# Simulationsbasierte stochastisch dynamische Programmierung

OLIVER MUßHOFF, BERLIN
NORBERT HIRSCHAUER, BERLIN

**Abstract**
*Decision trees, representing the backward recursive dynamic programming approach, are often not flexible enough to analyze real world decision problems in a risky environment. The crux is the modeling of risk. Stochastic simulation, in contrast, is a very powerful and flexible modeling tool for stochastic variables. However, the prevailing belief is that time-interdependent decision problems cannot be analyzed by means of a forward moving simulation of stochastic paths. In this paper we demonstrate how to integrate the stochastic simulation procedure in a backward recursive dynamic programming algorithm. Using this combination of tools, the optimal strategy can be determined in a fast and efficient way. Our approach could be called "Bounded Recursive Stochastic Simulation" (BRSS).*

## 1 Einführung und Problemstellung

Bei zeitlichen Interdependenzen zwischen unternehmerischen Handlungen beeinflussen Entscheidungen in der Gegenwart den möglichen Entscheidungsspielraum in der Zukunft. Beispielsweise kann eine unverzügliche Investitionsdurchführung eine spätere Investition ausschließen. Ähnlich verhält es sich bei mehrperiodigen Produktionsplanungen (z.B. optimales Mastendgewicht), Maschinenersatzproblemen oder Finanzoptionen. Zur Analyse derartiger Entscheidungssituationen wurde in der Vergangenheit insbesondere das Entscheidungsbaumverfahren vorgeschlagen. Zur Bestimmung der optimalen Handlungsstrategie wird dabei die dynamische Programmierung (vgl. BELLMAN 1957) verwendet, bei der die Optimierung nicht für alle Variablen gleichzeitig, sondern in mehreren, aufeinander folgenden Schritten vor sich geht. Ein allgemein bekanntes Problem ist, dass in realistischen Entscheidungssituationen (Vielzahl möglicher Durchführungszeitpunkte, Vielzahl von Handlungsmöglichkeiten etc.) aus Entscheidungsbäumen schnell unüberschaubare und schwer zu handhabende „Entscheidungsbüsche“ werden. Dies gilt umso mehr, wenn es durch risikobehaftete (stochastische) Variablen zu weiteren „Verzweigungen“ kommt. Außerdem gibt es grundsätzliche Probleme, wenn stochastische Prozesse berücksichtigt werden müssen, die sich nicht zustandsdiskret über einfache Wahrscheinlichkeiten abbilden lassen. In diesem Beitrag wird ein zur Analyse stochastisch dynamischer Entscheidungsprobleme geeignetes Verfahren entwickelt, das die dynamische Programmierung mit der stochastischen Simulation kombiniert. Dieses Verfahren wird am Beispiel der Bestimmung der optimalen Investitionsstrategie bzw. eines optimalen Investitionstriggers ausgedrückt als kritischer Barwert der Investitionsrückflüsse $V^*$ erklärt.

## 2 Grundsätzliches zur Bestimmung der optimalen Investitionsstrategie

Ausgangspunkt ist die stochastische Entwicklung der Investitionsrückflüsse. Durch unverzügliche Investitionsentscheidung sei ein positiver Kapitalwert $i_t \geq 0$ zu erzielen. Der sog. Fortführungswert $f_t$ gibt den diskontierten Erwartungswert der besten zukünftigen Investition an. Sofortiges Investieren bedeutet eine Realisation des positiven Kapitalwertes und eine gleichzeitige Vernichtung des Fortführungswertes. Ein rational handelnder Investor wird dann unverzüglich investieren, wenn der positive Kapitalwert den alternativ zu erzielenden Fortführungswert überschreitet. Andernfalls stellt Warten die zu präferierende Handlungsstrategie dar. Der Wert der Investition entspricht demnach dem Maximum aus dem positiven Kapitalwert und dem Fortführungswert.

In Abb. 1 (linke Bildhälfte) ist der Funktionsverlauf von positivem Kapitalwert und Fortführungswert in Abhängigkeit vom erwarteten Gegenwartswert der Investitionsrückflüsse für *einen* beliebigen potenziellen Durchführungszeitpunkt *t* schematisch dargestellt. Bildlich gesprochen sollte die Investition bei einem Barwert der Investitionsrückflüsse $V_t$ links des Schnittpunktes zwischen positivem Kapitalwert und Fortführungswert *nicht* unverzüglich initiiert werden; rechts davon ist eine sofortige Realisierung der Investition anzuraten. Mittels dynamischer Programmierung gilt es, den (kritischen) Barwert zu bestimmen, für den der positive Kapitalwert und der Fortführungswert gleich hoch sind.
Während sich die linke Darstellung in Abb.1 auf nur einen Zeitpunkt bezieht, sind in der rechten Darstellung die kritischen Barwerte zu verschiedenen potenziellen Durchführungszeitpunkten angezeigt. Jeder der kleinen Sterne entspricht dem für einen potenziellen Durchführungszeitpunkt geltenden kritischen Wert. Der kritische Pfad, der unabhängig vom gegenwärtig erwarteten Barwert für die Investitionsrückflüsse gilt (Free-Boundary), definiert also die optimale Handlungsstrategie zu allen potenziellen Durchführungszeitpunkten. Bildlich gesprochen wird oberhalb des kritischen Pfades sofort investiert und unterhalb die weitere Entwicklung abgewartet. Charakteristisch für den Verlauf des kritischen Pfades ist die exponentielle Abnahme, die Ausdruck der sich mit der Abnahme des potenziellen Durchführungszeitraumes verringernden unternehmerischen Handlungsflexibilität ist. Das bedeutet, dass der Investor mit der Abnahme des potenziellen Durchführungszeitraumes immer weniger zurückhaltend bei der Durchführung einer Investition sein sollte. Da im letzten möglichen Durchführungszeitpunkt *T* hinsichtlich eines weiteren Aufschubs der Investition keine zeitliche Flexibilität mehr vorhanden ist, wird jede gewinnbringende Investition durchgeführt.

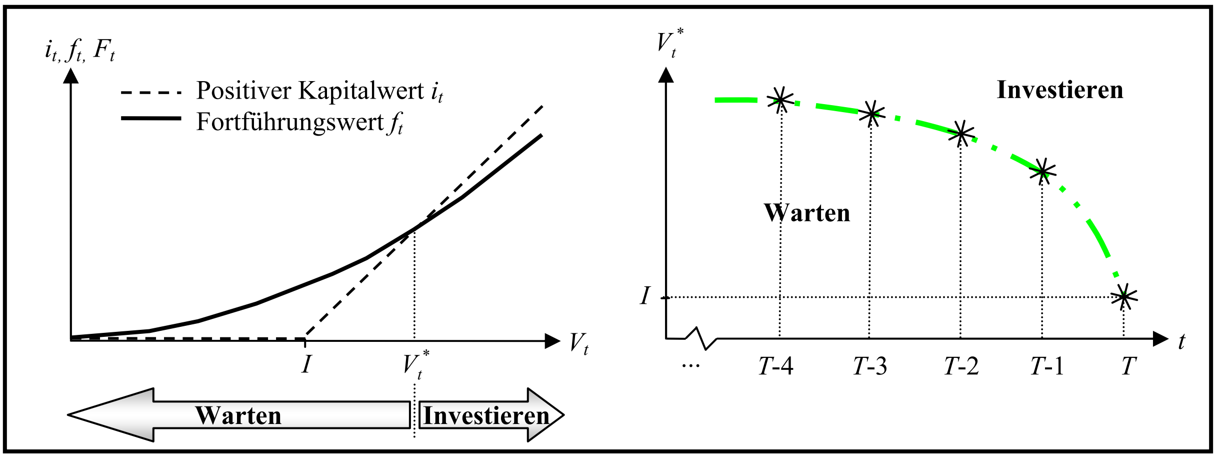


**Abbildung 1**: Darstellung des Verhältnisses zwischen positivem Kapitalwert und Fortführungswert (links; t < T) und des kritischen Pfades (rechts)

## 3 Die begrenzt rekursiv-stochastische Simulation (BRSS)

Bei der begrenzt rekursiv-stochastischen Simulation (vgl. auch GRANT et al. 1997) wird die stochastische Simulation in einen dynamischen Programmierungsablauf integriert. Die Bestimmung der optimalen Strategie muss *rückwärts*-rekursiv erfolgen, weil auf die stochastische Simulation nur dann zurückgegriffen werden kann, wenn die zukünftige Handlungsstrategie hinsichtlich der unverzüglichen oder späteren Investitionsdurchführung bekannt ist. Bei der Umsetzung der BRSS ergibt sich folgendes Ablaufschema:

*Schritt 1: Bestimmung des kritischen Wertes $V_T^*$*

Ausgangspunkt der rekursiven Bewertung ist der kritische Wert im letzten potenziellen Durchführungszeitpunkt. Zu diesem Zeitpunkt gibt es keine Flexibilität mehr und die Investition wird durchgeführt, wenn der Barwert der Investitionsrückflüsse $V_T$ die Investitionskosten $I$ deckt ($V_T^* = I$). Die Kenntnis von $V_T^*$ ist Voraussetzung für die Berechnung von $V_{T-1}^*$.

*Schritt 2: Bestimmung des kritischen Wertes $V_{T-1}^*$*

Der kritische Wert $V_{T-1}^*$ entspricht dem Barwert der Investitionsrückflüsse, bei dem der Kapitalwert $i_{T-1}$ und der Fortführungswert $f_{T-1}$ identisch sind. Zur Bestimmung des Schnittpunktes der Kurven $i_{T-1}(V_{T-1})$ und $f_{T-1}(V_{T-1})$ werden die Funktionswerte für den Kapitalwert und für den Fortführungswert innerhalb eines vorgegebenen Bereichs in Abhängigkeit von unterschiedlichen Barwerten ${}_nV_{T-1}$, $n = 1, 2, ..., N$, berechnet. Bei der Bestimmung von $V_{T-1}^*$ ist wie folgt vorzugehen (vgl. ):

*Schritt 2.1: Festlegung von Testbarwerten*

Es wird ein relativ großer Parametrisierungsbereich für den Barwert der Investitionsrückflüsse vorgegeben. Aufgrund des exponentiell abfallenden Verlaufs des Pfades ist klar, dass der kritische Barwert des nachfolgenden potenziellen Durchführungszeitpunktes (hier: $V_T^*$) die theoretische Untergrenze für den kritischen Wert des betrachteten Zeitpunktes darstellt. Die Obergrenze muss in jedem Fall pragmatisch gewählt werden. Der gewählte Bereich wird in $N-1$ gleich große Intervalle unterteilt, deren Grenzen die einzelnen ${}_nV_{T-1}$ definieren.

*Schritt 2.2: Bestimmung der Fortführungswerte mittels stochastischer Simulation*

Ausgehend von jedem Testbarwert ${}_nV_{T-1}$ werden auf der Grundlage derselben Zufallszahlenfolge Simulationsläufe $s$, $s = 1, 2, ..., S$, durchgeführt. Die Entwicklungspfade basieren auf der zeitdiskreten Version eines vorgegebenen stochastischen Prozesses (vgl. MUßHOFF und HIRSCHAUER 2003, Kapitel 3). Für jedes ${}_nV_{T-1}$ wird der Fortführungswert ${}_n^s f_{T-1}$ während jedes Simulationslaufs als diskontierter Rückfluss der optimalen Investitionsentscheidung bestimmt:

$$ {}_n^s f_{T-1} = \max\left(0, {}_n^s V_T - I\right) \cdot e^{-r} \tag{1}$$

Der Erwartungswert für den Fortführungswert ${}_n f_{T-1}$ ist wie folgt zu berechnen:

$$ {}_n f_{T-1} = \sum_{s=1}^{S} {}_n^s f_{T-1} \cdot \frac{1}{S} \tag{2}$$

*Schritt 2.3: Algorithmische Bestimmung der positiven Kapitalwerte*

Um einen Vergleich zwischen den möglichen Strategien: (1) Unverzüglich investieren und (2) Warten vornehmen zu können, wird neben dem erwarteten Fortführungswert für jedes ${}_nV_{T-1}$ der positive Kapitalwert ${}_n i_{T-1}$ bestimmt:

$$ {}_n i_{T-1} = \max\left(0, {}_n V_{T-1} - I\right) \tag{3}$$

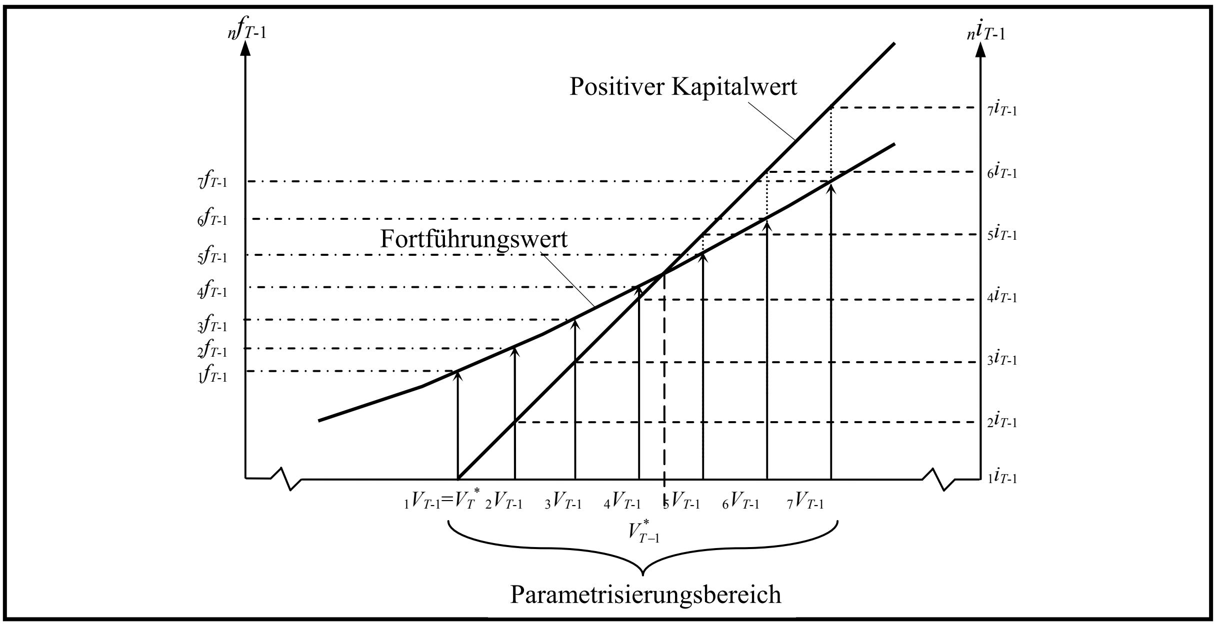


**Abbildung 2**: Bestimmung des kritischen Barwertes $V_{T-1}^*$ unter Verwendung der BRSS

*Schritt 2.4: Lineare Interpolation*

Praktisch wird es niemals gelingen, ad-hoc einen Testbarwert ${}_nV_{T-1}$ zu wählen, für den die Identitätsbedingung erfüllt ist, d.h. der dem gesuchten $V_{T-1}^*$ entspricht. Deshalb werden zunächst die beiden ${}_nV_{T-1}$ gesucht, bei denen die Differenz zwischen dem einfach zu berechnenden positiven Kapitalwert und dem simulierten Fortführungswert das Vorzeichen wechselt. Die beiden gewählten Barwerte werden im Folgenden mit $n'$ und $n''$ bezeichnet. Die zu ${}_{n'}V_{T-1}$ bzw. ${}_{n''}V_{T-1}$ gehörenden positiven Kapitalwerte ${}_{n'}i_{T-1}$ und ${}_{n''}i_{T-1}$ bzw. die Fortführungswerte ${}_{n'}f_{T-1}$ und ${}_{n''}f_{T-1}$ fließen in die anschließende Berechnung von $V_{T-1}^*$ ein. Grafisch gesprochen werden die zwei Barwerte des Investitionsrückflusses gesucht, die am dichtesten unterhalb bzw. oberhalb des Schnittpunktes liegen. Zwischen diesen beiden Barwerten wird interpoliert. Die Bestimmung des kritischen Wertes $V_{T-1}^*$ kann unter Verwendung der allgemeinen Interpolationsformel wie folgt vorgenommen werden:

$$V_{T-1}^* = {}_{n''}V_{T-1} + \frac{{}_{n'}V_{T-1} - {}_{n''}V_{T-1}}{({}_{n'}i_{T-1} - {}_{n'}f_{T-1}) - ({}_{n''}i_{T-1} - {}_{n''}f_{T-1})} \cdot \left[-({}_{n''}i_{T-1} - {}_{n''}f_{T-1})\right] \tag{4}$$

In dem in  dargestellten Beispiel muss zwischen den Werten ${}_{n'}V_{T-1} = {}_4V_{T-1}$ und ${}_{n''}V_{T-1} = {}_5V_{T-1}$ linear interpoliert werden.

*Kontrollschritt: Verminderung des Interpolationsfehlers*

Um den Interpolationsfehler so gering wie möglich zu halten, könnte der zunächst gewählte Parametrisierungsbereich durch Verengung hin zum tatsächlichen Schnittpunkt zwischen positivem Kapitalwert und Fortführungswert angepasst werden und die Schritte 2.2 bis 2.4 erneut durchlaufen werden. Diese Korrektur *muss* erfolgen, wenn der Parametrisierungsbereich zu eng gewählt wurde und sich die Funktionsabschnitte von positivem Kapitalwert und Fortführungswert nicht schneiden. Ansonsten wäre der Interpolationsfehler zu hoch.

*Schritt 3: Bestimmung der kritischen Werte $V_{T-2}^*$ bis $V_0^*$*

Die beschriebene Vorgehensweise findet rückwärts gerichtet für die Berechnung der kritischen Werte zu allen weiteren potenziellen Durchführungszeitpunkten Anwendung. Dabei müssen jeweils alle zuvor bestimmten kritischen Werte berücksichtigt werden. Dies bedingt eine zunehmende Komplexität der Berechnung von ${}_n^s f_t$ . Die dabei zu verwendende Formel lässt sich allgemein wie folgt darstellen:

$${}_n^s f_t = \max\left(0, {}_n^s V_\kappa - I\right) \cdot e^{-r^{ste} \cdot (\kappa - t)}, \text{ mit}$$

$$\kappa = \begin{Bmatrix} t+1, \text{ wenn } {}_n^s V_{t+1} \geq V_{t+1}^* \\ t+2, \text{ wenn } {}_n^s V_{t+2} \geq V_{t+2}^* \wedge {}_n^s V_{t+1} < V_{t+1}^* \\ : \\ T, \quad \text{andernfalls} \end{Bmatrix} \tag{5}$$

(5) bedeutet, dass die Investition in $t+1$ durchgeführt wird und einen zu diskontierenden positiven Kapitalwert liefert, wenn der sich dort im Simulationslauf $s$ einstellende Barwert ${}_n^s V_{t+1}$ größer oder gleich dem kritischen Barwert $V_{t+1}^*$ ist. Sie wird in $t+2$ durchgeführt, wenn der sich dort im Simulationslauf $s$ einstellende Barwert ${}_n^s V_{t+2}$ größer oder gleich dem kritischen Barwert $V_{t+2}^*$ ist, usw.

## 4 Zusammenfassung

Bei der begrenzt rekursiv-stochastischen Simulation wird die stochastische Simulation mit der dynamischen Programmierung kombiniert. Dies ermöglicht eine außerordentliche Flexibilität hinsichtlich der Abbildung von Unsicherheit. Das heißt, dass sowohl beliebige stochastische Prozesse als auch multiple stochastische Variablen (inkl. Korrelationen) problemlos abgebildet werden können. Das gleiche gilt für eine hohe Anzahl potenzieller Entscheidungszeitpunkte. Zudem ist die BRSS problemlos in MS-EXCEL umsetzbar (vgl. MUßHOFF et al. 2002). Obwohl diese Verfahrenskombination immer noch komplex ist, stellt sie einen deutlich „handlicheren" Ansatz zur Berücksichtigung stochastischer Einflussfaktoren dar als das Entscheidungsbaumverfahren. Nach einer entsprechenden Programmierung ließen sich dadurch auch komplexe stochastische Planungsprobleme für den praktischen Anwender zugänglich machen.

## 5 Literatur


BELLMAN, R. (1957): Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton.

GRANT, D., VORA, G., WEEKS, D., (1997): Simulation and the Early-Exercise Option Problem. Journal of Financial Engineering, 5 (3), pp. 211 - 227.

MUßHOFF, O., HIRSCHAUER, N. (2003): MS-EXCEL-basierte Bewertung komplexer Optionen - Numerische Optionsbewertungsverfahren und Anwendungsmöglichkeiten der Optionspreistheorie auf Sachinvestitionen -. PD-Verlag (im Druck).

MUßHOFF, O., HIRSCHAUER, N., PALMER, K. (2002): Bounded Recursive Stochastic Simulation - A Simple and Efficient Method for Pricing Complex American Type Options -. Working Paper Nr. 65/2002, Humboldt-Universität zu Berlin, Wirtschafts- und Sozialwissenschaften des Landbaus, Berlin (www.agrar.hu-berlin.de/wisola/fg/abl/).