptvektoren gibt, so gilt die strengere Abschätzung

$$\|x_n - x_*\| \leq C(r(A))^n \|x_0 - x_*\|, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

mit einer Konstanten $C < \infty$, die nur von der Norm $\|.\|$ abhängt.

Die Ungleichung (9) ist z. B. dann gültig, wenn die Vektoren Ay oder $A^k y$, bei einem fixiertem k, für jedes nichttriviale $y \in K_+$ lauter positive Komponenten haben. Speziell gilt (9) für fokusierende oder akute Matrizen A ([8]). Unter diesen Bedingungen ist $r(A)$ ein einfacher Eigenwert von A und für alle anderen Eigenwerte λ von A gilt $|\lambda| < r(A)$.

Die Berechnung des Spektralradiuses $r(A)$ ist bei großem N sehr aufwendig, es gibt jedoch effektive einfache Algorithmen, die geeignete Abschätzungen für $r(A)$ liefern (z. B. [7-8]). Die Ungleichungen (8) und (9) für die einfache Picard-Iteration (6) sind scharf und können nicht verbessert werden. Deshalb bemühen wir uns um schneller konvergente Iterationsverfahren.

2 Hauptergebnis

2.1 Sei $M = (\mu_{ij})$ eine $N \times N$ Matrix mit Einträgen $0 \leq \mu_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, \ldots, N$. Weiter unten werden wir Iterationsverfahren studieren, bei denen die Näherung $x_n = \{\xi_1^n, \ldots, \xi_N^n\}$ aus den Gleichungen

$$\xi_i^n = f_i\left((\mu_{i1}\xi_1^n + (1-\mu_{i1})\xi_1^{n-1}, \ldots, \mu_{iN}\xi_N^n + (1-\mu_{iN})\xi_N^{n-1}\right), \tag{10}$$

bestimmt wird. Der Startwert $x_0 = \{\xi_1^0, \ldots, \xi_N^0\} \in \mathbb{R}^N$ kann dabei beliebig gewählt werden. Die Gleichungen (10) schreiben wir übersichtlicher in der Form

$$\xi_i^n = \varphi_i\left(\xi_1^n, \ldots, \xi_N^n; \xi_1^{n-1}, \ldots, \xi_N^{n-1}\right), \tag{11}$$

$$i = 1, \ldots, N,$$

indem wir die Funktionen

$$\begin{aligned} (12) \qquad & \varphi_i(\varsigma_1, \ldots, \varsigma_N; \eta_1, \ldots, \eta_N) \\ & \quad = f_i(\mu_{i1}\varsigma_1 + (1-\mu_{i1})\eta_1, \ldots, \mu_{iN}\varsigma_N + (1-\mu_{iN})\eta_N) \end{aligned}$$

einführen.

Bei numerischen Verfahren (10) erfordert der Übergang von x_{n-1} zu x_n die Lösung der N skalaren Gleichungen (11) bezüglich der N unbekannten Komponenten $\xi_1^n, \ldots, \xi_N^n$ des Vektors x_n.
Aus (11) entsteht wieder die Picard-Iteration (7), falls M die Nullmatrix ist.

2.2 Wir nennen eine $N \times N$ Matrix $G = (g_{ij})$ positiv (bezüglich des Konus K_+) und notieren dies als $G \geq 0$, wenn alle Einträge g_{ij} nichtnegativ sind. Man schreibt $G_2 \leq G_1$, falls $G_1 - G_2 \geq 0$ gilt.
Zu den Matrizen A und M konstruieren wir eine Hilfsmatrix $B = (b_{ij})$ mittels der Festlegung $b_{ij} = a_{ij}\mu_{ij}$. Aus $a_{ij} \geq 0$ und $0 \leq \mu_{ij} \leq 1$ folgt dann

$$(13) \qquad 0 \leq B \leq A.$$

Bekanntlich impliziert (13) die Beziehung $r(B) \leq r(A)$. Damit gilt natürlich $r(B) < 1$, und die Matrix $I - B$ ist regulär. Hierbei bezeichnet I die Einheitsmatrix. Wir führen nun noch die Matrix

$$(14) \qquad A_0 = (I - B)^{-1}(A - B)$$

ein. Aus den Ungleichungen (3) und (13) folgt die Abschätzung (vgl. [8])

$$(15) \qquad r(A_0) \leq r(A),$$

die im folgenden Hauptsatz eine Rolle spielen wird.

Theorem 2 *:*

(i) Das System

$$(16) \qquad \varsigma_i = \varphi_i(\varsigma_i, \ldots, \varsigma_N; \eta_1, \ldots, \eta_N), \quad i = 1, \ldots, N$$

besitzt für beliebiges $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_N\} \in I\!R^N$ je genau eine Lösung $x(y) = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$. Daher ist durch (10) die Folge der $x_n = \{\xi_1^n, \ldots, \xi_N^n\}$ bei beliebig vorgegebenem Startwert $x_0 = \{\xi_1^0, \ldots, \xi_N^0\}$ eindeutig bestimmt.

(ii) Für jeden Startwert $x_0 \in I\!R^n$ konvergiert die durch (10) definierte Folge der x_n gegen die einzige Lösung x_* der Gleichung (1).

(iii) Für das Verfahren (10) gelten analoge Aussagen zu Theorem 1 (ii) und (iii), wenn $r(A)$ durch den Spektralradius $r(A_0)$ der Matrix (14) ersetzt wird. Dabei gilt stets $r(A_0) \leq r(A)$. Wenn A zusätzlich irreduzibel ist und $M \neq 0$ gilt, so ist die strenge Ungleichung

$$r(A_0) < r(A) \tag{17}$$

gültig.

Die Ungleichung (17) folgt aus einem Resultat von V. J. Stetsenko ([12]). Man nennt eine Matrix A irreduzibel, wenn aus $Ax \geq \alpha x$, $\alpha > 0$, $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\} \in K_+$, $x \neq 0$, folgt, daß alle Einträge ξ_i des Vektors x positiv sind.
Der Beweis zu Theorem 2 wird im Anhang ausgeführt.

2.3 Nach Theorem 2 wird die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens (10) durch die Ungleichung

$$\|x_n - x_*\| \leq C(q)q^n\|x_0 - x_*\|, \quad n = 1, 2, \ldots, x_0 \in I\!R^N, \tag{18}$$

charakterisiert, wobei als q eine beliebige Zahl aus dem Intervall $(r(A_0), \infty)$ dienen kann.
Sei nun Q die Menge aller solchen Zahlen $q > 0$, für die die Ungleichung (18) jeweils gleichmäßig für alle Startwerte $x_0 \in I\!R^N$ gültig ist. Offensichtlich ist Q entweder das offene Intervall (q_*, ∞) oder das halboffene Intervall $[q_*, \infty)$ mit $q_* = \inf Q \leq r(A_0)$.

Wir setzen vorübergehend voraus, Gleichung (1) habe die spezielle Gestalt

$$x = Ax + d \tag{19}$$

mit $d = \{d_1, \ldots, d_N\} \in I\!R^N$. Wegen

$$|Ax - Ay| \leq A|x - y|, \quad x, y \in I\!R^N,$$

ist die Bedingung (2) hier erfüllt. In diesem Fall vereinfacht sich Formel (10) zu

$$\begin{aligned} \xi_i^n &= a_{i1}\left(\mu_{i1}\xi_1^n + (1-\mu_{i1})\xi_1^{n-1}\right) + \cdots \\ &\quad + a_{iN}\left(\mu_{iN}\xi_N^n + (1-\mu_{iN})\xi_N^{n-1}\right) + d_i, \\ &\qquad i = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{20}$$

Theorem 3 *: Sei die Folge der Näherungen $x_n = \{\xi_1^n, \dots, \xi_N^n\}$ für die Lösung x_* des linearen Systems (19) durch (20) definiert.*
Dann bildet der Spektralradius $r(A_0)$ der Matrix (14) das Infimum der Menge Q, also $q_* = r(A_0)$. Dabei gilt $r(A_0) \in Q$ genau dann, wenn $r(A_0)$ positiv ist und es darüber hinaus zu keinem der Eigenwerte λ der Matrix A_0 mit $|\lambda| = r(A_0)$ Hauptvektoren gibt.

Im folgenden verwenden wir die in der Behauptung bereits benutzte Spektralbedingung noch häufig kurz als Bedingung
(a): Zu jedem der Eigenwerte λ der Matrix A_0 mit der Eigenschaft $|\lambda| = r(A_0)$ gibt es keine Hauptvektoren.

Nach Theorem 3 ist die aus den Ungleichungen (2), (3) resultierende Abschätzung

$$\|x_n - x_*\| \leq C(\varepsilon)(r(A_0) + \varepsilon)^n \|x_0 - x_*\|, \; n = 1, 2, \cdots \tag{21}$$

der Konvergenzgeschwindigkeit der Iterierten aus (10) gegen die Lösung x_* der nichtlinearen Gleichung (1) nicht zu verbessern. ε ist in (21) wie üblich eine beliebig kleine positive Zahl. Falls die Bedingung (a) gegeben ist, gilt Abschätzung (21) mit $\varepsilon = 0$.
Der Beweis zu Theorem 3 wird im Anhang aufgeführt.

2.4 Vergleichen wir nun die Konvergenzgeschwindigkeit von Iterationsverfahren (10) mit verschiedenen Matrizen M.
Zu $M^* = (\mu_{ij}^*)$, $M^{**} = (\mu_{ij}^{**})$ mit μ_{ij}^*, $\mu_{ij}^{**} \in [0, 1]$ konstruieren wir die Hilfsmatrizen $B^* = (b_{ij}^*)$, $B^{**} = (b_{ij}^{**})$, mit $b_{ij}^* = a_{ij}\mu_{ij}^*$, $b_{ij}^{**} = a_{ij}\mu_{ij}^{**}$, sowie $A_0^* = (I - B^*)^{-1}(A - B^*)$, $\quad A_0^{**} = (I - B^{**})^{-1}(A - B^{**})$.
Falls $r(A_0^*) \geq r(A_0^{**})$, so ist die durch die nicht zu verschärfende Abschätzung (21) garantierte Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens

$$\xi_i^n = f_i(\mu_{i1}^{**}\xi_1^n + \left(1 - \mu_{i1}^{**})\xi_1^{n-1}, \dots, \mu_{iN}^{**}\xi_N^n + (1 - \mu_{iN}^{**})\xi_N^{n-1}\right), \tag{22}$$

$$i = 1, \dots, N, \; n = 1, 2, \dots .$$

nicht geringer als die garantierte Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens

$$\xi_i^n = f_i(\mu_{i1}^{*}\xi_1^n + \left(1 - \mu_{i1}^{*})\xi_1^{n-1}, \dots, \mu_{iN}^{*}\xi_N^n + (1 - \mu_{iN}^{*})\xi_N^{n-1}\right), \tag{23}$$

$$i = 1, \dots, N, \; n = 1, 2, \dots .$$

Theorem 4 *: Sei $M^* < M^{**}$. Dann gilt*

$$r(A_0^*) \geq r(A_0^{**}), \tag{24}$$

und folglich liefert Verfahren (22) keine langsamere Konvergenz als Verfahren (23).

Da die Gleichung (10) für $M = 0$ in die Gleichung (7) übergeht, ist das Verfahren (10) nicht langsamer konvergent als die Picard-Iteration (7).
Für irreduzible Matrizen A und $M \neq 0$ wird die strenge Ungleichung (17) gültig und (10) liefert schneller konvergente Folgen als (7).

Der Beweis zum Theorem 4 befindet sich im Anhang.

3 Iterationsverfahren vom Gauß-Seidel-Typ

3.1 Das klassische Gauß-Seidel-Verfahren für das nichtlineare System (4) besteht aus den Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{lcl} \xi_1^n & = & f_1\left(\xi_1^n, \xi_2^{n-1}, \dots, \xi_N^{n-1}\right), \\ \xi_2^n & = & f_2\left(\xi_1^n, \xi_2^n, \xi_3^{n-1}, \dots, \xi_N^{n-1}\right), \\ \dots & & \\ \xi_N^n & = & f_N\left(\xi_1^n, \dots, \xi_N^n\right), \end{array}\right. \tag{25}$$

zur Bestimmung der Iterierten $x_n = \{\xi_1^n, \dots, \xi_N^n\}$. Der Startwert $x_0 \in I\!R^N$ ist beliebig. Der Übergang von x_{n-1} zu x_n erfordert die Lösung von N skalaren Gleichungen mit je einer skalaren Unbekannten. Mit

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

ist der Ansatz (25) in unserer allgemeinen Formel (10) enthalten. Das Gauß-Seidel-Verfahren (25) wird u. a. in [3-5] detailliert untersucht.

3.2 Mit wachsender Entwicklung der Rechentechnik wurden auch Blockvarianten der klassischen numerischen Iterationsverfahren interessant. Bei der blockweisen Version des „Gauß-Seidel-Verfahrens“ (25) wird der Übergang von $x_{n-1} = \left\{\xi_1^{n-1}, \dots, \xi_N^{n-1}\right\}$ zu $x_n = \{\xi_1^n, \dots, \xi_N^n\}$ durch das folgende System realisiert

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
\xi_1^n &= f_1\left(\xi_1^n,\ldots,\xi_{N_1}^n,\xi_{N_1+1}^{n-1},\ldots,\xi_N^{n-1}\right),\\
&\cdots\\
\xi_{N_1}^n &= f_{N_1}\left(\xi_1^n,\ldots,\xi_{N_1}^n,\xi_{N_1+1}^{n-1},\ldots,\xi_N^{n-1}\right),\\
\\
\xi_{N_1+1}^n &= f_{N_1+1}\left(\xi_1^n,\ldots,\xi_{N_1+N_2}^n,\xi_{N_1+N_2+1}^{n-1},\ldots,\xi_N^{n-1}\right),\\
&\cdots\\
\xi_{N_1+N_2}^n &= f_{N_1+N_2}\left(\xi_1^n,\ldots,\xi_{N_1+N_2}^n,\xi_{N_1+N_2+1}^{n-1},\ldots,\xi_N^{n-1}\right),\\
&\vdots\\
\xi_{N_1+\cdots+N_{k-1}+1}^n &= f_{N_1+\cdots+N_{k-1}+1}\left(\xi_1^n,\ldots,\xi_N^n\right),\\
&\cdots\\
\xi_N^n &= f_N\left(\xi_1^n,\ldots,\xi_N^n\right),
\end{aligned}
$$

mit $0 < N_1 < N_1 + N_2 < \cdots < N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$.

Zur Berechnung von x_n aus x_{n-1} werden nun k nichtlineare Systeme aus jeweils $N_1,\ldots,N_k$ skalaren Gleichungen (mit je ebenso vielen skalaren Unbekannten) gelöst. Für $k = N$ erhält man aus (27) wieder die klassische Variante (25) .

Im Schema (10) ist die Blockversion (27) enthalten, wenn man die Matrix

$$
(28)\qquad M^{**} = \begin{pmatrix} J_{N_1N_1} & 0 & \cdots & 0 \\ J_{N_2N_1} & J_{N_2N_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{N_kN_1} & J_{N_kN_2} & \cdots & J_{N_kN_k} \end{pmatrix}
$$

verwendet, wobei die rechteckigen Blöcke $J_{N_iN_j}$ aus N_i Zeilen und N_j Spalten bestehen und alle ihre Einträge Einsen sind. Die Einträge der Matrizen 0 sind Nullen. Da für die in (26) und (28) festgelegten Matrizen die Ungleichung $M^* \leq M^{**}$ gilt, konvergiert nach Theorem 4 das Blockverfahren (27) nicht langsamer als das klassische Verfahren (25). In der Regel ist die Blockversion (27) wesentlich schneller konvergent.

3.3 Bei beiden Verfahren (25) und (27) sind zur Bestimmung der Iterierten x_n nichtlineare Gleichungssysteme zu lösen. Dies entfllt bei der Verfahrensvorschrift

$$
(29)\qquad
\begin{aligned}
\xi_1^n &= f_1\left(\xi_1^{n-1},\ldots,\xi_N^{n-1}\right),\\
\xi_2^n &= f_2\left(\xi_1^n,\xi_2^{n-1},\ldots,\xi_N^{n-1}\right),\\
&\cdots\\
\xi_N^n &= f_N\left(\xi_1^n,\ldots,\xi_{N-1}^n,\xi_N^{n-1}\right),
\end{aligned}
$$

der im allgemeinen Ansatz (10) die Matrix $M^{***} = (g_{ij})$ entspricht mit $g_{ij} = 1$ für $i > j$ und $g_{ij} = 0$ für $i \leq j$. Da offensichtlich $M^{***} \leq M^{*} \leq M^{**}$ gilt, konvergiert jede der Methoden (25) und (27) nicht langsamer als (29).

Anhang

Beweis von Theorem 2.:
Wir zeigen zuerst, daß Aussage (i) gilt. Für fixiertes $y = \{\eta_1, \ldots, \eta_N\} \in I\!R^N$ schreiben wir das System (16) kompakt als

$$x = \Phi(x,\, y), \quad x = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\} \in I\!R^N, \tag{A.1}$$

mit $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\}$.
Zunächst weisen wir eine $I\!R^N$-Norm nach, in der für die Gleichung (A.1) die Bedingungen für das Prinzip der kontrahierenden Abbildungen erfüllt sind. Bezeichne $\|.\|_e$ die Euklidische Norm $\|x\|_e = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_N^2}$. Wegen Eigenschaft (3) gibt es ein $\varepsilon > 0$, das die Ungleichung $r(A) + \varepsilon = q < 1$ erfüllt. Wir legen nun die Norm

$$\|x\|_m = \sum_{k=0}^{m} q^{-k} \|A^k |x|\,\|_e \tag{A.2}$$

fest. Wegen (5) genügen die in (12) definierten Funktionen φ_i der Lipschitz-Bedingung

$$|\varphi_i(x_1, y) - \varphi_i(x_2, y)| \leq a_{i1}\mu_{i1}|\xi_1 - \varsigma_1| + \cdots + a_{iN}\mu_{iN}|\xi_N - \varsigma_N|,$$

$$\text{für } x_1 = \{\xi_1, \ldots, \xi_N\}\,,\ x_2 = \{\varsigma_1, \ldots, \varsigma_N\} \in I\!R^N.$$

Da $0 \leq \mu_{ij} \leq 1$ gilt, folgen auch die Ungleichungen

$$|\varphi_i(x_1, y) - \varphi_i(x_2, y)| \ \leq \ a_{i1}|\xi_1 - \varsigma_1| + \cdots + a_{iN}|\xi_N - \varsigma_N|,$$

$$i = 1, \ldots, N,$$

oder in kompakter Form

$$|\Phi(x_1, y) - \Phi(x_2, y)| \leq A|x_1 - x_2|. \tag{A.3}$$

Wegen der Positivität der Matrix A impliziert die Ungleichung (A.3) die weiteren Ungleichungen

$$A^k|\Phi(x_1, y) - \Phi(x_2, y)| \leq A^{k+1}|x_1 - x_2|,\ k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Außerdem folgt aus $0 \leq z_1 \leq z_2$ sofort $\|z_1\|_e \leq \|z_2\|_e$, und darum auch

$$\|A^k|\Phi(x_1, y) - \Phi(x_2, y)|\,\|_e \leq \|A^{k+1}|x_1 - x_2|\,\|_e.$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}\|\Phi(x_1,y)-\Phi(x_2,y)\|_m &= \sum_{k=0}^{m} q^{-k}\|A^k|\Phi(x_1,y)-\Phi(x_2,y)|\ \|_e \\ &\le \sum_{k=0}^{m} q^{-k}\|A^{k+1}|x_1-x_2|\ \|_e\end{aligned}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}\|\Phi(x_1,y)-\Phi(x_2,y)\|_m &\le q\|x_1-x_2\|_m - q\|\ |x_1-x_2|\ \|_e \\ &\quad +q^{-m}\|A^{m+1}|x_1-x_2|\ \|_e.\end{aligned}$$

Für durch beliebige $I\!R^N$-Normen $\|.\|$ induzierte Matrix-Normen $\|.\|$ gilt bekanntlich

(A.4) $$r(A)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$$

mit $\|A^n\| = \max\{\|A^n x\| : \|x\|=1\}$. Bei hinreichend großem m garantiert (A.4) die Beziehung

$$\begin{aligned}\|A^{m+1}|x_1-x_2|\ \|_e = \|A^{m+1}\|_e\|\ |x_1-x_2|\ \|_e &\le (r(A)+\varepsilon)^{m+1}\|\ |x_1-x_2|\ \|_e \\ &= q^{m+1}\|\ |x_1-x_2|\ \|_e,\end{aligned}$$

woraus wir weiter

$$\|\Phi(x_1,y)-\Phi(x_2,y)\|_m \le q\|x_1-x_2\|_m$$

ableiten, d. h. die Bedingungen für das Prinzip der kontrahierenden Abbildungen sind gegeben. Die Fixpunktgleichung (A.1) besitzt zu jedem $y\in I\!R^N$ genau eine Lösung $x(y)\in I\!R^N$. Damit ist Theorem 2 (i) verifiziert.

Kommen wir zu den Behauptungen (ii) und (iii). Bezeichne $x_* = \{\xi_1^*,\dots,\xi_N^*\}$ die gemäß Theorem 1 einzige Lösung des Systems (4).
Zieht man von (10) die Gleichung $\xi_i^* = f_i\,(\xi_1^*,\dots,\xi_N^*)$ ab, ergibt sich

$$\xi_i^n-\xi_i^* = f_i(\mu_{i1}\xi_1^n+(1-\mu_{i1})\xi_1^{n-1},\dots,\mu_{iN}\xi_N^n+(1-\mu_{iN})\xi_N^{n-1}) - f_i(\xi_1^*,\dots,\xi_N^*)$$

und daraus unter Berücksichtigung der Lipschitz-Bedingung (5)

$$\begin{aligned}|\xi_i^n-\xi_i^*| \le a_{i1}|\mu_{i1}\xi_1^n+(1-\mu_{i1})\xi_1^{n-1}-\xi_1^*| &+\cdots \\ &+a_{iN}|\mu_{iN}\xi_N^n+(1-\mu_{iN})\xi_N^{n-1}-\xi_N^*|,\end{aligned}$$

also

(A.5) $$|\xi_i^n-\xi_i^*| \le \sum_{j=1}^{N}\left(a_{ij}\mu_{ij}|\xi_j^n-\xi_j^*| + a_{ij}(1-\mu_{ij})|\xi_j^{n-1}-\xi_j^*|\right), \qquad i=1,\dots,N.$$

In kompakter Form geschrieben, hat (A.5) die Gestalt

$$|x_n - x_*| \leq B|x_n - x_*| + (A - B)|x_{n-1} - x_*|$$

bzw.

$$(I - B)|x_n - x_*| \leq (A - B)|x_{n-1} - x_*| \tag{A.6}$$

mit der in Punkt 2.2 eingeführten Matrix $B = (b_{ij}),\ b_{ij} = a_{ij}\mu_{ij}$. Da wegen $0 \leq B \leq A$ auch $r(B) \leq r(A) < 1$ gelten muß, ist die Matrix $I - B$ regulär und ihre Inverse $(I - B)^{-1}$ ist mit der Neumannschen Reihe darstellbar als

$$(I - B)^{-1} = I + B + \cdots + B^k + \cdots \quad .$$

Aus $B \geq 0$ folgt $(I - B)^{-1} \geq 0$. Wird die positive Matrix $(I - B)^{-1}$ auf beide Seiten von (A.6) angewandt, ergibt sich $|x_n - x_*| \leq A_0|x_{n-1} - x_*|$ mit $A_0 = (I - B)^{-1}(A - B) \geq 0$.
Damit haben wir

$$|x_n - x_*| \leq A_0|x_{n-1} - x_*| \leq A_0^2|x_{n-2} - x_*| \leq \cdots \leq A_0^n|x_0 - x_*|,$$

und da für $z \in I\!R^N$ stets $\|z\|_e = \||z|\|_e$ gilt sowie $\|z_1\| \leq \|z_2\|$ für $0 \leq z_1 \leq z_2$, folgt nun unmittelbar

$$\|x_n - x_*\|_e = \||x_n - x_*|\|_e \leq \|A_0^n|x_0 - x_*|\|_e \leq \|A_0^n\|_e\|x_0 - x_*\|_e \,. \tag{A.7}$$

Wegen $\sqrt[n]{\|A_0^n\|_e} \to r(A_0)$ für $n \to \infty$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Nummer n_ε, so daß

$$\|x_n - x_*\|_e \leq (r(A_0) + \varepsilon)^n\|x_0 - x_*\|_e \tag{A.8}$$

$$\text{für } n = n_\varepsilon,\ n_\varepsilon + 1, \ldots$$

erfüllt ist. Dann findet sich auch ein $C_e(\varepsilon) < \infty$ mit der Eigenschaft, daß

$$\|x_n - x_*\|_e \leq C_e(\varepsilon)(r(A_0) + \varepsilon)^n\|x_0 - x_*\|_e$$

$$\text{für } n = 1,\, 2, \ldots$$

gilt.
Mit (15) und genügend kleinen $\varepsilon > 0$ wird $r(A_0) + \varepsilon \leq r(A) + \varepsilon < 1$, und folglich gilt $\|x_n - x_*\|_e \to 0$ für $n \to \infty$. Da alle $I\!R^N$-Normen untereinander äquivalent sind, konvergiert x_n in jeder beliebigen Norm gegen x_* und auch die Abschätzung (21) ist schon verifiziert.
Als nächstes zeigen wir, daß unter der zusätzlichen Bedingung (a) die Abschätzung

$$\|x_n - x_*\|_e \leq C(r(A_0))^n\|x_0 - x_*\|,\ n = 1, 2, \ldots.. \tag{A.9}$$

die stärker als (21) ist, gültig wird. Seien dazu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ diejenigen Eigenwerte der Matrix A_0 , für die $|\lambda_j| = r(A_0)$ zutrifft, während für alle anderen Eigenwerte $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_N$ die Ungleichung $|\lambda_j| < r(A_0)$, $j = m+1, \ldots, N$, gilt. Das bedeutet u. a.

$$\text{(A.10)} \qquad \begin{aligned} \lambda_{2j-1} &= r(A_0)e^{i\phi_j}, \quad \lambda_{2j} = r(A_0)e^{-i\phi_j},\ j = 1, \ldots, k, \\ \lambda_{2k+1} &= \cdots = \lambda_\ell = r(A_0), \lambda_{\ell+1} = \cdots = \lambda_m = -r(A_0)\ , \end{aligned}$$

mit $\phi_j \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \ldots$.
Sei Bedingung (a) gegeben, d. h. zu den Eigenwerten (A.10) gibt es keine Hauptvektoren. Dann kann für $\mathbb{R}^N$ eine Basis $\{e_1, \ldots, e_N\}$ konstruiert werden, in der A_0 überführt wird zu

$$A_1 = r(A_0) \begin{pmatrix} R_{\phi_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{\phi_2} & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{\phi_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I_{\ell-2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -I_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix},$$

d. h. $A_1 = r(A_0)$ diag $\{R_{\phi_1}, R_{\phi_2}, \cdots, R_{\phi_k}, I_{\ell-2k}, -I_{m-1},\ G\}$.
Dabei bezeichnet

$$R_{\phi_j} = \begin{bmatrix} \cos\phi_j & \sin\phi_j \\ -\sin\phi_j & \cos\phi_j \end{bmatrix} ,$$

und $I_{\ell-2k}, I_{m-1}$ sind Einheitsmatrizen der Größen $\ell - 2k$ und $m-1$. G ist eine Matrix der Ordnung $N-m$ und besitzt das Spektrum $\lambda_{m+1}/r(A_0), \ldots, \lambda_N/r(A_0)$ und den Spektralradius

$$r(G) = \max\{|\lambda_j/r(A_0)| : j = m+1, \ldots, N\} < 1\ .$$

Wegen $\sqrt[n]{\|G^n\|_e} \to r(G) < 1$ für $n \to \infty$, gilt $\|G^n\|_e < 1$ für alle n, die größer als ein gewisses n_0 sind.

Aus der Eigenschaft $R_{\phi_j}^n = R_{n\phi_j}$ ergibt sich die Darstellung

$$A_1^n = (r(A_0))^n \text{ diag } \{R_{n\phi_1}, \ldots, R_{n\phi_k}, I_{\ell-2k}, (-1)^n I_{m-\ell}, G^n\}\,,$$

außerdem

$$(A_1^n)^T A_1^n = (r(A_0))^{2n} \text{ diag } \left\{I_m, (G^n)^T G^n\right\}.$$

Aus der wohlbekannten Beziehung $\|A_1^n\|_e = \sqrt{r((A_1^n)^T A_1^n)}$ wird klar, daß $\|A_1^n\|_e = (r(A_0))^n$ für alle $n > n_0$ gilt.

Bezeichnen $\{\eta_1, \dots, \eta_N\}$ die Koordinaten der Vektoren $x \in I\!R^N$ bezüglich der Basis $\{e_1, \dots, e_N\}$ und ist die Norm $\|.\|_0$ festgelegt als $\|x\|_0 = \sqrt{\eta_1^2 + \cdots + \eta_N^2}$, so fällt die Norm $\|A_0^n\|_0$ der Matrix A_0^n nach Konstruktion mit $\|A_1^n\|_e$ zusammen.
Es gilt dann $\|A_0^n\|_0 = \|A_1^n\|_e = (r(A_0))^n$ für $n > n_0$.

Wegen der Normäquivalenz gibt es Konstanten c_1, $c_2 > 0$ mit $\|x\|_e \leq c_1\|x\|_0 \leq c_2\|x\|_e$, $x \in I\!R^N$, und es folgt u. a. die Ungleichung $\|A_0^n\|_e \leq c_2\|A_0^n\|_0$. Für $n > n_0$ erhalten wir also $\|A_0^n\|_e \leq c_2(r(A_0))^n$ und nach (A.7) auch

$$\|x_n - x_*\|_e \leq c_2(r(A_0))^n\|x_0 - x_*\|_e.$$

Falls $r(A_0) > 0$ ist, so gibt es ein $c < \infty$, so daß die Ungleichung

$$\|x_n - x_*\|_e \leq c(r(A_0))^n\|x_0 - x_*\|_e \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

für beliebige Startwerte $x_0 \in I\!R^N$ gilt. Nach der Normäquivalenz gilt damit auch die Ungleichung (A.9).
Verschwindet $r(A_0)$, d. h. $r(A_0) = 0$, so sind alle Eigenwerte der Matrix A_0 gleich Null. Da keine Hauptvektoren existieren, muß $A_0 = 0$ sein, folglich $\|A_0^n\|_e = 0$ und wegen (A.7) $x_n = x_*$ für $n = 1, 2, \dots$. In diesem Falle gilt (A.9) trivialerweise.
Theorem 2 ist damit bewiesen. □

Beweis von Theorem 3:
Zunächst formulieren wir die Gleichung (20) kompakt als $x_n = Bx_n + (A - B)x_{n-1} + d$ und mit $x_* = (I - A)^{-1}d$ als $x_n = Bx_n + (A - B)x_{n-1} + x_* - Ax_*$. Wir können auch

$$x_n - x_* = B(x_n - x_*) + (A - B)(x_{n-1} - x_*)$$

schreiben, oder $x_n - x_* = (I - B)^{-1}(A - B)(x_{n-1} - x_*)$, d. h. $x_n - x_* = A_0(x_{n-1} - x_*)$. Folglich gilt

$$x_n - x_* = A_0^n(x_0 - x_*), \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{A.11}$$

Wegen der Positivität der Matrix A_0 ist $r(A_0)$ ein Eigenwert A_0, zu dem es einen Eigenvektor $e \in K_+$ gibt. Für $x_0 = x_* + e$ resultiert daraus $x_n - x_* = (r(A_0))^n(x_0 - x_*)$, und folglich $r(A_0) \leq \inf Q$, wobei Q per definitionem die Menge aller $q > 0$ ist, für die die Abschätzung (18) gilt. Andererseits liefert die Ungleichung (21) die Relation $r(A_0) \geq \inf Q$, d. h. es gilt $r(A_0) = \inf Q$. Q besteht aus positiven Zahlen, weshalb für $r(A_0) = 0$ trivialerweise $r(A_0) \notin Q$ gelten muß. Ist $r(A_0) > 0$ und ist die Bedingung (a) erfüllt, so gilt $r(A_0) \in Q$ wegen Theorem 2 und Abschätzung (A.9). Wenden wir uns nun dem Falle zu, wenn es zu mindestens einem der Eigenwerte (A.10) der Matrix A_0 einen Hauptvektor h gibt. Sei λ_0 dieser Eigenwert. Wenn λ_0 reell ist, d. h. entweder $\lambda_0 = r(A_0)$ oder $\lambda_0 = -r(A_0)$, so gehören zu λ_0 Vektoren e, $h \in I\!R^N$ mit $A_0 e = \lambda_0 e$, $A_0 h = \lambda_0 h + e$ und weiter $A_0^n h = \lambda_0^n h + n\,\lambda_0^{n-1} e$. Für den Startwert $x_0 = x_* + h$ erhalten wir unter Beachtung von (A.11)

$$\|x_n - x_*\| = \|\lambda_0^n h + n\,\lambda_0^{n-1} e\| \geq n(r(A_0))^n \left(\frac{\|e\|}{r(A_0)} - \frac{\|h\|}{n} \right) ,$$

folglich $\|x_n - x_*\| \geq n(r(A_0))^n \frac{\|e\|}{2r(A_0)}$ für alle hinreichend großen n. Darum kann die Abschätzung (18) nur für $q > r(A_0)$ zutreffen und es gilt $r(A_0) \notin Q$.

Wenden wir uns nun dem Falle komplexer Eigenwerte λ_0 zu, Re $\lambda_0 \neq 0$, $\lambda_0 = r(A_0) e^{i\phi}$, $\phi \neq 0 , \pm\frac{\pi}{2} \pm \pi, \ldots$ .Nun existieren Vektoren e_1, e_2, h_1, $h_2 \in I\!R^N$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} A_0 e_1 &= r(A_0)(e_1 \cos\phi - e_2 \sin\phi) \\ A_0 h_1 &= r(A_0)(h_1 \cos\phi - h_2 \sin\phi) + e_1 , \\ A_0 e_2 &= r(A_0)(e_1 \cos\phi - e_2 \sin\phi) \\ A_0 h_2 &= r(A_0)(h_1 \cos\phi - h_2 \sin\phi) + e_2 . \end{aligned}$$

aus denen wir

$$\begin{aligned} A_0^n h_1 &= (r(A_0))^n (h_1 \cos(n\phi) - h_2 \sin(n\phi)) + \\ &\quad n(r(A_0))^{n-1} (e_1 \cos((n-1)\phi) - e_2 \sin((n-1)\phi)) \end{aligned}$$

errechnen. Mit $x_0 = x_* + h_1$ ergibt Formel (A.11) schließlich

$$\begin{aligned} \|x_n - x_*\| \geq n(r(A_0))^n \Big(\tfrac{1}{r(A_0)} \| \ & e_1 \cos((n-1)\phi) - e_2 \sin((n-1)\phi)\| \\ & - \tfrac{1}{n} \|h_1 \cos(n\phi) - h_2 \sin(n\phi)\| \Big) \\ & \geq n(r(A_0))^n \left(\tfrac{1}{r(A_0}\gamma - \tfrac{\|h_1\| + \|h_2\|}{n} \right) , \end{aligned}$$

wobei wir $\gamma = \min\{\|e_1 \cos\Theta - e_2 \sin\Theta\| : 0 \leq \Theta \leq 2\pi\} > 0$ eingeführt haben. Für große n ist dann $\|x_n - x_*\| \geq n(r(A_0))^n \cdot \frac{\gamma}{2r(A_0)}$, woraus wieder $r(A_0) \notin Q$ folgt. □

Beweis von Theorem 4.:

Hier verwenden wir die Bezeichnungen aus Punkt 2.4. Wegen $0 \leq B^* \leq A$ gilt $r(B^*) \leq r(A)$, daher auch $r(B^*) < 1$ und $(I - B^*)^{-1} \geq 0$. Aus $M^* \leq M^{**}$ folgt $0 \leq B^* \leq B^{**} \leq A$ und weiter

$$(A.12) \qquad 0 \leq B^{**} - B^* \leq A - B^* \ .$$

Für die Matrix $D = (I - B^*)^{-1}(B^{**} - B^*)$ gilt $0 \leq D \leq A_0^*$, was sofort zu sehen ist, wenn man (A.12) mit $(I - B^*)^{-1}$ multipliziert. Wegen $r(A_0^*) < 1$ können wir die Matrix $G = (I - D)^{-1}(A_0^* - D)$ bilden, für deren Spektralradius die zu (15) analoge Beziehung

$$(A.13) \qquad r(G) \leq r(A_0^*)$$

gilt.
Andererseits berechnen wir

$$\begin{aligned} G &= (I - D)^{-1}(A_0^* - D) \\ &= (I - (I - B^*)^{-1}(B^{**} - B^*))^{-1}((I - B^*)^{-1}(A - B^*) - (I - B^*)^{-1}(B^{**} - B^*)) \\ &= ((I - B^*)^{-1}(I - B^{**}))^{-1}(I - B^*)^{-1}(A - B^{**}) \\ &= (I - B^{**})^{-1}(A - B^{**}) = A_0^{**} \ , \end{aligned}$$

woraus mit (A.13) sofort die behauptete Ungleichung (24) folgt. $\square$

Referenzen:

[1] Bertsekas, D. P., Tsitsiklis, J. N.: Parallel and distributed computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.

[2] Asarin, E. A., Kozjakin, V. S., Krasnosel'skii, M. A., Kuznetsov, N. A.: Analiz ustojchivosti rassinkhronizowannykh diskretnykh sistem. M.: Nauka, 1992.

[3] Verkama, M.: Random relaxation of fixed-point iteration. SIAM J. Sci. Comput. 1996. V. 17. N.4 p. 906-912.

[4] Törnig, W., Spellucci, P.: Numerische Mathematik für Ingenieure und Physiker. B.: Springer-Verlag, 1988.

[5] Taubert, K.: Ein Zusammenhang zwischen Waveformrelaxation und Iterationsverfahren für nichtlinear gestörte Gleichungen. Birkhäuser Verlag Basel. International Ser. of. Numerical Math. 1994. V. 117. p. 115-125.

[6] Krejn, M. G., Rutman, M. .A.: Linejnye operatory, ostavlyayushtie invariatnym konus v prostranstve Banakha. Uspekhi Matematicheskikh Nauk. 1948. T. 3. N. 1. C. 3-95.

[7] Krasnosel'skii, M. A.: Polozhiteljnye resheniya operatornykh uravnenij. M.: Fizmattgiz, 1962.

[8] Krasnosel'kii, M. A., Lifshits, E. A., Sobolev, A. V.: Pozitivnye linejnye sistemy. M.: Nauka, 1985.

[9] Krasnosel'skii, A. M., Krasnosel'skii, M. A., Kuznetsov, N. A., Eirola, T., Nevanlinna, O.: Iteratsii s nepolnymi korrektsiyami dlya nelinejnykh sistem s samosopryashennymi operatorami. DAN. 1994. T. 338. N. 1. C. 35-38.

[10] Eirola, T., Krasnosel'skii, A. M., Krasnosel'skii, M. A., Kuznetsov, N. A., Nevanlinna, O.: Stability of systems with incomplete corrections. Nonl. Analysis. TMA. 1995. V. 25. N. 7. p. 717-728.

[11] Krasnosel'skii, M. A., Kuznetsov, N. A., Rachinskii, D. J.: Nelinejnye potentsialjnye sistemy s nepolnymi korrektsiyami. AiT. 1996. N.7. C. 11-17.

[12] Stetsenko, V. Ya.: O spektraljnykh svojstvakh nerazloshimykh operatorov. DAN. 1968. T. 178. N. 3. C. 552-554.