

DE  
SUPERFICIEBUS IN PLANUM EXPLICABILIBUS  
PRIMORUM SEPTEM ORDINUM.

---

DISSERTATIO INAUGURALIS  
QUAM  
CONSENSU ET AUCTORITATE  
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS  
IN  
ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE  
FRIDERICA GUILELMA  
AD  
SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES  
RITE CAPESSENDOS  
DIE VI. M. AUGUSTI A. MDCCCLXIV.  
H. L. Q. S.  
PUBLICE DEFENDET  
AUCTOR  
CAROLUS ARMINIUS AMANDUS SCHWARZ,  
SILESIUS.

---

ADVERSARIORUM PARTES SUSCIPERE VOLUNT:  
THEODORUS BERNER, PHIL. STUD.  
GEORGII CANTOR, PHIL. STUD.  
AEMILIUS LAMPE, PHIL. STUD.

---

BEROLINI  
TYPIS EXPRESSIT GEORGII REIMER.



P A T R I

OPTIMO DILECTISSIMO

NEC MINUS

VIRIS ILLUSTRISSIMIS AMPLISSIMIS CELEBERRIMIS

EDUARDO KUMMER

PHILOSOPHIAE DOCTORI ARTIUM LIBERALIUM MAGISTRO MATHEYSIS PROFESSORI PUBLICO ORDINARIO  
ACADEMIAR SCIENTIARUM REGIAE BORUSSICAE SOCIO ET SECRETARIO PERPETUO CET. CET.

ET

CAROLO WEIERSTRASS

PHILOSOPHIAE DOCTORI ARTIUM LIBERALIUM MAGISTRO MATHEYSIS PROFESSORI PUBLICO ORDINARIO  
ACADEMIAR SCIENTIARUM REGIAE BORUSSICAE SOCIO CET. CET.

SUMMA CUM REVERENTIA COLENDIS

HASCE STUDIORUM PRIMITIAS

PIO GRATIOQUE ANIMO

OFFERT

AUCTOR.

Aequatio plani superficiem in planum explicabilem generantis ab uno parametrio pendet; quamobrem

$$x\varphi_1(t) + y\varphi_2(t) + z\varphi_3(t) + w\varphi_4(t) = 0,$$

ubi  $x : y : z : w$  sunt coordinatae, generalis forma illius est.

Superficies explicabiles, quae primae contemplanti sese offerunt, eae sunt, in quibus haec aequatio *rationaliter* a parametrio pendet, sive formam habet

$$U = at^n + nb t^{n-1} + \dots + q = 0,$$

ubi  $a, b, \dots, q$  sunt functiones integrae lineares coordinatarum,  $n$  numerus integer.

Si numero  $n$  tribuuntur valores  $n = 3, 4, 5$ , his superficiebus et earum reciprociis omnes superficies explicabiles algebraicae continentur, quae ad hoc tempus accuratius sunt disquisitae, exceptis duabus superficiebus explicabilibus octavi ordinis, quarum altera duabus superficiebus secundi ordinis inscripta est, id est, tangentibus curvae intersectionis generatur, altera duabus superficiebus secundi ordinis circumscripta est, id est, planis tangentibus involvitur, quae illis sunt communia \*).

Quum in aequationem plani generantis parameter  $t$  rationaliter ingrediatur, his superficiebus proprium est, quod uno solo plano moto generari possunt.

Quamobrem vir Cel. *Cayley* tales superficies *planares* appellavit.

\*) A. Cayley, Note sur les Hyperdéterminants. Diarium mathesis purae et appl. *Crell*, vol. 34, pag. 15. 1847.

- On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order. The Cambridge and Dublin Math. Journal. New Series, vol. V, pag. 46—58. 1850.
- On the developable derived from an equation of the fifth order. *Ibidem* pag. 152—159.
- On certain developable surfaces. The Quarterly Journ. of Math. 1863, pag. 108—126.

G. Salmon, Analytic Geometry of three dimensions, pag. 253—256. 1862.

„I propose, inquit \*), to term the family of developables treated of in this paper ‘planar developables’. In general, the coefficients of the generating plane of a developable being algebraical functions of a variable parameter  $t$ , the equation rationalized with respect to the parameter belongs to a system of  $n$  different planes; the developable which is the envelope of such a system may be termed a ‘multiplanar developable’ and in the particular case of  $n$  being equal to unity, we have a planar developable. It would be very desirable to have some means of ascertaining from the equation of a developable what the degree of its ‘planarity’ is.“

Huic quaestioni nunc ita respondendum est.

Omnis curvae planae, quae in eadem superficie rectilinea irreductibili simplices sitae sunt, praeter generatrices ipsas, ad eandem classem algebraicam pertinent \*\*), nam si duas contemplamur, unicuique puncto alterius per rectas superficie unum punctum alterius algebraice respondet; itaque coordinatae alterius rationaliter per coordinatas alterius exprimi possunt. —

Si curva algebraica  $r^{\mu}$  ordinis  $\frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2} - \rho$  punctis duplicibus praedita est, coordinatae ejus rationaliter exprimi possunt:

si  $\rho = 0$ , sive si curva maximo numero punctorum duplicium praedita est, per unam variabilem,

si  $\rho = 1$ , per unam variabilem et radicem quadratam ex functione integra tertii vel quarti ordinis hujus variabilis,

si  $\rho = 2$ , per unam variabilem et radicem quadratam ex functione integra quinti vel sexti ordinis,

si  $\rho > 2$ , coordinatae rationaliter exprimi possunt per unam variabilem  $\xi$  et algebraicam functionem ejus  $\eta$ , quae junguntur aequatione  $\mu^{\mu}$  ordinis secundum utramque variabilem, ubi  $\rho = 2\mu - 3$  aut  $= 2\mu - 2$ .

In casu generali coordinatae non possunt rationaliter exprimi per unam variabilem  $\xi$  et functionem algebraicam ejus  $\eta$ , radicem aequationis algebraicae  $F(\xi, \eta) = 0$ , quae secundum variabilem  $\eta$  inferioris ordinis est quam  $\mu^{\mu}$ .

In eadem classe algebraica, qua una sectio plana simplex, tota superficies rectilinea ponenda est.

Si igitur in superficie rectilinea aut una recta simplex sita est, quae non est una generatrix, sive talis, per quam omnes generatrices superficie

\*) Camb. and Dubl. Math. Journ. N. S. vol. V. pag. 158.

\*\*) Riemann, Theorie der Abelschen Functionen. Diarium mathesis purae et appl. Crelle, vol. 54, pag. 133.

transeunt, — id quod in superficiebus explicabilibus fieri non potest —, aut una sectio conica simplex, aut una curva tertii ordinis puncto duplice praedita, aut alia curva simplex cum maximo numero punctorum duplicitum, superficies haec rectilinea in ea classe ponenda erit, quae pertinet ad valorem  $\varphi = 0$ .

Idem de superficiebus in planum explicabilibus dicendum; aequatio plani generantis rationaliter exprimi potest per easdem variabiles  $\xi$  et  $\eta$ .

Si igitur  $m$  est ordo curvae recessus,  $x$  ordo curvae duplicitis superficie explicabilis  $r^{\text{ti}}$  ordinis, erit

$$\varphi = \frac{(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2} - (m+x).$$

Si hic numerus  $\varphi$  aequalis est cifrae, superficies explicabilis est planaris, si  $= 1$  vel  $= 2$ , biplanaris; si  $\varphi$  est  $> 2$ , in casu generali ordo *planaritatis* superficie explicabilis est  $\frac{1}{2}(\varphi+3)$  aut  $\frac{1}{2}(\varphi+2)$ .

Jam disquisitionibus, quae sequuntur, demonstrabimus, omnes superficies explicabiles proprias primorum septem ordinum esse planares.

Superficies explicabiles primorum trium ordinum sunt impropriae, id est, aut coni vel cylindri, aut systemata his reciproca, systemata omnium rectarum curvam planam tangentium, quae quodammodo pro superficiebus explicabilibus haberi possunt. Superficies explicabiles proprias tertii ordinis non existere, ita demonstrari potest. Quaevis superficies explicabilis propria curvam cuspidalem habet; superficies tertii ordinis irreductibilis praeter rectam curvam duplicem habere nequit, recta autem curva cuspidalis superficie explicabilis esse non potest; q. d. e.

#### Superficies explicabiles quarti ordinis.

Superficies explicabiles quarti ordinis earumque proprietates penitus a geometris sunt exploratae.

Omnes superficies explicabiles quarti ordinis inter se sunt collineares et reciprocae; aequatio plani generantis formae est

$$at^3 + 3bt^2 + 3ct + d = 0,$$

aequatio superficie ipsius

$$(ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) = 0.$$

Curva recessus tertii ordinis est, et tangentibus curvarum tertii ordinis duplicitis curvatura superficies explicabiles quarti ordinis generantur.

Quodvis planum tangens duas generatrices infinite propinquas et sectionem conicam exsecat; si duo plana tangentia contemplamur, alterum planum tangit sectionem conicam altero piano exsectam; duae sectiones conicae communem habent rectam tangentem. Hac ratione constructio synthetica superficie explicabilis quarti ordinis data est:

Omnibus planis, quae tangunt duas sectiones conicas in planis diversis sitas, quibus una recta tangens est communis, circumscribitur superficies explicabilis quarti ordinis.

Generalius:

Si duabus superficiebus secundi ordinis una recta est communis, superficies explicabilis et inscripta et circumscripta quarti ordinis est.

Quaevis superficies explicabilis quarti ordinis sibi ipsa est reciproca et reciproce sita secundum infinitam multitudinem superficierum secundi ordinis ex. gr.

$$k^3 a^2 - 3k^2 b^2 + 3k c^2 - d^2 = 0.$$

Superficies explicabiles quinti ordinis.

Superficies explicabiles quinti ordinis earumque proprietates a viris Ill. *Cayley*, *Chasles*, *Cremona* tam copiose jam examinatae sunt \*), ut fere nihil ab his nobis relictum sit.

Quum tamen methodus, qua rem aggressi sumus, tam sit simplex et elementaris, ut omnes proprietates generales ex ea quasi ex ipso fonte deduci possint, has superficies, primas superficies explicabiles proprias imparis ordinis, paulo accuratius examinemus, quam ad theorema nostrum demonstrandum opus est.

Quodvis planum tangens superficiem explicabilem quinti ordinis duas generatrices infinite propinquas et curvam tertii ordinis exsecat.

Haec curva irreductibilis est et generatricibus in punto non singulari tangitur, in alio punto secatur, si planum tangens curvam recessus osculatur in punto non singulari.

\*) *A. Cayley*, On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order. L. c.

— „Special Quintic Developable.” Quart. Journ. 1863. pag. 114—121.

*Conf. Salmon*, Anal. Geom. of three dim. pag. 254.

*Chasles*, Propriétés des courbes à double courbure du quatrième ordre provenant de l’intersection de deux surfaces du second ordre. Comptes rendus de l’Académie des Sciences, vol. 54. 1862. I. pag. 317—324. 418—429.

— Propriétés des surfaces développables circonscrites à deux surfaces du second ordre. Ibidem pag. 715—722.

*L. Cremona*, Sur les surfaces développables du cinquième ordre. Ibidem pag. 604—608.

Curva recessus superficierum explicabilium quinti ordinis majoris ordinis est quam tertii, nam tangentibus curvarum tertii ordinis superficies explicabiles quarti ordinis generari vidimus.

Quo loco planum aliquod curva recessus sive cuspidali superficie explicabilis perforatur, sectio plana cuspide praedita est.

In puncto osculationis plani tangentis tria puncta curvae recessus consumuntur; itaque curva plana tertii ordinis, in hoc plano tangente sita, una cuspide praedita est; plures habere non potest.

Jam ex hac re concludere possumus, omnes superficies explicabiles proprias quinti ordinis esse planares.

Omnis curvae tertii ordinis cuspide praeditae hac forma continentur

$$a^2d - b^3 = 0;$$

aequatio rectae tangentis est  $at^3 + 3bt^2 + d = 0$ , punctum  $a = 0$ ,  $b = 0$  est cuspis,  $a = 0$  recta tangens cuspidem, punctum  $b = 0$ ,  $d = 0$  est punctum inflexionis, recta  $d = 0$  recta tangens inflexionalis.

Planum tangens superficiem explicabilem, quod dicitur per rectam  $d = 0$ , est planum tangens inflexionale sive stationarium; praeter tres generatrices infinite propinquas sectionem conicam exsecat, quae tangit priori piano superficiem tangente, itaque etiam recta  $d = 0$ , quae est intersectio duorum planorum.

A quovis punto rectae  $d = 0$  et ad sectionem conicam et ad curvam tertii ordinis una recta tangens proficiscitur; aequatio plani per has rectas ducti, sive plani superficiem explicabilem generantis, omnibus reductionibus factis hujus formae est:

$$U = at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + e = 0.$$

Virum Cel. Cayley, qui primus hanc formam tractavit, fugit, hanc generalem esse aequationem plani tangentis superficierum explicabilium quinti ordinis.

Quum quatuor tantum plana  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $e$  in hac aequatione inveniantur, concludimus:

*Omnis superficies explicabiles quinti ordinis propriae inter se sunt collineares et reciprocae.*

*Omnis sunt praeditae uno piano stationario ( $e = 0$ ) et uno punto stationario ( $a = 0, b = 0, c = 0$ ) curvae recessus.*

Si ponitur  $t = t_0$  et  $t = -t_0$  prodeunt aequationes planorum

$$at_0^4 + 4bt_0^3 + 6ct_0^2 + e = 0,$$

$$at_0^4 - 4bt_0^3 + 6ct_0^2 + e = 0;$$

haec plana se secant in recta  $b = 0$ ,  $at_0^4 + 6ct_0^2 + e = 0$ ; omnes haec rectae in

plano  $b = 0$  sitae, sectionem conicam  $b = 0$ ,  $9c^2 - ae = 0$  circumscribunt, quae est curva duplex superficie.

*Puncto a = 0, c = 0, e = 0 pro centro, plano b = 0 pro plano collineationis sumpto, altera pars systematis cum altera erit collinearis atque collineariter sita;* valori  $t = t_0$  respondet  $t = -t_0$ .

Collineationis species ea est, quae vocatur *harmonica*.

Per generatricem aliquam superficie, transeunt plana

$$\begin{aligned} U &= at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + e = 0, \\ \frac{1}{4t} \frac{\partial U}{\partial t} &= at^2 + 3bt + 3c = 0, \\ -at^4 &\quad + 6ct^2 + 3e = 0. \end{aligned}$$

Plano  $at^2 + 3bt + 3c = 0$  circumscribitur conus  $3b^2 - 4ac = 0$ ; hic conus continet lineam recessus.

Planum  $-at^4 + 6ct^2 + 3e = 0$  duas continet generatrices, quia idem evadit et pro valore  $t = t_0$  et pro valore  $t = -t_0$ ; praeterea ex superficie curvam tertii ordinis cum puncto dupli exsecatur, curvam recessus bis tangit; circumscrit autem conum

$$ae + 3c^2 = 0,$$

qui item per curvam recessus transit.

Alterius coni centrum  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  positum est in superficie alterius, ita tamen, ut commune habeant planum tangens  $a = 0$ ; contactus igitur iis est stationarius.

Aequatio superficie ipsius has accipit formas:

$$(1.) \quad a^3e^2 - 18a^2c^2e + 54ab^2ce + 81ac^4 - 27b^4e - 54b^2c^3 = 0,$$

punctum  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  est punctum triplex superficie;

$$(2.) \quad (a^3e - 18a^2c^2 + 54ab^2c - 27b^4)e + 27c^3(3ac - 2b^2) = 0,$$

plano stationario  $e = 0$  generatrix inflectionalis  $e = 0$ ,  $c = 0$  triplex, sectio conica  $e = 0$ ,  $3ac - 2b^2 = 0$  simplex exsecatur;

$$(3.) \quad a(ae - 9c^2)^2 + 27b^2(2ace - b^2e - 2c^3) = 0,$$

$b = 0$ ,  $ae - 9c^2 = 0$  est sectio conica duplex superficie;

$$(4.) \quad a(ae + 3c^2)^2 - 6c(ae + 3c^2)(3b^2 - 4ac) - 3e(3b^2 - 4ac)^2 = 0.$$

Omnes superficies secundi ordinis per lineam recessus transeuntes, sive circumscriptae superficie explicabili, hac forma continentur:

$$(ae + 3c^2) + \tau(3b^2 - 4ac) = 0,$$

binae contactum habent stationarium; quaevis praeterea per duas generatrices superficie explicabilis in plano

$$at^2 + 6ct - 3e = 0$$

sitas transit, id quod ex quarta forma aequationis superficie intelligitur.

Pro coordinatis punctorum curvae recessus habemus aequationes

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

vel aequivalentes

$$at^2 + 2bt + c = 0, \quad bt + 2c = 0, \quad ct^2 + e = 0;$$

$$at^4 + 3e = 0, \quad bt^3 - 2e = 0; \quad ct^2 + e = 0;$$

sive

$$a : b : c : e = 3 : -2t : t^2 : -t^4.$$

*Superficie secundi ordinis*

$$\frac{1}{3}k^4a^2 - 2k^3b^2 + 6k^2c^2 - e^2 = 0,$$

ubi  $k$  est constans arbitraria, *pro directrice adhibita*, piano

$$at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + e = 0$$

respondet punctum

$$a : b : c : e = 3 : -\frac{2k}{t} : \frac{k^2}{t^2} : -\frac{k^4}{t^4},$$

*superficies explicabilis quinti ordinis sibi ipsa est reciproca et reciproce sita*; valori  $t = t_0$ , respondet  $t = \frac{k}{t_0}$ .

Pro valoribus  $t = \pm\sqrt{k}$  generatrices sibi ipsae respondent; itaque quaevis hujusmodi superficies secundi ordinis per duas generatrices transit.

Hoc theoremate omnes superficierum explicabilium quinti ordinis proprietates dualitatis lege conjunguntur.

Cuique superficie secundi ordinis per lineam recessus ductae respondet altera superficies ejusdem ordinis, quae tangitur omnibus planis superficiem tangentibus, sive quae superficie explicabili inscripta est.

Omnes hae superficies contactum habent stationarium; punctum contactus situm est in punto osculationis plani inflexionalis ( $e=0, c=0, b=0$ ), quo piano quatuor puncta curvae infinite propinqua continentur. Duobus illis conis secundi ordinis  $3b^2 - 4ac = 0$ ,  $ae + 3c^2 = 0$  per lineam recessus trans-euntibus respondent duae sectiones conicae  $e=0, 3ac - 2b^2 = 0$ ;  $b=0, ae - 9c^2 = 0$ , quas supra invenimus; punctum  $e=0, c=0, b=0$  iis commune est, ita quidem, ut planum  $e=0$  alterius transeat per rectam tangentem  $b=0, e=0$  alterius.

Si duabus superficiebus secundi ordinis contactus est stationarius, inter omnes superficies ejusdem ordinis, quae per intersectionem earum duci possunt, duo coni, et inter omnes superficies secundi ordinis, quae cum illis duabus eidem superficie explicabili inscriptae sunt, duae sectiones conicae reperiuntur. Aequationes et conorum et sectionum conicarum semper reduci possunt \*) ad formas illas, quas supra computavimus.

Itaque habemus theorema:

*Si duabus superficiebus secundi ordinis contactus est stationarius, superficies explicabilis et inscripta et circumscripta est superficies explicabilis generalis quinti ordinis.*

Secundum theorema, quod jam a viro Cel. Poncelet propositum est \*\*), superficiem explicabilem, reciprocam curvae alicui, ejusdem esse ordinis atque superficiem explicabilem tangentibus illius curvae generatam, — sive superficies duas explicabiles, quarum altera alteri est reciproca, ejusdem esse ordinis —; secundum hoc theorema, qualibet superficie secundi ordinis pro directrice adhibita, curvae recessus superficie explicabilis quinti ordinis respondet superficies explicabilis quinti ordinis; superficie explicabili quinti ordinis respondet curva quarti ordinis cuspide praedita.

Si unam earum superficierum secundi ordinis pro directrice sumimus, quae per ipsam curvam recessus transit, superficies explicabilis reciproca huic curvae ea est, quae superficie secundi ordinis secundum hanc curvam recessus circumscribitur.

Itaque per curvam recessus superficie explicabilis quinti ordinis caterva superficierum explicabilium quinti ordinis transit, quibus unum idemque est planum inflexionale  $a = 0$ , (planum tangens cuspidem curvae recessus superficie principalis), et quarum curvae recessus cuspides sitas habent in generatrice inflexionali  $e = 0$ ,  $c = 0$  superficie principalis.

Inter easdem superficies inveniuntur quoque duo illi coni secundi ordinis. Si superficiem secundi ordinis superficie explicabili quinti ordinis inscriptam pro directrice sumimus, superficie explicabili respondet ea curva, secundum quam superficies inscripta superficiem explicabilem tangit.

\*) *A. Cayley*, On the developable surfaces which arise from two surfaces of the second order. L. c.

\*\*) *Poncelet*, Mémoire sur la Théorie générale des polaires réciproques. Diarium mathesis purae et appl. *Crelle*, vol. 4, pag. 24.

Quaevis superficies secundi ordinis inscripta tangit superficiem secundum curvam quarti ordinis cuspide praeditam; omnes hae cuspides sitae sunt in puncto osculationis plani inflexionalis ( $e = 0, c = 0, b = 0$ ); illa autem puncta, quae huic punto curvae recessus collineariter respondent, sita sunt in generatrice curvam recessus in ipsius cuspide tangente ( $a = 0, b = 0$ ).

Praeterea quaevis superficies inscripta, sicut quaevis circumscripta per duas generatrices superficie transit.

Inter catervam harum curvarum quarti ordinis, quae reciproca est catervae superficierum explicabilium circumscriptarum, reperiuntur quoque duae illae sectiones conicae.

Restat, ut computemus aequationem catervae superficierum secundi ordinis inscriptarum.

Planum tangens aliquod superficiem

$$(ae + 3c^2) + \tau(3b^2 - 4ac) = 0$$

est:

$$(e - 4c\tau)a' + 6b\tau b' + (6c - 4a\tau)c' + ae' = 0;$$

huic plano respondet, superficie secundi ordinis

$$\frac{1}{3}a^2 - 2b^2 + 6c^2 - e^2 = 0$$

pro directrice adhibita, punctum

$$\begin{aligned} a'' &: b'' : c'' : e'' \\ &= 3(e - 4c\tau) : -3b\tau : (c - \frac{2}{3}a\tau) : -a. \end{aligned}$$

Eliminatis coordinatis  $a : b : c : d$  superficie

$$(ae + 3c^2) + \tau(3b^2 - 4ac) = 0,$$

prodit aequatio superficie reciprocae, superficie explicabili inscriptae,

$$b^2 - (ae - 9c^2)\tau - 12cer^2 + 4e^2\tau^3 = 0.$$

Hujus functionis discriminans praeter aequationem superficie nostrae explicabilis factorem alienum  $e^3$  continet.

#### Superficies explicabiles sexti ordinis.

Superficies explicabiles sexti et septimi ordinis pro se ipsis adhuc minus disquisitae sunt, quamquam singulæ species earum jam dudum notæ fuerunt\*).

\*) A. Cayley, G. Salmon, Chasles, ll. cc. G. Salmon, On the classification of curves of double curvature. Camb. and Dubl. Math. Journ. N. S. vol. V., p. 23—46.

Vir Cel. *Chasles* omnes species superficierum explicabilium sexti ordinis invenit \*).

Planum tangens ex superficie explicabili sexti ordinis duas generatrices infinite propinquas et curvam quarti ordinis exsecat, quae curva plus tres cuspides habere nequit. Quamobrem curva recessus superficie explicabilis sexti ordinis, quum in punto osculationis plani tangentis tria puncta consumantur, majoris ordinis esse non potest quam sexti, neque minoris quam quarti.

Itaque curva quarti ordinis in plano tangente sita una cuspide praedita est.

Nunc contemplemur superficiem explicabilem, quae est reciproca curvae recessus prioris superficie explicabilis et quae eadem est sexti ordinis.

Si in quovis plano  $m$  puncta curvae recessus alterius superficie explicabilis sita sunt, a quovis punto  $m$  plana alteram superficiem explicabilem tangentia profiscuntur. Hinc concludimus, superficies explicabiles sexti ordinis non posse majoris classis esse quam sextae, neque minoris quam quartae.

Classis superficie explicabilis eadem est, atque classis sectionis alicujus planae non singularis. Curvae autem quarti ordinis, de quibus locuti sumus, quoniam in uno piano tangente jam sunt sitae, majoris classis esse non possunt quam quintae. Curva plana quarti ordinis, una cuspide praedita, non aliter potest fieri quintae aut minoris classis, nisi si praeter hanc cuspidem duobus punctis duplicitibus praedita est.

Quam ob causam coordinatae talis curvae rationaliter per unam variabilem exprimi possunt. (Vide pag. 8.)

*Omnes igitur superficies explicabiles sexti ordinis propriae sunt planares.*

Continetur autem aequatio plani generantis in his formis:

$$at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e = 0,$$

$$at^5 + 5bt^4 + 10ct^3 + 10dt^2 + 5et + f = 0,$$

$$at^6 + 6bt^5 + \dots + g = 0.$$

Sit  $U=0$  aequatio plani superficiem explicabilem generantis, ab uno parametro  $t$  rationaliter pendens; ponimus, nullum valorem parametri huic aequationi identice satisfacere.

\*) *Chasles*, Digression relative aux surfaces développables du sixième ordre. Comptes rendus vol. 54. 1862. I. pag. 718.

Aequationibus  $U = 0$  et  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  pro quovis valore parametri in casu generali recta determinatur, una generatricium.

Attamen fieri potest, ut his aequationibus pro uno aut pro pluribus singulis valoribus parametri idem planum repraesentetur. His valoribus ii adnumerandi sunt, qui aequationi  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  identice satisfaciunt, si tales existunt.

Locum autem omnium punctorum, quorum coordinatae pro eodem valore parametri his duabus aequationibus satisfaciunt, invenimus, si eam functionem coefficientium, quae vocatur discriminans functionis  $U$ , cifrae aequalem ponimus.

Superficies sic determinata ex superficie explicabili irreductibili, involuta plano  $U = 0$ , et ex singulis planis constat.

Aequatio superficie explicabilis plus semel factor discriminantis esse potest, in quo casu  $U$  rationaliter pendet a functione rationali non linearri parametri.

Alia autem ratione fieri non potest, ut sit superficies explicabilis minoris ordinis quam ipse discriminans. Superficies explicabilis involuta plano

$$U = at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e = 0,$$
$$(ae - 4bd + 3c^2)^3 - 27(ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3)^2 = 0$$

revera sexti ordinis est. Superficies explicabilis involuta plano

$$U = at^5 + 5bt^4 + \dots + f = 0$$

in casu generali est octavi ordinis; ut ad sextum ordinem reducatur, necesse est, pro duobus, aut diversis, aut infinite propinquis valoribus variabilis  $t$ , aequationes  $U = 0$  et  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$  idem planum repraesentare.

In priore casu aequatio plani generantis adhibita substitutione linearri  $t' = \frac{t - t_1}{t - t_2}$  in hanc transit

$$at^5 + 5zat^4 + 10ct^3 + 10dt^2 + 5\lambda ft + f = 0,$$

in posteriore in hanc formam transformari potest

$$at^5 + 5bt^4 + 10ct^3 + 10zf^2 + f = 0.$$

Etiam superficies hisce reciprocae quintae classis sunt.

Superficies generalis explicabilis sexti ordinis et sextae classis est superficies reciproca ejus, quae generatur plano

$$at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e = 0,$$

ubi inter aequationes planorum  $a, b, c, d, e$  aequatio identica intercedit

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \epsilon e \equiv 0.$$

Namque si superficies est sextae classis, curva illa quarti ordinis plano tangentे exsecta quintae classis et una cuspide et duabus punctis duplicitibus praedita est; curva igitur recessus quarti ordinis est, itaque superficies reciproca quartae classis. — De curvis duplicitis curvaturae, quarum tangentibus singulæ species superficierum explicabilium sexti ordinis generantur, infra agemus.

Superficies explicabiles septimi ordinis.

Ad disquirendas superficies explicabiles septimi ordinis utile est theorema, quod ad omnes spectat superficies explicabiles imparis ordinis.

Conus ex punto aliquo spatii curvae recessus superficie explicabilis  $r^{\text{ii}}$  ordinis circumscriptus  $r^{\text{tae}}$  classis est. Si igitur  $r$  est numerus impar, hic conus semper impari multitudine laterum cuspidalium praeditus est, id quo fieri nequit, nisi in ipsa curva recessus impar multitudo cuspidum sita est.

Curva aliqua plana in superficie explicabili  $r^{\text{ii}}$  ordinis sita  $r^{\text{ii}}$  ordinis est; si  $r$  est numerus impar, imparem multitudinem tangentium inflexionalium habet. Itaque demonstravimus:

*In quavis superficie explicabili imparis ordinis impar multitudo et cuspidum in curva recessus sitarum et planorum tangentium inflexionalium invenitur.*

Unum planum tangens inflexionale ex superficie explicabili septimi ordinis exsecat tres generatrices infinite propinquas et curvam quarti ordinis. Si fiat, ut haec curva quarti ordinis ex sectione conica duplii constet, hanc conditionem nunc excludeentes postremo loco tractabimus.

Curva quarti ordinis, neque si irreductibilis est, neque si ex curva inferioris ordinis et singulis generatricibus constat, plus tres cuspides habere potest; quamobrem curva recessus majoris ordinis esse non potest quam septimi, quia in punto osculationis plani inflexionalis quatuor puncta consumuntur.

Curva recessus majoris ordinis est, quam quarti, nam una tantum species curvarum duplicitis curvaturae quarti ordinis cuspide praeditarum exstat, quarum tangentibus superficies explicabiles quinti ordinis generari vidimus.

Curva recessus neque minoris ordinis est quam quinti, neque majoris quam septimi.

Itaque superficies explicabiles septimi ordinis minoris classis esse non possunt quam quintae, neque majoris quam septimae.

Curva quarti ordinis in plano inflexionali sita majoris classis esse non potest, quam quintae, quia hoc planum inflexionale pro duobus planis tangentibus habendum est. Si igitur haec curva quarti ordinis irreductibilis est,

necesse est, duo puncta duplia accedere. Si cuspis illa secundae speciei est, necesse est, unum punctum duplex accedere.

Sin autem curva quarti ordinis constat ex curva tertii ordinis et una recta generatrice, haec curva tertii ordinis puncto dupli est praedita, nam omnes curvae tertii ordinis non praeditae puncto dupli sextae sunt classis.

Si curva quarti ordinis ex duabus constat generatricibus et sectione conica, hujus coordinatae rationaliter per unum parametrum exprimi possunt.

Unus restat casus, quem supra exclusimus: curva quarti ordinis ex sectione conica dupli constare potest. Hujus disquisitio cum difficultate aliqua videtur conjuncta esse. Propterea in medio relinquentes, num tales superficies explicabiles septimi ordinis existere possint, demonstrabimus: si talis superficies existit, aliud planum inflexionale in ea situm est, cuius sectio non constat ex sectione conica dupli, quare haec superficies in iis superficiebus continetur, quas jam disquisivimus.

Planum inflexionale in punto osculationis quatuor puncta cum curva recessus communia habet; sin plura haberet, plus tres generatrices in hoc plano sitae essent. Praeter haec puncta cum illa commune habet unum, quia curva recessus inferioris ordinis esse non potest quam quinti. In hoc punto recta tangens curvae recessus non sita est in plano inflexionali; si esset, nova generatrix in hoc plano sita esset. Sectio plana superficie explicabilis cuspide praedita est, quo puncto planum ejus curva recessus perforatur. Haec autem sectio conica duplex nullam praebet cuspidem primae speciei. Proinde necesse est, planum osculans curvam recessus in eo punto, in quo curva planum nostrum inflexionale perforat, quatuor puncta infinite propinqua continere. Itaque aut hoc planum est aliud planum inflexionale, aut punctum est cuspis. Cuspis autem esse non potest, quia cuspis curvae recessus est punctum triplex superficie explicabilis, ut in superficiebus explicabilibus quinti ordinis punctum  $a = 0, b = 0, c = 0$ , pag. 12.

Restat, ut planum sit *aliud* planum inflexionale. Exemplo sunt superficies explicabiles quinti ordinis; planum  $b = 0$  exsecat sectionem conicam duplicem; curva recessus hoc planum in punto  $b = 0, c = 0, e = 0$  perforat;  $e = 0$  est planum inflexionale.

Aliud exemplum praebet superficies explicabilis octavi ordinis involuta piano

$$at^6 + 6zat^5 + 15ct^4 + 20\lambda at^3 + 15et^2 + g = 0.$$

Planum tangens inflexionale  $a = 0$  exsecat sectionem conicam duplicem

$4gc - 15e^2 = 0$ ; planum  $\alpha = 0$  in puncto  $\alpha = 0, g = 0, e = 0$  curva recessus perforatur: planum  $g = 0$  est planum inflexionale.

In casu, quem tractamus, novum planum inflexionale tres generatrices infinite propinquas et curvam quarti ordinis exsecat; haec autem non potest constare ex sectione conica dupli.

Nam si res ita se haberet, in superficie explicabili septimi ordinis duae sectiones conicae sitae essent, quibus unum punctum est commune; omnibus autem planis, quae tangunt duas sectiones conicas, quibus unum punctum est commune, in planis diversis sitas, circumscribitur superficies explicabilis sexti ordinis et sextae classis \*).

Itaque tales superficies, si invenirentur, jam in iis essent contentae, quas supra disquisivimus.

Semper igitur in superficie explicabili septimi ordinis curva simplex invenitur, cujus coordinatae rationaliter per unam variabilem exprimi possunt. Consequimur igitur theorema:

*Omnes superficies explicabiles septimi ordinis propriae sunt planares et aut quintae aut sextae aut septimae classis.*

Itaque demonstravimus, quod nobis proposueramus:

*Omnes superficies explicabiles propriae primorum septem ordinum sunt planares.*

Proprietates autem superficierum explicabilium primorum septem ordinum, quae in singularitatibus earum positae sunt, hac tabula complectimur:

<i>m</i>	<i>r</i>	<i>n</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	$\alpha$	$\beta$	<i>x</i>	<i>y</i>	$\gamma$	<i>t</i>	<i>k</i>	<i>R</i>
3	4	3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	5	4	2	2	1	1	2	2	0	0	0	2
4	6	6	6	3	4	0	6	4	4	0	6	6
5		5	4	4	2	2	5	5	2	0	4	6
6		4	3	6	0	4	4	6	0	0	3	6
5	7	7	10	5	5	1	10	8	7	2	22	13
6		6	7	7	3	3	9	9	6	1	18	12
7		5	5	10	1	5	8	10	5	0	15	11

\*) Cayley, Salmon, Chasles, ll. cc.

In hac tabula significatur

litera

- m* ordo curvae recessus,
- r* ordo superficiei explicabilis,
- n* classis superficiei,
- g* multitudo tangentium duplicium sectionis planae,
- h* multitudo punctorum duplicium apparentium curvae recessus,
- a* multitudo planorum tangentium inflexionalium,
- β* multitudo cuspidum curvae recessus,
- x* ordo curvae duplicitis superficiei,
- y* multitudo tangentium duplicium apparentium curvae recessus sive classis ejus superficiei explicabilis, quae generatur planis curvam recessus bis tangentibus,
- γ* multitudo eorum punctorum curvae recessus, per quae alia generatrix superficiei transit curvam in hoc punto non tangens,
- t* multitudo punctorum, per quae tres generatrices superficiei transeunt,
- k* multitudo punctorum duplicium apparentium curvae duplicitis  $x^i$  ordinis,
- R* ordo superficiei explicabilis tangentibus curvae duplicitis  $x^i$  ordinis generata.

Singuli numeri, quorum maxima pars jam a viris Ill. *Cayley*, *Salmon* et *Chasles* reperta est, computati sunt secundum aequationes, quas viri Ill. *Cayley* et *Salmon* inter singularitates simplices curvarum duplicitis curvaturaem superficierumque explicabilium intercedere docuerunt \*).

Relinquitur, ut nonnullas proprietates superficierum explicabilium *sexti* ordinis exponamus.

*Curvae recessus semper sitae sunt in una superficie secundi ordinis.* Si curva quarti ordinis est, est intersectio partialis superficiei secundi ordinis et superficiei tertii ordinis, quarum posterior per duas rectas generatrices ejusdem catervae prioris transit. Haec curva generatricibus alterius catervae ter, alterius catervae semel secatur. — Si curva quinti ordinis est, duas habet cuspides. Per eas et septem alia puncta curvae superficiem secundi ordinis

\* ) *A. Cayley*, Sur les courbes à double courbure et les surfaces développables. Journ. des Math. de M. *Liouville*, vol. X., pag. 245. 1845. Camb. and Dubl. Math. Journ. N. S. vol. V., pag. 18. *G. Salmon*, Anal. Geom. of three dim., pag. 234—256; 422—424.

ducamus, tota curva in hac superficie sita est, quia  $2 \cdot 2 + 7 = 11$  puncta cum ea habet communia. Praeter hanc superficiem secundi ordinis caterva superficerum tertii ordinis per curvam duci potest, quarum quaeque cum superficie secundi ordinis unam rectam habet communem. Haec curva generatricibus alterius catervae ter, alterius bis secatur. — Si curva sexti ordinis est, quatuor cuspidibus est praedita. Per has quatuor cuspides et quinque alia puncta curvae ducamus superficiem secundi ordinis; tota curva in hac superficie sita est, quia  $2 \cdot 4 + 5 = 13$  puncta cum ea habet communia. Praeter hanc superficiem secundi ordinis caterva superficerum tertii ordinis per hanc curvam transit. Quarum unam exhibet forma aequationis harum superficerum,  $ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0$ , quae tangitur omnibus planis superficiem ipsam tangentibus. Huic superficies explicabilis inscripta et circumscrippta est.

Ergo habemus, superficiebus explicabilibus reciprocis ratione habita, theorema:

*Omnes superficies explicabiles sexti ordinis alii superficiei secundi ordinis sunt inscriptae, alii circumscripiae.*

Sunt autem superficies explicabiles, quibus *caterva* superficerum secundi ordinis inscribi potest, aliaeque, quibus circumscribi potest; eae sunt, quae duabus superficiebus secundi ordinis, quibus contactus est simplex, circumscripiae sunt aut inscriptae.

Tabula nostra docet, *eas superficies explicabiles, quae generantur tangentibus curvarum duplicitum in superficiebus explicabilibus sexti ordinis sitarum, item sexti esse ordinis.* Itaque etiam illae superficies explicabiles sexti ordinis sunt, quae circumscribuntur omnibus planis, duas generatrices earum continentibus. Vir Cel. Chasles, superficiem explicabilem, quae involvitur omnibus planis bis tangentibus curvam recessus superficie explicabilis sexti ordinis et quintae classis, sive per binas generatrices hujus superficie ductis, *quinti ordinis esse ratus* \*), falsa interpretatione termini „classis” deceptus est.

Omnia talia problemata geometrica, quae ad solum ordinem et classem systematis geometrici spectant, ad problemata mere algebraica revocari posse, ex ipsa problematis natura perspicuum; dum tamen horum solutio in summa generalitate reperta sit, infirmioribus auxiliis minora intendisse non poenitebit.

\*) Chasles, Digression relative aux surfaces développables du sixième ordre. L. c. pag. 719.

## V I T A.

---

Natus sum *Carolus Arminius Amandus Schwarz* die XXV. mensis Januarii anni MDCCXLIII. Hermsdorfi in vico Silesiae inferioris qui dicitur sub monte Kynast, patre *Guilelmo*, tunc comitis ex ordinibus Germanicis de *Schaffgotsch* architecta, matre *Augusta* e gente *Lohde*, quos superstites summa pietate veneror.

Quum pater in officia regia se contulisset, et ex alia in aliam Borussiae provinciam vocaretur, plures regiones Germaniae septentrionalis adire mihi licuit. In vico Silesiae superioris, Königshütte, in iudicis publicis a viris *Werner* et *Steinberg*, quibus plurimum me debere libentissime confiteor, primis literarum elementis imbutus anno h. s. LIII. gymnasium adii in oppido Provinciae Rhenanae Saarbrücken, quod tunc sub auspiciis viri Cel. *Ottemann* florebat. Grato animo ex illo tempore prae ceteris praeeceptorem meum *Schmitz* memoria teneo, qui multum operae in me contulit. — Ineunte aestate anni LIV. a directore Cel. *B. Thiersch* in classem quintam gymnasii Tremoniensis Guestphaliae receptus, quod nunc sub auspiciis prosperrimis viri Cel. *Hildebrand* floret, hujus gymnasii scholas usque ad exeuntem aestatem anni LX. frequentavi. Quo loco praeeceptores mihi carissimi *E. Varnhagen* et *C. Gröning* adolescentem summo rerum causas cognoscendi ardore impleverunt, summoque literarum exactarum amore, inprimis mathematics. Hi cum viris Cel. *Böhme* et *Junghans* mihi amici magis quam praeeceptores fuerunt. Praeterea me docuerunt viri Cel. *Natorp* et *Hildebrand*, quorum memoria nunquam mihi extinguetur.

Testimonio maturitatis munitus, ineunte hieme anni LX., ut ad mathematica et rerum naturalium studia incumberem, hanc almam Universitatem Literarum Fridericam Guilelma Berolinensem petii et a Rectore Magnifico *A. Tweesten* numero civium academicorum adscriptus apud Decanum Spectabilem Amplissimi Philosophorum Ordinis *Al. Braun* nomen professus sum.

Per octo semestria scholis interfui viorum Celeberrimorum, Illustrissimorum, Experientissimorum *Arndt*, *Dove*, *Du Bois-Reymond*, *Encke*, *Förster*, *Kronecker*, *Kummer*, *Lepsius*, *Maecker*, *Ohm*, *Schneider*, *Trendelenburg*, *Weierstrass*.

Praeterea disserentes audivi viros Celeberrimos, Experientissimos, Illustrissimos, qui non in Universitate lectiones habent: *Aronhold*, *Pohlke*, *Rammelsberg*, *R. Weber*. Viri Ill. *Dove* per quinque semestria in Universitate et per duo in Academia Polytechnica regia in lectionibus de physice experimentali famulus fui.

In ejusdem Academiae laboratorio chemico, quod sub Ill. *Rammelsberg* eximie floret, per duo semestria exercitationes chemicas habui.

Exercitationibus seminarii mathematici, quas moderantur viri Cel. Ill. *Kummer* et *Weierstrass* per quinque semestria interfui ibique horas amoenissimas peregi maximeque fructuosas.

In certamine literario ab Amplissimo Philosophorum Ordine almae Fridericae Guilelmae „De superficiebus explicabilibus quinti ordinis“ anno LXII. instituto, in arenam descendit et commentatiuncula de hac materia a me composita die III. mensis Augusti anni praeteriti sine competitore palma ornata est.

Omnibus autem viris, qui mihi literarum aditus aperuerunt, qui benigno animo adolescentis progressus adjuverunt, quique fautores mihi exstiterunt benevolentissimi, optime de me meritis, nunc summas quas possum gratias ago, memoremque me semper habiturum profiteor.

---

## T H E S E S.

---

- I. Theoriam, quam vir Cel. *Darwin* de generatione specierum proposuit, omnium maxime probabilem esse dico.
  - II. Ejus, quod nunc calculi differentialis et integralis solum est firmum principium, inventor *Archimedes*.
  - III. Eam formam principalem functionum ellipticarum, quam vir Cel. *Weierstrass* in analysis introduxit, in omnibus fere casibus alii praefero.
  - IV. Viro Cel. Beat. *Steiner* principium transformationis radiorum reciprocorum notum erat.
-