

17.

DE QUORUNDAM
THEORIAE NUMERORUM
 THEOREMATUM APPLICATIONE.

DISSERTATIO INAUGURALIS
 QUAM
 CONSENSU ET AUCTORITATE
AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS
 IN
ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE
FRIDERICA GUILELMA
 AD
SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES
 RITE CAPESSENDOS
 DIE XXVIII. M. JULII. A. MDCCCLIII.
 H. L. Q. S.
 PUBLICE DEFENDET
 AUCTOR
HERMANNUS SUHLE.
 POSTAMPENSIS.

ADVERSARIJ ERUNT:

H. SCHROETER, CAND. MATH.
 F. STADER, CAND. MATH.
 TH. FREYDANCK, CAND. MATH.

BEROLINI
 TYPIS SOCIORUM BRANDES & SCHULZE.

VIR0

ILLUSTRISSIMO, HUMANISSIMO, BENEVOLENTISSIMO

G. LEJEUNE-DIRICHLET

PRAECEPTORI AESTIMATISSIMO

HASCE

STUDIORUM PRIMITIAS

PIO GRATOQUE ANIMO

D. D. D.

AUCTOR.

Sint in plano Coordinatarum orthogonalium axes duo, lineaeque ducantur axibus his parallelae ac paribus intervallis inter se distantes, ita ut planum totum duobus his linearum systematis in infinitam quadratorum multitudinem dividatur. Si curva data est quaelibet, quae finitam continet plani partem, quaeri potest, quanta sit punctorum, in quibus duorum systematum lineae inter se secantur, eorumque intra curvam sitorum multitudo, iis adnumeratis, quae in curva ipsa posita sint. Ill^{mus} Lejeune Dirichlet in commentatione: „Recherches sur diverses applications de l'Analyse infinitésimale à la Théorie des nombres“ Lemma probavit, multiplicando multitudinem S horum punctorum per σ^2 , designante σ intervallum, quo lineae inter se parallelae distant, $S\sigma^2$, si ipsum intervallum σ magis magisque decrescit, ad limitem finitum convergere, qui quidem limes area est curvae; quod Lemma in formulam reddit

$$\lim S\sigma^2 = A,$$

A designante curvae aream. Ill^{mus} Dirichlet hoc Lemma, quod, intervallo magis magisque decrescente, numero igitur punctorum ad infinitum tendente, locum habet, in eadem commentatione usus est, ellipsin tractans, areamque hyperbolae exteriorem duabus rectis curvaque finitam. Alio loco, dum legem demonstrat reciprocitatis residuorum quadraticorum, Ill^{mus} Gauss etiam in finitum horum punctorum numerum, ac quidem in summam seriei

$$\left[\frac{k}{p} \right] + \left[\frac{2k}{p} \right] + \left[\frac{3k}{p} \right] + \dots + \left[\frac{\frac{p-1}{2} \cdot k}{p} \right] = M$$

designante $\left[\frac{k}{p} \right]$ numerum integrum maximum, qui fractione $\frac{k}{p}$ continetur, inquisivit atque ex natura hujus seriei demonstravit, numeros M et N , dummodo posueris

$$\left[\frac{p}{k} \right] + \left[\frac{2p}{k} \right] + \left[\frac{3p}{k} \right] + \dots + \left[\frac{\frac{k-1}{2} \cdot p}{k} \right] = N,$$

aequationi satisfacere $M + N = \frac{k-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}$. Ejusmodi se-
ries Ill^{mus} Dirichlet in lectione habita de calculi integralis
applicatione ad theoriam numerorum disquisivit, in iisque dis-
quisitionibus, quomodo harum serierum summa uncis remotis
mutaretur docuit; formula enim data

$$N = \left[\frac{n}{1} \right] + \left[\frac{n}{2} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right] = \sum_{s=1}^n \left[\frac{n}{s} \right]$$

ab hac serie, cum terminus quisque seriei $\left[\frac{n}{s} \right]$ ab $\frac{n}{s}$ fractione
quadam differat $\varepsilon < 1$, ad aliam transit

$$N = n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) + \eta,$$

qua in formula, ipsa serie

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

cum numero n in infinitum tendente, quantitas η numerum n
non superans negligi potest, ita ut habeas posito $n = \infty$, $N = \log n$;
formula enim valet

$$\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right) = C.$$

C designante constantem Eulerianam. Aliter autem res se habet
in formulae disquisitione

$$N' = 1 \left[\frac{n}{1} \right] + 2 \left[\frac{n}{2} \right] + 3 \left[\frac{n}{3} \right] + \dots + n \left[\frac{n}{n} \right],$$

quae quidem uncis remotis in formulam convertitur $N' = n^2 + \eta'$,
nulla enim ratione hanc quantitatem η' , quae ipsa est ordinis
 n^2 , omittere licet; serie autem transformata

$$\sum_{s=1}^n s \left[\frac{n}{s} \right] = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \left[\frac{n}{s} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \left[\frac{n}{s} \right]$$

Ill^{mus} Dirichlet serierum in dextra aequationis parte sum-
mam constituit disquisitionibus subtilissimis, in quibus commo-

rari non permissum sit, etsi inde intelligatur optime, uncos removere non licere, nisi accuratius in fractionum & summam inquisitum sit.

Revocata formula supra jam proposita, series

$$\left[\frac{k}{p} \right] + \left[\frac{2k}{p} \right] + \dots + \left[\frac{\frac{p-1}{2} \cdot k}{p} \right],$$

si intervallum, quo lineae distant unitas habeatur (cf. Eisenstein. Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems der quadratischen Reste. Crelle Diar. XXVIII) numerum offert finitum punctorum, quae lineis continentur $y = \frac{k}{p}x$, $y = 0$, $x = \frac{p-1}{2}$, ac ope hujus relationis geometricae facillime aequatio probatur

$$M + N = \frac{p-1}{2} \cdot \frac{k-1}{2}.$$

Hanc in rem inquirens obiter dixit Eisenstein, numerum finitum horum punctorum, quae quibusdam curvis contineantur, simplicibus formulis exhiberi posse, atque formula, quae ad circulum pertinet, data

$$S = 1 + 4 \left(\left[\frac{m}{1} \right] - \left[\frac{m}{3} \right] + \left[\frac{m}{5} \right] - + \dots \right)$$

hac ex serie, positio $m = \infty$, seriem deduxit Leibnitzii

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \dots \dots$$

Quum autem neque ipsa formula argumentis firmata, neque transitus ab ea ad Leibnitzii formulam probatus videatur, mihi liceat, praesertim quum disquisitionibus, quibus Ill^{mus} Lejeune Dirichlet numerorum theoriam auxit et ornavit, numerus π etiam hac in theoria majoris momenti factus sit, hanc rem accuratius pertractare.

§. 1.

Datae igitur sint Coordinatae orthogonales, lineaeque his parallelae paribusque intervallis inter se distantes, quod quidem intervallum in sequentibus unitati aequale sumatur. Curva qualibet in illo plano data, quaeri potest, quantus sit numerus punctorum, quae ad utrumque linearum systema pertineant et

in curvae area posita sint; nec quaestio altera omittatur, num puncta quaedam in curva ipsa sita sint, nec minus, quanta hoc in casu eorum multitudo sit. Si curvae cujuslibet aequatio $y = f(x)$ data est, omnium punctorum, quae hac curva et abscissarum axe ordinatisque $f(\mu)$ et $f(p)$ continentur, numerus hac formula exhibetur

$$S = [f(\mu)] + [f(\mu+1)] + [f(\mu+2)] + \dots + [f(p)]$$

adnumeratis iis punctis, quae in lineis ipsis aream limitantibus posita sunt, attamen iis in abscissarum axe exceptis.

Si posueris, curvae $y = f(x)$ ordinatas inde ab ordinata $f(\mu)$ usque ad ordinatam $f(p)$ sine intermissione decrescere, omissa simplicitatis gratia termino seriei primo, hujus seriei summam

$$\sum_{\mu+1}^p [f(s)] = [f(\mu+1)] + [f(\mu+2)] + \dots + [f(p)],$$

designantibus μ et p numeros integros, id quod supra quoque locum habet, facile transformare licet. Etenim si lineam duxeris $y = f(p)$, area ipsa curva ordinatisque $f(\mu)$ et $f(p)$ finita in duas dividetur partes, quarum puncta separatim in summam colligantur. Posito $[f(\mu)] = v$ et $[f(p)] = q$, intelliges, differentiam $qp - \mu q$ summam offerre punctorum in una areae parte intra axem abscissarum lineamque $y = f(p)$ sitorum; si porro ex aequatione $y = f(x)$ inveneris $x = F(y)$, puncta in summam colligere licet, quae ad eandem abscissam

$F(t)$ pertineant, ita ut $\sum_{q+1}^v [F(t)] - \mu(v-q)$ summam suppeditet punctorum, quae in altera areae parte intra lineam $y=f(p)$ curvamque ipsam posita sunt.

Perspicis inde formulam esse probatam

$$\sum_{\mu+1}^p [f(s)] = q(p-\mu) - \mu(v-q) + \sum_{q+1}^v [F(t)]$$

sive

$$\sum_{\mu+1}^p [f(s)] = qp - \mu v + \sum_{q+1}^v [F(t)]. -$$

Generaliorem obtinebis formulam, si, puncta, in quibus duorum systematum lineae inter se secantur, massa quadam affecta constitueris, ac ita quidem, ut ipsa punctorum massa functio quaedam $\varphi(s)$ abscissarum, eadem igitur massa apposita sit omnibus punctis, quae ad eandem ordinatam pertineant. Etenim si loco punctorum in summam collegeris massas punctorum

intra curvam sitorum, seriei summam obtinebis $\sum_{\mu+1}^p \varphi(s) [f(s)]$,

atque si etiam hic massas ita composueris, ut quae ad eandem abscissam pertineant, massae in summam colligantur, iisdem argumentis, quae supra adhibita sunt, invenies, posito

$$\sum_1^s \varphi(s) = \psi(s)$$

$$\sum_{\mu+1}^p \varphi(s) [f(s)] = q (\psi(p) - \psi(\mu)) - \psi(\mu) (v - q) + \sum_{q+1}^v \psi [F(s)],$$

$$\text{sive } \sum_{\mu+1}^p \varphi(s) [f(s)] = q \psi(p) - v \psi(\mu) + \sum_{q+1}^v \psi [F(s)].$$

III^{mus} Dirichlet ex ipsa seriei natura hanc relationem docuit, qua quidem formula ad casum specialem adhibita, aequationem probavit supra jam propositam

$$\sum_1^n s \left[\frac{n}{s} \right] = \frac{1}{2} \sum_1^n \left[\frac{n}{s} \right]^2 + \frac{1}{2} \sum_1^n \left[\frac{n}{s} \right]. -$$

Si cujusque puncti massa functio quaedam est $\varphi(s, t)$ coordinatarum puncti $x = s$ et $y = t$, massas punctorum intra aream sitorum in summam colligendo, si posueris

$$t = [f(s)] \\ \sum_{t=1}^{[f(s)]} \varphi(s, t) = \psi(s, [f(s)]), \text{ seriei summam obtinebis}$$

$\sum_{\mu+1}^p \psi(s, [f(s)])$, iisdemque argumentis, quibus formulae antecedentes, formula probatur generalis, posito

$$\psi([F(t)], t) = \sum_{s=1}^{s=[F(t)]} \varphi(s, t),$$

$$\sum_{\mu+1}^p \psi(s, [f(s)]) = \sum_1^p \psi(s, q) - \sum_1^\mu \psi(s, v) + \sum_{q+1}^v \psi([F(t)], t)$$

Mutandae sunt formulae, ordinatis curvae $y = f(x)$ sine intermissione adaugescentibus; quo in casu $f(p) > f(\mu)$ formula generalis in aliam convertitur.

$$\sum_{\mu+1}^p \psi(s, [f(s)]) = \sum_1^p \psi(s, q) - \sum_1^\mu \psi(s, v) - \sum_{v+1}^q \psi([F(t)], t)$$

designantibus etiam hac in formula v et q integros maximos $[f(\mu)]$ et $[f(p)]$. Sed ad curvas transeamus speciales. —

§. 2.

Aequatio sit data parabolae $y^2 = 2px$; α designante numerum quemcunque integrum, punctorum, quae curva continentur usque ad ordinatam $\sqrt{2p}\alpha$, multitudinem formula suppeditabit

$$S = [\sqrt{2p} \cdot 1] + [\sqrt{2p} \cdot 2] + [\sqrt{2p} \cdot 3] + \dots + [\sqrt{2p} \cdot a]$$

Intervallo, quo lineae inter se distant, magis magisque decrescente, eademque ratione, quum intervallum unitati aequale sit, numero p augescente, parameter p eadem erit longitudine, ubi non omittendum est, numerum a pariter in infinitum tendere.

Hoc modo ut primum numeri p et a in infinitum perducti sunt, ex Lemmate supra tradito, si posueris $\sqrt{2p} = m$, sequitur esse

$$\frac{2}{3} ma^{\frac{3}{2}} = [m \sqrt{1}] + [m \sqrt{2}] + \dots + [m \sqrt{a}]$$

unde uncis remotis obtinebis

$$\frac{2}{3} ma^{\frac{3}{2}} = m (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{a}) - a\varepsilon$$

Ipse enim ε numerus est terminorum seriei in dextra formulae parte, ac quisque seriei terminus ab eodem, qui uncis inclusus est, quantitate ε differt, ubi ε fractio quaelibet est unitate minor. Si quantitatem $-a\varepsilon$ in alterum aequationis membrum transposueris, orietur

$$ma\left(\frac{2}{3} \sqrt{a} + \frac{\varepsilon}{m}\right) = m (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{a})$$

unde negligendo quantitatem $\frac{\epsilon}{m}$ formula prodibit, quae valet pro $a = \infty$,

$$\frac{2}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \dots + \sqrt{a} . -$$

Jam generaliter consideretur aequatio $y = \frac{x^s}{p^{s-1}}$, ubi parameter p appositus est, ut utrumque aequationis membrum eadem ratione crescat, utque, quae supra attuli, etiam hic adhibere liceat, hoc in casu generali formula patet

$$\sum_1^a x^s = 1^s + 2^s + 3^s + \dots + a^s = \frac{a^{s+1}}{s+1}$$

si posueris $a = \infty$. Qua quidem formula, designante s numerum quaecunque integrum, quum in sequentibus mihi utendum sit, pro hoc casu eandem formulam e finitae summae formula infra deducam.

Uncis autem remotis, fractionum ϵ summam, qua series hoc modo inter se differant, negligendam fuisse, etiam ex eo intelligi potest, quod, omissa illorum punctorum summa, immo aliis ex principiis formula patet, posito $n = \infty$,

$$\int_0^1 x^s dx = \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^s + \left(\frac{2}{n}\right)^s + \left(\frac{3}{n}\right)^s + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^s \right)$$

$$\text{unde eluet } \sum_1^n x^s = \frac{n^{s+1}}{s+1}.$$

Ac re vera transitus ille a numero punctorum finito ad aream curva conclusam iisdem argumentis probatur, quibus a summa finita quadratorum rectangulorum ad integrale nec minus igitur ad curvae aream transire licet. Sin vero, infinito punctorum numero areae aequato, quaeritur, quanta sit fractionum summa, qua series uncis remotis a serie prima differat, facillime intelligitur, hanc fractionum summam negligendam esse, si quolibet seriei termino puncta in summam colligantur, quae ad eandem curvae ordinatam pertineant. Namque si aequemus curvae aream quadrato cuiusdam rectangulo u.v, designante n differentiam abscissarum curvae extremarum, in-

telliges, unitatis intervallo magis magisque decrescente itaque u et v in infinitum tendentibus, multiplicando u per v productum $u.v$ infinitum reddi secundi ordinis; nec ullius momenti est, si functio altera ipsa sit infinita altioris ordinis, id quod evenit multiplicando m per log m .

Designante S punctorum S' terminorum uncis remotis summam, quorum terminorum quisque a termino uncis inclusa quantitate $\epsilon < 1$ differt, quorumque numerus distantiae n aequalis est, babebis $S = u.v = S' - u\epsilon$, igitur

$$S' = uv \left(1 + \frac{\epsilon}{v}\right)$$

unde, quum positum sit $v = \infty$, sequitur esse

$$S = u.v = S'.$$

Itaque hoc in casu uncis remotis fractionum ϵ summam negligere licet, pariterque ubivis licebit, dummodo terminorum numerus sit infinitus minoris ordinis, quam ipsa area infinita. Punctorum autem summa si aliter colligitur, nec quisque seriei terminus ordinatae cujusdam puncta addit, aliter res se habet; etenim si numerus terminorum in dextra aequationis parte infinitus est ejusdem ordinis, ac area ipsa infinita, hoc in casu fractionum ϵ summam negligere itaque sine ulla deliberatione uncos removere a priori non licet. Id quod locum habet (permissum sit, formulam antecapere, ut quae postea hac de formula mihi dicenda sint, et hoc loco probata videantur) in disquisitione formulae, quae valet, posito $m = \infty$,

$$m \cdot \frac{\pi}{4} = \left[\frac{m}{1} \right] - \left[\frac{m}{3} \right] + \left[\frac{m}{5} \right] - \left[\frac{m}{7} \right] + \dots$$

serie tamdiu continuanda, quam ipsa finitur; etenim terminorum hujus seriei numerus aequalis $\frac{m}{2}$, infinitus igitur est ejusdem ordinis ac ipsum alterum aequationis membrum $m \frac{\pi}{4}$. Uncis vero remotis, designante ϵ' quantitatem, qua binae fractiones ϵ finitiae signis oppositis inter se differunt, hae quantitates ϵ' ad summam $\frac{m}{4}\epsilon'$ colligi possunt, ubi $\epsilon' < 1$, ita ut fiat

$$m \frac{\pi}{4} = m \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \pm \frac{m}{4} \epsilon' \text{ sive}$$

$$\frac{m}{4} (\pi \mp \varepsilon') = m (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots)$$

ubi quantitas ε' , cum numero π comparata, nulla ratione negligenda est; unde perspicis, transitum ab illa ad Leibnitzii seriem non esse probatum, nisi, summam fractionum, quae uncis remotis proveniunt, infinitam esse minoris ordinis quam m , demonstratum fuerit.

§. 3.

Circuli cum radio $r = \sqrt{m}$ constructi, cujus centrum coincidat cum Coordinatarum initio, aequatio sit $x^2 + y^2 = m$, unde $y = \sqrt{m - x^2}$, qua in formula radici positivum tribuantur signum. Substitutis loco variabilis x omnibus inde ab 0 usque ad $[\sqrt{m}]$ numeris integris, formula

$$[\sqrt{m}] + [\sqrt{m-1}] + [\sqrt{m-4}] + \dots + [\sqrt{m - [\sqrt{m}]^2}]$$

summam dat punctorum, quae in positivo circuli quadrante posita sunt, iis quidem exceptis, quae in axe abscissarum x , sed iis adnumeratis, quae in circulo ipso et in axe ordinatarum sita sunt. Eadem vero formula summam quoque offert punctorum cujusque quadrantis, atque quum singuli quadrantes circuli rotatione ita coincidunt, ut cujusque axis puncta nullo loco saepius in summam colligantur, formula prodit, centro adnumerato

$$S = 1 + 4([\sqrt{m}] + [\sqrt{m-1}] + [\sqrt{m-4}] + \dots + [\sqrt{m - [\sqrt{m}]^2}])$$

designante S summam punctorum totius circuli. Si m magis magisque creverit, simul autem eadem ratione unitatis intervallum decreverit, ita ut nec radius circuli nec ipse circulus mutetur, hac ex formula facilime radice $(1-x)^{\frac{1}{2}}$ evoluta, atque formula aliqua elementari adhibita, eruere poteris seriem, cujus summa numerum dat $\frac{\pi}{4}$. Nimirum posito $m = \infty$, ex Lemmate supra jam tradito sequitur esse

$$m\pi = 1 + 4([\sqrt{m}] + [\sqrt{m-1}] + \dots + [\sqrt{m - [\sqrt{m}]^2}])$$

unde dividendo per m evadit

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{m} ([\sqrt{m}] + [\sqrt{m-1}] + \dots + [\sqrt{m - [\sqrt{m}]^2}])$$

Quo in casu, ut supra jam vidimus, uncos removere licet,

itaque valet aequatio

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{4}{m}\right)^{\frac{1}{2}} + \dots \\ + \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{[V_m]^2}{m}\right)$$

unde adhibendo formulam probatam

pro $x < 1$

$$(1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1 \cdot x}{1 \cdot 2} - \frac{1 \cdot x^2}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \dots$$

eruitur

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 2^2}{2 \cdot m} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 1^4}{2 \cdot 4 \cdot m^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot m^3} - \dots\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{1 \cdot 2^2}{2 \cdot m} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 2^4}{2 \cdot 4 \cdot m^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot m^3} - \dots\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{1 \cdot 3^2}{2 \cdot m} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3^4}{2 \cdot 4 \cdot m^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot m^3} - \dots\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{m}} \left(1 - \frac{1 \cdot [V_m]^2}{2 \cdot m} - \frac{1 \cdot 1 \cdot [V_m]^4}{2 \cdot 4 \cdot m^2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot [V_m]^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot m^3} - \dots\right)$$

Colligendo in summam potestates ejusdem ordinis atque negligendo, quaecunque negligenda sunt pro $m = \infty$ sequitur, esse

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{2m^{\frac{3}{2}}} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + V_m^2) \\ - \frac{1}{2 \cdot 4 m^{\frac{5}{2}}} (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + V_m^4) \\ - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 m^{\frac{7}{2}}} (1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots + V_m^6) - \dots$$

Sed in promptu est formula, quae pertinet ad summam potestatum numerorum naturalium (Vide Gercke. Elementare Entwicklung der Summenformel der Potenzreihen)

$$\sum_0^n x^p = \frac{n(n+1)\dots(n+p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p(p+1)} + (2^p - (p+1)_1) \frac{(n-1)n\dots(n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p(p+1)} \\ + (3^p - (p+1)_1 2^p - (p+1)_2) \frac{(n-2)\dots(n+p-2)}{1 \cdot 2 \dots p(p+1)}$$

$$+ \dots + (3^p - (p+1)_1 2^p + (p+1)_2) \frac{(n-p+3) \dots (n+3)}{1 \cdot 2 \dots p (p+1)}$$

$$+ (2^p - (p+1)_1) \frac{(n-p+2) \dots (n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p (p+1)} + \frac{(n-p+1) \dots (n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p (p+1)}$$

$$\text{designante } (p+1)_r = \frac{(p+1) p \dots (p+1-(r-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r}$$

r^{tum} coefficientem binomialem.

Videamus, quem ad limitem dextra formulae pars tendet, n in infinitum crescente. Qnoniam est

$$\lim: n(n+1)(n+2) \dots (n+p) = \lim: n^{p+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{n}\right)$$

atque p tenente valorem constantem

$$\lim: \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{p}{n}\right) = 1, \text{ ideoque}$$

$$\lim: n(n+1)(n+2) \dots (n+p) = n^{p+1} \text{ nec minus}$$

$$\lim: (n-1)n(n+1) \dots (n+p-1) = n^{p+1} \text{ etc., orietur}$$

$$\begin{aligned} \lim: \sum_0^n x^p &= \frac{n^{p+1}}{1 \cdot 2 \dots p (p+1)} (1 + (2^p - (p+1)_1) \\ &\quad + (3^p - (p+1)_1 2^p + (p+1)_2) + \dots \\ &\quad + (3^p - (p+1)_1 2^p + (p+1)_2) + (2^p - (p+1)_1) + 1); \end{aligned}$$

quum autem in ipsa formula deducenda inveniatur

$$1 + (2^p - (p+1)_1) + (3^p - (p+1)_1 2^p + (p+1)_2) + \dots + (3^p - (p+1)_1 2^p + (p+1)_2) + (2^p - (p+1)_1) + 1 = 1 \cdot 2 \dots p,$$

$$\text{posito } n = \infty, \text{ prodit formula } \sum_0^n x^p = \frac{n^{p+1}}{p+1}, \text{ cuius ope}$$

emergit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots$$

quae formula notissima est.

Elenim habemus

$$\sqrt{1-z^2} = 1 - \frac{1}{2} z^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} z^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 - \dots,$$

unde fit

$$\int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} - \dots$$

sed posito $z = \sin \varphi$, laeva formulae pars in formam redit.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d\varphi$$

itaque probatur, esse

$$\int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

§. 4.

In iis, quae antecesserunt, puncta ita addita sunt, ut terminus quisque seriei summam colligeret punctorum, quae in eadem curvae ordinata sita erant. Sed ad eandem punctorum summam quadrantis positivi, ad quem quae sequuntur pertinebunt, etiam aliter pervenire licet. Cujusque enim intra quadrantem puncti Coordinatae x' et y' numeri sunt quicunque integri ejusmodi autem, ut sit $x'^2 + y'^2 = m'$, m' designante numerum, qui valorem m , si $x^2 + y^2 = m$ circuli est aequatio, non superat; $m' \leq m$. Colligendo in summam puncta ea (x', y') , quae quidem positivis gaudeant coordinatis, eundemque offrant valorem m' quadratorum summae $x'^2 + y'^2$, porro substituendo loco ipsius valoris m' omnes inde ab o usque ad m valores, denique summam faciendo omnium punctorum, quae ad unumquemque horum valorum m' pertineant, hoc quoque modo, si omiseris puncta, quaecunque in axe abscissarum x posita sunt, eandem obtinebis omnium punctorum quadrantis positivi summam. Priusquam autem hanc rem examinare possumus, quaestio solvenda est, num circulus ipse, cuius aequatio sit $x^2 + y^2 = p$, per puncta illa transeat, atque si forte accidat, quanta sit horum punctorum multitudo. — Jam a priori intelligitur, puncta in circulo ipso sita non esse, nisi p numerus sit quicunque integer, quo in casu quaestio

proposita in aliam convertitur: quantus sit, p designante quemcunque numerum integrum, numerus solutionum aequationis $x^2 + y^2 = p$, positivis tantum valoribus loco x et y substitutis. Designante p numerum quemcunque imparem vel duplum numeri cuiuslibet imparis, numerus solutionum aequationis $x^2 + y^2 = p$ (vide Dirichlet: Applications de l'Analyse. Diar. Crell. Vol. XXI. pag. 3; Jacobi: De compositione numerorum. Diar. Crell. Vol. XII. 169) si pro x et y positivos et negativos valores substituere liceat, idem est atque quadruplus excessus numeri divisorum ipsius p formae $4n+1$ supra numerum divisorum formae $4n+3$. Denotante σ hunc excessum, numerus solutionum idem est atque 4σ ; quae quidem solutiones, si valores positivi a et b . . . o et c pro x et y substituti aequationi satisfaciunt, inveniuntur signis mutatis

$$\begin{array}{llll} x, & y; & x, & y; \dots \\ +a, & +b & +b, & +a \dots \\ -a, & +b & -b, & +a \dots \\ +a, & -b & +b, & -a \dots \\ -a, & -b & -b, & -a \dots \end{array} \begin{array}{ll} x, & y. \\ o, & +c. \\ o, & -c. \\ +c, & o. \\ -c, & o. \end{array}$$

Omnibus ex his solutionibus si eas elegeris, quae positivis integrorum x et y signis respondeant, σ numerus erit harum solutionum, ex solutionibus $o+c^2$ et c^2+o , si forte ipse p numerus est quadratus, una tantum $o+c^2$, ut ad quaestione nostram res accommodetur, adnumerata, punctis igitur omissis, quae in axe abscissarum x sita sunt. —

Eadem lege numerum dari solutionum aequationis $x^2+y^2=p$, p designante numerum quemcunque parem vel imparem, facillime intelligitur. — Datus sit numerus formae $2^{2n}p$, designante p numerum imparem et sufficient numeri integri α et β aequationi $2^{2n}p=x^2+y^2$, neve ipsi α et β per 2^n dividantur. Ea conditione, posito $\alpha=2^\mu r$, ubi r esset numerus impar et $\mu < n$ ex aequatione

$$2^{2n}p - 2^{2\mu}r^2 = \beta^2$$

sequeretur, pari modo esse $\beta=2^\mu s$, designante s numerum imparem. Valeret igitur aequatio

$$2^{2^n} p = 2^{2\mu} r^2 + 2^{2\mu} s^2$$

$$2^{2(n-\mu)} p = r^2 + s^2,$$

cujus aequationis dextra pars per 4 non divideretur, id quod in laevo membro, μ numerum ($n-1$) non superante, locum haberet; ergo quum absurdia prodirent, conditio illa neganda est, ita ut valere non possit $\alpha^2 + \beta^2 = 2^{2^n} p$, nisi ipsi α et β per 2^n dividi possint; itaque, posito $\alpha^2 = 2^{2^n} a^2$ et $\beta^2 = 2^{2^n} b^2$, solutio inde prodiret $p=a^2+b^2$. Cujusque igitur aequationis $x^2+y^2=2^{2^n} p$ solutio ad solutionem quandam reducitur aequationis $p=x^2+y^2$; et vice versa quaeque aequationis $x^2+y^2=p$ solutio ad solutionem reducitur $2^{2^n} p = (2^n x)^2 + (2^n y)^2$, unde perspicis, quum diversae unius aequationis solutiones ad alterius aequationis solutiones inter se differentes perducantur, numerum $2^{2^n} p$ toties in duo quadrata discerpere licere, quoties ipsum numerum p . — Eodem modo probari potest, numerum solutionum aequationis $2^{2n+1} p = x^2 + y^2$ eundem esse atque numerum solutionum aequationis $2p = x^2 + y^2$, unde generaliter patet theorema:

Numerus solutionum aequationis $p = x^2 + y^2$, designante p numerum quemicunque parem vel imparem ac positivis tantum pro x et y substituendis valoribus, idem est atque excessus numeri divisorum ipsius p formae $4n+1$ supra numerum divisorum ipsius p formae $4n+3$. —

Hoc ex theoremate intelligitur, seriem

$$\left[\frac{m}{1} \right] - \left[\frac{m}{3} \right] + \left[\frac{m}{5} \right] - \left[\frac{m}{7} \right] + \dots$$

tamdiu perducendam, quam ipsa finitur, puncta in summam colligere, quae in circuli, cuius aequatio est $x^2 + y^2 = m$, quadrante positivo sita sunt, eaque ratione, quam ineunte hoc paragrapho composui. Numero enim m , percurrente omnes valores m' inde ab o usque ad m , seriei summa immutata manet in intervallo intra numerum quemque integrum et numerum integrum proximum, adnumerat autem tot unitates, ubi m ad numerum m' ipsum integrum transiit, quantus sit excess-

sus numeri divisorum ipsius m' formae $4n + 1$ supra numerum divisorum formae $4n + 3$; id est puncta adnumerat, quae in circuli $x^2 + y^2 = m'$ peripheria sita sunt, itaque m crescente in quadrantis aream intrant. Seriei summa eadem est ac punctorum in intervallo 0 et 1, atque, numero m crescente, serie ipsa puncta omnia adnumerantur, quae in quadrantem intrant, itaque designante m numerum quemcunque integrum vel fractionem quandam, series semper summam offert punctorum, quae in quadrante positivo sita sunt, iis adnumeratis, quae ad circuli peripheriam ipsam pertineant. Designante S punctorum numerum, habebis

$$S = \left[m \right] - \left[\frac{m}{3} \right] + \left[\frac{m}{5} \right] - \left[\frac{m}{7} \right] + \dots$$

quae series continuanda est usque ipsa finitur. — Sed jam inquiramus in summam fractionum, quae eruuntur uncis remotis.

§. 5.

Seriei termini $\left[\frac{m}{n} \right]$ ab ipsie $\frac{m}{n}$ fractione differunt quādam $\varepsilon < 1$, itaque si ab hac serie, posito $m = \infty$, ad Leibnitzii transeamus, demonstretur necesse est, negligendam esse fractionum ε summam cum ipso numero $m = \infty$ comparatam. Series ipsa

$$\text{I. } \left[m \right] - \left[\frac{m}{3} \right] + \left[\frac{m}{5} \right] - \dots \pm \left[\frac{m}{m-1} \right],$$

designante m numerum parem nec adhuc infinitum, uncis remotis in aliam convertitur

$$\text{II. } m - \frac{m}{3} + \frac{m}{5} - \dots \pm \frac{m}{m-1},$$

cujus seriei $\frac{m}{2}$ numerus est terminorum.

Fractiones ε eo consilio, ut omnium summa colligatur, in classes digerantur, iis fractionibus ad classem eandem relatis, quae ad terminos seriei (I.) inter se aequales pertineant. Etenim fractiones ejusdem classis lege quadam subsequuntur, ita ut facillime limes constitui possit, quem ejusdem classis

fractionum summa attingere non possit. Aequales autem inter se termini sunt, quorum denominatores in intervallo quodam inter $\frac{m}{n+1}$ et $\frac{m}{n}$ positi sunt, designante n numerum quemcunque integrum; terminus enim seriei, cuius denominator proximus est numerus impar supra $\frac{m}{n+1}$, numero ipso n aequalis est, eodemque numero termini omnes aequales sunt usque ad terminum, cuius denominator proximus numerus impar infra $\frac{m}{n}$ vel ipse est $\frac{m}{n}$, si forte $\frac{m}{n}$ numerus est quidam

integer impar. Denotetur per $\sum \epsilon$ fractionum ϵ summa, quarum denominatores inter limites $\frac{m}{n+1}$ et $\frac{m}{n}$ interpositi sunt quae igitur ad terminos pertinent inter se, eosque numero n aequales.

Primum igitur in summam colligantur fractiones ϵ terminorum inde ab denominatore $\frac{m}{2} + 1$ (sit quoque $\frac{m}{2}$ numerus par) eaeque omnes, quae ad alteram terminorum partem dimidiad pertinent, qui quidem termini, quorum quisque unitati aequalis et, scribuntur

$$\pm \left[\frac{m}{\frac{m}{2} + 1} \right] \mp \left[\frac{m}{\frac{m}{2} + 3} \right] \pm \left[\frac{m}{\frac{m}{2} + 5} \right] \mp \dots \pm \left[\frac{m}{\frac{m}{2} - 1} \right].$$

Uncis remotis fractiones hae eruuntur, binis suppositis, quae signo gaudent opposito

$$\pm \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\frac{m}{2} - 1}{\frac{m}{2} + 1} + \frac{\frac{m}{2} - 5}{\frac{m}{2} + 5} + \dots \\ - \frac{\frac{m}{2} - 3}{\frac{m}{2} + 3} - \frac{\frac{m}{2} - 7}{\frac{m}{2} + 7} - \dots \end{array} \right\}$$

ubi, quod quidem negligatur signum sumendum est positivum, si $\frac{m}{2} + 1$ numerus est formae $4n + 1$, negativum si ipse $\frac{m}{2} + 1$ formae est $4n + 3$. —

Differentia est fractionum

$$\frac{\frac{m}{2} - 1}{\frac{m}{2} + 1} - \frac{\frac{m}{2} - 3}{\frac{m}{2} + 3} = \frac{2m}{(\frac{m}{2} + 1)(\frac{m}{2} + 3)},$$

$$\frac{\frac{m}{2} - 5}{\frac{m}{2} + 5} - \frac{\frac{m}{2} - 7}{\frac{m}{2} + 7} = \frac{2m}{(\frac{m}{2} + 5)(\frac{m}{2} + 7)},$$

$$\text{duarum, quae sequuntur} = \frac{2m}{(\frac{m}{2} + 9)(\frac{m}{2} + 11)}$$

unde vides, differentiam fractionum subsequentium magis magisque decrescere. — Summam igitur si collegeris differentiarum vel summam algebraicam ipsarum hoc in intervallo fractionum ε , quae quidem alternis gaudent signis, obtinebis

$$\sum_{\frac{m}{2}}^m \varepsilon < \frac{2m}{(\frac{m}{2} + 1)(\frac{m}{2} + 3)} \cdot \frac{m}{8}.$$

ipse enim $\frac{m}{8}$ numerus est differentiarum fractionum binarum ε signis oppositis. Augetur insuper dextrum formulae membrum, si pro $(\frac{m}{2} + 1)(\frac{m}{2} + 3)$ valorem $\frac{m^2}{4}$ substitueris, itaque quum dextra pars hoc modo unitati aequalis sit, aequatio probatur

$$\sum_{\frac{m}{2}}^m \varepsilon = \pm \mu',$$

designante μ' numerum quendam unitate minorem, $\mu' < 1$. —

Fractionum deinde summa colligatur in intervallo denominatorum inter $\frac{m}{3}$ et $\frac{m}{2}$, quae fractiones ad seriei terminos pertinent numero 2 aequalēs; terminus enim, cuius denominator est $\frac{m}{3} + 1$, (sit $\frac{m}{3}$ quoque numerus par, id quod statuere licet, quum quae sequuntur ad numerum $m = \infty$ adhibeantur) numerū offert integrum maximum 2, fractione restante $\frac{\frac{m}{3} - 2}{\frac{m}{3} + 1}$, quae fractiones eodem modo in ordinem rediguntur

$$\pm \left\{ + \frac{\frac{m}{3} - 2}{\frac{m}{3} + 1} + \frac{\frac{m}{3} - 10}{\frac{m}{3} + 5} + \dots \right. \\ \left. - \frac{\frac{m}{3} - 6}{\frac{m}{3} + 3} - \frac{\frac{m}{3} - 14}{\frac{m}{3} + 7} - \dots \right\} .$$

Fractionum differentia est

$$\frac{\frac{m}{3} - 2}{\frac{m}{3} + 1} - \frac{\frac{m}{3} - 6}{\frac{m}{3} + 3} = \frac{2m}{(\frac{m}{3} + 1)(\frac{m}{3} + 3)}$$

$$\frac{2m}{(\frac{m}{3} + 5)(\frac{m}{3} + 7)}$$

duarum, quae sequuntur itaque hic quoque intelligitur, fractionum differentiam magis magisque decrescere; multitudine igitur denominatorum inter $\frac{m}{3}$ et $\frac{m}{2}$ constituta, etiam hoc loco patet

$$\sum_{\frac{m}{3}}^{\frac{m}{2}} \varepsilon < \frac{2m}{(\frac{m}{3} + 1)(\frac{m}{3} + 3)} \cdot \frac{m}{24},$$

unde, dum insuper dextra pars augetur, sequitur $\sum_{\frac{m}{3}}^{\frac{m}{2}} \varepsilon < \frac{9}{12}$,

itaque invenitur $\pm \sum_{\frac{m}{3}}^{\frac{m}{2}} \varepsilon = \pm \mu'', \mu'' < 1$.

Iisdem argumentis colligendo summa fractionum, quarum denominatores inter limites $\frac{m}{n+1}$ et $\frac{m}{n}$ positi sunt, quae igitur ad terminos seriei pertinent numero n aequales, probatur esse

$$\sum_{\frac{m}{n+1}}^{\frac{m}{n}} \varepsilon < \frac{2m}{\left(\frac{m}{n+1}\right)^2} \cdot \frac{m}{4n(n+1)} = \frac{(n+1)^2}{2n(n+1)}$$

itaque $\pm \sum_{\frac{m}{n+1}}^{\frac{m}{n}} \varepsilon = \pm \mu_n, \mu_n < 1$. —

Tamdiu in intervallo denominatorum inter limites $\frac{m}{t'+1}$ et $\frac{m}{t'}$ complures fractiones habebis, quae ad seriei terminos inter se eosque numero t' aequales pertineant, quamdiu $\frac{m}{t'}$ et $\frac{m}{t'+1}$ quantitate differunt, quae numerum superat 4, quamdiu igitur factor in dextra superioris formulae parte $\frac{m}{4t'(t'+1)}$ superat unitatem; etenim eo usque inter limites $\frac{m}{t'+1}$ et $\frac{m}{t'}$ duo certe reperiuntur numeri impares, denominatores igitur terminorum seriei nostrae, qui oppositis gaudent signis.

Invenies autem, si posueris $\frac{m}{s} - \frac{m}{s+1} > 4$,

$$s < \frac{\sqrt{m+1}}{2} - \frac{1}{2}$$

Itaque, designante t numerum integrum maximum infra

$\frac{\sqrt{m+1}}{2} - \frac{1}{2}$, pergere licet hac in disquisitione usque ad denominatorum intervallum inter limites $\frac{m}{t}$ et $\frac{m}{t+1}$. Hic quoque valet

$$\pm \sum_{\frac{m}{t+1}}^{\frac{m}{t}} \varepsilon = \pm \mu_t, \mu_t < 1,$$

quae quidem aequatio a fortiori probata est, quum fractionum summa postremo differentia sit duarum fractionum ε , itaque eo magis unitate minor.

Ad summam colligendam fractionum omnium, quarum denominatores inter limites $\frac{m}{t+1}$ et m interpositi sunt, omnes quantitates μ' , μ'' , μ''' , . . . μ_n . . . μ_t consummandae sunt, ita ut habeas $\sum_{\frac{m}{t+1}}^m \varepsilon = \pm \mu' \pm \mu'' \pm \mu''' \pm \dots \pm \mu_n \pm \dots \pm \mu_t$.

Augetur dextra aequationis pars primum, si omnibus fractionibus μ idem tribuitur signum positivum, ut summa sit quam maxima, deinde, si pro quolibet ipso valore μ_n maximus eorum substituitur, qui designetur per v , ita ut $v \geq \mu'$

$$v \geq \mu''$$

" " "

$v \geq \mu_t$ sit. Multipli-

cando eandem fractionem v per numerum terminorum

$$\frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \dots, \frac{1}{n(n+1)}, \dots, \frac{1}{t(t+1)},$$

ad quemque enim terminum $\frac{1}{n(n+1)}$, ut supra vidimus, intervallum quoddam vel fractio quaedam pertinet μ_n , formulam obtinebis, quum t numerus sit horum terminorum,

$$\sum_{\frac{m}{t+1}}^{\frac{m}{t}} \varepsilon < vt. —$$

Ipse numerus t integer est maximus infra $\frac{\sqrt{m+1}}{2} - \frac{1}{2}$,

substituto igitur, quum eo magis valeat $\frac{\sqrt{m}}{2} > t$, loco ipsius t valore $\frac{\sqrt{m}}{2}$, insuper augetur formulae dextra pars; porro ex relatione

$$\frac{\sqrt{m+1}}{2} - \frac{1}{2} < t + 1 < \frac{\sqrt{m+1}}{2} + \frac{1}{2},$$

numerum $(t+1)$ proximum adjacere valori $\frac{\sqrt{m}}{2}$, intelligitur, itaque si ipsum valorem $\frac{m}{\frac{\sqrt{m}}{2}} = 2\sqrt{m}$ summae in laeva formulae parte limitem habeas, formula emergit

$$\frac{\sum_{i=1}^m \varepsilon_i}{2\sqrt{m}} < v \frac{\sqrt{m}}{2} \dots \dots \dots \text{(I)}$$

quae quidem summa, designante in dextra parte v fractionem quandam unitate minorem, fractionis ε_i in summam colligit, quarum denominatores inter limites $2\sqrt{m}$ et m interpositi sunt.

Neque tamen ulla ratione, numerum fractionum in intervallo quolibet esse parem, necesse est, itaque, in intervallo quolibet fractiones ϱ' reliquas esse fieri potest, quae in summam antecedentem non intraverint. Designante ϱ' maximam harum fractionum, obtinebis

$$\frac{\sum_{i=1}^m \varrho'_i}{2\sqrt{m}} < \varrho' \frac{\sqrt{m}}{2}, \varrho' < 1 \dots \dots \dots \text{(II)}.$$

Restant adhuc fractiones ε omnium terminorum, quorum denominatores inter 1 et numerum integrum maximum infra $2\sqrt{m}$ interpositi sunt, quae quidem fractiones ad terminos seriei inter se aequales jam non pertinent ac lege quadam non subsequuntur.

Hic quoque, quum fractiones binas signis oppositis in differentiam $\varepsilon' < 1$ contrahere liceat, designante σ quantitatem ε' maximam, formula valet

$$\sum_{1}^{2\sqrt{m}} \varepsilon < \sigma \frac{\sqrt{m}}{2}, \sigma < 1 \dots \text{(III).}$$

Summa

$$\sum_{1}^{2\sqrt{m}} \varepsilon + \sum_{2\sqrt{m}}^m (\varepsilon + \varrho')$$

fractionum seriei omnium summam colligit, itaque ad extremum formula emergit

$$\sum_{1}^m \varepsilon < \frac{\sqrt{m}(\nu + \varrho + \sigma)}{2}$$

in qua ν , ϱ , σ quantitates sunt unitate minores. Dividendo formulam per m inde sequitur

$$\sum_{1}^m \frac{\varepsilon}{m} < \frac{\nu + \varrho + \sigma}{2\sqrt{m}}$$

Summa igitur fractionum seriei omnium, si ipsa summa per m dividitur, posito $m = \infty$, evanescit, quod quidem demonstrandum fuit.

§. 6.

Ex iis, quae antecesserunt, facilime intelligitur, numerum punctorum circuli totius formula exhiberi

$$S = 1 + 4 \left([m] - \left[\frac{m}{3} \right] + \left[\frac{m}{5} \right] - \dots \right),$$

serie eo continuanda, usque ipsa finitur. Posito $m = \infty$ inde sequitur

$$m \frac{\pi}{4} = [m] - \left[\frac{m}{3} \right] + \left[\frac{m}{5} \right] - \dots$$

quae quidem formula per m divisa, uncis remotis, formam induit

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

ergo his quoque argumentis Leibnitzii formula probata est.

Ad seriem Leibnitzii, adhibita analysi ad Theoriam numerorum ^{III^{mus} Dirichlet pervenit in disquisitionibus de formis quadraticis. In iis autem quae antecedunt, theorema quoddam speciale adhibitum est, quod exstitit ex aequatione}

$$2 \sum \left(\frac{D}{n} \right) \frac{1}{(n \cdot n')^s}$$

$$= \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \sum \frac{1}{(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2)^s} + \dots$$

qua in formula loco n et n' in laevo membro omnes numeri impares iidemque primi ad determinantem D , et in dextra parte pro x et y omnia numerorum integrorum systemata intra $-\infty$ et $+\infty$ substituenda sunt, quibus substitutis formae $ax^2 + 2bxy + cy^2$ numeri fiant impares nec ullum habeant cum ipso D divisorem communem. Substitutis autem loco n et n' iis tantum valoribus, qui multiplicati eundem offerant numerum h , eodemque modo in dextra formulae parte iis tantum selectis terminis, qui eundem habeant valorem h trinomii, omissa igitur summa infinita in utraque parte, theorema inde patet posito $D = -1$ de solutionum numero aequationis $x^2 + y^2 = m$.

Idem theorema Jacobi, theoria numerorum non adhibita, probavit, unde ea, que supra dixi exordiri licuisset. Ope hujus theorematis specialis pro finito numero punctorum circuli formulam proponere atque ab hac formula ope Lemmatis supra jam traditi posito $m = \infty$, ut supra demonstratum est, ad seriem Leibnitzii transire licuit. —

Alia ratione ad idem Ill^{mus} Dirichlet pervenit, qui quidem in aequatione

$$2 \sum \frac{\varrho}{n^{1+\varrho}} \sum \left(\frac{D}{n} \right) \frac{1}{n^{1+\varrho}} = \sum \frac{\varrho}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} + \sum \frac{\varrho}{(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2)^{1+\varrho}} + \dots$$

generaliter disquisivit hasce series infinitas atque limitibus constitutis, ad quem series ipsae convergunt, si ϱ ad cifram limitem tendit, numerum dedit formarum, quae ad eundem pertinent determinantem negativum. Probata enim aequatione

$$\lim 2 \sum \frac{\varrho}{n^{1+\varrho}} = \frac{2}{2\Delta} \phi(2\Delta),$$

aliis disquisitionibus ope Lemmatis $\lim S \sigma^2 = A$ demonstravit,

$$\text{summam } \Sigma \frac{q}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+q}}$$

q ad limitem cifram tendente, ad limitem $\frac{\phi(2\Delta)\pi}{2\Delta V\Delta}$ convergere, atque, limitibus utriusque partis comparatis, designante h numerum formarum, quae ad determinantem pertinent $D = -\Delta$, aequationem inde prodire

$$\phi \frac{(2\Delta)}{\Delta} \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi \phi(2\Delta)}{2 \Delta V\Delta} \cdot h,$$

$$h = \frac{2}{\pi} V\Delta \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n}$$

Posito $\Delta = 1$, dextra formulae pars per 2 multiplicanda est itaque, cum numerus formarum hoc in casu unitati aequalis sit (quae quidem forma est $(1, 0, 1)$) Leibnitzii series inde eruitur. —

Quantaecunque sunt variae series, quae numerum π exhibent et quomodocunque hae series transformatae sunt, ut celerius convergant, ex nulla tamen serie, qualis sit connexus inter numerum π et circuli aequationem, tam apte intelligitur, quam ex hac serie Leibnitzii, neque, cur potissimum terminis, quorum denominatores formae $4n+1$, signum positivum, iis autem, quorum denominatores formae sunt $4n+3$, signum negativum tribendum sit, ullo modo tam plane perspicies, quam ex iis, quae ex theoria numerorum patent.

§. 7.

Data ellipseos cuiusdam aequatione

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$y = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} x^2}, \quad a > b,$$

punctorum numerus, quae in quadrante elliptico posita sunt, formula exhibetur

$$S = \sum_{x=0}^{x=[b]} \left[\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} x^2} \right],$$

quae quidem formula ipsa definitione quantitatis $\left[\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} x^2} \right]$

probatur. Sed hic quoque, posito $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ita ut ellipseos aequatio sit $y^2 + 2x^2 = a^2$, formulam finiti punctorum numeri, adhibitis iis, quae ex theoria formarum quadraticarum patent, invenire licet. — Numero enim constituto punctorum, quae in ellipseos cujusdam $y^2 + 2x^2 = m'$ circuitu sita sunt, cognito igitur, quippe quum puncta in curva ipsa non inveniantur, nisi m' numerus sit integer, solutionum numero aequationis $y^2 + 2x^2 = m'$, punctorum omnium, quae in interiore ellipseos $y^2 + 2x^2 = a^2$ area sita sunt, summa eadem ratione, qua circuli puncta addita sunt, colligi potest. Docuit Ill^{mus} Dirichlet, numerum solutionum aequationis $y^2 + 2x^2 = m$, si m numerus est impar et pro y et x valores substituuntur et positivi et negativi, congruere cum duplo excessu numeri divisorum ipsius m formae $8v+1$ vel $8v+3$ supra numerum divisorum formae $8v+5$ vel $8v+7$; quod theorema immutatum manere, designante m numerum quemlibet parem vel imparem, facilime intelligitur. — Etenim data solutione $2^{2n}m = \alpha^2 + 2\beta^2$, ubi m numerus sit impar, inde sequitur dividendo per 2,

$$2^{2n-1}m = 2\alpha_1^2 + \beta^2,$$

α_1 designante numerum integrum, itaque, iterata divisione, habebis $m = \alpha_n^2 + 2\beta_n^2$. — Patet igitur, solutionem inveniri quandam aequationis $m = y^2 + 2x^2$, ab ipsa autem aequationis $m = y^2 + 2x^2$ solutione vice versa ad solutionem transire licet aequationis $2^{2n}m = y^2 + 2x^2$, itaque, quum diversae unius aequationis solutiones ad alterius solutiones inter se differentes perducantur, inde sequitur, numerum solutionum aequationis $y^2 + 2x^2 = 2^{2n}m$ eundem esse ac ipsius aequationis $y^2 + 2x^2 = m$. Eadem valent, data solutione quadam aequationis $2^{2n-1}m = y^2 + 2x^2$, itaque patet, solutionum numerum aequationis $y^2 + 2x^2 = m$ semper eadem lege inveniri, sive m designante numerum quemlibet parem sive imparem. —

Sicuti ab formula supra proposita $\sum_{x=0}^{x=[b]} \left[\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{b^2} x^2} \right]$,

qua puncta adduntur positivi quadrantis elliptici et ea, quae ad ellipseos pertinent semiaxem a , ad punctorum totius ellipseos summam eadem simplicitate, axibus inaequalibus, transire non licet, ita ex iis, quae de solutionum numero aequationis $y^2 + 2x^2 = m$ dicta sunt, totius tantummodo ellipseos puncta iu summam colligi possunt, certe ex illis argumentis minime licet addere puncta ea, quae sola in positivo sita sunt quadrante, iis non exceptis, quae ad unum tantum semiaxiuum, quadrantem ipsum continentium pertinent. Etenim si m numerus est quadratus vel duplum numeri quadrati pro $x = 0$ vel $y = 0$ duae tantum aequationis $y^2 + 2x^2 = m$ reperiuntur solutiones $(+y, 0)$ et $(-y, 0)$ vel $(0, +x)$ et $(0, -x)$, itaque si eo consilio, ut positivi tantum quadrantis elliptici punctorum summa colligeretur, pari modo, quo supra factum est, omnium solutionum numerus per 4 divideretur: nec unius nec alterius semiaxis puncta ipsa, sed dimidia multitudo punctorum, quae in duobus quadrantis aream continentibus semiaxiibus sita essent, summae punctorum intra quadrantem positorum adnumeraretur.

Quapropter punctorum summa colligatur totius ellipseos, aequatione data $y^2 + 2x^2 = m$; quae summa, adnumerato centro, quod in summam nondum intravit, serie exhibetur

$$S = 1 + 2 \left(\left[\frac{m}{1} \right] + \left[\frac{m}{3} \right] - \left[\frac{m}{5} \right] - \left[\frac{m}{7} \right] + \dots \right)$$

quae continuanda est, usque ipsa finitur.

Etenim numero m percurrente omnes valores inde ab 0 usque ad ipsum m , adnumerantur, ubi m ad numerum transiit integrum m' , tot unitates, quantus erit excessus numeri divisorum ipsius m' formae $8v + 1$, 3 supra numerum divisorum ipsius m' formae $8v + 5$, 7; puncta igitur ex lege supra tradita adnumerantur, quae in ellipseos $y^2 + 2x^2 = m'$ circuitu sita sunt, itaque, m crescente, in interiorem ellipseos aream intrant. Iisdem igitur argumentis, quae adhibita

sunt ad formulam summae punctorum circuli demonstrandam, etiam hanc formulam probare licet. —

Si numerus m , unitatis intervallo in infinitum decrescente, in infinitum creverit, punctorum summa ad eum limitem tendet, qui ipse est ellipseos area. E designante aream ellipseos habebis

$$E = ab\pi = \frac{a^2 \pi}{\sqrt{2}} = \frac{m\pi}{\sqrt{2}},$$

unde, posito $m = \infty$, formula patet

$$\frac{\pi}{4} = 2 \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots \right),$$

quae in formam redit

$$\frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \dots \right). —$$

Summam fractionum ϵ , quibus termini, uncis remotis, differunt ab iis, qui uncis sunt inclusi, omittendam fuisse, facillime intelligitur. Etenim si in hunc ordinem rediguntur termini, designante n numerum integrum formae $8v + 3$, $n < m$,

$$+ \left[\frac{m}{n+1} \right] - \left[\frac{m}{n+5} \right] + \left[\frac{m}{n+9} \right] - \dots \\ - \left[\frac{m}{n+3} \right] + \left[\frac{m}{n+7} \right] - \left[\frac{m}{n+11} \right] + \dots$$

hic quoque terminorum fractiones ϵ alternis praeditae signis quantitate differunt quadam $\epsilon' < 1$, quae quidem quantitates ϵ' ipsae gaudent signis alternis; in iis autem, quae antecedunt, demonstratum est, quantitatum ϵ' summam, si ipsae ϵ' eodem gaudent signo, ordinis esse \sqrt{m} , itaque hoc loco eo magis patet, fractionum ϵ summam per m divisam $\sum_1^m \frac{\epsilon}{m}$ esse negligendam. —

Si alia data est ellipsis quedam $x^2 + \frac{a^2 y^2}{b^2} = a^2$, quae quidem ad idem systema, designante $\frac{a^2}{b^2} = c$ numerum quemlibet, non pertinet, ex iisdem theoriae numerorum argumentis

numeri punctorum finiti formula inveniri non potest. Formulam enim, unde, quae adhibita sunt, sequuntur, hanc supra jam traditam proposuit Ill^{mus} Dirichlet

$$2 \sum \left(\frac{D}{n} \right) \frac{1}{(nn')^s} = \sum \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^s} + \sum \frac{1}{(a'x^2 + 2b'xy + c'y^2)^s} + \dots$$

in qua summarum numerus in dextra parte idem est, atque numerus formarum determinantis negativi D , in quas substitutione quadam omnes ejusdem determinantis formae transformari possunt. Formae enim, quarum determinans numerus est quidam D , in finitum classum numerum distribuuntur, duabus formis ad eandem classem vel ad alias classes relatis, prout formae sint aequivalentes necne; quaque ex classi si unam elegeris formarum, quibus ipsa classis componitur, formas habebis inter se differentes ipsius determinantis D . Complexus formarum inter se differentium determinantis $D = -1$ in unam formam $(1, 0, 1)$, eodem modo sistema formarum determinantis $D = -2$ in unam formam reducitur $(1, 0, 2)$, ita ut ex formula supra tradita numerus solutionum aequationum $x^2 + y^2 = m$ et $x^2 + 2y^2 = m$ inveniri possit; complures autem adstant formae inter se differentes determinantis cuiusdam $D = -\Delta$, Δ designante alium quemcunque numerum, itaque numerus quidem invenitur, quoties formarum complexu numerus quilibet, non autem, quoties idem numerus una tantum harum formarum repraesentari possit. Id quod pari modo ad formas determinantis cuiuslibet positivi pertinet, ita ut hic quoque in casum speciale inquirere liceat.

§. 8.

Hyperbolae cuiusdem data aequatione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2},$$

punctorum summa, quae in hyperbolae area ordinata quadam conclusa posita sunt, formula datur

$$\sum_{x=a}^{x=s} \left[\sqrt{\frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2} \right],$$

si a et s numeri sunt integri, lineaque, qua area concluditur, aequatione data est $x = s$.

Posito $\frac{a^2}{b^2} = 2$, summae quoque finitae punctorum, quae in exteriore sita sunt hyperbolae area, formula inveniri potest eorum adjumento, quae ex theoria numerorum manant. Data enim hyperbolae aequatione $x^2 - 2y^2 = m$ lineaque $3y = 2x$, puncta in summam colligantur, quae ipsa hyperbola et linea $3y = 2x$ et axe abscissarum continentur, quod quidem ita fiat, ut in summan colligantur, percurrente in aequatione $x^2 - 2y^2 = m'$ numero m' omnes inde ab o usque ad ipsum m valores, puncta omnia, quae ad eandem semper hyperbolam $x^2 - 2y^2 = m'$, ad hyperbolae certe arcum pertinent, qui linea desecatur $3y = 2x$. Quam ad rem intelligatur necesse est quantus sit punctorum numerus, quae in hyperbola quadam $y^2 - 2y^2 = m$ sita sint. Docuit III^{mus} Dirichlet (Crel. Diar. Vol. XXI. pag. 6), dato numero quolibet m impari positivo, numerum solutionum aequationis $x^2 - 2y^2 = m$, loco ipsarum x et y positivis tantum iisque valoribus, qui relationi satisfaciunt $3y \leq 2x$, substitutis, eundem esse atque excessum numeri divisorum ipsius m formae $8v \pm 1$ supra numerum divisorum formae $8v \pm 5$. —

Numero quolibet dato $2m$, designante m numerum imparem, numerum solutionum aequationis $x^2 - 2y^2 = 2m$ eundem esse atque numerum solutionum aequationis $x^2 - 2y^2 = m$, demonstrabitur. Solutionem quandam si inveneris $\alpha^2 - 2\beta^2 = 2m$, habebis simul $2\alpha_1^2 - \beta^2 = m$, posito $\alpha = 2\alpha_1$, et vice versa quaelibet solutio $2\alpha_1^2 - \beta^2 = m$ ad solutionem perducitur $\alpha^2 - 2\beta^2 = 2m$, numerus igitur solutionum aequationis $2x^2 - y^2 = m$ idem est atque aequationis $x^2 - 2y^2 = 2m$. Sin autem habes $3\beta \leq 2\alpha$, itidem invenitur $3\beta \leq 4\alpha_1$; itaque

numerus solutionum cognoscatur necesse est aequationis $2x^2 - y^2 = m$, m designante numerum imparem et loco ipsarum x et y valoribus iis, qui satisfaciunt relationi $3y \leq 4x$, substitutis.

Formarum, quae ad determinantem spectant 2, sistema completum in unum reducitur terminum, cuius loco III^{mms} Dirichlet, ut ad theorema supra traditum perveniret, formam posuit $x^2 - 2y^2$; ipsa quoque forma $2x^2 - y^2$ ad determinantem 2 pertinet, itaque ejusdem determinantis formas etiam hac forma repraesentare licet.

Quae quidem forma $2x^2 - y^2$ si supponitur, iidem satisfaciunt integri minimi $T=3$ et $U=2$ aequationi $T^2 - 2U^2 = 1$, coefficientes autem formae non jam iidem sunt numeri integri, itaque, posito $a=2$, $c=1$, ex relatione $y \leq \frac{a \cdot U}{T - bU} x$ conditio emergit alia $y \leq \frac{4}{3}x$; ex iis igitur, quae III^{mms} Dirichlet eodem loco docuit, probatur, numerum solutionum aequationis $2x^2 - y^2 = m$, m designante numerum imparem, loco ipsarum x et y valoribus positivis, qui relationi satisfaciunt $3y \leq 4x$, substitutis, eundem esse atque numerum solutionum aequationis $x^2 - 2y^2 = m$, si loco ipsarum x et y eos valores, qui relationi $3y \leq 2x$ satisfaciunt, substitueris. Unde eorum, quae supra dicta sunt, haud immemor perspicis, eadem lege dari numerum solutionum aequationis $x^2 - 2y^2 = 2m$, qua numerus invenitur solutionum aequationis $x^2 - y^2 = m$.

Theorema postquam probatum est, designante m numerum imparem vel duplum numeri imparis, facillime intelligitur, theorema supra traditum etiam locum habere, in aequatione $x^2 - 2y^2 = m$, designante m numerum quemlibet sive parem sive imparem.

Quae quum ita sint, si denotetur per S summa punctorum, quae pertinent ad aream hyperbola $x^2 - 2y^2 = m$ et linea $3y = 2x$ et axe abscissarum conclusam, series inde eruitur

$$S = [m] - \left[\frac{m}{3} \right] - \left[\frac{m}{5} \right] + \left[\frac{m}{7} \right] + \left[\frac{m}{9} \right] - \dots$$

eo perducenda usque ipsa finitur, quam quidem formulam iisdem argumentis, quae supra jam adhibita sunt, probare licet. Unitatis intervallo magis magisque decrescente, numero igitur m in infinitum tendente, punctorum numerus ad limitem converget, qui quidem limes exterioris est hyperbolici sectoris area. Hyperbola si exprimitur aequatione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, designante H sectorem hyperbolae exteriorem, invenitur

$$H = \frac{a \cdot b}{2} \log \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right),$$

posito igitur $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$,

$$H = \frac{a^2}{2\sqrt{2}} \log \left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{2}y}{a} \right),$$

qua in formula x et y nunc aequationibus datae sunt $3y=2x$
 $x^2-2y^2=a^2$,

unde prodit $\frac{x}{a} = 3$, $\frac{y}{a} = 2$, quibus valoribus substitutis, si posueris $a^2=m$, obtinebis

$$H = \frac{m}{2\sqrt{2}} \log (3 + 2\sqrt{2}).$$

Posito igitur $m = \infty$, formula valet

$$\frac{m}{2\sqrt{2}} \log (3 + 2\sqrt{2}) = [m] - \left[\frac{m}{3} \right] - \left[\frac{m}{5} \right] + \left[\frac{m}{7} \right] + \dots$$

atque, quum ex iis argumentis, quae supra jam adhibita sunt, facilime cognoscas, uncis remotis fractionum ε summam negligendam esse, inde sequitur

$\log (3 + 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots)$,
 quae formula, quum inveniatur

$$\begin{aligned} \log (3 + 2\sqrt{2}) &= \log (1 + \sqrt{2})^2 \\ &= 2 \log (1 + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

in formam redit

$$\log (1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots) -$$

Addendo seriem pro numero $\frac{\pi}{2}$ erutam

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{2} (1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots)$$

obtinebis

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} (1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots),$$

substrahendo invenitur

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\log(1+\sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} (\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots).$$

Duabus inter se comparatis formulis, quae numerum exhibent $\frac{\pi}{4}$, prodeunt series

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \dots$$

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} - \dots$$

Quum videris, numerum solutionum aequationis $2x^2 - y^2 = m$, loco ipsarum x et y valoribus, qui satisfaciunt relationi $3y \leq 4x$, substitutis, congruere cum numero solutionum aequationis $x^2 - 2y^2 = m$, valoribus pro x et y substitutis, qui satisfaciunt conditioni $3y \leq 2x$, facillime perspicies, punctorum summam in area sitorum hyperbola $2x^2 - y^2 = m$ et linea $3y = 4x$ et axe abscissarum conclusa eandem esse atque numerum punctorum, quae hyperbola $x^2 - 2y^2 = m$, linea $3y = 2x$, axe abscissarum continentur. Posito in summae formula $m = \infty$, inde sequitur, etiam aream sectorum duorum esse aequalem. — Ac revera hyperbola si data est $2x^2 - y^2 = b^2$ lineaque $3y = 4x$, designante H' sectoris aream, invenitur

$$H' = \frac{b^2}{2\sqrt{2}} \log \left(\frac{x}{b} \sqrt{2} + \frac{y}{b} \right);$$

valoribus loco ipsarum x et y substitutis, qui patent ex aequationibus

$$\begin{aligned} 2x^2 - y^2 &= b^2 \\ 3y &= 4x \end{aligned}$$

si insuper posueris $b^2 = m$, obtinebis $H' = \frac{m}{2\sqrt{2}} \log(3+2\sqrt{2})$
unde sequitur $H = H'$. —

Facere non possum, quin hoc loco adjiciam, transire licere ab illis formulis, quae in paragrapho secundo datae sunt, ad alias calculi integralis formulas. Etenim formula

$$\sum_{\mu+1}^p [f(s)] = qp - \mu v + \sum_{q+1}^v [F(t)],$$

si a finito punctorum numero, ubi intervallum, quo utriusque systematis lineae inter se distant, in infinitum decreverit, ad aream ipsam transiveris et idem intervallum per $dx = dy$ denotaveris, in aliam convertitur

$$\int_{\mu}^p f(x) dx = f(p)p - \mu f(\mu) + \int_{f(p)}^{f(\mu)} F(y) dy,$$

quae quidem formula est notissima. Pariter, si ipsam aream massa praeditam posueris, $\phi(x)dx$ intervallum erit rectae massa praeditae infinitum parvum, ac summa finita $\psi(s) = \sum_1^s \phi(s)$

in integrale $\int_0^s \phi(x) dx$, eodemque modo $\psi(s, [f(s)]) = \sum_{t=1}^{[f(s)]} \phi(s, t)$
 in integrale transibit $\int_0^{f(x)} \phi(x, y) dy$.

Formulae igitur

$$\sum_{\mu+1}^p \phi(s) [f(s)] = q \cdot \psi(p) - v \cdot \psi(\mu) + \sum_{q+1}^v \psi([F(s)])$$

$$\sum_{\mu+1}^p \psi(s, [f(s)]) = \sum_1^p \psi(s, q) - \sum_1^{\mu} \psi(s, r) + \sum_{q+1}^v \psi([F(t)], t)$$

ubi intervallum, quo lineae distant, in infinitum decrevit, in alias convertuntur

$$\int_{\mu}^p f(x) \phi(x) dx = f(p) \int_0^p \phi(x) dx - f(\mu) \int_0^{\mu} \phi(x) dx + \int_{f(p)}^{f(\mu)} dy \int_0^y \phi(x) dx$$

$$\int_{\mu}^p dx \int_0^{f(x)} \phi(x, y) dy = \int_0^{f(p)} dy \int_0^p \phi(x, y) dx - \int_0^{f(\mu)} dy \int_0^{\mu} \phi(x, y) dx$$

$$+ \int_{f(p)}^{f(\mu)} dy \int_0^p \phi(x, y) dx. -$$

Si posueris $\mu = 0$, formulam obtinebis

$$\int_0^p dx \int_0^{f(x)} \phi(x, y) dy = \int_0^{f(p)} dy \int_0^p \phi(x, y) dx - \int_{f(0)}^{f(p)} dy \int_0^p \phi(x, y) dx,$$

quam nuperrime Winkler dedit, (Ueber die Reduction doppelter Integrale auf Quadraturen. Crell. Diar. Vol. XLV. pag. 102) eodemque loco, quomodo hac formula utendum sit, demonstravit. --

V I T A.

Natus sum ego Hermannus Suhle Postampii anno hujus saeculi tricesimo M. Jan. die VII. patre Guilelmo, cursus publici secretario, matre Emilia e gente Winter, qua, patre jam ante annos viginti morte mihi erepto, adhuc vivente maxime gaudeo. Novem annos natus in aedificio, quod a Turkio, viro de patria optime merito, filiis orbis virorum munere publico functorum alendis et honeste habendis conditum est, eodemque tempore in gymnasium Postampiense deductus sum, quod adhuc floret rectore praestantissimo Rieglero.

Ibi per novem annos iis artibus, quibus aetas puerilis ad humanitatem informari solet, a magistris optimis dilectissimisque institutum, mathematicis imprimis a praceptorre clarissimo, humanissimo C. Meyer eruditum, tantus cepit artis mathematicae amor, ut hujus studio totum me dare constituerem. Examine scholae superato Berolinum profectus et in civum hujus universitatis numerum a C. Nitschio, Rectore Magnisico, receptus hisce lectionibus adsui: Ill. Dirichlet de theoria numerorum, de integralibus definitis, de theoria aequationum differentialium partialium, de theoria virium inverse distantiarum quadratis proportionalium; Ill. Enke de astronomia sphaerica, de interpolatione; Ill. Ohm de trigonometria analytica; Ill. Joachimsthal de geometria analytica, de theoria linearum et superficierum curvarum, de machanice analytica; Ill. Dove de physice; Ill. Trendelenburg de philosophiae historia; Ill. Michelet de logice; Ill. Mitscherlich de chemia; Ill. Rose de mineralogia. Praeterea interfui scholis Ill. Borchardt, Erman, Beetz, Rammelsberg, Wiedemann.

Quibus omnibus viris summopere de me meritis gratias ago quam maximas semperque habebo.

T H E S S.

1. Theoriam numerorum non esse alienam ab aliis mathe-matices disciplinis.
 2. Methodum analyticam methodo geometricae non utique et ubivis praefereendam esse.
 3. Gyrum electricum sine labore ferrum imbuere vi ma-gnetica.
 4. Hypothesium in physicis comprobationem esse minime spernendam, si, quae ex quaestionibus mathematicis fluunt, cum ipsa experientia consentiunt.
-