

# Unterschiedliche Volatilitätsregime am deutschen Rentenmarkt

von

Helmut Herwartz<sup>1</sup>

und

Hans-Eggert Reimers

Institut für Statistik und  
Ökonometrie  
Humboldt-Universität zu Berlin  
Spandauer Str. 1  
10178 Berlin  
GERMANY  
Tel.: (+30) 2093-5725

Hochschule Wismar  
Fachhochschule für Technik,  
Wirtschaft und Gestaltung  
Postfach 12 10  
23952 Wismar  
GERMANY  
Tel.: (+3841) 753601

## Zusammenfassung

Die Analyse von täglichen Änderungen der deutschen Umlaufrendite für festverzinsliche Wertpapiere der öffentlichen Hand zeigt starke Evidenz für eine zeitliche Abhängigkeit in den Varianzen für die Periode Januar 1981 - Juli 1996. Der untersuchte Zeitraum umfaßt die Einführung von Finanzinnovationen, die Interdependenz nationaler Kapitalmärkte und die Bedeutung institutioneller Anleger haben in dieser Zeit zugenommen. Zeitabhängige Varianzen lassen sich durch ein GARCH(1,1)-Modell mit  $t$ -verteilten Innovationen darstellen, dessen Parameter allerdings im Zeitablauf nicht stabil sind. Ein Vergleich der implizit ermittelten unbedingten Varianzen für Teilperioden macht deutlich, daß die Volatilität seit Mitte 1988 im Mittel nicht signifikant verschieden ist im Vergleich zur ersten Hälfte des Stichprobenzeitraumes. Zu beobachten ist allerdings ein Anstieg der Varianzuntergrenze der geschätzten Volatilitätspfade seit Mitte 1988.

---

<sup>1</sup>Die Forschungen für diesen Beitrag wurden innerhalb des Sonderforschungsbereichs 373 der Humboldt-Universität zu Berlin durchgeführt. Die Autoren danken Manfred Kremer, Martin Missong und Franz Seitz für ihre wertvollen Anregungen.

# 1 Einleitung

Die Preise auf Finanzmärkten unterliegen typischerweise Schwankungen unterschiedlicher Intensität. Dabei wird im allgemeinen beobachtet, daß sich Phasen starker Preisänderungen mit Phasen geringerer Preisanpassungen abwechseln. Dieser empirische Befund wirft die Frage auf, ob die Preisvariabilität strukturellen Veränderungen in der Zeit unterliegt. Als mögliche Auslöser derartiger Veränderungen werden eine engere internationale Kapitalverflechtung, Finanzinnovationen wie z.B. die Einführung von Bund-Future und Future-Optionen sowie das Vordringen institutioneller Investoren diskutiert (vgl. Deutsche Bundesbank 1996).

Zur Beschreibung beobachtbarer Preisschwankungen werden häufig historische Volatilitäten verwendet. Diese werden als gleitende Durchschnitte quadratischer Abweichungen von mittleren Renditen berechnet. Für die statistische Inferenz können derartige Größen jedoch nur eingeschränkt verwendet werden. In der Literatur zur Analyse von Finanzmarktdaten hat sich in den vergangenen Jahren die Klasse der autoregressiv bedingt heteroskedastischen (ARCH) Prozesse als besonders fruchtbar erwiesen, die von Engle (1982) eingeführt wurden. Diese Prozesse und insbesondere eine von Bollerslev (1986) vorgeschlagene Verallgemeinerung (GARCH-Prozeß) zeigten sich als geeignet, Preisvariabilität auf Finanzmärkten zu modellieren.

GARCH-Prozesse werden überwiegend zur Beschreibung der Volatilität von Aktien- und Devisenrenditen angewendet (vgl. z.B. Funke 1994). Untersuchungen für den Rentenmarkt sind vergleichsweise selten. Eine Ausnahme bildet eine Untersuchung der Deutschen Bundesbank (1996) über den Zusammenhang zwischen der Volatilität auf Finanzmärkten einerseits und ihrer Auswirkungen auf die Geldpolitik andererseits. Im Zentrum der Arbeit stehen Volatilitätsdarstellungen für den Kapitalmarkt von 1980 bis 1996. Dabei wird auch eine GARCH-Modellierung von täglichen Renditeänderungen für den Zeitraum von 1987 bis 1996 vorgestellt. Es wird darauf hingewiesen, daß in Phasen vergleichsweise kleiner Preisvariationen nur ein geringer Handlungsbedarf für die Geldpolitik entsteht. Die Kenntnis eines strukturbildenden Modells für die Volatilität erleichtert die Einschätzung über das Auftreten außergewöhnlicher Preisfluktuationen.

Die vorliegende Arbeit untersucht, ob die Volatilität am deutschen Rentenmarkt im Zeitablauf strukturellen Veränderungen unterliegt. Zum einen wird ein geeigneter Prozeß

für die täglichen Änderungen der Umlaufrendite in Deutschland bestimmt. Dabei wird zunächst ein GARCH-Modell unter der Annahme normalverteilter Innovationen spezifiziert. Diese Verteilungsannahme wird mit Hilfe empirischer Häufigkeitsverteilungen getestet. Es stellt sich heraus, daß die Normalverteilungsannahme dieses Modells sowohl für den gesamten Stichprobenzeitraum sowie für einzelne Teilstichproben verworfen wird. Im Gegensatz dazu verbessert ein GARCH-Modell mit annahmegemäß  $t$ -verteilten Innovationen die Anpassungsgüte beträchtlich. Zum anderen wird die Frage analysiert, ob die Parameter des bedingten Varianzprozesses im Zeitablauf stabil sind, oder ob es Hinweise darauf gibt, daß bei diesen Prozessen Strukturveränderungen modelliert werden sollten. Hierfür wird ein Suchalgorithmus verwendet, mit dem festgestellt wird, ob und wann ein oder mehrere Strukturbrüche des dynamischen Modells vorliegen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Im zweiten Abschnitt werden beschreibende Maßzahlen für die täglichen Renditeänderungen erörtert. Im dritten Abschnitt wird ein Modell zur Beschreibung des Varianzprozesses vorgestellt. Die Stabilität der Parameter des Prozesses und damit verbundene ökonomische Fragestellungen werden im vierten Abschnitt diskutiert. Im fünften Abschnitt werden die Ergebnisse zusammengefaßt.

## 2 Beschreibende Maßzahlen der Daten

In dieser Untersuchung werden tägliche Änderungen der Zeitreihe "Umlaufrendite aller öffentlichen Anleihen in Deutschland" für den Zeitraum 2. Januar 1981 bis 31. Juli 1996 analysiert. Die Umlaufrendite wird jeden Tag von der Deutschen Bundesbank ermittelt. Bei ihrer Berechnung werden nur Wertpapiere berücksichtigt, die eine mittlere Restlaufzeit von mehr als drei Jahren besitzen. Für den genannten Zeitraum stehen 3895 Beobachtungen zuzüglich 13 Vorstichprobendaten zur Verfügung. In Abbildung 1 sind neben der Umlaufrendite (obere Graphik) die Renditeänderungen ( $y_t$ ) dargestellt (untere Graphik), die als Differenz von Werten zweier aufeinanderfolgender Handelstage bestimmt sind.

Offensichtlich handelt es sich bei der Umlaufrendite um einen sehr langwelligen Prozeß, bei dem sich für die Zeitreihenanalyse eine Stationarisierung durch Differenzenbildung anbietet. Abbildung 1 zeigt weiter, daß sich Phasen geringerer Renditeschwankungen

mit Phasen größerer Renditeänderungen ablösen. Einen allgemeinen Eindruck vermitteln beschreibende Maßzahlen, die in Tabelle 1 angegeben werden. Es werden Mittelwert, Standardabweichung, Schiefekoeffizient, Wölbungskoeffizient, Wert der Jarque-Bera-Teststatistik auf Normalverteilung, Werte der Ljung-Box-Teststatistik auf Autokorrelation, Lagrange-Multiplikator-ARCH-Teststatistik und Werte der Ljung-Box-Teststatistik auf Autokorrelation der quadrierten Zeitreihe aufgeführt. Die erste Ergebnisspalte zeigt an, daß eine deutliche Wölbung zu verzeichnen ist. Die Normalverteilungshypothese wird gemäß Jarque-Bera-Test signifikant abgelehnt. Anhand des Ljung-Box-Tests für 4, 8 und 16 Verzögerungen wird die Nullhypothese fehlender Autokorrelation verworfen, so daß eine zeitliche Abhängigkeit für die Änderungen der Umlaufrendite vorliegt. Der von Engle (1982) vorgeschlagene Lagrange-Multiplikator-Test (ARCH LM-Test) weist auf eine zeitliche Abhängigkeit in den Varianzen hin. Dieses Ergebnis wird durch die Werte der Ljung-Box-Statistik für die quadrierte Zeitreihe bestätigt.

Die im Vordergrund stehende Analyse der Varianzdynamik läßt es zweckmäßig erscheinen, sich auf den geschätzten Fehlerprozeß der linearen Beziehung zu konzentrieren. Um die lineare Korrelationsstruktur zu beseitigen, wird für die Zeitreihe ein autoregressives Subset-Modell angepaßt. Die Auswahl der Verzögerungsparameter erfolgt gemäß der Autokorrelationsfolge, der partiellen Autokorrelationsfolge, der Signifikanz der geschätzten Koeffizienten und der Werte der Ljung-Box-Teststatistik. Diese Analyse ergibt ein Modell, das neben einer Konstanten die erste, vierte und zwölfte Verzögerung der endogenen Variablen enthält. Im einzelnen wird die folgende Prozeßspezifikation geschätzt ( $t$ -Statistiken in Klammern):

$$y_t = 8,32e-04 + 0,200y_{t-1} + 0,088y_{t-4} + 0,057y_{t-12} + \hat{\epsilon}_t, \quad \text{log-lik.: 6996,1.} \quad (1)$$

(-0,8461)
(12,79)
(5,65)
(3,66)

Das Vorfinden linearer Dynamiken befindet sich im Einklang mit Ergebnissen der Deutschen Bundesbank, die die Renditeänderungen von 10-jährigen Staatsanleihen in Abhängigkeit von der um eine Periode verzögerten abhängigen Variablen und den Veränderungen der Rendite auf dem amerikanischen Anleihemarkt erklärt (vgl. Deutsche Bundesbank 1996). Die Vernachlässigung exogener Größen wird in (1) durch die Schätzung eines rein autoregressiven Modells abgefangen. Die geschätzten Koeffizienten in (1) verdeutlichen, daß einer Renditeerhöhung weitere Steigerungen folgen.

Der oben angegebene Wert der logarithmierten Likelihoodfunktion ist ein möglicher Ausgangspunkt zur Beurteilung der Anpassungsgüte empirischer Modelle. Zu beachten ist, daß diese Kenngröße zunächst unter der Annahme der Homoskedastizität bestimmt wird.

Die beschreibenden Maßzahlen der geschätzten Residuen sind in der zweiten Ergebnisspalte der Tabelle 1 enthalten. Nach der Modellierung einer autoregressiven Komponente der Renditedifferenzen läßt sich keine Autokorrelation in den Residuen feststellen. Die Werte der Ljung-Box-Teststatistik sind nicht mehr auf den üblichen Testniveaus signifikant. Allerdings weisen sowohl der Wert der Jarque-Bera-Teststatistik auf Abweichungen von der Normalverteilungshypothese als auch die Werte der Ljung-Box-Teststatistik für die quadrierten Residuen auf Abweichungen von der Homoskedastizitätshypothese hin. Der Wert des Lagrange-Multiplikatortests verwirft ebenfalls deutlich die Nullhypothese fehlender zeitlicher Abhängigkeit in den Varianzen. Es zeigt sich, daß eine Konstanz der Varianz der Residuen nicht angenommen werden kann. In der Analyse von Tagesdaten auf den Finanzmärkten hat sich die Modellierung dieser Abhängigkeit mit Hilfe von ARCH-Ansätzen und deren Verallgemeinerungen bewährt, die eine zeitabhängige Varianzmodellierung erlauben.

### **3 Schätzung des Volatilitätsprozesses**

#### **3.1 Das theoretische GARCH-Modell**

Die im oberen Teil von Abbildung 2 dargestellten geschätzten Residuen  $\hat{\epsilon}_t$  aus (1) zeigen typische dynamische Eigenschaften von Finanzmarktdaten. Obwohl sie im Mittel unkorreliert sind, gilt dies für ihre Quadrate ( $\hat{\epsilon}_t^2$ ) nicht (vgl. auch Tabelle 1 unterer Block). Offensichtlich ist die Annahme der Unabhängigkeit in der Zeit für diese Variable verletzt. Außerdem weisen die geschätzten Residuen eine erhebliche Abweichung von den unbedingten Momenten der Normalverteilung aus, was die statistische Inferenz im autoregressiven Modell (1) erschwert.

Seit den grundlegenden Arbeiten z.B. von Engle (1982) und Bollerslev (1986) liegt mit der sogenannten (G)ARCH-Familie eine einfache parametrische Klasse von Zeitreihenmodellen vor, die für einen unkorrelierten Prozeß lineare Abhängigkeiten höherer Momente

und insbesondere der Varianz erlaubt. Das GARCH( $p, q$ )-Modell mit normalverteilten Innovationen ist zu einem verbreiteten Standard der angewandten Finanzmarktanalyse geworden. Bedingt auf eine als bekannt angenommene Vergangenheit  $\Psi_{t-1} = \{e_{t-1}, e_{t-2}, \dots\}$  läßt sich dieses Modell wie folgt spezifizieren:

$$e_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2. \quad (2)$$

Um positive bedingte Varianzen ( $\sigma_t^2$ ) sicherzustellen, ist es hinreichend  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, q$  und  $\beta_i \geq 0, i = 1, \dots, p$  anzunehmen. Aus (2) folgt unmittelbar die Standardnormalverteilung "standardisierter Innovationen"

$$\xi_t = e_t / \sigma_t \sim N(0, 1).$$

Die Wahl der Modellordnungen eines GARCH( $p, q$ )-Modells kann in der empirischen Praxis mit gängigen Modellselektionskriterien oder anhand der Auswertung der Autokorrelations- und partiellen Autokorrelationsfolge der  $e_t^2$  erfolgen. In der wissenschaftlichen Literatur hat sich jedoch für die überragende Mehrzahl der Anwendungen von GARCH-Modellen ein GARCH(1,1)-Modell als ausreichend zur Modellierung bedingter Varianzprozesse erwiesen (vgl. Bollerslev u.a. 1994):

$$e_t | \Psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_t^2), \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (3)$$

Anhand des Modells in (3) kann die Bedeutung einzelner Parameter für den Varianzprozeß illustriert werden. So bestimmt  $\alpha_1$  wie stark eine Innovation  $e_{t-1}$  auf die laufende Volatilität  $\sigma_t^2$  wirkt. Darüber hinaus kann (3) dazu benutzt werden,  $h$ -Schritt-Prognosen für die Volatilität unter Annahme einer verfügbaren Informationsmenge  $\Psi_t$  zu bestimmen. Man erhält:

$$E[\sigma_{t+h}^2 | \Psi_t] = (\alpha_1 + \beta_1)^h \left( \sigma_t^2 - \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \right) + \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1}. \quad (4)$$

Aus (4) wird deutlich, daß  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  in der Summe bestimmen, mit welcher Rate der Effekt von Innovationen  $e_t$  auf zukünftige Volatilitäten ausstirbt. Für  $\alpha_1 + \beta_1 < 1$  nähert sich die auf  $\Psi_t$  bedingte Volatilität mit steigendem  $h$  dem unbedingten Erwartungswert

$$\sigma^2 = E[\sigma_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad (5)$$

an. Die unbedingte Varianz ( $\sigma^2$ ) steigt mit einer Zunahme der deterministischen Varianzkomponente ( $\alpha_0$ ) bzw. der Persistenz gemessen als  $\alpha_1 + \beta_1$  an.

### 3.2 Das empirische Modell unter der Normalverteilungsannahme

GARCH-Modelle werden in der Regel mit Hilfe von (iterativen) Maximum-Likelihood Verfahren (ML-Schätzung) geschätzt. Die Likelihoodfunktion ist zu jedem Zeitpunkt  $t$  nur bedingt auf  $\Psi_{t-1}$  zu ermitteln. Im einzelnen gilt für die logarithmierte Likelihoodfunktion ( $l(\cdot) = \ln L(\cdot)$ ):

$$l(\cdot) = \sum_t l_t(\cdot), \quad l_t(\cdot) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \frac{e_t^2}{\sigma_t^2}. \quad (6)$$

Die Schätzung eines GARCH(1,1)-Modells führt für die geschätzten Residuen des Renditeprozesses (1) auf die folgende Darstellung:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 2,94e-05 + 0,096 \hat{e}_{t-1}^2 + 0,891 \hat{\sigma}_{t-1}^2, \quad \text{log-lik.: } 7405,8. \quad (7)$$

(2,948)
(5,501)
(43,56)

Für die geschätzten Innovationen  $\hat{\xi}_t$  erhält man die in Tabelle 2 angegebenen Diagnosestatistiken, mit deren Hilfe die Modellannahmen überprüft werden können.

Zunächst läßt sich feststellen, daß das erhaltene Maximum der logarithmierten Likelihoodfunktion um über 400 höher ist als dies im homoskedastischen Modell der Fall war. Damit verbessert sich die Anpassungsgüte des empirischen Modells erheblich. Offensichtlich genügen die standardisierten geschätzten Residuen ( $\hat{\xi}_t$ ) nicht einer Standardnormalverteilung. Der Wert der Jarque-Bera-Teststatistik ist hoch signifikant. Andererseits erscheint ein GARCH(1,1)-Modell für den  $\hat{e}_t$ -Prozeß als ausreichend zur Modellierung zeitabhängiger Varianzen. Sowohl anhand des ARCH-LM-Tests wie auch unter Nutzung des Ljung-Box-Tests wird die Nullhypothese der Homoskedastizität standardisierter Residuen  $\hat{\xi}_t = \hat{e}_t/\hat{\sigma}_t$  nicht verworfen. Die Verletzung der unterstellten Normalverteilungsannahme stellt für die Schätzung des Varianzprozesses kein Problem dar, da in diesem Fall die nichtlineare Schätzung immer noch als Quasi-ML-Schätzung (QML-Schätzung) interpretiert werden kann und bei dem erheblichen Stichprobenumfang kaum mit einem Effizienzrückstand gegenüber "echten" ML-Methoden zu rechnen ist.

Abgesehen von einem möglichen Effizienzverlust, der mit einem QML-Verfahren im Vergleich zu einer echten ML-Methode verbunden sein kann, erweist sich die in (2) unterstellte Normalverteilungsannahme für die statistische Inferenz über den Residualprozeß  $\hat{e}_t$  als problematisch. Daß diese Annahme nicht angemessen ist, läßt sich anhand eines Vergleichs der empirischen und theoretischen Verteilungsfunktion der  $\hat{e}_t$  überprüfen.

Unter Verwendung des geschätzten Varianzprozesses und der Informationsmenge  $\Psi_{t-1}$  lassen sich für  $\hat{e}_t$  Konfidenzintervalle zum Niveau  $(1 - \alpha)$  (mit zeitabhängigen Intervallbreiten) konstruieren. Die Verletzung der unterstellten Verteilungsannahme führt dazu, daß die relativen Irrtumshäufigkeiten ( $\hat{\alpha}$ ) von den nominalen Signifikanzniveaus ( $\alpha$ ) abweichen. Aufgrund des hier vorliegenden großen Stichprobenumfangs läßt sich leicht und gütevoll testen, ob die Abweichungen der relativen Irrtumshäufigkeiten von den vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeiten signifikant sind. Bildet man für das unter Normalverteilungsannahmen geschätzte Modell Konfidenzintervalle zu alternativen Niveaus  $(1 - \alpha)$ , so ergeben sich die in Tabelle 3 dargestellten relativen Irrtumshäufigkeiten.

Die nominalen Irrtumswahrscheinlichkeiten sind in nahezu jedem Fall signifikant verletzt. Zum Beispiel wird die Breite von 50%–Konfidenzintervallen für  $\hat{e}_t$  derart überschätzt, daß die empirische Deckungsquote im Mittel rund 60 % erreicht. Dieses Ergebnis spiegelt indirekt die leptokurtische Verteilung der geschätzten  $\hat{\xi}_t$  wider, die einerseits durch eine im Vergleich zur Standardnormalverteilung stärkere Konzentration der Dichte um Null gekennzeichnet ist und die andererseits eine größere Verteilungsmasse an den Rändern (“fat-tails”) vorsieht.

### 3.3 Das empirische GARCH-Modell mit leptokurtischen Innovationen

Leptokurtisch verteilte Innovationen  $\xi_t$  können im empirischen Modell dadurch berücksichtigt werden, daß die standardisierten Residuen des GARCH–Prozesses mittels einer standardisierten  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden beschrieben werden. Dabei erhält man mit sinkendem Freiheitsgrad  $\nu$  bei gegebener Varianz eine zunehmend stärker gewölbte Verteilung. Eine Zufallsvariable  $Z = \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}}Z^*$  genügt einer standardisierten  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden, falls  $Z^*$  Student- $t$  verteilt ist mit  $\nu$  Freiheitsgraden. In diesem Fall gilt offenbar  $E[Z] = 0$  und  $\text{Var}[Z] = 1$ .

Die ML–Schätzung von GARCH–Prozessen unter der Annahme  $t$ -verteilter Innovationen wurde u.a. von Bollerslev (1987) vorgeschlagen. Im Vergleich zur Schätzung unter Normalverteilungsannahmen ist mit der Anzahl der Freiheitsgrade ein zusätzlicher Parameter zu schätzen. Anstelle von (6) wird der Beitrag einer Beobachtung  $\hat{e}_t$  zur loga-



rithmierten Likelihoodfunktion wie folgt bestimmt (vgl. z.B. Poirier 1995):

$$l_t = -\ln c - \frac{1}{2} \ln(\omega_t) - \frac{\nu + 1}{2} \ln \left( \nu + \frac{\hat{e}_t^2}{\omega_t} \right). \quad (8)$$

Dabei sind:

$$c = \frac{\pi^{0.5} \Gamma(\frac{\nu}{2})}{\nu^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu+1}{2})} \quad \text{und} \quad \omega_t = \frac{\nu - 2}{\nu} \sigma_t^2.$$

Man beachte, daß zur Bestimmung der Likelihoodfunktion nicht die bedingte Varianz ( $\sigma_t^2$ ), sondern eine reskalierte Varianz ( $\omega_t$ ) verwendet wird. Die Skalierung erfordert  $\nu > 2$  und spiegelt ein bekanntes Ergebnis wider, demzufolge Momente der Ordnung  $r$  einer  $t$ -Verteilung mit  $\nu$  Freiheitsgraden nur dann existieren, wenn  $\nu > r$  gilt. Analog zum Ergebnis aus (7) ergibt sich unter einer  $t$ -Verteilungsannahme die folgende Spezifikation des Varianzprozesses:

$$\hat{\sigma}_t^2 = 4,00\text{e-}05 + 0,109\hat{e}_{t-1}^2 + 0,875\hat{\sigma}_{t-1}^2, \quad \hat{\nu} = 4,36, \quad \text{log-lik.: } 7633,0. \quad (9)$$

(4,575)            (7,364)            (60,83)

Die Implikationen der erhaltenen Schätzer in (9) werden im vierten Abschnitt intensiver interpretiert. An dieser Stelle sei auf die geschätzte Anzahl von Freiheitsgraden hingewiesen. Der Wert  $\hat{\nu}=4.36$  weist auf eine stark leptokurtische Verteilung der Innovationen  $\xi_t$  hin, was direkt die hoch signifikante Ablehnung der Normalverteilungsannahme widerspiegelt, die für  $\hat{\xi}_t$  im Modell unter Normalverteilungsannahmen (7) erhalten wurde (vgl. Tabelle 2). Für die logarithmierte Likelihoodfunktion ergibt sich ein Wert von 7633,0. Damit wird die Anpassungsgüte des GARCH(1,1)-Modells unter einer Normalverteilungsannahme beträchtlich übertroffen. Ein vergleichbares Ergebnis zur Eignung von  $t$ -verteilten Innovationen bei der Spezifikation von GARCH-Prozessen erhält Teräsvirta (1996) für tägliche Änderungen von schwedischen Aktienpreisen und Wechselkursdaten.

Unterstellt man  $t$ -verteilte Innovationen  $e_t \sim t(0, \sigma_t^2, \nu)$ , so lassen sich anhand des folgenden Ergebnisses analog Konfidenzintervalle für die Beobachtungen  $\hat{e}_t$  bilden (vgl. Poirier 1995):

$$\frac{e_t^2}{\omega_t} \sim F(1, \nu), \quad \omega_t = \frac{\nu - 2}{\nu} \sigma_t^2.$$

Verfolgt man eine derartige Strategie zur Überprüfung der gemachten Verteilungsannahmen, so zeigt sich, daß im Modell (9) nominale Konfidenzniveaus und relative Irrtumshäufigkeiten nicht mehr signifikant voneinander abweichen (vgl. Tabelle 4). Die  $t$ -Verteilung

kann somit als angemessen zur Modellierung empirischer Renditeschwankungen betrachtet werden.

Diese Eigenschaft ist in dem Sinne bedeutend, daß extreme Kursbewegungen wahrscheinlicher als im Falle normalverteilter Innovationen sind. Beispielsweise werden bei Standardnormalverteilung Innovationen  $\xi_t$ , die betragsmäßig größer als 2.576 sind, nur für ein Prozent aller Beobachtungen erwartet. Geht man alternativ von einer zugrundeliegenden standardisierten  $t$ -Verteilung mit 5 Freiheitsgraden aus, so erhält das genannte Ereignis schon eine mehr als doppelt so hohe Wahrscheinlichkeit.

Werden GARCH-Modelle mit normalverteilten Innovationen zur Bewertung von Optionen herangezogen, dann ergibt sich im Vergleich zur Bewertung mit traditionellen Ansätzen, die auf Black & Scholes - Modelle zurückgreifen, daß weit aus dem Geld liegende Optionen höher bewertet werden. Dies läßt sich leicht durch die für GARCH-Prozesse typische Herausbildung von Volatilitätsphasen begründen. Nimmt man eine hohe Volatilität als gegeben an, so ist es im GARCH-Fall für eine aus dem Geld liegende Option wahrscheinlicher ins Geld zu gelangen, als dies unter Annahme einer konstanten Varianz der Fall wäre. Dementsprechend werden aus dem Geld liegende Optionen unter GARCH-Annahmen höher bewertet. Unter einem GARCH-Modell mit  $t$ -verteilten Innovationen wird dieser Effekt verstärkt, da betragsmäßig große Innovationen und damit Phasen hoher Volatilität eine höhere Wahrscheinlichkeit haben.

## 4 Stabilität der Parameter des GARCH-Modells

### 4.1 Motivation und Test

Neben der Modellierung der bedingten Varianz von Tagesdaten wird die ökonomische Frage gestellt, ob die Volatilität am deutschen Rentenmarkt im Zeitablauf zugenommen hat. Hierbei werden insbesondere Finanzinnovationen, d.h. die Einführung von Futures und Future-Optionen, als Ursache für eine gestiegene Volatilität am Rentenmarkt genannt. Durch die Derivate haben Finanzmarktakteure die Möglichkeit, mit relativ wenig Liquidität Risiken separat zu handeln. Mit den Finanzinnovationen werden neue Märkte geschaffen, so daß die Risiken standardisiert und transparent gehandelt werden können. Die Preise für diese Produkte sollten deshalb nach allgemeiner theoretischer Vorstellung

sinken. Die Risiken könnten von demjenigen getragen werden, der dafür besonders gut geeignet ist. Aufgrund heterogener Risikoprofile und -präferenzen der Marktteilnehmer sowie eines größeren Spektrums an risikolosen Handlungsalternativen sollten sich effizienzsteigernde und volatilitätssenkende Wirkungen der Derivate ergeben. Gegenüber diesen allgemeinen Überlegungen konstruiert Robinson (1993) ein Modell mit zwei Gruppen von Akteuren. Die eine Gruppe trifft ihre Handelsentscheidungen aufgrund von rationalen Erwartungen, während die andere allein aufgrund von vergangenen Erträgen über Kauf- oder Verkaufsaufträge entscheidet. Robinson zeigt, daß die Marktvolatilität nach Einführung von Future-Verträgen zunimmt, wenn das Gewicht der zweiten Händlergruppe steigt. Es kann also keine eindeutige Wirkung der Einführung von Finanzderivaten auf die Varianz des Basisinstruments abgeleitet werden. Somit ist es eine empirische Frage, ob sich durch die Schaffung von Derivaten die Volatilität an einem Rentenmarkt erhöht. Empirisch kann man dies anhand der Stabilität der GARCH-Parameter analysieren.

Der Test läßt sich am einfachsten für die Volatilität des Basiswertes, für den die Derivate konstruiert werden, überprüfen. Im Fall des Bund-Futures sind es die Renditen von Bundesanleihen mit einer Restlaufzeit von 8,5 bis 10 Jahren. Allerdings liegen die täglichen Renditen für dieses Laufzeitspektrum erst mit der Einführung des Bund-Futures vor, so daß mit dieser Zeitreihe keine Wirkung ihrer Markteinführung auf die Volatilität getestet werden kann. Ein Ausweg ist, als Rentenmarktindikator die Umlaufrendite zu verwenden, die für einen wesentlich längeren Zeitraum auf täglicher Basis vorliegt. Dabei sei allerdings angemerkt, daß sich die Volatilität dieses aggregierten Rentenmarktindikators von derjenigen des Basiswertes des Bund-Futures unterscheiden kann. Grundsätzlich können durch Aggregation Volatilitätsschwankungen geglättet werden.

Im GARCH-Modell kann man Volatilitätseffekte auf unterschiedliche Weise abbilden. Zum einen läßt sich die Volatilität anhand der unbedingten Varianz der Residuen des Prozesses bestimmen, die sich aus den Parametern des GARCH-Prozesses ermitteln läßt. Mit dieser Definition wird eine Durchschnittsbetrachtung vorgenommen. Im GARCH-Modell wird allerdings die bedingte Varianz, die zeitvariabel ist, in den Mittelpunkt der Analyse gestellt. Robinson (1993) schlägt vor, die Untergrenze der bedingten Varianz als die wesentliche Größe zur Beurteilung von Volatilitätseffekten heranzuziehen. Diese Untergrenze kann empirisch in einer Phase geringer Renditeschwankungen abgeschätzt

werden und hängt wiederum maßgeblich von den Parametern des unterstellten GARCH-Modells ab. Beide Betrachtungen können durchgeführt werden, wenn die Stabilität des oben charakterisierten Modells (9) getestet wird.

Ein GARCH-Prozeß kann derart fehlspezifiziert sein, daß die unterstellte dynamische Struktur des Varianzprozesses in der Zeit wechselt, d.h. Strukturbrüchen unterliegt. Die Nullhypothese der Zeitinvarianz bedingt heteroskedastischer Prozesse läßt sich geeignet mit Hilfe von LM-Tests prüfen. Sowohl parametrische als auch nichtparametrische Tests dieses Typs werden von Chu (1995) zusammengestellt. Die Anwendung dieser Tests liefert signifikante Evidenz für das Auftreten struktureller Veränderungen des empirischen Varianzmodells. Testergebnisse sind in Tabelle 5 dokumentiert.

## 4.2 Identifikation von Volatilitätsregimen

Ein Nachteil der unter der Nullhypothese der Strukturinvarianz konstruierten LM-Tests ist, daß die Ablehnung der Nullhypothese noch keinen Anhaltspunkt über die Anzahl möglicher Strukturwechsel bzw. über deren Auftreten in der Zeit liefert. Auch ist nicht klar, ob eine Ablehnung der Strukturinvarianz wirklich auf mindestens einen Strukturwechsel oder auf andere Faktoren zurückzuführen ist. Um verlässlichere Anhaltspunkte zu gewinnen, wird der Varianzprozeß für  $\hat{e}_t$  alternativ auch unter der Annahme von einem bzw. zwei auftretenden Strukturwechseln geschätzt. Aufgrund der hohen Rechenintensität werden die Strukturbruchzeitpunkte zunächst unter der Normalverteilungsannahme bestimmt. Die dabei gefundenen Teilstichproben werden anschließend wieder unter  $t$ -Verteilungsannahmen untersucht. Die zeitliche Lokalisation möglicher Strukturwechsel wird mit Hilfe eines Suchverfahrens festgelegt. Wegen der rechenintensiven Schätzprozedur werden mögliche Strukturwechselzeitpunkte  $\tau$  (im Modell mit zwei Varianzregimen) bzw.  $\tau_1$  und  $\tau_2$  (bei drei Varianzregimen) zunächst nur als ganzzahlige Vielfache von 100 zugelassen. Ausgehend von den erhaltenen Maxima der logarithmierten Likelihoodfunktion wird anschließend rund um die erhaltenen (vorläufigen) Strukturwechselzeitpunkte mit feineren Unterteilungen der Zeitachse, d.h. zunächst zeitliche Abstände von 10 Beobachtungen und schließlich von nur einer Beobachtung, nach weiteren Verbesserungen der logarithmierten Likelihoodfunktion gesucht. Wegen der erheblichen Anzahl durchgeführter Modellschätzungen werden hier nur die erhaltenen Endergebnisse

für die gefundenen “Bruchstellen” des Varianzprozesses wiedergeben.

Während ein zeitinvariantes Modell auf einen Wert der logarithmierten Likelihoodfunktion von 7405,8 führt (vgl. (7)), erhält man bei der Unterstellung eines Strukturwechsels zum Zeitpunkt  $\tau = 1830$  einen Wert von 7421,6. Läßt man a-priori zwei Strukturwechsel zu, so erhält man ohne Konditionierung auf das vorgenannte Ergebnis ( $\tau = 1830$ ) eine “optimale” Unterteilung der Stichprobe zu den Zeitpunkten  $\tau_1 = 484$  und  $\tau_2 = 1830$ . Im Rahmen eines solchen Modells ergibt sich ein Wert der Likelihoodfunktion von 7447,7. Verwendet man zur Inferenz über die Erweiterungen des einfachen zeitinvarianten Modells Likelihood-Quotiententests, so sind  $\lambda_1 = 2(7421,6 - 7405,8) = 31,6$  bzw.  $\lambda_2 = 2(7447,7 - 7405,8) = 83,8$  mit den gewünschten Quantilen einer  $\chi^2$ -Verteilung mit 3 bzw. 6 Freiheitsgraden zu vergleichen. In beiden Fällen sind die Erweiterungen des einfachen Modells unter Zugrundelegung üblicher Irrtumswahrscheinlichkeiten hoch signifikant.

Ohne die entsprechenden Ergebnisse hier im einzelnen anzugeben, sei darauf hingewiesen, daß auch bei Zulassung struktureller Veränderungen des Varianzprozesses unter Annahme normalverteilter Innovationen keine Verbesserung der in Tabelle 3 gegebenen relativen Irrtumshäufigkeiten von Konfidenzintervallen für  $\hat{e}_t$  erreicht werden kann. Legt man die ermittelten Zeitpunkte möglicher Strukturwechsel für eine Schätzung unter Annahme  $t$ -verteilter Innovationen zugrunde, so ergeben sich die in der Tabelle 6 aufgeführten Ergebnisse für das GARCH(1,1)-Modell unter der  $t$ -Verteilungshypothese.

Die Hypothese von Strukturbrüchen wird auch durch die Überprüfung der Verteilungsannahme mittels Konfidenzintervallen für die gefundenen Teilperioden gestützt. Die entsprechenden Ergebnisse werden in Tabelle 7 wiedergegeben. Das zeitinvariante Modell unter einer  $t$ -Verteilungsannahme kann zunächst als eine geeignete Annäherung an den zugrundeliegenden wahren Varianzprozeß angesehen werden. Über den gesamten Stichprobenumfang betrachtet, führt dieses Modell auf Konfidenzintervalle für  $\hat{e}_t$ , deren relative Irrtumshäufigkeiten nicht von den nominalen Niveaus abweichen. Betrachtet man jedoch die relativen Irrtumshäufigkeiten in einzelnen Teilstichproben, so ergeben sich teilweise signifikante Unter- bzw. Überschreitungen der nominalen Zielgrößen. Für  $\alpha = 0,50$  ergibt sich die im Mittel “richtige” relative Irrtumshäufigkeit für die gesamte Stichprobe aus einer zu niedrigen relativen Irrtumshäufigkeit zu Beginn der Stichprobe und einer zu

hohen relativen Irrtumshäufigkeit zum Ende der Stichprobe.

Erlaubt man alternativ eine Unterteilung der gesamten Stichprobe in zwei bzw. drei Teilstichproben, so erhält man eine im Vergleich zum zeitinvarianten Modell verbesserte Anpassung an den wahren zugrundeliegenden Varianzprozeß. In zeitvarianten Modellen wird weder in einzelnen Teilstichproben noch für die Gesamtheit aller Beobachtungen eine signifikante Verletzung der nominalen Irrtumswahrscheinlichkeiten von Konfidenzintervallen für  $\hat{\epsilon}_t$  gefunden.

### 4.3 Volatilitätsregime im Vergleich

Was die Anzahl unterstellter Strukturwechsel anbelangt, so reicht offenbar eine Unterteilung der Stichprobe in zwei Teilstichproben aus, um die Richtigkeit der unterstellten Verteilungsannahmen nicht verwerfen zu können. Die Annahme dreier Varianzregime (die ebenfalls zur Bestätigung der gemachten Verteilungsannahmen führt) kann einmal mit der (im Sinne von Likelihoodverhältnistests interpretierten) erhaltenen Verbesserung der Anpassungsgüte gerechtfertigt werden. Eine weitere Rechtfertigung für einen Strukturwechsel nach rund 484 Beobachtungen ergibt sich aus einem Vergleich der alternativ geschätzten Zeitpfade für  $\sigma_t$  mit dem Verlauf der  $\hat{\epsilon}_t$ . Abbildung 2 liefert in den unteren Graphiken geschätzte Zeitpfade für  $\sigma_t$  unter der Annahme der Zeitinvarianz, bzw. zweier und dreier Teilstichproben, wie sie von den in Tabelle 7 gegebenen Ergebnissen impliziert werden. Während offenbar alle unterstellten Varianzmodelle in der Lage sind, die hohe Volatilität des untersuchten Residualprozesses gegen Ende der Stichprobe widerzugeben, unterscheiden sich die Modellimplikationen zu Beginn der Stichprobe erheblich. Nimmt man für diesen Zeitraum eine eigene Varianzspezifikation an, so resultiert daraus eine beachtliche Anhebung des deterministischen Varianzanteils ( $\alpha_0$ ) im Gegensatz zu den beiden anderen geschätzten Volatilitätspfaden. Diese Größe beeinflusst stark die Varianz, wenn keine oder nur vom Betrag her kleine Innovationen im Prozeß wirksam werden. Umgekehrt reagiert bei Zugrundelegung eines eigenen Varianzprozesses zu Beginn der Stichprobe die Volatilität in der letzten Teilstichprobe wesentlich dumpfer auf Innovationen des Renditeprozesses im Vergleich zu zeitinvarianten Modellen.

Die Wechsel von einem Varianzregime zum anderen erfolgen am Dienstag, den 7. Dezember 1982 (Beobachtungspunkt 484) und am Montag, den 2. Mai 1988. Rein

deskriptiv läßt sich feststellen, daß das erste Datum mit der langsamen Überwindung der durch den zweiten Erdölpreisschock hervorgerufenen Rezession in den Jahren 1981/1982 in Verbindung gesetzt werden kann. Die Kapitalmarktzinsen gingen von zweistelligen Höchstständen im Jahre 1981 allmählich zu geringeren Niveaus über. Die Zinssätze verloren gegenüber der Höchstmarke von 11,42 zur Mitte des Jahres 1981 bis Ende 1982 mit 7,83 über 350 Basispunkte. Diesem Zinsrückgang schloß sich ab Mitte 1983 dann eine beruhigte Seitwärtsbewegung der Zinsen an (vgl. Abbildung 1). Desweiteren kann darauf aufmerksam gemacht werden, daß die Federal Reserve Bank in den USA im Oktober 1982 die Steuerung der non-borrowed reserves aufgegeben hat. Die amerikanische Geldpolitik hat im Zeitraum Herbst 1979 bis Oktober 1982 dieses Steuerungsziel verfolgt, was zu relativ starken Zinssprüngen in den USA führte, die sich auf den deutschen Markt auswirkten.

Das zweite Datum befindet sich relativ nahe beim Ende der Niedrigzinsphase der Notenbankzinssätze in der Bundesrepublik Deutschland. Nachdem die Bundesbank am 6. Dezember 1987 den Diskontsatz auf 2,5% gesenkt hat, wurde der Diskontsatz am 1. Juli 1988 auf 3% angehoben und damit die Zinswende für Zentralbankgeld dokumentiert.

Es läßt sich anmerken, daß diese Daten nicht punktgenau mit herausragenden Einführungen von Finanzinnovationen zu verbinden sind. So wurde zum Beispiel der Handel mit Derivaten an der Deutschen Terminbörse (DTB) für Zinsprodukte (Bund-Future) erst am 23. November 1990 eröffnet. Der Handel mit Optionen für den Bund-Future wurde an der DTB am 16. August 1991 begonnen. Der Handel mit Zinsderivaten war allerdings schon vorher mehrere Jahre an der LIFFE in London möglich. Es fällt somit schwer, ein bestimmtes Datum für den Beginn des Handels dieser Produkte zu bestimmen. Dennoch kann festgehalten werden, daß in der letzten Teilperiode die Handelsintensität und die Bedeutung der Derivate wesentlich höher als in den vorangegangenen Teilperioden sind. Mit dieser Zuordnung kann getestet werden, ob Derivate die Volatilität gesenkt haben.

Für die deterministische Varianzkomponente ( $\alpha_0$ ) gilt, daß sie in der letzten Teilperiode signifikant kleiner ist als in der ersten oder zweiten Teilperiode. Sie hat sich im Zeitablauf reduziert. Unter sonst unveränderten Bedingungen bedeutet dies, daß die implizierte Varianzuntergrenze damit niedriger liegt als zu Beginn der Stichprobe (vgl. Robinson 1993). Allerdings wird dieser Effekt durch die veränderte Persistenz des

Prozesses überkompensiert. In der letzten unterstellten Teilperiode wird eine Persistenz von  $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 0,9855$  geschätzt, die größer als in den anderen Abschnitten ist. Damit verschwindet eine einmal aufgebaute Volatilität relativ langsam aus dem Markt. Dieses Ergebnis befindet sich im Einklang mit Darstellungen der Deutschen Bundesbank (1996). Aus der Abbildung 2 kann entnommen werden, wie sich empirisch die Varianzuntergrenze im Zeitablauf entwickelt hat. Der geschätzte Varianzprozeß nähert sich dieser Untergrenze in Phasen vergleichsweise geringer Preisvariationen an. An der unteren Graphik von Abbildung 2 erkennt man, daß diese Untergrenze in der letzten Teilstichprobe höher ist als in den vorangegangenen Teilabschnitten.

Die Aussagen zur Volatilität ändern sich, wenn die unbedingte Varianz betrachtet wird. Wie beschrieben, ist die implizierte unbedingte Varianz eine positive Funktion der geschätzten deterministischen Varianzkomponente ( $\hat{\alpha}_0$ ) einerseits und der geschätzten Persistenz ( $\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1$ ) auf der anderen Seite und gibt die mittlere Varianz der Residuen der linearen Spezifikation in (1) an. Die unbedingte Varianz ist gemäß (5) eine nichtlineare Funktion von geschätzten Parametern. Die Varianz dieser Funktion läßt sich ausgehend von einer Taylorreihenentwicklung wie folgt approximieren:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Var}}\left(\frac{\alpha_0}{\gamma}\right) &= \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 \widehat{\text{Var}}(\alpha_0) + \left(\frac{\alpha_0}{\gamma^2}\right)^2 \widehat{\text{Var}}(\alpha_1) + \left(\frac{\alpha_0}{\gamma^2}\right)^2 \widehat{\text{Var}}(\beta_1) \\ &+ 2\frac{1}{\gamma} \frac{\alpha_0}{\gamma^2} \left(\widehat{\text{Cov}}(\alpha_0, \alpha_1) + \widehat{\text{Cov}}(\alpha_0, \beta_1)\right) + 2\left(\frac{\alpha_0}{\gamma^2}\right)^2 \widehat{\text{Cov}}(\alpha_1, \beta_1) \end{aligned}$$

mit  $\gamma = 1 - \alpha_1 - \beta_1$ . Für ihre Berechnung werden die geschätzten Koeffizienten- und Varianzkovarianzwerte eingesetzt, die aus der von Bollerslev und Wooldridge (1992) vorgeschlagenen QML-Schätzung gewonnen werden. Demzufolge gilt für den Vektor der QML-Schätzer  $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1)'$

$$\text{E}(\hat{\theta}) = \theta \quad \text{und} \quad \text{Var}(\sqrt{T}\hat{\theta}) = D^{-1}SD^{-1}$$

mit

$$D = -\sum_{t=1}^T \text{E}\left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'}\right) \quad \text{und} \quad S = \sum_{t=1}^T \text{E}\left(\frac{\partial l_t}{\partial \theta} \frac{\partial l_t}{\partial \theta'}\right),$$

wobei  $T$  den Stichprobenumfang bezeichnet. Die Werte für die geschätzten unbedingten Varianzen sind im unteren Teil der Tabelle 6 angegeben. Es zeigt sich, daß die Schätzung der unbedingten Varianz mit einer hohen Unsicherheit behaftet ist. Für die gesamte



Stichprobe impliziert das geschätzte GARCH-Modell eine geschätzte unbedingte Varianz von  $2,492e-03$ , die mit einem Standardfehler von  $1,161e-03$  behaftet ist. Es wird deutlich, daß sämtliche für einzelne Teilstichproben ermittelten unbedingten Varianzen innerhalb eines 95% Konfidenzintervalles dieser unbedingten Schätzung fallen. Darüber hinaus läßt sich durch paarweisen Vergleich unbedingter Varianzen für einzelne Teilstichproben keine signifikante Differenz dieser Schätzgrößen feststellen. Gemäß diesem Ergebnis ergibt sich, daß mit der Einführung von Derivaten keine Änderung der unbedingten Zinsvolatilität am deutschen Kapitalmarkt einherging.

Die beschriebenen Parameterunterschiede sind bedeutend für die Prognose der Volatilität mit Hilfe von GARCH-Prozessen (vgl. Chu und Freund 1996), weshalb eine zutreffende Parametrisierung unabdingbar ist. Die Veränderung der Persistenz impliziert, daß sich Volatilitätsphasen ab dem Ende der achtziger Jahre länger geworden sind. Die Dauer ruhiger und anschließend turbulenter Phasen der Volatilität der Umlaufrendite sind länger geworden. Damit müssen die betrachteten Zeiträume von Preisänderungen ausreichend lang sein, um der Gefahr der Fehleinschätzung von Volatilitätshäufungen durch Marktteilnehmer und Zentralbank zu begegnen. Werden als Bezugspunkt nur Preisschwankungen aus ruhigen Marktphasen genommen, wird ein Auftreten von stärkeren Preisausschlägen leichter als außergewöhnlich beurteilt. Derartige Fehleinschätzungen können beispielsweise der Zentralbank einen Handlungsbedarf zur Erreichung geldpolitischer Zielsetzungen signalisieren, der tatsächlich jedoch noch nicht besteht.

## 5 Zusammenfassung

Die empirische Analyse von täglichen Änderungen der deutschen Umlaufrendite für festverzinsliche Wertpapiere der öffentlichen Hand zeigt starke Evidenz für eine zeitliche Abhängigkeit in den Varianzen. Diese Abhängigkeit läßt sich durch ein GARCH(1,1)-Modell beschreiben. Durch die Gegenüberstellung von einer empirischen und einer theoretischen Verteilungsfunktion der Innovationen wird deutlich, daß die Annahme der Normalverteilung der Innovationen nicht angemessen ist. Die standardisierten Innovationen können mit einer  $t$ -Verteilung modelliert werden. Unter einem GARCH-Modell mit  $t$ -verteilten Innovationen erhalten betragsmäßig große Innovationen und damit Phasen ho-

her Volatilität eine höhere Wahrscheinlichkeit als dies unter einer Normalverteilungsannahme der Fall ist. Bezogen auf die Preisbildung für Optionen impliziert dies höhere Preise für aus dem Geld liegende Optionen.

Im zweiten Teil wird die Stabilität der Koeffizienten des GARCH(1,1)–Prozesses im Zeitablauf überprüft. Mit Hilfe eines Suchalgorithmus konnten zwei Strukturbruchzeitpunkte bestimmt werden. Dabei zeigt sich, daß die unbedingte Varianz der jeweiligen Teilperioden nicht signifikant von der unbedingten Varianz des geschätzten Modells für die Gesamtperiode abweicht. Damit wird Evidenz dafür gefunden, daß die Volatilität in den neunziger Jahren nicht höher ist als im Vergleich zur Mitte der achtziger Jahre. Offenbar ging mit der Einführung von Finanzmarktinstrumenten, der zunehmenden internationalen Verflechtung von Kapitalmärkten sowie dem Vordringen institutioneller Anleger kein Anstieg der mittleren Preisunsicherheit einher. Dieses Bild ändert sich, wenn die empirisch beobachtete Varianzuntergrenze betrachtet wird. Die in hinreichend langen Phasen ruhiger Preisentwicklung erreichte Varianz ist in der zweiten Hälfte der Stichprobe höher als zu Beginn.

Außerdem wird deutlich, daß Koeffizienten eines GARCH–Modells im Zeitablauf instabil sein können. Bei den in der Regel großen Stichprobenumfängen sollte ihre Stabilität überprüft werden, wie es für die Koeffizienten linearer Regressionsmodelle üblich ist. Durch eine sorgfältige Untersuchung möglicher struktureller Veränderungen wird einerseits die Prognosegüte empirischer Modelle verbessert. Andererseits lassen sich auf diesem Weg leichter Phasen außergewöhnlicher Preisschwankungen erkennen.

## Literatur

*Bollerslev, T.* (1986), Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity, *Journal of Econometrics* 31, 307-327.

*Bollerslev, T.* (1987), A Conditional Heteroscedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return, *Review of Economics and Statistics* 69, 542-547.

*Bollerslev, T., R.F. Engle, D.B. Nelson* (1994), ARCH Models, in: R.F. Engle, D.L. McFadden (Hrsg.), *Handbook of Econometrics* 4, Elsevier, Amsterdam, Kapitel 49, 2961-3038.

- Bollerslev, T., J.M. Wooldridge* (1992), Quasi-Maximum Likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-varying Covariances, *Econometric Reviews* 11, 143-172.
- Chu, C.-S.J.* (1995), Detecting Parameter Shift in GARCH Models, *Econometric Reviews* 14, 241-266.
- Chu, S.-H., S. Freund* (1996), Volatility Estimation for Stock Index Options: A GARCH Approach, *The Quarterly Review of Economics and Finance* 36, 431-450.
- Deutsche Bundesbank* (1996), Finanzmarktvolatilität und ihre Auswirkungen auf die Geldpolitik, *Monatsbericht* 48, Heft 4, 53-70.
- Engle, R.F.* (1982) Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation, *Econometrica* 50, 987-1008.
- Funke, M.* (1994) The Message in Daily West German Stock Prices: Empirical Evidence Using GARCH, *Kredit und Kapital* 27, 348-362.
- Poirier, D.J.* (1995), *Intermediate Statistics and Econometrics*, MIT-Press, Cambridge (Massachusetts).
- Robinson, G.* (1993), The Effect of Future Trading on Cash Market Volatility: Evidence from the London Stock Exchange, *Diskussionspapier*, Bank of England.
- Teräsvirta, T.* (1996), Two Stylized Facts and the GARCH(1,1) Model, Working Paper No. 96, Stockholm School of Economics.

Tabelle 1: Beschreibende Maßzahlen für tägliche Renditänderungen

Maßzahl	Renditeänderungen	Residuen
Mittelwert	-0,00082	0,00000
Standardabweichung	0,0413	0,0402
Schiefe	0,1456	0,1095
Wölbung	9,2690	9,5839
Jarque-Bera-Test	6391,83***	7042,66***
Autokorrelation im Mittelwert		
Ljung-Box-Test (4)	211,83***	1,106
Ljung-Box-Test (8)	229,08***	4,896
Ljung-Box-Test (16)	269,40***	15,807
ARCH LM(1)	75,077***	94,757***
Autokorrelation der quadrierten Zeitreihe		
Ljung-Box-Test (4)	215,89***	208,89***
Ljung-Box-Test (8)	347,90***	346,53***
Ljung-Box-Test (16)	500,00***	466,19***

Zeitraum 2.1.1981 bis 31.7.1996. Unter der Nullhypothese von unabhängig, identisch normalverteilten Größen sind die Teststatistiken für Schiefe und Wölbung 0 bzw. 3. Unter der Annahme der Normalverteilung haben die entsprechenden Teststatistiken asymptotische Standardfehler von  $\sqrt{6/T}$  und  $\sqrt{24/T}$ , wobei  $T$  die Anzahl der Beobachtungen bezeichnet. Der Jarque-Bera-Test ist  $\chi^2(2)$ -verteilt. Unter der Nullhypothese der Homoskedastizität ist die ARCH-LM(1)-Statistik asymptotisch  $\chi^2(1)$  verteilt. \*\*\* auf dem 1% Niveau signifikant.

Tabelle 2: Diagnosestatistiken für das GARCH(1,1)-Modell unter der Normalverteilungsannahme

Schiefe	0,1379
Wölbung	6,8731
Jarque-Bera-Test	2447,00***
ARCH LM(1)	0,0005
ARCH LM(5)	2,4832
Ljung-Box-Test(4)	1,95
Ljung-Box-Test(8)	3,39
Ljung-Box-Test(16)	9,70

\*\*\* auf dem 1% Niveau signifikant.

Tabelle 3: Relative Irrtumshäufigkeiten von Konfidenzintervallen für  $\hat{e}_t|\Psi_{t-1}$  unter der Normalverteilungshypothese

$\alpha$	0,050	0,100	0,500	0,900	0,950
$\hat{\alpha}$	0,055	0,087***	0,415***	0,871***	0,937***

\*\*\* auf dem 1% Niveau signifikant. Die Schätzung des Varianzprozesses  $\sigma_t^2$  wurde mit der unbedingten Varianz initialisiert. Um die Unabhängigkeit der Ergebnisse von den Anfangsbedingungen zu gewährleisten, wurden die ersten 50 Beobachtungen nicht in die Berechnung der relativen Irrtumshäufigkeiten aufgenommen.

Tabelle 4: Relative Irrtumshäufigkeiten unter der  $t$ -Verteilungshypothese

$\alpha$	0,050	0,100	0,500	0,900	0,950
$\hat{\alpha}$	0,049	0,098	0,501	0,900	0,950

Anmerkungen: siehe Tabelle 3

Tabelle 5: LM-Tests auf Strukturkonstanz des GARCH(1,1)-Prozesses

$k$	$g =$	1	3	5	11
0,1		24,90	20,66	17,71	12,98
0,2		2,47	2,05	1,76	1,29
0,3		0,84	0,70	0,60	0,44
0,4		4,46	3,70	3,17	2,33
0,5		5,08	4,21	3,61	2,65
0,6		5,50	4,57	3,91	2,87
0,7		18,61	15,44	13,23	9,70
0,8		41,21	34,19	29,30	21,48
0,9		10,15	8,42	7,22	5,29
max		41, 21***	34, 19***	29, 30***	21, 48***

Der hier verwendete LM-Test unterstellt unter der Nullhypothese eine einheitliche unbedingte Varianz vor und nach  $k \cdot 100\%$  der Stichprobe. In die Teststatistik gehen quadrierte und unter der Nullhypothese zentrierte Residuen  $\hat{e}_t^2$  ein, deren Varianz mit verschiedenen Bartlett-Gewichten geschätzt wird.  $g$  kennzeichnet die Anzahl dieser Gewichte. Kritische Werte werden von Chu (1995) tabelliert. \*\*\* auf dem 1% Niveau signifikant.

Tabelle 6: Geschätzte GARCH(1,1)-Modelle unter der  $t$ -Verteilungshypothese

	invar.	$\tau = 1830$		$\tau_1 = 484, \tau_2 = 1830$		
log-lik.	7633,0	7645,2		7653,6		
$\hat{\nu}$	4,36	4,02	4,68	3,59	4,80	4,70
$\hat{\alpha}_0$	4,00e-05 (4,575)	6,49e-05 (3,685)	3,06e-05 (2,842)	1,93e-04 (2,318)	6,28e-05 (3,310)	3,05e-05 (2,845)
$\hat{\alpha}_1$	0,10899 (7,364)	0,1712 (5,303)	0,06823 (4,951)	0,1255 (2,616)	0,1729 (4,879)	0,06784 (4,987)
$\hat{\beta}_1$	0,87496 (60,83)	0,8017 (26,48)	0,9174 (58,98)	0,8057 (13,58)	0,7777 (19,77)	0,9177 (59,48)
Unbedingte Varianz	2,492e-03	2,395e-03	2,125e-03	2,805e-03	1,271e-03	2,106e-03
Standard- fehler	1,161e-03	1,710e-03	0,848e-03	1,128e-03	0,512e-03	0,825e-03

Geschätzte  $t$ -Werte in Klammern

Tabelle 7: Relative Irrtumshäufigkeiten unter der  $t$ -Verteilungsannahme nach Teilstichproben.

Beob.	3845	1779	2066	433	1346	2066
$\alpha$	zeitinvariantes Modell					
0,05	0,049	0,042*	0,056	0,065	0,034***	0,056
0,10	0,098	0,093	0,103	0,097	0,091	0,103
0,50	0,501	0,474**	0,523**	0,497	0,467**	0,523**
0,90	0,900	0,893	0,907	0,885	0,895	0,907
0,95	0,950	0,945	0,954	0,947	0,944	0,954
	2 Teilstichproben					
0,05	0,053	0,050	0,056			
0,10	0,100	0,103	0,097			
0,50	0,498	0,487	0,508			
0,90	0,901	0,898	0,904			
0,95	0,950	0,949	0,952			
	3 Teilstichproben					
0,05	0,056			0,060	0,057	0,056
0,10	0,100			0,090	0,109	0,097
0,50	0,498			0,501	0,484	0,507
0,90	0,901			0,889	0,900	0,904
0,95	0,950			0,952	0,947	0,952

Beob. kennzeichnet die Anzahl vorliegender Beobachtungen. Im oberen Block wird das zeitinvariante Modell auch für Teilstichproben angewendet. Im mittleren bzw. unteren Block werden Modelle bei einem bzw. zwei Strukturbrüchen unterstellt. (\*\*, \*\*\*) kennzeichnen Signifikanz zum Niveau 0.10 (0.05, 0.01).

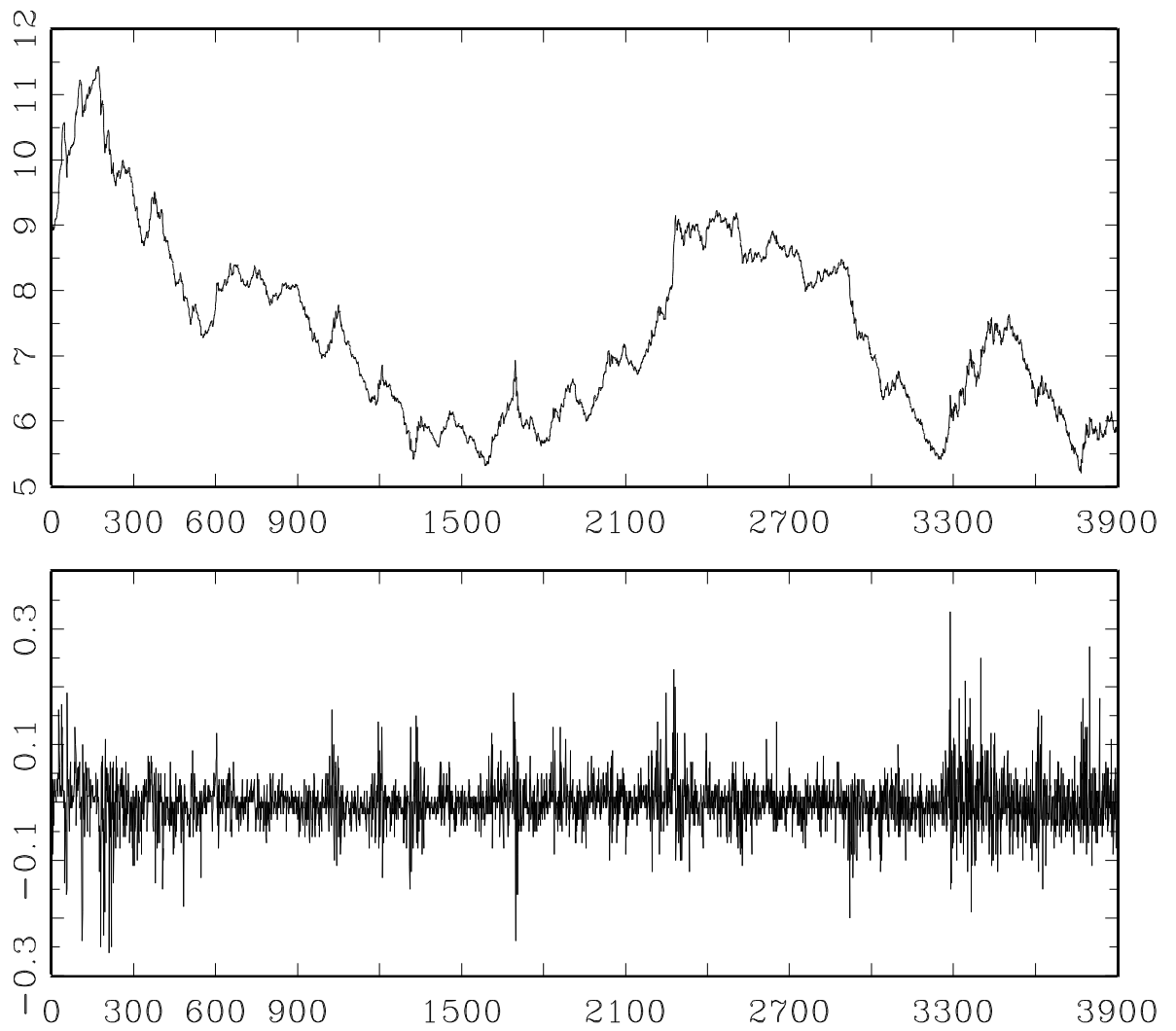


Abbildung 1: Umlaufrendite für Deutschland (oben) und Renditeänderungen (unten) für die Periode 2.01.1981 – 31.07.96

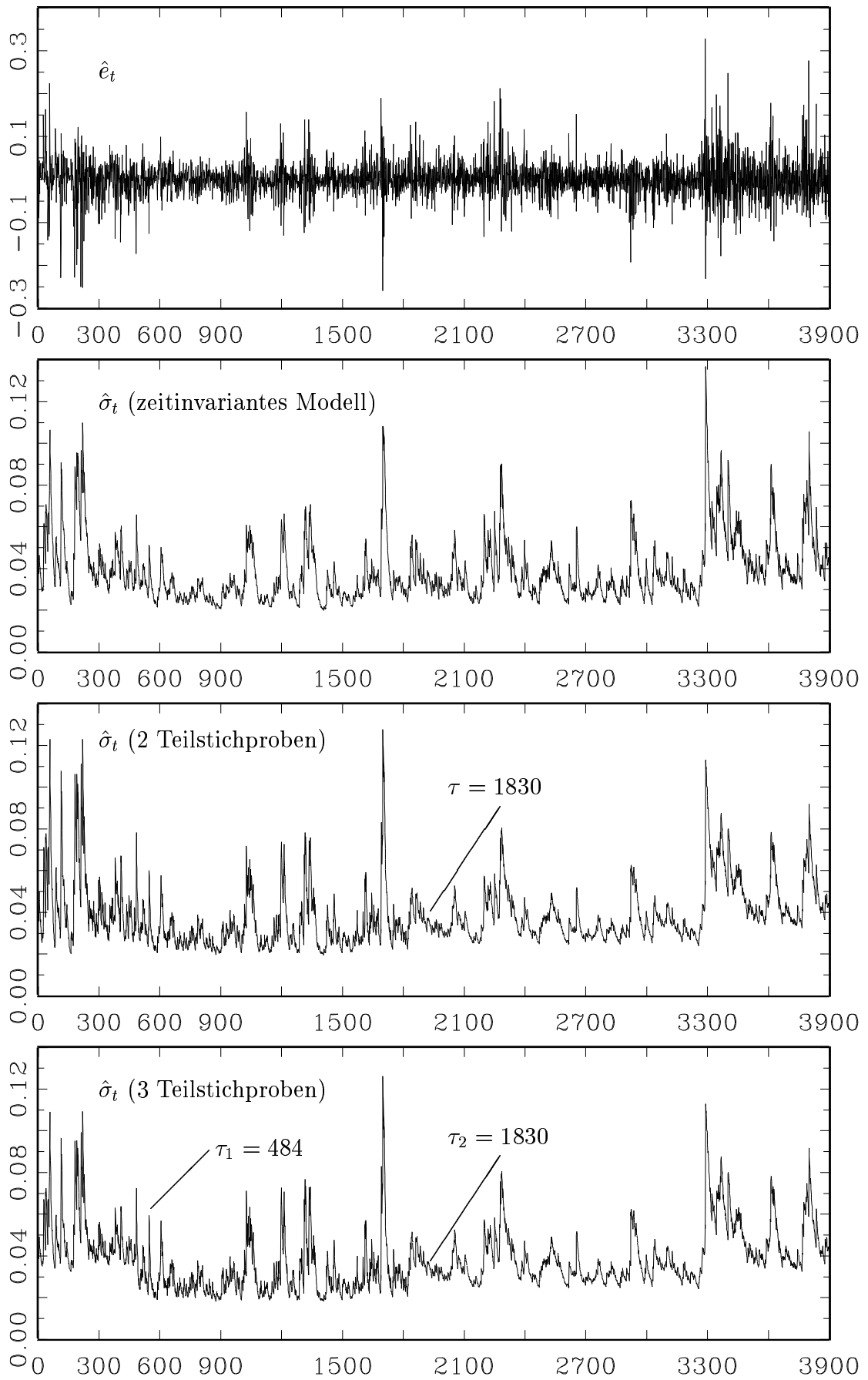


Abbildung 2: Geschätzte Residuen  $\hat{\epsilon}_t$  und alternative Zeitpfade ihrer bedingten Standardfehler aus Modellen mit  $t$ -verteilten Innovationen.