Preisregeln für Auktionen und Ausschreibungen: Eine Diskussion[1]

Elmar Wolfstetter

Dezember 1995
Institut f. Wirtschaftstheorie I
Humboldt–Universität zu Berlin
Spandauer Str. 1
10178 Berlin
e–mail: wolf@wiwi.hu–berlin.de

[1] Diese Arbeit wurde von der *Deutschen Forschungsgemeinschaft,* im Rahmen des SFB 373 ("Quantifikation und Simulation Ökonomischer Prozesse"), Humboldt–Universität zu Berlin, unterstützt. Für anregende Diskussionen danke ich Werner Güth und Dieter Nautz.

Zusammenfassung

Dieser Diskussionsbeitrag kommentiert Güths axiomatische Begründung der Zweit–Preis-Auktion. In diesem Zusammenhang wird auch Güths umfangreiche Analyse der λ–Auktion durch eine einfache und anschaulich interpretierbare Lösung ersetzt.

This paper comments on a contribution by Güth. Its purpose is twofold: to introduce a simple and easy to interpret solution of the λ–auction, which may replace Güths lengthy proof, and to discuss and reject Güths normative defense of the second–price auction.

Keywords: auctions, procurement.
JEL classifications: D 44, D 82, H 57, C 72.

1 Einleitung

In seinem Aufsatz über “Preisregeln für Auktionen und Ausschreibungen: Eine ordnungspolitische Analyse” hat Güth [1995] kürzlich eine axiomatische Begründung der Zweit–Preis-Auktion vorgelegt. Diese Begründung beruht allein auf zwei Anforderungen: *Anreizkompatibilität* und *Neidfreiheit*. Neben der ordnungspolitischen Diskussion geeigneter Auktionsregeln nimmt die mathematische Lösung der λ–Auktion in Güths Aufsatz breiten Raum ein.

Auf den ersten Blick ist Güths Begründung der Zweit–Preis Auktion überraschend. Bei genauer Betrachtung stellt sich jedoch heraus, daß Güths Anforderungen der Neidfreiheit und der Anreizkompatibilität von üblichen Sprachregelungen abweichen und insgesamt nicht überzeugen. Dies zeigt sich nicht zuletzt daran, daß sie genau die Auktionsregeln eliminieren, die in der Wirtschaftspraxis am häufigsten beobachtet werden, und die in einer Vielzahl von Rahmenbedingungen vorteilhaft sind.

Der vorliegende Beitrag dient der Diskussion von Güths Thesen. Darüberhinaus wird eine äußerst einfache mathematische Lösung der λ– Auktion präsentiert. Die Beweisführung verwendet nur elementare Überlegungen, erspart umfangreiche mathematische Umformungen und vermittelt zugleich eine anschauliche ökonomische Interpretation.

Der Beitrag beginnt mit der Lösung der λ–Auktion und einem Vergleich mit gängigen Auktionen *(Abschnitt 2)*. Es folgt eine Diskussion von Güths ordnungspolitischen Empfehlungen *(Abschnitt 3)*. Der Beitrag schließt mit kritischen Bemerkungen zu seinem Konzept der Neidfreiheit *(Abschnitt 4)*.

2 Einfache Lösung der λ–Auktion

Ähnlich wie bei Güth sei die Gebotsfunktion eines Bieters mit $t(v)$, die individuelle Bewertung des versteigerten Guts mit v und die Anzahl der Bieter $n \geq 2$ bezeichnet. Jeder Bieter hat private Information über seine Bewertung. Die unbekannten Bewertungen sind identisch und unabhängig verteilte, stetige Zufallsvariablen V mit dem Träger $[0, 1]$ und der Verteilungs– und Dichtefunktion $F(v), f(v) := F'(v)$. Zufallsvariablen werden mit Großbuchstaben gekennzeichet. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird ein symmetrisches Gleichgewicht mit strikt monoton zunehmender Gebotsfunktion vorausgesetzt.

Die λ–Auktion ist durch zwei Regeln gekennzeichnet: 1) der höchste Bieter bekommt den Zuschlag; 2) der Gewinner bezahlt eine konvexe Linearkombination aus höchstem und zweithöchstem Gebot. Regel 2) kann man auch als Preissetzung mit Zufallszug interpretieren.

Der Bieter mit der höchsten Bewertung erhält den Zuschlag. Er zahlt das $(1 - \lambda)$–fache seines eigenen (also des höchsten) Gebots $t_\lambda(v)$ und das λ–fache des zweithöchsten Gebots. Die Zufallsvariable Preis ist daher[1]

$$P_\lambda := (1-\lambda)t_\lambda(V_{(n)}) + \lambda t_\lambda(V_{(n-1)}), \quad \lambda \in [0,1). \tag{1}$$

Die folgende einfache Lösung der λ–Auktion beginnt mit einer völlig untechnischen und anschaulich interpetierbaren Lösung der gleichgewichtigen erwarteten Zahlung des Gewinners. Daraus folgen, in wenigen Schritten, die gleichgewichtigen Auszahlungen und, am Ende der Kette, die gleichgewichtige Gebotsfunktion.[2] Der Beweis verwendet ein allgemein bekanntes Ergebnis über die Zweit–Preis-Auktion.

Aufgrund der strikten Monotonie der gleichgewichtigen Gebotsfunktion beträgt die Wahrscheinlichkeit des Zuschlags

$$\rho(v) := \Pr\{t_\lambda(V_{(n-1)}) < t_\lambda(v)\} = \Pr\{V_{(n-1)} < v\} = F(v)^{n-1}. \tag{2}$$

Lemma 1 (Erwartete Zahlung des Gewinners) *Im Gleichgewicht ist der bedingte Erwartungswert der Zahlung des Gewinners,* $Z(v) := (1-\lambda)t_\lambda(v) + \lambda E[t_\lambda(V_{(n-1)}) \mid V_{(n)} = v]$*, gleich dem bedingten Erwartungswert der zweithöchsten Bewertung (also unabhängig von* λ*)*

$$Z(v) = E[V_{(n-1)} \mid V_{(n)} = v], \quad \textit{für alle } v. \tag{3}$$

Beweis Man betrachte einen Bieter mit der Bewertung v, der in der λ–Auktion gegen rivalisierende Bieter antritt, die alle die Gleichgewichtsstrategie $t_\lambda(V)$ spielen. Da das Gebot $t_\lambda(v)$ die beste Antwort des Bieters sein muß, darf es auch kein von $t_\lambda(v)$ abweichendes Gebot geben, das eine höhere Auszahlung einbringt. Was für alle abweichenden Gebote gilt, muß auch für die speziellen abweichenden Gebote $t_\lambda(x)$, $x \neq v$ gelten. Daher muß die Funktion $t_\lambda(v)$, resp. die Funktion $Z(v)$, folgenden Anforderungen genügen

$$v \in \arg\max_x \rho(x)\,(v - Z(x))\,, \quad \text{für alle } v, \tag{4}$$

mit $t_\lambda(0) = 0$ resp. $Z(0) = 0$ (Anfangsbedingung).

Nach Anwendung der Transformation $\mathcal{E}(v) := \rho(v)Z(v)$ ist diese Anforderung durch die Differentialgleichung

$$\mathcal{E}'(v) = \phi(v), \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}(0) = 0, \quad \phi(v) := v\rho'(v), \tag{5}$$

[1] Man ordne die n identisch und unabhängig verteilten Zufallsvariablen $V_1, V_2 \ldots, V_n$ in aufsteigender Ordnung und schreibe sie als $V_{(1)} \leq V_{(2)} \leq \ldots V_{(n)}$. $V_{(r)}$ heißt "r–te Rangstatistik"; $V_{(1)}$ ist die niedrigste und $V_{(n)}$ die höchste Bewertung aus der gegebenen Stichprobe der Größe n.

[2] Güth geht in umgekehrter Reihenfolge vor und ermittelt zuerst die gleichgewichtige Gebotsfunktion und daraus den erwarteten Gewinn. Seit Riley und Samuelson [1981] ist jedoch bekannt, daß man symmetrische Auktionsspiele in der Regel wesentlich einfacher lösen kann.

beschrieben, die offensichtlich eine eindeutige Lösung hat.[3] Deshalb hat auch $Z(v)$ genau eine Lösung.

Zum Vergleich betrachte man nun die Zweit–Preis-Auktion und bezeichne die gleichgewichtige, erwartete Zahlung des Gewinners mit $W(v)$. Bekanntlich ist das "wahre Bieten", $t(v) \equiv v$, bei der Zweit–Preis-Auktion eine schwach dominante Strategie. Wenn die Bieter dominante Strategien spielen,[4] dann muß also $W(v)$ die zu (4) analoge Anreizkompatibilitätsbedingung

$$v \in \arg\max_x \rho(x)\,(v - W(x)) \tag{6}$$

mit der Anfangsbedingung $W(0) = 0$ erfüllen. Der Bieter mit der höchsten Bewertung erhält dann den Zuschlag und bezahlt die zweithöchste Bewertung, $V_{(n-1)}$. Deshalb gilt $W(v) = E[V_{(n-1)} \mid V_{(n)} = v]$.

Die Anforderungen an die Funktionen $W(v)$ und $Z(v)$ sind identisch. Deshalb haben $W(v)$ und $Z(v)$ auch identische Lösungen. Also folgt (3). ∎

Bemerkung 1 *Selbstverständlich kann man die Behauptung (3) auch, mit etwas Technik, durch Ausrechnen beweisen. Integration von (5) ergibt* $\mathcal{E}(v) = \int_0^v \mathcal{E}'(y)dy + \mathcal{E}(0) = \int_0^v y\rho'(y)dy$, *resp.* $Z(v) = \frac{1}{\rho(v)}\int_0^v y\rho'(y)dy$. *Nach Einsetzen der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen* $V_{(n-1)}$ *folgt*[5] $Z(v) = \int_0^v y f_{V_{(n-1)}|V_{(n)}=v}(y)dy =: E[V_{(n-1)} \mid V_{(n)} = v]$.

Satz 1 (Auszahlungen) *Im Gleichgewicht betragen die "erwartete Auszahlung" eines Bieters* (U) *und der "erwartete Gewinn" des Verkäufers* (Π)

$$U(v) = \rho(v)\,(v - Z(v)) \tag{7}$$

$$\Pi = nE\left[\rho(V)Z(V)\right]. \tag{8}$$

Alle diese Werte sind unabhängig von λ.

Beweis $U(v)$ folgt aus der Definition der Auszahlungsfunktion eines Bieters. Man betrachte einen Bieter mit der Bewertung v. Dessen Erwartungswert der Zahlung an den Verkäufer beträgt $\rho(v)Z(v)$. Aus der Sicht des Verkäufers sind jedoch Bewertungen Zufallsvariablen. Deshalb erzielt der Verkäufer von jedem Bieter die erwartete Zahlung $E[\rho(V)Z(V)]$. Aufaddieren über alle n Bieter ergibt den erwarteten Gesamtgewinn $nE\left[\rho(V)Z(V)\right]$. ∎

[3] $v\rho'(v)$ ist offensichtlich integrierbar.

[4] Die Zweit–Preis-Auktion hat übrigens auch asymmetrische Lösungen; siehe Fußnote 9.

[5] Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte der r–ten Rangstatistik $V_{(r)}$, gegeben $V_{(s)} = v$, $s > r$, ist (für $y < v$)

$$f_{V_{(r)}|V_{(s)}=v}(y) = \frac{(s-1)!}{(r-1)!(s-r-1)!}\,\frac{f(y)F(y)^{r-1}\left(F(v)-F(y)\right)^{s-r-1}}{F(v)^{s-1}}.$$

Zu grundlegenden Ergebnissen über Rangstatistiken siehe David [1970], Kap. I.

Bemerkung 2 (Auszahlungsäquivalenz) *Die gleichgewichtigen Auszahlungen der λ–Auktion stimmen mit denen aller anderen bekannten Auktionen überein. Daran wird deutlich, daß die Einführung von Zufallszügen in die Zahlungsregel keinen Einfluß auf die gleichgewichtigen Auszahlungen hat.*

Satz 2 (Gebotsfunktion) *Die gleichgewichtige Gebotsfunktion ist*

$$t_\lambda(v) = v - \int_0^v \left(\frac{F(y)}{F(v)}\right)^{\frac{n-1}{1-\lambda}} dy. \tag{9}$$

Beweis Die Identität (3) kann man nach Multiplikation mit $\rho(v)$ und Verwendung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte von $V_{(n-1)}$ (siehe Fußn. 5) in folgender Form schreiben

$$\int_0^v y \frac{d}{dy}\left(F(y)^{n-1}\right) dy \equiv (1-\lambda)F(v)^{n-1}t_\lambda(v) + \lambda \int_0^v t_\lambda(y)\frac{d}{dy}\left(F(y)^{n-1}\right) dy. \tag{10}$$

Differentiation nach v ergibt die Differentialgleichung

$$(n-1)f(v)\,(v - t_\lambda(v)) = (1-\lambda)F(v)t'_\lambda(v). \tag{11}$$

Einsetzen bestätigt unmittelbar die behauptete Lösung (9). ■

3 Ordnungspolitische Empfehlung?

Güth postuliert zwei Anforderungen, an denen sich *"... allgemeine Auktionsregeln ausrichten sollten":* 1) Neidfreiheit und 2) Anreizkompatibilität. Er behauptet, daß nur eine Auktion, die Zweit–Preis- (oder Vickrey-)Auktion, mit beiden Anforderungen zu vereinbaren ist. Neidfreiheit führt nämlich, so Güth, zur Klasse der λ–Auktionen,[6] und Anreizkompatibilität eliminiert alle λ–Auktionen, ausgenommen die Zweit–Preis-Auktion. Es folgt eine Auseinandersetzung mit Güths Argumentation.

Eine direkte Auktion heißt "anreizkompatibel", wenn die wahrheitsgetreue Mitteilung der eigenen Bewertung ein (möglichst eindeutiges) Bayesianisches Nash-Gleichgewicht ist. Die am häufigsten beobachtete Auktion — die Erst–Preis-Auktion — ist nicht anreizkompatibel.[7] Man könnte daher vermuten, daß die Forderung der Anreizkompatibilität zu einer Einschränkung der Lösungsmenge führt.

[6] Ganz korrekt ist das übrigens nicht; denn Neidfreiheit schließt z.B. gewisse nichtkonvexe Linearkombinationen aus höchstem und zweithöchstem Gebot nicht aus.

[7] Zur Verbreitung der Erst–Preis Auktion vgl. Cassady [1967].

Das "Revelationsprinzip" lehrt uns jedoch, daß man zu jeder Auktion eine äquivalente anreizkompatible Auktion entwerfen kann. Die Betrachtung anreizkompatibler Auktionen ist daher keine Einschränkung der Allgemeinheit; die Forderung der Anreizkompatibilität schließt also nichts aus.

Zur Illustration betrachte man die Erst–Preis-Auktion mit der eindeutigen, symmetrischen Gleichgewichtsstrategie $t_0(v)$. Diese Auktion ist zwar nicht anreizkompatibel, man kann sie jedoch leicht anreizkompatibel gestalten. Dazu muß man lediglich die Zahlungsregel so formulieren, daß der Gewinner mit dem Gebot x nicht x sondern $t_0(x)$ bezahlt. Dann ist offensichtlich das "ehrliche Bieten" das eindeutige Gleichgewicht. In ähnlicher Weise kann man jede denkbare Auktion, also auch die λ–Auktion, anreizkompatibel gestalten.[8]

Ein spezieller Fall ist die Zweit–Preis-Auktion. Bei dieser Auktion ist die wahrheitsgetreue Mitteilung der eigenen Bewertung eine schwach dominante Strategie. Deshalb kann man diese Auktion als "Mechanismus in dominanten Strategien" ansehen. Andererseits ist das "ehrliche Bieten" keineswegs das einzige Gleichgewicht. Im Unterschied zu allen anderen Auktionen hat die Zweit–Preis-Auktion nämlich ein Kontinuum asymmetrischer Gleichgewichte.[9] Diese Gleichgewichte kann man zwar mit Verfeinerungen des Nash- Gleichgewichts, wie etwa mit Seltens "trembling hand perfection", eliminieren, aber welchen Sinn hat es, einerseits nur "einfache" Spiele zuzulassen, die ein Gleichgewicht in dominanten Strategien besitzen, wenn man zugleich Verfeinerungen spieltheoretischer Gleichgewichtskonzepte bemühen muß, um Eindeutigkeit des Gleichgewichts sicherzustellen?

In seiner axiomatischen Begründung der Zweit–Preis-Auktion spricht Güth zwar von der Forderung der Anreizkompatibilität, meint aber die sehr viel restriktivere Anforderung eines "Mechanismus in dominanten Strategien".[10] Diese Forderung kann nur dann überzeugen, wenn man glaubt, nur zu solchen Spielen etwas sagen zu können, die ein Gleichgewicht in dominanten Strategien besitzen — wenn man also der gesamten Spieltheorie mißtraut und sie deshalb über Bord wirft.

Im übrigen fragt man sich: Welchen Sinn haben Axiome, die gerade die besten und häufigsten Auktionen eliminieren?

In praktischen Anwendungen ist die Erst–Preis-Auktion vorherrschend. Wie Güth selbst bemerkt, sind Erst–Preis-Auktionen vorteilhaft, wenn Kol-

[8] Die λ–Auktion wird durch folgende Regeln anreizkompatibel gestaltet: 1) Der höchste Bieter gewinnt den Zuschlag; 2) Nur der Gewinner bezahlt, und zwar nach der Zahlungsregel $(1-\lambda)t_\lambda(x) + \lambda t_\lambda(X_{(n-1)})$, in Abhängigkeit vom Gebot x und vom zweithöchsten Gebot $X_{(n-1)}$.

[9] Beispiel: Ein Bieter bietet $t_1(v) \equiv 1$, alle anderen $\hat{t}_1(v) \equiv 0$. — Dieses Schicksal teilt die Zweit–Preis-Auktion übrigens mit anderen "populären" Mechanismen in dominanten Strategien, wie z.B. mit dem Clark–Groves Mechanismus aus der Theorie öffentlicher Güter.

[10] Im Beweis seines Theorem 2 verwendet er aber nur die allgemeine Forderung der Anreizkompatibilität. Der Beweis ist daher nicht richtig.

lusion zwischen Bietern zu befürchten ist.[11] Ferner sind Zweit–Preis Ausschreibungen durch den Verkäufer manipulierbar: Wer kann verhindern, daß der Verkäufer ein fiktives Gebot "nachreicht", das nur geringfügig unter dem höchsten Gebot liegt?[12] Und schließlich gilt, daß jeder risikoaverse Verkäufer die Erst–Preis-Auktion strikt präferiert.[13] Das sind nur einige der vielen Gründe für die überwältigende Popularität der Erst–Preis-Auktion bei öffentlichen und privaten Ausschreibungen, die Güth durch willkürliche Anforderungen ausschließt.

4 Neidfreiheit?

Güth definiert eine Auktion als "neidfrei", wenn kein Bieter im Gleichgewicht *"... den Nettotauschvektor eines anderen Bieters seinem eigenen vorzieht"*, wenn man — und hier kommt der Pferdefuß — *"... sein Gebot als Bewertung des Verkaufsgegenstands interpretiert."*

Man kann darüber streiten, ob Neidfreiheit ein sinnvolles, ökonomisches Konzept ist. Warum soll jedoch ein Bieter, der aufgrund seiner psychologischen Konstitution Neid empfindet, sein Gebot als seine Bewertung interpretieren, wenn doch gleichzeitig angenommen wird, daß jeder Bieter eine unverrückbare private Vorstellung über seine eigene Bewertung besitzt? Das ist nicht einmal aus der Sicht eines Außenstehenden nachvollziehbar. Schließlich ist Güths Neidfreiheit ein *ex post* Konzept. Und *ex post* besteht keine unvollständige Information über die Bewertungen der Bieter, da man aufgrund der strikten Monotonie der Gebotsfunktionen aus den Geboten eindeutig auf die zugrundeliegende Bewertung zurückschließen kann.

In der ökonomischen Diskussion fairer Teilungsregeln wurde verschiedentlich das Konzept der Neidfreiheit herangezogen.[14] Dabei wurde natürlich auf die wahren Präferenzen — im gegenwärtigen Kontext also auf die wahren Bewertungen — Bezug genommen. Wenn man Güths Anforderung der Neidfreiheit in diesem Sinne korrigiert, dann landet man, wie man leicht nachprüfen kann, allein mit einem Axiom — ohne Umweg über die λ–Auktion — bei der Zweit–Preis-Auktion. Man muß dann aber wieder nur fragen: Welchen Sinn

[11] Zu diesem und anderen Ergebnissen über Auktionsringe siehe übrigens Graham und Marshall [1987].

[12] Rothkopf, Teisberg und Kahn [1990] haben mehrere Gründe für die Seltenheit der Zweit–Preis-Auktion gesammelt.

[13] Der Gleichgewichtspreis der Erst–Preis Auktion dominiert den der Zweit–Preis-Auktion im Sinne der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung; siehe Wolfstetter [1996], Proposition 4. Wenn man ferner bedenkt, daß bei risikoaversen Bietern der optimale Mindestpreis in der Erst–Preis-Auktion geringer ist als in der Zweit–Preis-Auktion, dann kann man leicht zeigen, daß die Erst–Preis-Auktion bei Risikoaversion in vielen Fällen die Zweit–Preis-Auktion sogar im Sinne des Pareto-Kriteriums dominiert.

[14] Siehe etwa Varian [1974] oder Brams und Taylor [1992].

hat eine willkürliche Anforderung, wenn sie doch nur strikt präferierte und überwiegend beobachtete Auktionsregeln eliminiert?

Im übrigen sollte man Neidfreiheit, wenn überhaupt, als *ex ante* Konzept formulieren. Wer fordert, daß Auktionsregeln *ex post* neidfrei sein sollen, der könnte ebenso die absurde Forderung aufstellen, daß Versicherungsgeschäfte verboten werden sollten, nur weil derjenige, der sein Haus gegen Feuer versichert, nach Ausbleiben eines Brandschadens lieber mit dem tauschen würde, der in gleicher Lage ist, aber keine Versicherung abgeschlossen hat.

Literatur

[1] S. Brams and A. Taylor. An envy–free division algorithm. Economic research reports: 92-31, New York University, 1992.

[2] R. Cassady. *Auctions and Auctioneering*. University of California Press, 1967.

[3] H. A. David. *Order Statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. Wiley, 1970.

[4] D. A. Graham and R. C. Marshall. Collusive bidder behavior at single–object second–price and English auctions. *Journal of Political Economy*, 95:1217–1239, 1987.

[5] W. Güth. Preisregeln für Auktionen und Ausschreibungen: Eine ordnungspolitische Analyse. *Zeitschrift f. Wirtschafts– und Sozialwissenschaften*, 115:1–26, 1995.

[6] J. G. Riley and W. F. Samuelson. Optimal auctions. *American Economic Review*, 71:381–392, 1981.

[7] M. H. Rothkopf, T. J. Teisberg, and E. P. Kahn. Why are Vickrey auctions rare? *Journal of Political Economy*, 98:94–109, 1990.

[8] H. Varian. Equity, envy and efficiency. *Journal of Economic Theory*, 9:63–91, 1974.

[9] E. Wolfstetter. Auctions: an introduction. *Journal of Economic Surveys*, 9:1–64, 1996 (erscheint demnächst).