DE
COMPUTANDO REFRACTIONIS EFFECTU
IN MINORUM ANGULORUM DETERMINATIONIBUS MICROMETRICIS.

INTRODUCTIO.

DISSERTATIO INAUGURALIS ASTRONOMICA

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE

FRIDERICA GUILELMA

AD

SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE CAPESSENDOS

DIE XIX. M. JUNII A. MDCCCLXV.

H. L. Q. S.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

JOSEPHUS BRUNN

RHENANUS.

ADVERSARII ERUNT:

E. BECKER, STUD. ASTR.
V. KNORRE, STUD. ASTR.
F. STRATMANN, STUD. MED.

BEROLINI

TYPIS EXPRESSIT GUSTAVUS SCHADE.

PARENTIBUS

OPTIMIS DILECTISSIMIS

NEC NON

VIRO

CLARISSIMO DOCTISSIMO

GUILELMO FOERSTER,

PROFESSORI, OBSERVATORII REGII BEROLINENSIS DIRECTORI

PRAECEPTORI MAXIME COLENDO

HASCE

STUDIORUM PRIMITIAS

SACRAS ESSE VOLUI

AUCTOR.

Quamquam iam multa a viris doctissimis scripta sunt de methodis, quarum ope observationes astronomicae minoris amplitudinis angularis pro refractione commode corrigantur, et multae earum, quas praebebo, formularum iamdiu sunt vulgatae, tamen liceat, hanc quaestionem denuo pertractare. Nam quum in seriebus, quibus utuntur astronomi, saepissime, et optimo iure, termini negligantur, quorum valores pro certis acuminis limitibus empirice statuendis observationem prorsus effugiant, ideoque neglecti motuum leges, ex observationibus deductas, non sensibile corrumpant, operae pretium erit, disquirere in terminos hucusque neglectos, ut intelligamus, qui termini nunc, accuratione observationum paullatim aucta, iure omittantur, et quam rationem in tali disquisitione omnino sequi debeamus.

Quantitas refractionis astronomicae generaliter in omnibus casibus, qui mensuras accuratas et deductiones motuum regularium admittunt (i. e. usque ad distantiam 85° a vertice), tam exigua est, ut in formulis sphaericis illi arcus circuli maximi, qui intercipiuntur inter lineas visionis refractas et directas, quasi elementa linearia tractari possint. Perpauci igitur termini serierum illarum, quae lineas trigonometricas secundum dignitates arcuum, refractionem continentium, exhibent, sufficient.

Plerumque iam terminos secundi refractionis ordinis negligere licebit, exceptis iis casibus, ubi factoribus permagnis coniuncti sunt. Qua de causa secundum ordinem semper respiciemus, et in tractandis singulis formulis disquiremus, num termini ordinem illum continentes valorem non negligendum accipere possint. Tertius vero refractionis ordo, quamvis magno cum factore coniunctus, sine ulla dubitatione semper omitti poterit.

Quod ad limitem acuminis hisce in neglectionibus respiciendum attinet, hoc loco statuamus, omnes terminos negligi posse, quorum valor in casibus extremis vicesimam partem minutae secundae (0.″05) non superat. In omnibus casibus, ubi maiorem accurationem mensurarum nos attingere posse opinamur, i. e. in minimis stellarum vicinarum distantiis, refractionis effectus differentialis, quem hoc loco tractamus, tam exiguus est, ut brevissimis formulis plane exhauriatur. Termini enim, qui latiores reddunt formulas, ut infra videbimus, ea tantum conditione magnum valorem habere possunt, si magnae sunt stellarum, quas comparamus, distantiae. In maioribus a vertice distantiis, i. e. 80° superantibus, neglectio etiam dimidii minutae secundae ($0.''5$) non nocebit, quia in illis regionibus refractionis effectus tam turbulenti sunt, ut maiorem quam $0.''5$ mensurae accurationem attingere in piis desideriis sit.

Quibus relationibus generaliter constitutis si refractionis effectum in astronomicis minorum angulorum determinationibus tractare volumus, prius de methodis quarum ope eiusmodi observationes instituantur, pauca commemoranda erunt.

Optimam et expeditissimam determinationem angulorum a rotatione terrae petimus, quam pro ea quidem, quam nostra aetate attingere possumus mensurarum subtilitate, satis constantem et aequabilem statuere debemus, et cui accurate emetiendae astronomia maximam operam navat.

Etiam in illis casibus, ubi mensura minorum angulorum non a rotatione terrae regularissime instrumenta moventis petitur, sed ope cochlearum et circulorum divisorum accitis relationibus trigonometricis instituitur, etiam tum ad reticulum illud sphaericum, quod systema rotationis diurnae vel aequatoreale appellamus, quodque solum fundamentum satis constans et constituendis stellarum locis revera idoneum est, positiones arcuum observatorum referuntur.

Refractionem quidem in systemate verticali vel gravitatis, legem superficiei atmosphaerae nostrae determinantis, tanquam motum lineae visionis verticem versus directum simplicissime exprimi notissimum est. Tamen disquisitiones nostras non instituemus ex systemate verticali sed ex systemate aequatoreali, quia in hoc systemate apparentes stellarum positiones observamus, verasque intelligere volumus.

Non videbitur alienum, hoc loco pauca de lege refractionis astronomicae commemorare. Si per ϱ designamus deviationem lineae visionis refractae a directa habemus ex disquisitione viri clarissimi Bessel[1]), quem Germanici quidem astronomi omnes sequuntur

$$\varrho = \frac{\alpha}{1-\alpha}\sqrt{2\beta}\left\{\begin{array}{l} e^{-\frac{\alpha\beta}{\sin^2 z}}\,\psi(1) \\ +\dfrac{\alpha\beta}{\sin^2 z}\,2^{\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{2\alpha\beta}{\sin^2 z}}\,\psi(2) \\ +\dfrac{\alpha^2\beta^2}{2\sin^4 z}\,3^{\frac{3}{2}}\,e^{-\frac{3\alpha\beta}{\sin^2 z}}\,\psi(3) \\ +\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

[1]) Conf. Bessel, Fundamenta astronomiae, p. 40 seq. Brünnow, Sphärische Astronomie, p. 175 seq.

ubi α, β numeros constantes significant, qui pendent ab indice refractionis pro initiali densitate aeris in superficie terrae valente, et a lege diminutionis illius densitatis cum distantia a superficie terrae variabilis, z significat apparentem i. e. observatam a vertice distantiam, signum $\Psi'(r)$ integralia definita quorum formam locis citatis satis exploratam invenies[1]).

Quam formulam si explicamus secundum dignitates termini tg z invenimus[2])

$$\begin{aligned}\varrho = 57.''751 \ \mathrm{tg}\, z &- 0.''069192 \ \mathrm{tg}^3 z \\ &+ 0.''00026459 \ \mathrm{tg}^5 z - 0.''000001733 \ \mathrm{tg}^7 z \\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

et si ponimus in hac formula

$$\begin{aligned}k = 57.''751 &- 0.''069192 \ \mathrm{tg}^2 z \\ &+ 0.''00026459 \ \mathrm{tg}^4 z - 0.''000001733 \ \mathrm{tg}^6 z \\ &+ \ldots\ldots\end{aligned}$$

habemus

$$\varrho = k \ \mathrm{tg}\, z.$$

Videmus, terminum k crescente z non multum variari, nisi tg z permagnum habet valorem.

Tamen in disquirendis formulis, quae pro omnibus a vertice distantiis valent, variationis termini k rationem habeamus necesse est.

Notamus, terminum k ex iis quas posuimus formulis evadere pro certa in superficie terrae aeris et temperatura et pondere valentem. Quomodo instrumentorum illos aeris status determinantium variationes ad computandam refractionem in calculum vocentur explicare hic locus non est. Satis est demonstravisse quam rationem in tractando termino k sequi debeamus. Qui sit valor termini k in singulis casibus adhibendus, tabulae refractionis plane explicant.

Si differentiam positionum stellarum apparentium, i. e. refractione affectarum ope apparatus micrometrici comparavimus, non iam eas pro refractione corrigere possumus, quia ipsae positiones apparentes non sunt notae, ex quibus liceret depromere apparentem a vertice distantiam ad computandum $\varrho = k$ tg z. Quum autem alterius stellae locus verus notus sit, i. e. refractione non mutatus, positio eius ope tabulae, argumento verae a vertice distantiae refractionem praebentis, corrigi potest. V. cl. Bessel in libro suo „Astronomische Untersuchungen"[3]) tabulam dedit, ex qua refractio computatur ope formulae

$$\varrho = k' \ \mathrm{tg}\, \zeta$$

[1]) Conf. praeterea Brünnow, Sphär. Astr., p. 41.

[2]) Bessel, Fundam. astron., p. 43. Tab. Regiom. Introd. LIX seq. p. 538.

[3]) Bessel, Astron. Unters., Bd. I. p. 198 seq.

ubi ζ significat veram a vertice distantiam, k' numerum refractionis constantem, termino k analogum.

Sed quum alterius stellae nec verae nec apparentes coordinatae notae sint, sed differentia tantum positionum apparentium, nihil aliud restat, nisi per ambages rem tractare volumus, quam ut formulis differentialibus refractionis differentias coordinatarum corrigamus.

Si formulam
$$\varrho = k' \operatorname{tg} \zeta$$
secundum ζ differentiamus, habemus:
$$\begin{aligned}\frac{d\varrho}{d\zeta} &= k' \sec^2 \zeta + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta \\ &= k' + \left\{k' + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{cotg} \zeta\right\} \operatorname{tg}^2 \zeta \\ &= k' + k'' \operatorname{tg}^2 \zeta.\end{aligned}$$

Quia terminus
$$k'' = k' + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{cotg} \zeta$$
in formulis nostris saepissime nobis occurret, magno usui erit, in tabulam eum redigere. Quo labore supersedere possumus, quia v. cl. Bessel[1]) tabulam dedit termini:
$$\varkappa = \left\{k \operatorname{tg} z + \frac{dk}{dz} \operatorname{cotg} z\right\} \frac{\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg}^2 \zeta}$$
ubi z significat veram, ζ apparentem a vertice distantiam, k numerum constantem refractionis, argumento z ex tabulis sumendam.

Qui terminus $\varkappa$ tam propinquus est nostro termino k'', ut plerisque casibus eos mutare liceat. Quod ubi permissum non est, facile k'' per $\varkappa$ exprimere possumus. Videamus, quae sit relatio terminorum k'' et $\varkappa$.

Si differentiamus formulam: $k' \operatorname{tg} \zeta = k \operatorname{tg} z$

habemus
$$k' \sec^2 \zeta + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta = \left\{k \sec^2 z + \frac{dk}{dz} \operatorname{cotg} z\right\} \frac{dz}{d\zeta}$$
$$k' + \left\{k' + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{cotg} \zeta\right\} \operatorname{tg}^2 \zeta = \left[k + \left\{k + \frac{dk}{dz} \operatorname{cotg} z\right\} \operatorname{tg}^2 z\right] \frac{dz}{d\zeta}$$
ubi $\frac{dz}{d\zeta}$ invenitur, si differentiatur formula
$$\zeta = z + k \operatorname{tg} z.$$
$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dz} &= 1 + k \sec^2 z + \frac{dk}{dz} \operatorname{tg} z \\ &= 1 + k + \left\{k + \frac{dk}{dz} \operatorname{cotg} z\right\} \operatorname{tg}^2 z\end{aligned}$$

---

[1]) Bessel, Astron. Unters., Bd. I. p. 198 seq.

unde prodit
$$\frac{dz}{d\zeta}=1-[k+\{k+\frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\}\operatorname{tg}^2 z]-\ldots\ldots.$$

Quem valorem si introducimus, habemus
$$\{k'+\frac{dk'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta\}\operatorname{tg}^2\zeta=k-k'+\{k+\frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\}\operatorname{tg}^2 z-[k+\{k+\frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\}\operatorname{tg}^2 z]^2\ldots..$$

Est autem
$$k-k'=k\left\{1-\frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg}\zeta}\right\}=k\frac{\operatorname{tg}\zeta-\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg}\zeta}$$
$$\operatorname{tg}\zeta=\operatorname{tg}(z+k\operatorname{tg} z)$$
et si formulam illam explicamus, negligentes tertium refractionis ordinem
$$\operatorname{tg}\zeta=\frac{\operatorname{tg} z+k\operatorname{tg} z}{1-k\operatorname{tg}^2 z}=\frac{\operatorname{tg} z(1+k)}{1-k\operatorname{tg}^2 z}\ldots\ldots$$

Qua relatione efficitur
$$k-k'=k\operatorname{tg} z\frac{1+k-1+k\operatorname{tg}^2 z}{(1+k)\operatorname{tg} z}\ldots..$$
$$=k^2\frac{1+\operatorname{tg}^2 z}{1+k}$$
$$k-k'=k^2(1+\operatorname{tg}^2 z)\ldots.$$

Quod si respicimus, simulque introducimus
$$k''=k'+\frac{dk'}{d\zeta}\operatorname{cotg}\zeta;\qquad \varkappa=\{k+\frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z\}\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg}^2\zeta}$$
formula nostra efficitur
$$k''=\varkappa-\frac{A}{\operatorname{tg}^2\zeta}$$
ubi
$$A=-k^2\operatorname{tg}^2 z+2k\operatorname{tg}^2 z(k+\frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z)+\{(k+\frac{dk}{dz}\operatorname{cotg} z)\operatorname{tg}^2 z\}^2$$

Habemus igitur
$$k''=\varkappa-2k\varkappa-k^2\frac{\operatorname{tg}^2 z}{\operatorname{tg}^2\zeta}-\varkappa^2\operatorname{tg}^2\zeta$$

Ex hac formula terminum alterum et tertium negligere licet, quia ex secundo refractionis ordine sunt neque factorem habent satis magnum, qui respectione dignus sit. Ultimum vero terminum non iam omnino reiicere licebit, quia in magnis a vertice distantiis $\operatorname{tg}\zeta$ permagnum habet valorem. Sed satis accurate hunc terminum respiciemus ope parvae tabulae sequentis, terminum $\varkappa^2\operatorname{tg}^2\zeta$ per $\varkappa$ expressum continentis.

$\zeta=$	85.°0	84.°5	84.°0	83.°5	83.°0
$\varkappa^2\operatorname{tg}^2\zeta=$	$\frac{\varkappa}{40}$	$\frac{\varkappa}{48}$	$\frac{\varkappa}{52}$	$\frac{\varkappa}{55}$	$\frac{\varkappa}{58}$

Videbimus infra, plerisque in casibus correctionem illam termini $\varkappa$ evanescere.

Priusquam ad quaestionem nostram transimus, formulas sphaericas, quibus utimur, ponimus.

In triangulo sphaerico inter polum rotationis diurnae (P) verticem (Z) et positionem veram stellae observatae (S) sit

$$
\begin{aligned}
90^\circ-\varphi &\text{ arcus } PZ\\
90^\circ-\delta &\text{ arcus } PS\\
\zeta &\text{ arcus } SZ\\
t &\text{ angulus sphaericus } SPZ\\
s &\text{ angulus sphaericus } PSZ
\end{aligned}
$$

Habemus deinde

$$
\begin{aligned}
\sin\zeta\ \sin s &= \cos\varphi\ \sin t\\
\sin\zeta\ \cos s &= \sin\varphi\ \cos\delta - \cos\varphi\ \sin\delta\ \cos t\\
\cos\zeta &= \sin\varphi\ \sin\delta + \cos\varphi\ \cos\delta\ \cos t
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Si introducimus

$$
\begin{aligned}
\cos\varphi\ \cos t &= \cos M\ \sin\psi\\
\sin\varphi &= \cos M\ \cos\psi
\end{aligned}
\tag{2}
$$

unde sequitur $\quad \cos\varphi\ \sin t = \sin M$

invenimus:

$$
\begin{aligned}
\sin\zeta\ \sin s &= \sin M\\
\sin\zeta\ \cos s &= \cos M\ \cos(\psi+\delta)\\
\cos\zeta &= \cos M\ \sin(\psi+\delta)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

quibus relationibus saepissime in contrahendis formulis utemur.

Quum saepissime nobis occurrent relationes

$$\frac{d\zeta}{d\delta},\ \frac{ds}{d\delta},\ \frac{d\zeta}{dt},\ \frac{ds}{dt}$$

hoc loco eas computamus.

Differentiando tertiam formulam (1) constante t invenimus

$$
\begin{aligned}
-\sin\zeta d\zeta &= \{\sin\varphi\ \cos d - \cos\varphi\ \sin\delta\ \cos t\}\, d\delta\\
&= \sin\zeta\ \cos s\, d\delta
\end{aligned}
$$

$$\frac{d\zeta}{d\delta} = -\cos s. \tag{4}$$

Item differentiando formulam secundam (1) habemus

$$\cos\zeta\ \cos s\, d\zeta - \sin\zeta\ \sin s\, ds = -\{\sin\varphi\ \sin\delta + \cos\varphi\ \cos\delta\ \cos t\}\, d\delta$$

et si introducimus (4) et (1_3)

$$\sin\zeta\ \sin s\frac{ds}{d\delta} = \cos\zeta - \cos\zeta\ \cos^2 s$$

$$\frac{ds}{d\delta} = \operatorname{cotg}\zeta\ \sin s. \tag{5}$$

Si formulam tertiam (1) constante δ differentiamus, prodit

$$-\sin\zeta d\zeta = -\cos\varphi \cos\delta \sin t dt$$
$$= -\sin\zeta \sin s \cos\delta dt$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \cos\delta \sin s \qquad (6)$$

itemque ex formula prima (1) obtinemus:

$$\sin\zeta \cos s ds = \cos\varphi \cos t dt - \cos\zeta \sin s d\zeta$$

unde sequitur introducto (6)

$$\sin\zeta \cos s \frac{ds}{dt} = \cos\varphi \cos t - \cos\zeta \cos\delta \sin^2 s.$$

Est autem ex triangulo sphaerico PZS

$$\cos\varphi \cos t = \cos\zeta \cos\delta - \sin\zeta \cos s \sin\delta$$

qua de causa

$$\sin\zeta \cos s \frac{ds}{dt} = \cos\zeta \cos\delta \cos^2 s - \sin\zeta \cos s \sin\delta$$
$$\frac{ds}{dt} = \operatorname{cotg}\zeta \cos\delta \cos s - \sin\delta. \qquad (7)$$

Quia disquisitiones nostras non instituemus ex systemate verticali, sed aequatoreali, refractionis effectum in huius systematis coordinatas ponamus necesse est.

Vi refractionis in stellarum positiones et angulus horarius t diminuitur angulo p et declinatio δ augetur arcu q.

Formulas, quibus habemus p et q, triangulum praebet, inter polum rotationis diurnae (P) positionem stellae veram (S) et apparentem (S_0) constructum, ex quo, si per ϱ designamus arcum SS_0 sequuntur relationes:

$$\begin{aligned} \sin p \cos(\delta + q) &= \sin\varrho \sin s \\ \cos p \cos(\delta + q) &= \cos\varrho \cos\delta - \sin\varrho \sin\delta \cos s \\ \sin(\delta + q) &= \cos\varrho \sin\delta + \sin\varrho \cos\delta \cos s \end{aligned} \qquad (8)$$

ubi ϱ invenitur ex tabulis refractionis

$$\varrho = k' \operatorname{tg}\zeta.$$

Ex tertia aequatione (8) sequitur

$$\sin\delta \cos q + \cos\delta \sin q = \sin\delta \cos\varrho + \cos\delta \sin\varrho \cos s$$

et si pro $\sin q$ et $\cos q$ itemque pro $\sin\varrho$ et $\cos\varrho$ ponimus series secundum dignitates arcus explicatas, neglectis terminis altioris ordinis:

$$\sin\delta \left\{1 - \frac{q^2}{2} + \ldots\right\} + q\cos\delta + \ldots = \sin\delta \left\{1 - \frac{\varrho^2}{2} + \ldots\right\} + \varrho \cos\delta \cos s + \ldots$$

In terminis secundi ordinis pro q ponere licet valorem approximatum

$$q = \varrho \cos s$$

unde prodit

$$q = \varrho \cos s - \frac{1}{2}\varrho^2 \sin^2 s \operatorname{tg}\delta. \qquad (9)$$

Item habemus ex prima aequatione (8)

$$\sin p = \sin \varrho \, \sin s \, \sec(\delta + q)$$
$$= \sin \varrho \, \sin s \, \sec \delta \, \{1 + \operatorname{tg} \delta \, \operatorname{tg} q + \ldots\}$$

et si pro $\operatorname{tg} q$ ponimus valorem approximativum

$$q = \varrho \, \cos s$$
$$p = \varrho \, \sin s \, \sec \delta + \varrho^2 \sin s \, \cos s \, \operatorname{tg} \delta \, \sec \delta \qquad (10)$$

et introducto $\varrho = k' \operatorname{tg} \zeta$

$$p = k' \operatorname{tg} \zeta \, \sin s \, \sec \delta + k'^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \, \sin s \, \cos s \, \operatorname{tg} \delta \, \sec \delta$$
$$q = k' \operatorname{tg} \zeta \, \cos s - \frac{1}{2} k'^2 \operatorname{tg}^2 \zeta \, \sin^2 s \, \operatorname{tg} \delta \qquad (11^*)$$

Si ope apparatus micrometrici comparavimus positiones duarum stellarum S' et S, opus est, ut differentiam positionem observatam[1]) corrigamus quantitatibus $(p' - p)$ et $(q' - q)$, ubi p' et q' ad stellam S', p et q ad S pertinent.

Quantitas terminorum $(p' - p)$ et $(q' - q)$ pendet ab incremento terminorum p et q si t et δ variantur. Videmus autem ex formulis (11*) vix operae pretium esse respicere ultimos terminos secundum refractionis ordinem continentes. Crescente t enim s non ita multo variatur nisi in maximis declinationibus, variatio tangentis ζ non respicienda nisi in maximis a vertice distantiis, si simul t a 6^h non multum differt. Ibi autem $\operatorname{tg} \delta$ et $\sec \delta$ perexigua factores sunt. Simili modo de incrementis ex variatione δ iudicare licet.

Sed quo facilius intelligas, quam exigua sint incrementa illa, tabulam ponemus, incrementu a variatione δ pendentia continentem

Si $\sin s \, \cos s = 1$ habemus pro

$\delta =$	87.°5	87.°0	86.°5	86.°0	85.°5
$\varrho^2 \sin s \, \cos s \, \operatorname{tg} \delta \, \sec \delta =$	5.″96	4.″30	3.″27	2.″57	2.″11
diff.	1.″66	1.″03	0.″70	0.″46	
$\sec \delta =$	23	19	16	14	13

Quamquam incrementa huius termini pro $\varDelta \delta = 30'$ non tam minutae sunt, tamen terminum illum in maximis quibus incidimus declinationibus negligere possumus, quia differentiae supra notatae secante δ divisae, i. e. circulo maximo mensae, eum quem supra posuimus subtilitatis finem effugiunt.

In magnis a vertice distantiis terminus ille maximum accipit valorem, si t a $40°$ non multum distat, quia ibi $\sin s \, \cos s \, \operatorname{tg} \delta \, \sec \delta$ maximum est. Invenimus pro illo angulo horario:

---

[1]) Statuimus hoc loco maximam quam ope apparatus micrometrici observare possumus stellarum distantiam esse $= 30'$.

si $\zeta = 85^\circ$ $\quad\zeta = 84^\circ\, 32'$

$$\varrho^2 \sin s \;\cos s \;\operatorname{tg}\delta \;\sec\delta = 0.''19 \qquad 0.''17$$

diff. $\quad 0.''02.$

Non est igitur causa cur terminum illum respiciamus.

Pro termino $\frac{1}{2}\,\varrho^2 \sin^2 s \operatorname{tg}\delta$ habemus valores, si $\sin s = 1$;

$$\delta = \quad 88.^\circ 5 \qquad 88.^\circ 0 \qquad 87.^\circ 5$$

$$\frac{1}{2}\varrho^2 \sin^2 s \operatorname{tg}\delta = \quad 0.''18 \qquad 0.''14 \qquad 0.''11$$

diff. $\quad 0.''04 \quad 0.''03$

si $\zeta = \quad 85^\circ \qquad 84.^\circ 5$

$$\frac{1}{2}\,\varrho^2 \operatorname{tg}\delta = \quad 0.''50 \qquad 0.''48$$

diff. $\quad 0.''02$

unde sequitur, terminum illum semper reiici posse.

Quamquam ex hac tabula videmus, etiam in maximis declinationibus non oportere, ut terminos illos respiciamus, tamen in disquisitione motus stellarum polarium eos respiciemus. In omnibus aliis casibus accipiemus

$$\begin{aligned} p &= k' \operatorname{tg}\zeta \,\sin s \;\sec\delta \\ q &= k' \operatorname{tg}\zeta \,\cos s. \end{aligned} \tag{11}$$

Quia saepissime utemur relationibus

$$\frac{dp}{d\delta},\ \frac{dq}{d\delta},\ \frac{dp}{dt},\ \frac{dq}{dt}$$

hoc loco eas computemus.

Est ex (11) $\quad p = k' \operatorname{tg}\zeta \,\sin s \;\sec\delta$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\delta} = &\left\{k' \sec^2\zeta + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{tg}\zeta\right\} \frac{d\zeta}{d\delta} \sin s \;\sec\delta \\ &+ k' \operatorname{tg}\zeta \,\cos s \;\sec\delta\, \frac{ds}{d\delta} \\ &+ k' \operatorname{tg}\zeta \,\sin s \;\sec^2\delta \,\sin\delta \end{aligned}$$

et introductis k'' et $\frac{ds}{d\delta}$ ex (5), $\frac{d\zeta}{d\delta}$ ex (4)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\delta} &= -\,k'' \operatorname{tg}^2\zeta \,\sin s \;\cos s \;\sec\delta - k' \sin s \;\cos s \;\sec\delta \\ &\quad + k' \sin s \;\cos s \;\sec\delta + k' \operatorname{tg}\zeta \,\sin s \;\sec^2\delta \,\sin\delta \\ &= -\,k'' \operatorname{tg}^2\zeta \,\sin s \;\cos s \;\sec\delta + k' \operatorname{tg}\zeta \,\sin s \;\sec\delta \;\operatorname{tg}\delta. \end{aligned}$$

Item ex (11)

$$q = k' \operatorname{tg} \zeta \cos s$$

$$\frac{dq}{d\delta} = \left\{k' \sec^2 \zeta + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta\right\} \frac{d\zeta}{d\delta} \cos s - k' \operatorname{tg} \zeta \sin s \frac{ds}{d\delta}$$

et introductis k'' et $\frac{d\zeta}{d\delta}$ ex (4), $\frac{ds}{d\delta}$ ex (5)

$$\frac{dq}{d\delta} = - k'' \operatorname{tg}^2 \zeta \cos^2 s - k' \cos^2 s - k' \sin^2 s$$

$$= - k'' \operatorname{tg}^2 \zeta \cos^2 s - k'.$$

Quum sit ex (11) $\qquad p = k' \operatorname{tg} \zeta \sin s \sec \delta$

invenimus
$$\frac{dp}{dt} = \left\{k' \sec^2 \zeta \sin s \sec \delta + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta \sin s \sec \delta\right\} \frac{d\zeta}{dt}$$

$$+ k' \operatorname{tg} \zeta \cos s \sec \delta \frac{ds}{dt}$$

$$= \left\{\operatorname{tg}^2 \zeta \sin s \sec \delta \left[k' + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{cotg} \zeta\right] + k' \sin s \sec \delta\right\} \frac{d\zeta}{dt}$$

$$+ k' \operatorname{tg} \zeta \cos s \sec \delta \frac{ds}{dt}$$

et introductis k'' et $\frac{d\zeta}{dt}$ ex (6), $\frac{ds}{dt}$ ex (7)

$$\frac{dp}{dt} = k'' \operatorname{tg}^2 \zeta \sin^2 s + k' \left\{\sin^2 s + \cos^2 s - \operatorname{tg} \zeta \cos s \operatorname{tg} \delta\right\}$$

$$= k'' \operatorname{tg}^2 \zeta \sin^2 s + k' \left\{1 - \operatorname{tg} \zeta \cos s \operatorname{tg} \delta\right\}.$$

Est autem (pag. 12)

$$\cos \varphi \cos t = \cos \zeta \cos \delta - \sin \zeta \cos s \sin \delta$$

$$\frac{\cos \varphi \cos t}{\cos \zeta \cos \delta} = 1 - \operatorname{tg} \zeta \cos s \operatorname{tg} \delta$$

quod si introducimus, fit

$$\frac{dp}{dt} = k'' \operatorname{tg}^2 \zeta \sin^2 s + k' \frac{\cos \varphi \cos t}{\cos \zeta \cos \delta}.$$

Item habemus ex formulis (11)

$$q = k' \operatorname{tg} \zeta \cos s$$

itaque
$$\frac{dq}{dt} = \left\{k' \sec^2 \zeta \cos s + \frac{dk'}{d\zeta} \operatorname{tg} \zeta \cos s\right\} \frac{d\zeta}{dt}$$

$$- k' \operatorname{tg} \zeta \sin s \frac{ds}{dt}$$

$$= \left\{\left[k' + \frac{dk'}{dt} \operatorname{cotg} \zeta\right] \operatorname{tg}^2 \zeta \cos s + k' \cos s\right\} \frac{d\zeta}{dt}$$

$$- k' \operatorname{tg} \zeta \sin s \frac{ds}{dt}$$

et si introducimus k'', $\frac{d\zeta}{dt}$ ex (6), $\frac{ds}{dt}$ ex (7)

$$\frac{dq}{dt} = k'' \operatorname{tg}^2\zeta \sin s \cos s \cos\delta + k' \operatorname{tg}\zeta \sin s \sin\delta.$$

In omnibus his formulis pro k' ponere licet k'' neglecto $\frac{dk'}{d\zeta}$ cotg ζ. Est enim $\frac{dk'}{d\zeta}$ cotg ζ valde exiguum, si non permagnum ζ; si ζ magnum habet valorem, $\frac{dk'}{d\zeta}$ quidem non omnino negligendum, sed ibi cotg ζ valde exiguum est[1]).

Quod si respicimus, introducimusque formulas (2) et (3) invenimus parva reductione:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{d\delta} &= -\frac{k'' \operatorname{tg} M}{\sin^2(\psi+\delta)\cos^2\delta}\cos(\psi+2\delta) \\
\frac{dq}{d\delta} &= -\frac{k''}{\sin^2(\psi+\delta)} \\
\frac{dp}{dt} &= k''\left\{\frac{\operatorname{tg}^2 M}{\sin^2(\psi+\delta)} + \frac{\sin\psi}{\sin(\psi+\delta)\cos\delta}\right\} \qquad (12) \\
\frac{dq}{dt} &= \frac{k'' \operatorname{tg} M \cos\psi}{\sin^2(\psi+\delta)}.
\end{aligned}$$

Quibus relationibus constitutis transire possumus ad deducendas formulas in reductione observationum micrometricarum adhibendas, quas alio loco tractare ac edere in animo est.

---

[1]) Differentiam $k'' - k'$ omnino reiici posse hoc loco non summo rigore demonstrari potest. In tractandis singulis apparatibus micrometricis neglectio illa probanda erit.

VITA.

Natus sum Henricus Iosephus Hubertus Brunn die octava mensis Augusti anno huius saeculi quadragesimo secundo Straelenis, oppido veteris ducatus Gelriae, patre Henrico, matre Iosephina e gente Keuller, quibus adhuc vivis maxime laetor. Fidem profiteor catholicam. Primis litterarum elementis imbutus per quinquennium alumnus fui collegii Augustiani Gaesdonckensis. Maturitatis testimonium in gymnasio Monasteriensi consecutus auctumno anni sexagesimi primi in academia Monasteriensi inter cives academicos receptus sum. Docuerunt me ibi viri excellentissimi professores Schlueter, Heis, Hittorf, Karsch, doctores Nitschke, Hagemann. Ut observationibus astronomicis me exercerem v. cl. Heis magna liberatitate permisit.

Auctumno anni sequentis in hanc almam litterarum universitatem me contuli, ubi scholis interfui virorum praeclarissimorum professorum: Kummer, Dove, Poggendorff, Trendelenburg, Arndt, Foerster, doctoris Quincke. Omnibus his viris, optime de me meritis, magnas habeo gratias; imprimis vero illustrissimo praeceptori Foerster, qui et in studiis consilio suo libentissime semper me adiuverit, et laborum practicorum in observatorio Berolinensi participem me fecerit, pium semper servabo animum.

THESES.

1. Methodus, qua stellarum transitus ope visus et tactus, apparatui electrico applicati, observantur, maiore gaudet securitate, quam methodus, quae visu et auditu nititur.
2. Legis refractionis forma, a v. cl. Bessel in tabulas redacta, maxima fide digna.
3. Maximi est momenti, ad determinationem experimentalem parallaxis solaris velocitatem propagationis luminis in spatio coelesti diligentissime denuo explorari.
4. In adhibendo calculo probabilitatis ad discussionem motuum stellarum, quae fixae appellantur, etiam atque etiam circumspecte agendum est.